UNE FAMILLE NOMBREUSE DE FONCTIONS CONTINUES PARTOUT DÉRIVABLES NULLE PART

Je me détourne avec effroi et horreur de cette plaie lamentable
des fonctions continues qui n'ont point de dérivées.
Charles Hermite (1893)

L'existence de fonctions à la fois continues sur $\mathbb{R}$ et dérivables en aucun point est toujours une surprise la première fois qu'on en entend parler, mais cet exotisme qui nous paraît stimulant aujourd'hui a pu paraître effrayant et monstrueux au moment de sa découverte dans la deuxième moitié du $19^{\text{ème}}$ siècle. Il faut dire que le monde physique dans lequel nos perceptions puisent leur expérience ne nous y prépare pas. N'est-il pas indiscutable qu'un mobile a une trajectoire continue et une vitesse ? Et pourtant... Nous savons aujourd'hui que les monstres sont légion — l'ensemble des fonctions continues dérivables nulle part est dense dans l'ensemble des fonctions continues pour la topologie uniforme. Dans le monde des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, ce sont donc finalement les fonctions classiques auxquelles nous sommes habitués qui sont exotiques et rares.

Je me propose de construire dans cette courte note une famille nombreuse de petits monstres au moyen d'un argument élégant d'analyse harmonique. La difficulté de l'entreprise est claire. Comment crée-t-on des monstres à partir seulement de fonctions lisses et gentilles ? Se lancer dans une telle construction, c'est un peu se mettre dans la position d'une civilisation qui ne connaîtrait que les pierres précieuses et qui essaierait de produire un terreau quelconque à partir de diamants, saphirs et autres émeraudes. Pour être précis, nous visons le résultat suivant.

Théorème (Une condition nécessaire de dérivabilité pour certaines séries trigonométriques complexes) Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe, $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs et $\rho > 1$. On suppose que la série $\sum a_n$ converge absolument et que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\lambda_{n+1} \geqslant \rho\lambda_n$. On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k e^{i\lambda_k x}$.

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, et si elle est dérivable en au moins un point, alors : $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \lambda_n |a_n| = 0.}$

La continuité de f sur $\mathbb{R}$ est à peu près évidente. La convergence absolue de la série $\sum a_n$ garantit en effet que la série de fonctions qui définit f converge normalement sur $\mathbb{R}$, et donc que sa somme y est continue.

Exemple Les fonctions $x \longmapsto \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{2^k i\pi x}}{k^2}$ et $x \longmapsto \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{e^{ik!x}}{2^k}$ sont continues sur $\mathbb{R}$ mais dérivables nulle part.

Nous aurons besoin de quelques outils classiques pour travailler, essentiellement liés à la transformation de Fourier.

Définition-théorème (Espace de Schwartz et transformation de Fourier)

- On note appelle *espace de Schwartz sur* $\mathbb{R}$ et on note $\mathscr{S}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$ telles que pour tous $n, p \in \mathbb{N}$: $\lim_{x\to\pm\infty} x^n f^{(p)}(x) = 0$. Clairement : $\mathscr{S}(\mathbb{R},\mathbb{C}) \subset \mathscr{L}^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$.
- Pour tout $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, on appelle *transformée de Fourier de* f et on note $\widehat{f}$ la fonction $\nu \longmapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-i\nu x}\, dx$.

  L'application $f \longmapsto \widehat{f}$ est un automorphisme de $\mathscr{S}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ sur lui-même et pour tous $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ et $x \in \mathbb{R}$:
$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(x)\, e^{i\nu x}\, d\nu.$$
  Pour tous $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ et $\nu \in \mathbb{R}$: $\widehat{f'} = -i\,\widehat{f_0}$ où l'on a noté f_0 la fonction $x \longmapsto xf(x)$.

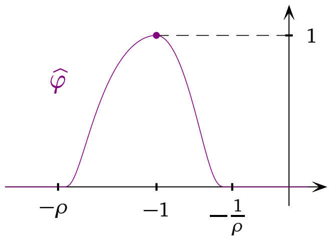
Il n'en faut pas davantage pour démontrer le théorème principal.

Démonstration

- **Réduction du problème :** Nous pouvons dans un premier temps réduire notre problème à une analyse de dérivabilité en 0 seulement. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\quad f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} b_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda_k(x-x_0)} = g(x-x_0) \quad$ si l'on pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad b_n = a_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda_n x_0} \quad$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\quad g(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} b_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda_k x}$. $\quad$ La série $\sum b_n$ est bien sûr absolument convergente et la dérivabilité de f en x_0 est équivalente à celle de g en 0. En outre, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad \lambda_n |a_n| = \lambda_n |b_n|, \quad$ donc : $\quad \lim\limits_{n \to +\infty} \lambda_n |a_n| = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lim\limits_{n \to +\infty} \lambda_n |b_n| = 0.$ $\quad$ Il nous suffit ainsi d'établir le théorème dans le cas d'une dérivabilité en 0 pour qu'il soit vrai dans le cas général.

- **Preuve du théorème en 0 :** Supposons f dérivable en 0. Il est alors possible d'introduire une fonction $F \in \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ pour laquelle pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\quad f(x) = f(0) + f'(0)x + xF(x)$. $\quad$ En particulier, pour tout $x \in \left]-\infty, -1\right] \cup \left[1, +\infty\right[$:
$$\left|F(x)\right| = \left|\frac{f(x)-f(0)-f'(0)x}{x}\right| \leqslant \left|f(x)\right| + \left|f(0)\right| + \left|f'(0)\right| \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} |a_k| + \left|f(0)\right| + \left|f'(0)\right|,$$
donc F est bornée sur $\mathbb{R}$ tout entier d'après le théorème des bornes atteintes.

