

# LEMME DE SPERNER ET THÉORÈME DE BROUWER

Ce texte est découpé en trois parties. Le *lemme de Sperner* est présenté dans la première sans lien aucun avec le *théorème de Brouwer* qui est l'objet de la deuxième. Sperner visait en réalité explicitement le théorème de Brouwer quand il a conçu son fameux lemme et il n'en aurait jamais eu l'idée sans cet objectif. Nous omettrons cette dépendance dans un premier temps car il n'est pas aisé d'ÉNONCER le théorème de Brouwer en MPSI, quelques préliminaires seront nécessaires. Le lemme de Sperner sera ainsi présenté comme un jeu un peu gratuit dans la première partie, mais cette gratuité disparaîtra finalement quand nous en aurons déduit le théorème de Brouwer. Une application du théorème de Brouwer à un problème d'intersection de courbes est enfin présentée en guise de troisième partie.

Les définitions et les résultats de ce texte ont été restreints au contexte du plan complexe  $\mathbb{C}$  par souci de simplicité. Il est possible en réalité de les généraliser sans modification majeure à des espaces vectoriels quelconques de dimension finie.

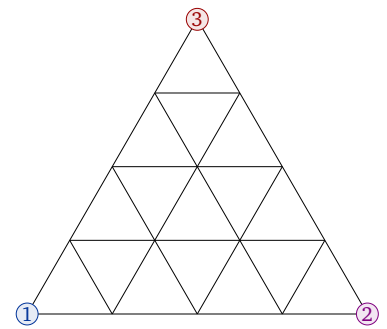
## 1 LE LEMME DE SPERNER

En 1928, l'Allemand Emanuel Sperner a 23 ans quand il démontre son fameux *lemme de Sperner*. Le mot « lemme » qualifie souvent un petit résultat de moindre importance en comparaison d'un plus gros théorème, et en effet nous verrons plus tard que le lemme de Sperner implique l'important *théorème de Brouwer*. Il n'en demeure pas moins que le lemme de Sperner, en plus d'être élégant, a en soi une grande portée et de nombreuses applications.

Nous introduirons ce lemme par la description d'un jeu solitaire. Un grand triangle est tracé dont les sommets sont numérotés 1, 2 et 3 et une multitude de petits triangles sont tracés dedans, soit sur les côtés, soit à l'intérieur.

- Le jeu consiste à numéroté 1, 2 ou 3 tous les sommets des petits triangles en prenant soin de ne jamais créer le moindre petit triangle 1-2-3.
- La seule contrainte, c'est qu'un sommet du côté initial 1-2 ne peut être numéroté que 1 ou 2, un sommet du côté initial 2-3 ne peut être numéroté que 2 ou 3, et un sommet du côté initial 1-3 ne peut être numéroté que 1 ou 3.

Jouez donc à présent vous-mêmes quelques parties de ce jeu — que remarquez-vous ? C'est cela, le *lemme de Sperner* !



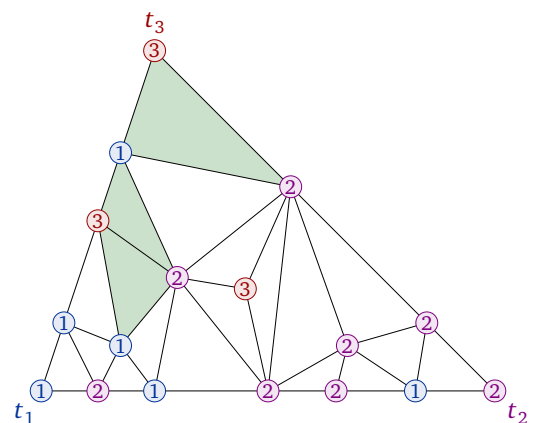
Un exemple de grille initiale.

### Théorème (Lemme de Sperner)

Soit  $T$  un « grand » triangle de sommets  $t_1$ ,  $t_2$  et  $t_3$  qu'on a triangulé en un nombre fini de « petits » triangles disjoints. On numérote les sommets de cette triangulation de la manière suivante :

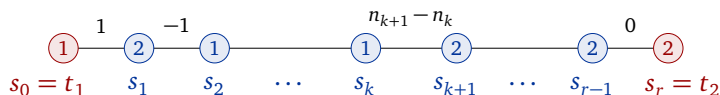
- $t_1$  porte le numéro 1,  $t_2$  le numéro 2 et  $t_3$  le numéro 3,
- pour tous  $i, j \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$  avec :  $i \neq j$ , tout sommet de triangulation de  $T$  situé entre les sommets  $t_i$  et  $t_j$  est lui-même numéroté  $i$  ou  $j$ ,
- les sommets de triangulation intérieurs à  $T$  sont quant à eux numérotés sans contrainte.

Cette triangulation numérotée contient alors un nombre impair de petits triangles 1-2-3 — donc au moins un.



**Démonstration** Dans cette preuve, nous appellerons *porte* toute arête de sommets numérotés 1 et 2 de la triangulation étudiée et nous dirons qu'une telle porte est *extérieure* si elle est incluse dans le « grand » triangle initial — en l'occurrence forcément sur le côté  $t_1 t_2$ .

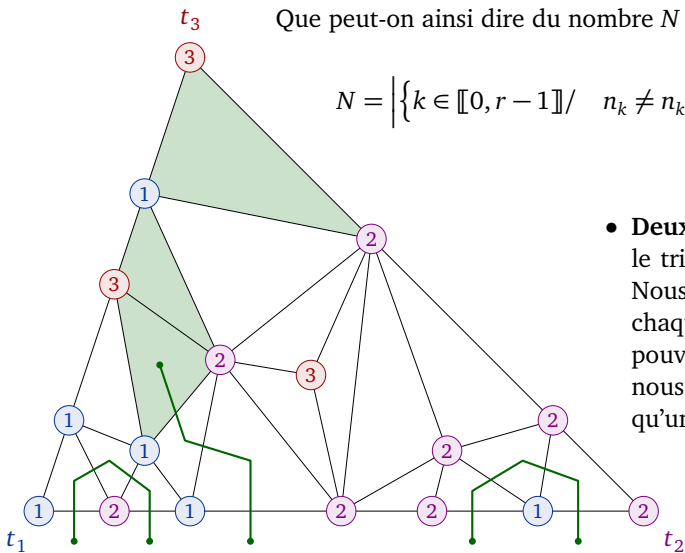
- **Première étape** : Nous allons montrer d'abord qu'il existe un nombre impair de portes extérieures.



Parcourons pour cela le côté  $t_1 t_2$  de  $t_1$  vers  $t_2$ . Nous ne rencontrons ce faisant que des sommets numérotés 1 ou 2. Nous noterons ces sommets  $s_0 = t_1, s_1, \dots, s_r = t_2$  et  $n_0, \dots, n_r$  leurs numéros respectifs. Pour tout  $k \in \llbracket 0, r-1 \rrbracket$ , l'arête d'extrémités  $s_k$  et  $s_{k+1}$  est alors une porte si et seulement si :  $n_k \neq n_{k+1}$ , i.e. si et seulement si :  $n_{k+1} - n_k = \pm 1$ , i.e. si et seulement si :  $n_{k+1} - n_k \equiv 1 \pmod{2}$ .

Que peut-on ainsi dire du nombre  $N$  de portes extérieures de la triangulation étudiée ?

$$N = \left| \left\{ k \in \llbracket 0, r-1 \rrbracket / n_k \neq n_{k+1} \right\} \right| = \sum_{k=0}^{r-1} |n_{k+1} - n_k| \equiv \sum_{k=0}^{r-1} (n_{k+1} - n_k) \equiv n_r - n_0 \equiv 2 - 1 \equiv 1 \pmod{2}$$



- **Deuxième étape** : Étape ludique ! Le jeu consiste à se promener dans le triangle étudié de porte en porte comme s'il s'agissait d'un labyrinthe. Nous pénétrons le labyrinthe de l'extérieur par une certaine porte. Après chaque porte franchie, si nous arrivons dans un petit triangle 1-2-3, nous ne pouvons pas aller plus loin et la promenade s'arrête. Dans le cas contraire, nous nous trouvons dans un petit triangle 1-1-2 ou 1-2-2 qui ne contient qu'une seule autre porte, nous la traversons et le jeu continue.

Que peut-on dire d'intéressant sur ce jeu ?

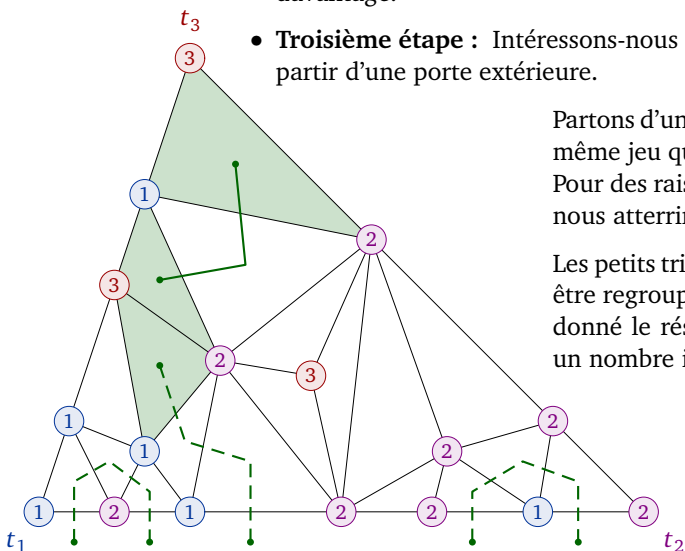
- Le chemin qu'on peut parcourir à partir d'une porte extérieure de départ donnée est entièrement déterminé par cette porte, il ne nous reste ensuite aucune marge de manœuvre.
- Sur un chemin donné, on ne peut jamais revenir dans un petit triangle qu'on a déjà traversé. Supposons en effet par l'absurde que ce soit possible et intéressons-nous au premier petit triangle que l'on traverse pour la deuxième fois. Ce petit triangle est forcément pénétré la deuxième fois par une porte qu'on n'avait pas encore traversée, mais comme on y avait déjà traversé deux portes, le petit triangle en contient trois, ce qui est impossible.
- Le labyrinthe étant fini et les chemins parcourus sans boucle, chaque chemin finit soit par sortir du labyrinthe par une porte extérieure autre que la porte de départ, soit par atterrir dans un petit triangle 1-2-3. Chaque porte extérieure du labyrinthe peut donc être mise en correspondance soit avec une et une seule autre porte extérieure, soit avec un unique petit triangle 1-2-3. Or d'après la première étape, notre labyrinthe contient un nombre impair de portes extérieures, donc aussi un nombre impair de portes extérieures en correspondance avec un petit triangle 1-2-3, et donc enfin un nombre impair de petits triangles 1-2-3 reliés à une porte extérieure.

En particulier, notre triangulation numérotée contient au moins un petit triangle 1-2-3, mais nous voulons davantage.

- **Troisième étape** : Intéressons-nous à présent aux petits triangles 1-2-3 auxquels on ne peut pas accéder à partir d'une porte extérieure.

Partons d'un tel petit triangle et quittons-le par son unique porte. Jouons ensuite au même jeu que précédemment. De quelle manière notre chemin peut-il s'achever ? Pour des raisons analogues à celles que nous avons évoquées à la deuxième étape, nous atterrirons forcément à un moment dans un autre petit triangle 1-2-3.