La bijectivité de la transformation de Fourier de $\mathscr{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ sur lui-même nous permet par ailleurs de nous donner une fonction $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ pour laquelle $\widehat{\varphi}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ à support compact dans $\left[-\rho, -\dfrac{1}{\rho}\right]$ et : $\quad \widehat{\varphi}(-1) = 1$. Cette fonction va nous servir à ISOLER l'amplitude a_n de l'harmonique « $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda_n x}$ » de f pour tout $n \in \mathbb{N}$.



En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la convergence absolue de la série $\sum a_n$ nous permet d'intervertir somme et intégrale dans le calcul suivant :
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{x}{\lambda_n}\right) \varphi(x)\, \mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\lambda_k x}{\lambda_n}}\, \mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \widehat{\varphi}\left(-\frac{\lambda_k}{\lambda_n}\right).$$
Or pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$: $\quad \dfrac{\lambda_k}{\lambda_n} \leqslant \dfrac{1}{\rho} \quad$ donc : $\quad \widehat{\varphi}\left(-\dfrac{\lambda_k}{\lambda_n}\right) = 0, \quad$ et pour tout $k > n$: $\quad \dfrac{\lambda_k}{\lambda_n} \geqslant \rho \quad$ donc : $\widehat{\varphi}\left(-\dfrac{\lambda_k}{\lambda_n}\right) = 0$. $\quad$ Enfin : $\quad \widehat{\varphi}(-1) = 1, \quad$ donc : $\quad \boxed{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{x}{\lambda_n}\right) \varphi(x)\, \mathrm{d}x = a_n.}$

Nous allons maintenant procéder à un second calcul de la même intégrale. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$\begin{aligned}\lambda_n \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{x}{\lambda_n}\right) \varphi(x)\, \mathrm{d}x &= \lambda_n \int_{-\infty}^{+\infty} \left(f(0) + f'(0)\,\frac{x}{\lambda_n} + \frac{x}{\lambda_n}\, F\left(\frac{x}{\lambda_n}\right)\right) \varphi(x)\, \mathrm{d}x \\ &= \lambda_n f(0) \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, \mathrm{d}x + f'(0) \int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi(x)\, \mathrm{d}x + \int_{-\infty}^{+\infty} xF\left(\frac{x}{\lambda_n}\right) \varphi(x)\, \mathrm{d}x \\ &= \lambda_n f(0)\widehat{\varphi}(0) + \mathrm{i}f'(0)\widehat{\varphi}'(0) + \int_{-\infty}^{+\infty} xF\left(\frac{x}{\lambda_n}\right) \varphi(x)\, \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} xF\left(\frac{x}{\lambda_n}\right) \varphi(x)\, \mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Conclusion : $\quad \boxed{\lambda_n a_n = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xF\left(\frac{x}{\lambda_n}\right) \varphi(x)\, \mathrm{d}x.} \quad$ La fonction F étant bornée sur $\mathbb{R}$ et continue en 0, le théorème de convergence dominée montre enfin comme voulu que : $\quad \boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} \lambda_n |a_n| = 0.}$ ■

Le travail que nous venons de mener avec des séries trigonométriques complexes s'adapte sans difficulté au cas de séries trigonométriques réelles.

Théorème (Une condition nécessaire de dérivabilité pour certaines séries trigonométriques réelles) Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle, $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs et $\rho > 1$. On suppose que la série $\sum a_n$ converge absolument et que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\lambda_{n+1} \geqslant \rho\lambda_n$.

On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$: $c(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \cos(\lambda_k x)$ et $s(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \sin(\lambda_k x)$.

Les fonctions c et s sont continues sur $\mathbb{R}$, et si elles sont dérivables en au moins un point, alors : $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \lambda_n|a_n| = 0.}$

Démonstration La preuve dans le cas complexe peut être appliquée sans modification aucune aux fonctions $x \overset{c}{\longmapsto} \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty} a_k e^{i\lambda_k x} + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty} a_k e^{-i\lambda_k x}$ et $x \overset{s}{\longmapsto} \frac{1}{2i}\sum_{k=0}^{+\infty} a_k e^{i\lambda_k x} - \frac{1}{2i}\sum_{k=0}^{+\infty} a_k e^{-i\lambda_k x}$. ■

Exemple Les fonctions $x \longmapsto \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos\left(2^k\pi x\right)}{k^2}$ et $x \longmapsto \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\sin(k!x)}{2^k}$ sont continues sur $\mathbb{R}$ mais dérivables nulle part.

Notre théorème réel contient en particulier l'exemple des *fonctions de Weierstrass*, premier exemple historique présenté publiquement (en 1872) de fonctions continues partout dérivables nulle part. En réalité, c'est Bolzano qui a le premier découvert de telles fonctions en 1833, mais il n'a pas publié son travail et on ne l'a retrouvé dans ses manuscrits qu'en 1920.

Théorème (Fonctions de Weierstrass) Soient $a, b > 0$. On suppose que : $a < 1$ et $ab \geqslant 1$.

La fonction $x \overset{W_{a,b}}{\longmapsto} \sum_{k=0}^{+\infty} a^k \cos\left(b^k x\right)$ est continue sur $\mathbb{R}$ mais dérivable en aucun point.

Démonstration Comme : $0 < a < 1$, la série géométrique $\sum a^n$ converge absolument, et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $b^{n+1} \geqslant \frac{1}{a} \times b^n$ avec : $\frac{1}{a} > 1$. ■