Les petits triangles 1-2-3 qui ne sont pas reliés à une porte extérieure peuvent ainsi être regroupés par paires, donc en particulier leur nombre est pair. Au total, étant donné le résultat de la deuxième étape, notre triangulation numérotée contient un nombre impair de petits triangles 1-2-3. ■



## 2 LE THÉORÈME DU POINT FIXE DE BROUWER

Le résultat suivant est un grand classique des cours de mathématiques sur la continuité.

**Théorème (Théorème du point fixe de Brouwer sur  $\mathbb{R}$ )** Soient  $a, b \in \mathbb{R}$  avec :  $a \leq b$ . Toute fonction continue de  $[a, b]$  dans  $[a, b]$  possède un point fixe.

Nous nous proposons dans ce paragraphe de généraliser ce théorème à  $\mathbb{C}$  d'une manière ou d'une autre.

### 2.1 CONTINUITÉ, COMPACTITÉ, CONVEXITÉ

**Définition-théorème (Fonction continue, fonction lipschitzienne)** Soient  $X$  une partie non vide de  $\mathbb{C}$ ,  $f : X \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction et  $K \geq 0$ .

- Soit  $a \in X$ . On dit que  $f$  est continue en  $a$  si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 / \forall x \in X, |x - a| < \alpha \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

- On dit que  $f$  est continue sur  $X$  si  $f$  est continue en tout point de  $X$ .
- On dit que  $f$  est  $K$ -lipschitzienne sur  $X$  si pour tous  $x, x' \in X$  :  $|f(x) - f(x')| \leq K|x - x'|$ . En particulier,  $f$  est alors continue sur  $X$ .

Parce que cette définition est la même que celle que nous connaissons pour les fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , de nombreux résultats que nous avons démontrés pour ces fonctions restent vrais pour les fonctions de  $\mathbb{C}$  dans  $\mathbb{C}$ . En particulier, les combinaisons linéaires, les produits, les quotients et les composées de fonctions continues, quand ils ont un sens, sont encore des fonctions continues.

#### Exemple

- Les fonctions  $z \mapsto |z|$ ,  $z \mapsto \text{Re}(z)$  et  $z \mapsto \text{Im}(z)$  sont 1-lipschitziennes sur  $\mathbb{C}$ .
- Toute fonction polynomiale à coefficients complexes est continue sur  $\mathbb{C}$ .

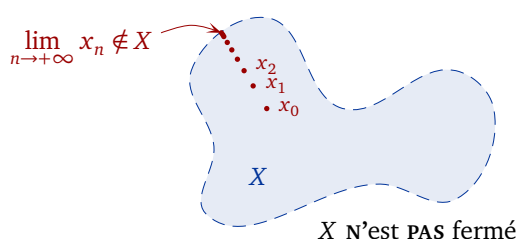
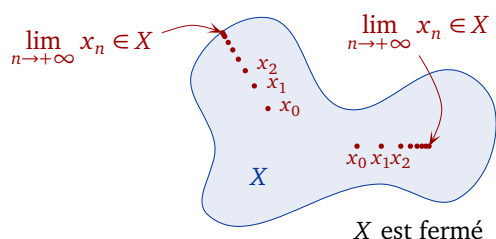
#### Définition (Fermé, compact)

- On appelle *fermé* de  $\mathbb{C}$  toute partie  $X$  de  $\mathbb{C}$  qui possède la propriété suivante :

toute suite convergente d'éléments de  $X$  a pour limite un élément de  $X$ .

- On appelle *compact* de  $\mathbb{C}$  toute partie fermée et bornée de  $\mathbb{C}$ .

Si  $X$  est une partie de  $\mathbb{C}$ , une suite convergente  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $X$  peut très bien avoir une limite à l'extérieur de  $X$ , précisément au bord de  $X$  si  $X$  ne contient pas sa propre frontière. Un fermé est une partie de  $\mathbb{C}$  pour laquelle une telle fuite de la limite n'est pas possible. Intuitivement, un fermé de  $\mathbb{C}$  est donc une partie de  $\mathbb{C}$  qui contient sa frontière, dont personne ne peut fuir par passage à la limite.



La définition des compacts de  $\mathbb{C}$  donnée ci-dessus n'est pas « la bonne » en réalité, c'est plus une caractérisation de la compacité qu'une définition au regard des généralisations possibles. Une définition plus traditionnelle serait la suivante. On appelle *compact de  $\mathbb{C}$*  toute partie  $K$  de  $\mathbb{C}$  qui possède la *propriété de Bolzano-Weierstrass* — i.e. que de toute suite d'éléments de  $K$ , on peut extraire une suite convergente.

**Exemple**

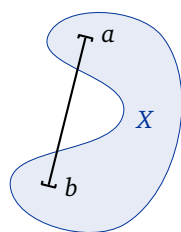
- $\mathbb{R}_+$  est fermé dans  $\mathbb{C}$  car toute suite positive convergente a une limite positive — mais PAS compact.
- $[0, 1]$  est compact.
- $[0, 1[$  n'est pas fermé dans  $\mathbb{C}$  car :  $1 - \frac{1}{2^n} \in [0, 1[$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , mais :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 1 \notin [0, 1[$ .

**Définition (Segment, convexe)**

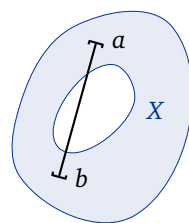
- Soient  $a, b \in \mathbb{C}$ . On appelle *segment de  $\mathbb{C}$  d'extrémités  $a$  et  $b$*  l'ensemble :  $[a, b] = \left\{ (1 - \lambda)a + \lambda b \right\}_{\lambda \in [0, 1]}$ .
- On appelle *convexe de  $\mathbb{C}$*  toute partie  $X$  de  $\mathbb{C}$  telle que pour tous  $a, b \in X$  :  $[a, b] \subset X$ .

Une partie est donc convexe si elle contient tous les segments qu'on peut former à partir de ses points. Cela revient grosso modo à dire qu'une partie convexe est une partie « suffisamment ronde » : pas de trou, pas de presqu'îles...

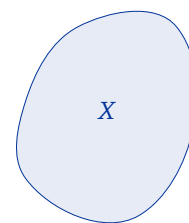
L'exemple suivant des droites de  $\mathbb{C}$  montre cela dit qu'il vaut mieux prendre cette idée de « rondeur » avec des pincettes !



X N'est PAS convexe (présence de presqu'îles)



X N'est PAS convexe (présence de trous)



X est convexe

**Exemple**

- Toute droite de  $\mathbb{C}$  est convexe.
- Tout demi-plan de  $\mathbb{C}$ , ouvert ou fermé, est convexe.
- Tout disque de  $\mathbb{C}$ , ouvert ou fermé, est convexe.

**Démonstration** Soient  $\omega \in \mathbb{C}$  et  $r \geq 0$ . Notons  $D$  le disque fermé de  $\mathbb{C}$  de centre  $\omega$  et de rayon  $r$  et montrons que  $D$  est convexe. Soient  $a, b \in D$  et  $\lambda \in [0, 1]$ . Nous devons montrer que :  $\lambda a + (1 - \lambda)b \in D$ , or simplement :

$$\begin{aligned} \left| ((1 - \lambda)a + \lambda b) - \omega \right| &= \left| ((1 - \lambda)a + \lambda b) - ((1 - \lambda)\omega + \lambda\omega) \right| = \left| (1 - \lambda)(a - \omega) + \lambda(b - \omega) \right| \\ &\leq (1 - \lambda)|a - \omega| + \lambda|b - \omega| \leq (1 - \lambda)r + \lambda r = r. \end{aligned}$$

Après ces définitions, nous sommes enfin en mesure d'ÉNONCER le théorème du point fixe de Brouwer en dimension 2.

**Théorème (Théorème du point fixe de Brouwer)** Soit  $K$  un convexe compact non vide de  $\mathbb{C}$ . Toute fonction continue de  $K$  dans  $K$  possède un point fixe.

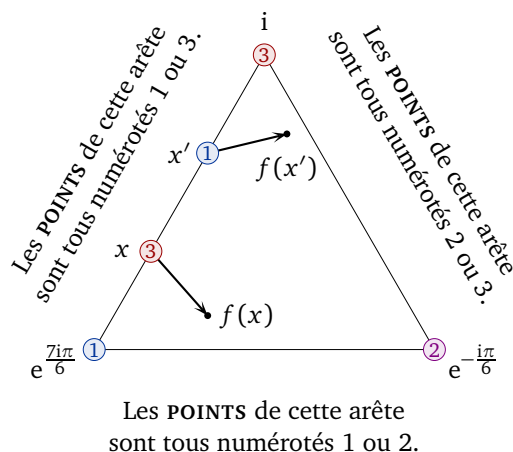
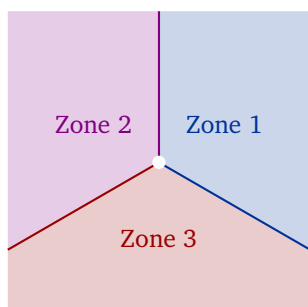
Brouwer a commenté son théorème par l'illustration suivante. Je prends deux feuilles de papier identiques, je froisse l'une d'elles et sans la défroisser, je l'aplatis contre l'autre. L'un des points de la feuille froissée se trouve alors verticalement « à sa place » sur la feuille non froissée.

## 2.2 SPERNER IMPLIQUE BROUWER

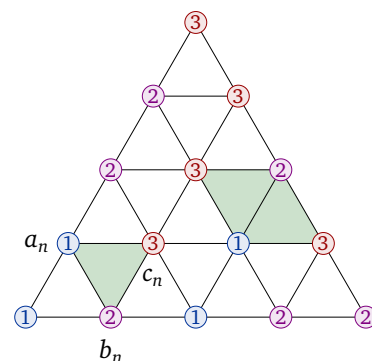
Ce titre racoleur n'est pas tout à fait exact — mais peu s'en faut. Nous allons montrer d'abord que le lemme de Sperner implique le théorème du point fixe de Brouwer dans un cas particulier, puis nous montrerons que ce cas particulier contient déjà le cas général.

**Démonstration** Nous montrons ci-dessous le théorème de Brouwer dans le cas du triangle plein  $T$  de sommets  $e^{-\frac{i\pi}{6}}$ ,  $i$  et  $e^{\frac{7i\pi}{6}}$ . Pour une fonction continue  $f : T \rightarrow T$  donnée, il s'agit de montrer que la fonction  $x \mapsto f(x) - x$  s'annule au moins une fois sur  $T$ , et pour cela nous envisagerons chaque nombre complexe  $f(x) - x$  comme un VECTEUR d'origine le POINT  $x$  et d'extrémité  $f(x)$ . Raisonnant par l'absurde, faisons l'hypothèse que  $f$  n'a pas de point fixe, autrement dit que le VECTEUR  $f(x) - x$  n'est nul pour aucun POINT  $x$ .

- Nous dirons qu'un VECTEUR-nombre complexe non nul porte le numéro 1 (resp. 2, resp. 3) s'il possède un argument dans  $[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}[$  (resp.  $[\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}[$ , resp.  $[\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}[$ ). Chaque POINT  $x$  du triangle  $T$  se trouve ainsi numéroté 1, 2 ou 3 en fonction du numéro qu'on a attribué au VECTEUR  $f(x) - x$ .



- Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , triangulons maintenant  $T$  en  $n^2$  petits triangles conformément à la figure ci-dessous — pourquoi  $n^2$  au fait ? D'après le lemme de Sperner, il existe au moins un petit triangle 1-2-3 dans cette triangulation, choisissons-en un et notons  $a_n$  son sommet de numéro 1,  $b_n$  son sommet de numéro 2 et  $c_n$  son sommet de numéro 3.
- Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , nous disposons ainsi d'un petit triangle 1-2-3  $a_n b_n c_n$  équilatéral de côté  $\frac{\sqrt{3}}{n}$ . Parce qu'il n'en existe pas qu'un à chaque étape, nous ne pouvons pas compter a priori sur le fait que ces triangles sont inclus les uns dans les autres, mais parce que les suites  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ,  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  et  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  sont bornées, le théorème de Bolzano-Weierstrass nous permet en revanche d'en extraire simultanément trois suites convergentes  $(a_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}^*}$ ,  $(b_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}^*}$  et  $(c_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}^*}$  pour une certaine fonction  $\varphi : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$  strictement croissante — pourquoi simultanément au fait ?



Les égalités :  $|a_n - b_n| = |b_n - c_n| = |c_n - a_n| = \frac{\sqrt{3}}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  montrent que les suites  $(a_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}^*}$ ,  $(b_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}^*}$  et  $(c_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}^*}$  possèdent en réalité la même limite  $\omega$ . Il nous reste à montrer que ce nombre  $\omega$  est un point fixe de  $f$ .

- Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , par définition de la numérotation choisie :

$$f(a_n) - a_n = |f(a_n) - a_n| e^{i\alpha_n}, \quad f(b_n) - b_n = |f(b_n) - b_n| e^{i\beta_n} \quad \text{et} \quad f(c_n) - c_n = |f(c_n) - c_n| e^{i\gamma_n}$$

pour certains réels  $\alpha_n \in [-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}[$ ,  $\beta_n \in [\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}[$  et  $\gamma_n \in [\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}[$ . Quitte à extraire davantage grâce au théorème de Bolzano-Weierstrass appliqué aux suites  $(\alpha_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}^*}$ ,  $(\beta_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}^*}$  et  $(\gamma_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}^*}$ , on peut supposer ces trois suites convergentes de limites respectives  $\alpha \in [-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}[$ ,  $\beta \in [\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}[$  et  $\gamma \in [\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}[$ . Finalement, par continuité de  $f$  :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (f(a_n) - a_n) = |f(\omega) - \omega| e^{i\alpha}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (f(b_n) - b_n) = |f(\omega) - \omega| e^{i\beta} \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (f(c_n) - c_n) = |f(\omega) - \omega| e^{i\gamma}.$$

Les angles  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  étant ce qu'ils sont :  $|f(\omega) - \omega| = 0$ , i.e. :  $f(\omega) = \omega$  — contradiction! ■

Nous l'avons dit en introduction, Sperner n'aurait pas énoncé son lemme s'il n'avait pas cherché une nouvelle preuve du théorème de Brouwer. Le hasard ou le génie ont voulu qu'en analysant la situation du théorème de Brouwer, il finisse par apercevoir la configuration de petits triangles qui est l'objet de son lemme. Les règles du jeu que nous avons présentées dans la partie 1 pouvaient bien paraître gratuites au premier abord, on comprend à présent de quelle manière elles ont pu surgir dans l'esprit de Sperner. Le secret de la preuve, le voici :

0 est le seul point de jonction des zones 1, 2 et 3.

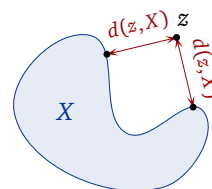
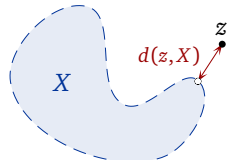
Si l'importance de cette remarque ne vous saute pas aux yeux, vous avez peut-être raté l'idée principale de la preuve.

### 2.3 PROJECTION SUR UN CONVEXE FERMÉ NON VIDE

**Définition-théorème (Distance à une partie non vide)** Soit  $X$  une partie non vide de  $\mathbb{C}$ .

- (i) Pour tout  $z \in \mathbb{C}$ , l'ensemble  $\{|z - x|\}_{x \in X}$  possède une borne inférieure dans  $\mathbb{R}$  notée  $d(z, X)$  et appelée la *distance de  $z$  à  $X$* . Évidemment :  $d(z, X) \geq 0$ .
- (ii) Pour tout  $z \in X$  :  $d(z, X) = 0$  et si  $X$  est fermé dans  $\mathbb{C}$ , alors pour tout  $z \in \mathbb{C}$  :  $d(z, X) = 0 \iff z \in X$ .
- (iii) La fonction  $z \mapsto d(z, X)$  est 1-lipschitzienne sur  $\mathbb{C}$  — donc continue.

La distance  $d(z, X)$  n'est pas atteinte.



La distance  $d(z, X)$  est atteinte plusieurs fois.

**Démonstration**

- (i) L'ensemble  $\{|z - x|\}_{x \in X}$  est une partie non vide de  $\mathbb{R}$  minorée par 0, donc possède une borne inférieure — positive ou nulle — d'après la propriété de la borne inférieure.
- (ii) Pour tout  $z \in X$  :  $0 = |z - z| \in \{|z - x|\}_{x \in X}$ , donc en fait  $d(z, X)$  est un minimum :  $d(z, X) = 0$ .  
Supposons maintenant  $X$  fermé et donnons-nous  $z \in \mathbb{C}$  pour lequel :  $d(z, X) = 0$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\frac{1}{n}$  ne minore pas  $\{|z - x|\}_{x \in X}$ , donc :  $|z - x_n| < \frac{1}{n}$  pour un certain  $x_n \in X$ . Par encadrement, la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge vers  $z$ , mais comme elle est à valeurs dans  $X$  et que  $X$  est fermé :  $z \in X$ .
- (iii) Soient  $z, z' \in \mathbb{C}$ . Pour tout  $x \in X$  :  $d(z, X) \leq |z - x| = |(z - z') + (z' - x)| \leq |z - z'| + |z' - x|$ , donc après passage à la borne inférieure :  $d(z, X) \leq |z - z'| + d(z', X)$ . Pour une raison analogue, évidemment :  $d(z', X) \leq |z' - z| + d(z, X)$ , donc finalement :  $|d(z, X) - d(z', X)| \leq |z - z'|$ . ■

**Définition-théorème (Projection sur un convexe fermé non vide)** Soit  $X$  un convexe fermé non vide de  $\mathbb{C}$ .

- (i) Pour tout  $z \in \mathbb{C}$ , il existe un et un seul  $x \in X$  pour lequel :  $|z - x| = d(z, X)$ , appelé le *projeté de  $z$  sur  $X$*  et noté  $p_X(z)$ .
- (ii) Pour tout  $z \in X$  :  $p_X(z) = z$ . En particulier :  $p_X \circ p_X = p_X$ .
- (iii) La fonction  $z \mapsto p_X(z)$  est 1-lipschitzienne sur  $\mathbb{C}$  — donc continue.

Les deux figures de la définition de la distance d'un point à une partie non vide suggèrent que :

- le projeté de  $p_X(z)$  existe parce que  $X$  est fermé,
- le projeté  $p_X(z)$  est unique parce que  $X$  est convexe.

**Démonstration**

(i) Soit  $z \in \mathbb{C}$ .

**Existence :** Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $d(z, X) + \frac{1}{n}$  ne minore pas  $\{|z - x|\}_{x \in X}$ , donc :  $|z - x_n| < d(z, X) + \frac{1}{n}$  pour un certain  $x_n \in X$ . En particulier, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$|x_n| = |(x_n - z) + z| \leq |x_n - z| + |z| \leq d(z, X) + |z| + \frac{1}{n} \leq d(z, X) + |z| + 1,$$

donc la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est bornée. D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, elle possède une suite extraite convergente  $(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}^*}$  pour une certaine fonction  $\varphi : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$  strictement croissante, disons de limite  $x$ . Or cette suite extraite est à valeurs dans  $X$  et  $X$  est fermé, donc en réalité :  $x \in X$ . Faisons enfin tendre  $n$  vers  $+\infty$  dans l'inégalité :  $d(z, X) \leq |z - x_n| < d(z, X) + \frac{1}{n}$ , on obtient :  $d(z, X) \leq |z - x| \leq d(z, X)$ , i.e. :  $|z - x| = d(z, X)$ .

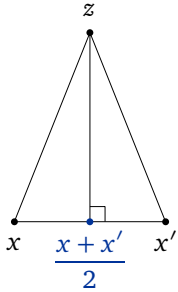
**Unicité :** Soient  $x, x' \in X$ . On suppose que :  $|z - x| = |z - x'| = d(z, X)$ . Dans ces conditions :

$$\left| z - \frac{x + x'}{2} \right| = \frac{|(z - x) + (z - x')|}{2} \leq \frac{|z - x| + |z - x'|}{2} = d(z, X),$$

or comme  $X$  est convexe :  $\frac{x + x'}{2} \in X$ , donc par définition de  $d(z, X)$  :  $\left| z - \frac{x + x'}{2} \right| = d(z, X)$ .

Remarquons ensuite que :  $|z - x|^2 - \left| z - \frac{x + x'}{2} \right|^2 = \left| \frac{x - x'}{2} \right|^2$  — Pythagore ! On en tire le résultat

voulu :  $\left| \frac{x - x'}{2} \right|^2 = d(z, X)^2 - d(z, X)^2 = 0$ , i.e. :  $x = x'$ .



(ii) Soit  $z \in X$ . Nous avons déjà vu que :  $d(z, X) = 0$ , donc :  $z \in X$  et  $|z - z| = d(z, X)$ . Par unicité de  $p_X(z)$  :  $p_X(z) = z$ .

À présent, pour tout  $z \in \mathbb{C}$ , puisque  $p_X(z) \in X$  :  $p_X(p_X(z)) = p_X(z)$ , donc en effet :  $p_X \circ p_X = p_X$ .

(iii) La preuve est hélas un peu technique. Rappelons d'abord que pour tous  $u, v \in \mathbb{C}$  :

$$|u + v|^2 = (u + v)\overline{(u + v)} = u\bar{u} + u\bar{v} + v\bar{u} + v\bar{v} = |u|^2 + 2 \operatorname{Re}(\bar{u}v) + |v|^2,$$

version complexe de l'identité remarquable :  $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$ . Le réel  $\operatorname{Re}(\bar{u}v)$  y apparaît comme la version complexe du produit scalaire des vecteurs d'axes  $u$  et  $v$ .

Nous pouvons maintenant montrer la 1-lipschitzianité de  $p_X$ . Soient  $z, z' \in \mathbb{C}$ . Soit  $t \in ]0, 1]$  fixé. Comme  $X$  est convexe :  $(1 - t)p_X(z) + tp_X(z') \in X$ , donc par définition de  $d(z, X)$  et  $p_X(z)$  :

$$\begin{aligned} |z - p_X(z)|^2 &= d(z, X) \leq \left| z - (1 - t)p_X(z) - tp_X(z') \right|^2 = \left| z - p_X(z) + t(p_X(z) - p_X(z')) \right|^2 \\ &= |z - p_X(z)|^2 + 2t \operatorname{Re}(\overline{(z - p_X(z))}(p_X(z) - p_X(z'))) + t^2 |p_X(z) - p_X(z')|^2. \end{aligned}$$

Simplifions un peu :  $2 \operatorname{Re}(\overline{(z - p_X(z))}(p_X(z) - p_X(z'))) \geq -t |p_X(z) - p_X(z')|^2$ , puis faisons tendre  $t$  vers 0 :  $\operatorname{Re}(\overline{(z - p_X(z))}(p_X(z) - p_X(z'))) \geq 0$ . Conclusion :

$$\operatorname{Re}(\overline{p_X(z)}(p_X(z) - p_X(z'))) \leq \operatorname{Re}(\overline{z}(p_X(z) - p_X(z'))).$$

A fortiori, par symétrie des rôles de  $z$  et  $z'$  :  $\operatorname{Re}(\overline{p_X(z')}(p_X(z') - p_X(z))) \leq \operatorname{Re}(\overline{z'}(p_X(z') - p_X(z)))$ . Ad-

ditionnons :  $\operatorname{Re}(\overline{(p_X(z) - p_X(z'))}(p_X(z) - p_X(z'))) \leq \operatorname{Re}(\overline{(z - z')}(p_X(z) - p_X(z')))$ . Finalement :

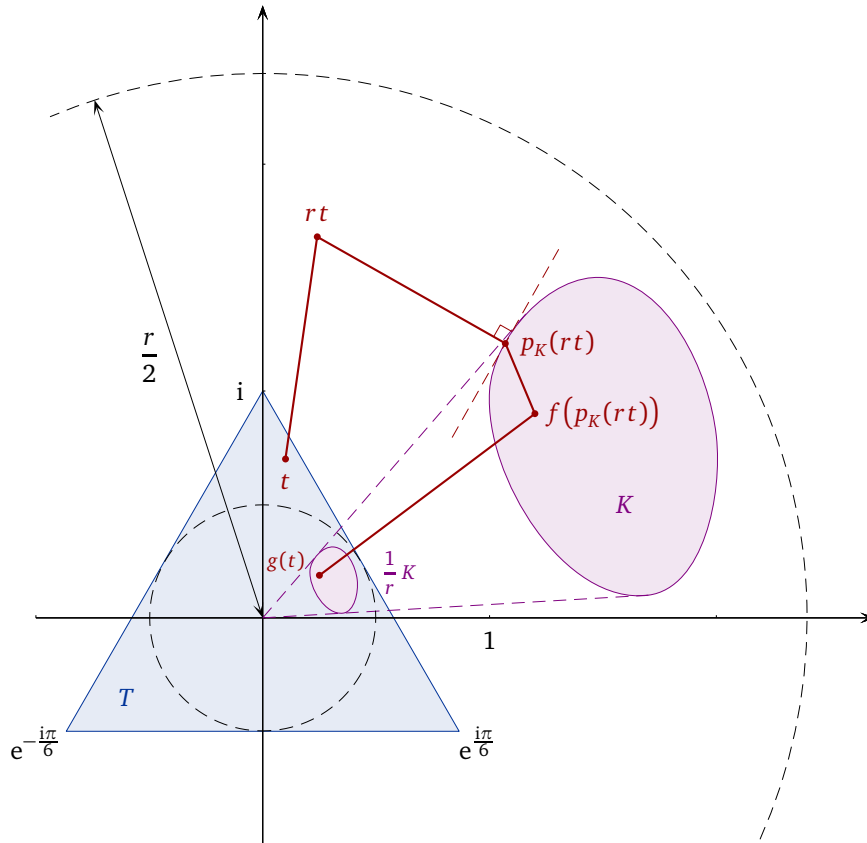
$$|p_X(z) - p_X(z')|^2 = \operatorname{Re}(\overline{(p_X(z) - p_X(z'))}(p_X(z) - p_X(z'))) \leq \operatorname{Re}(\overline{(z - z')}(p_X(z) - p_X(z'))) \leq |z - z'| \times |p_X(z) - p_X(z')|,$$

donc :  $|p_X(z) - p_X(z')| \leq |z - z'|$  — y compris lorsque :  $z = z'$ . ■

## 2.4 FIN DE LA PREUVE DU THÉORÈME DU POINT FIXE DE BROUWER

**Démonstration** Soient  $K$  un convexe compact non vide de  $\mathbb{C}$  et  $f : K \rightarrow K$  une fonction continue. Nous noterons  $T$  le triangle équilatéral pour lequel le théorème de Brouwer a déjà été établi. Comme  $K$  est borné, il existe  $r > 0$  tel que pour tout  $k \in K$  :  $|k| \leq \frac{r}{2}$ , et donc en particulier, comme  $T$  contient le disque ouvert de centre 0 et de rayon  $\frac{1}{2}$  :  $\frac{k}{r} \in T$ .

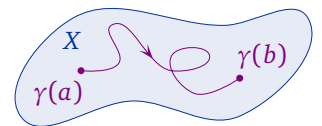
Pour tout  $t \in T$ , posons alors :  $g(t) = \frac{f(p_K(rt))}{r}$ . La fonction  $g$  ainsi construite est continue sur  $T$  par composition et à valeurs dans  $T$ . D'après le cas particulier du théorème du point fixe de Brouwer que nous avons déjà démontré, cette fonction possède un point fixe  $t : \exists t \in T / g(t) = t$ , i.e. :  $f(p_K(rt)) = rt$ . En particulier :  $rt \in \text{Im } f \subset K$ , donc :  $p_K(rt) = rt$  et enfin :  $f(rt) = rt$  — point fixe de  $f$  ! ■



### 3 INTERSECTION DE DEUX COURBES EST-OUEST ET NORD-SUD

**Définition (Courbe paramétrée)** Soit  $X$  une partie de  $\mathbb{C}$ . On appelle *courbe paramétrée* de  $X$  toute fonction continue à valeurs dans  $X$  définie sur un segment de  $\mathbb{R}$ .

Une courbe paramétrée est une fonction continue  $\gamma : [a, b] \rightarrow X$  — avec  $a, b \in \mathbb{R}$  et  $a < b$  — qui associe à tout paramètre  $t \in [a, b]$  un point  $\gamma(t)$  tracé dans  $X$ . En faisant varier  $t$ , c'est le tracé d'une certaine « courbe » que nous voyons apparaître — d'où le nom.



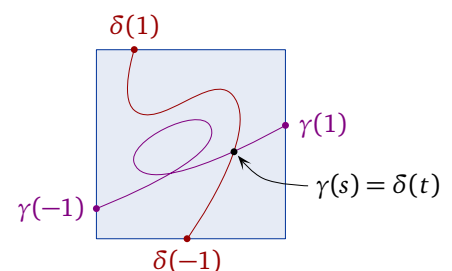
**Théorème (Intersection de deux courbes est-ouest et nord-sud)** Soient  $\gamma$  et  $\delta$  deux courbes du carré  $[-1, 1] + i[-1, 1]$ . On suppose que :  $\text{Re}(\gamma(-1)) = -1$ ,  $\text{Re}(\gamma(1)) = 1$ ,  $\text{Im}(\delta(-1)) = -1$  et  $\text{Im}(\delta(1)) = 1$ . Il existe alors deux réels  $s, t \in [-1, 1]$  pour lesquels :  $\gamma(s) = \delta(t)$ .

Le résultat est énoncé par commodité pour des courbes définies sur  $[-1, 1]$  et à valeurs dans le carré  $[-1, 1] + i[-1, 1]$ , mais chaque apparition de  $[-1, 1]$  pourrait bien sûr y être remplacée par un segment quelconque.

**Démonstration** Notons  $C$  le carré  $[-1, 1] + i[-1, 1]$  — convexe compact non vide de  $\mathbb{C}$  — et introduisons les parties réelle et imaginaire de  $\gamma$  et  $\delta$  :  $\gamma = x_\gamma + iy_\gamma$  et  $\delta = x_\delta + iy_\delta$ . Par l'absurde, faisons l'hypothèse que les images de  $\gamma$  et  $\delta$  ne se coupent pas. Nous pouvons poser pour tout  $s + it \in C$  :

$$m(s + it) = \max \{ |x_\gamma(s) - x_\delta(t)|, |y_\gamma(s) - y_\delta(t)| \},$$

et par hypothèse :  $m(s + it) > 0$ .





- La fonction  $m$  ainsi définie est continue sur  $C$  par de simples opérations entre fonctions continues. Pour le comprendre, on remarquera notamment que pour tous  $x, y \in \mathbb{R}$  :  $\max\{x, y\} = \frac{x + y + |x - y|}{2}$ .
- Posons ensuite pour tout  $s + it \in C$  :  $f(s + it) = \frac{\overline{\delta(t)} - \overline{\gamma(s)}}{m(s + it)}$ . La fonction  $f$  ainsi définie est elle aussi continue sur  $C$ , et pour tout  $s + it \in C$  :

$$|\operatorname{Re}(f(s + it))| = \left| \frac{x_\gamma(s) - x_\delta(t)}{m(s + it)} \right| \leq 1 \quad \text{et} \quad |\operatorname{Im}(f(s + it))| = \left| \frac{y_\gamma(s) - y_\delta(t)}{m(s + it)} \right| \leq 1.$$

Conclusion :  $f$  est à valeurs dans  $C$ . Elle est même à valeurs dans la frontière de  $C$  car :

$$\left. \begin{array}{l} - \text{ si } m(s + it) = |x_\gamma(s) - x_\delta(t)| : \quad \operatorname{Re}(f(s + it)) = \pm 1, \\ - \text{ si } m(s + it) = |y_\gamma(s) - y_\delta(t)| : \quad \operatorname{Im}(f(s + it)) = \pm 1. \end{array} \right\} \text{ alternative } \star$$

- Continue de  $C$  dans  $C$ ,  $f$  possède donc un point fixe  $s_0 + it_0$  d'après le théorème du point fixe de Brouwer. Que donne l'alternative  $\star$  pour  $s_0 + it_0$ ? Tout simplement :  $s_0 = \pm 1$  ou  $t_0 = \pm 1$ .

$$- \text{ Si } s_0 = 1 : \quad 1 = \operatorname{Re}(f(1 + it_0)) = \frac{x_\delta(t_0) - x_\gamma(1)}{m(1 + it_0)} = \frac{x_\delta(t_0) - 1}{m(1 + it_0)} \leq 0 \quad - \text{ impossible.}$$

$$- \text{ Si } s_0 = -1 : \quad -1 = \operatorname{Re}(f(-1 + it_0)) = \frac{x_\delta(t_0) - x_\gamma(-1)}{m(-1 + it_0)} = \frac{x_\delta(t_0) + 1}{m(1 + it_0)} \geq 0 \quad - \text{ impossible.}$$

$$- \text{ Si } t_0 = 1 : \quad 1 = \operatorname{Im}(f(s_0 + i)) = \frac{y_\gamma(s_0) - y_\delta(1)}{m(s_0 + i)} = \frac{y_\gamma(s_0) - 1}{m(s_0 + i)} \leq 0 \quad - \text{ impossible.}$$

$$- \text{ Si } t_0 = -1 : \quad -1 = \operatorname{Im}(f(s_0 - i)) = \frac{y_\gamma(s_0) - y_\delta(-1)}{m(s_0 - i)} = \frac{y_\gamma(s_0) + 1}{m(s_0 - i)} \geq 0 \quad - \text{ impossible.}$$

Dans tous les cas, contradiction ! Le théorème est démontré. ■