Analyse asymptotique de niveau 1

Les fonctions qu'on étudie en analyse sont généralement définies sur des intervalles ou des réunions d'intervalles comme $\mathbb{R}^*$ ou $[0,1[\cup[2,3]$, voire $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[+\pi\mathbb{Z}$. Dans ce chapitre, les lettres $D, E\ldots$ qui nous serviront d'ensembles de définition désigneront cependant des parties **quelconques** de $\mathbb{R}$.

1 Négligeabilité

1.1 Introduction

Définition (Négligeabilité)

- **Fonctions :** Soient $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions et $a \in \overline{D}$. On suppose que g ne s'annule pas au voisinage de a — sauf peut-être en a avec dans ce cas : $f(a)=0$. On dit que f est *négligeable devant g au voisinage de a* si : $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=0$, ce qu'on note : $f \underset{a}{=} \mathrm{o}(g)$ ou $f(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}\big(g(x)\big)$, « f est un petit o de g au voisinage de a ».
- **Suites :** Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites. On suppose : $v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *négligeable devant* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si : $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_n}{v_n}=0$, ce qu'on note : $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(v_n)$, « u_n est un petit o de v_n ».

Exemple $x^2 \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}(x^4)$, **mais :** $x^4 \underset{x\to0}{=} \mathrm{o}(x^2)$. $\frac{1}{x^2} \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right)$, **mais :** $\frac{1}{x} \underset{x\to0}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

$n^2 \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(n^4)$. $2^n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(3^n)$. $\frac{1}{n^2} \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$.

✌ **Explication** ✌ Les petits o sont la formalisation définitive des « croissances comparées ». Certains infinis sont plus infinis que d'autres, certains zéros sont plus zéros que d'autres. Dire que : $x^2 \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}(x^4)$, c'est affirmer l'immensité de x^4 par rapport à x^2 lorsque x est grand, et dire que : $x^4 \underset{x\to0}{=} \mathrm{o}(x^2)$, c'est affirmer l'infinie petitesse de x^4 par rapport à x^2 lorsque x est petit.

Théorème (Croissances comparées usuelles des fonctions au voisinage de $+\infty$) Soient $a,b,\alpha,\beta \in \mathbb{R}$.

- Si $\alpha<\beta$: $x^\alpha \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}(x^\beta)$.
- Si $0<a<b$: $a^x \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}(b^x)$.
- Si $\alpha>0$: $(\ln x)^\beta \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}(x^\alpha)$.
- Si $a>1$: $x^\alpha \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}(a^x)$.

Théorème (Croissances comparées usuelles des fonctions au voisinage de 0) Soient $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$.

- Si $\alpha<\beta$: $x^\beta \underset{x\to0}{=} \mathrm{o}(x^\alpha)$.
- Si $\alpha>0$: $x^\alpha \underset{x\to0}{=} \mathrm{o}\big(|\ln x|^\beta\big)$.

Théorème (Croissances comparées usuelles des suites) Les croissances comparées usuelles des fonctions en $+\infty$ peuvent bien sûr être exprimées en termes de suites — remplacer x par n.

On a par ailleurs, pour tout $a\in\mathbb{R}$: $a^n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(n!)$.

Explication

- Nous avons introduit la notation « petit o » sous sa forme la plus élémentaire — mise en relation de deux fonctions ou de deux suites — mais on la rencontre en réalité le plus souvent sous la forme suivante :
$$f \underset{a}{=} g + o(h) \quad \text{pour les fonctions} \qquad \text{et} \qquad u_n \underset{n\to+\infty}{=} v_n + o(w_n) \quad \text{pour les suites.}$$
Ce qui est affirmé ici, c'est que : $f = g + \varepsilon$ avec : $\varepsilon \underset{a}{=} o(h)$ et que : $u_n = v_n + \varepsilon_n$ avec : $\varepsilon_n \underset{n\to+\infty}{=} o(w_n)$, i.e. que $o(h)$ est « UNE certaine fonction négligeable devant h au voisinage de a » et $o(w_n)$ « UNE certaine suite négligeable devant $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ».
- Partons de l'affirmation : $e^x \underset{x\to 0}{=} 1+x+x^2+o(x)$, selon laquelle grosso modo, pour x proche de 0 : $e^x \approx 1+x+x^2$. Cette approximation n'a de sens que si l'on peut y mesurer l'erreur commise. En l'occurrence, ici : $e^x \approx 1+x+x^2$ À UN $o(x)$ PRÈS. C'est un peu comme quand on dit que : $\pi \approx 3,14$ à 10^{-2} près.

  Imaginez justement qu'on vous dise : « π est égal à 3,14012 à 10^{-2} près », vous répondrez naturellement : « Pourquoi pas seulement 3,14 puisqu'on raisonne à 10^{-2} près ? » Et vous aurez raison, raisonner à 10^{-2} près, c'est négliger tout ce qui est plus petit que 10^{-2}. Ainsi l'approximation : $\pi \approx 3,14$ à 10^{-2} près est aussi précise que l'approximation : $\pi \approx 3,141592$ à 10^{-2} près, quand bien même on écrit deux décimales correctes dans un cas et six dans l'autre.

  Il se passe la même chose avec les petits o. Comme : $x^2 \underset{x\to 0}{=} o(x)$, la quantité x^2 est inutile dans la relation : $e^x \underset{x\to 0}{=} 1+x+x^2+o(x)$ donc nous pouvons lui couper la tête : $e^x \underset{x\to 0}{=} 1+x+o(x)$. Cette nouvelle proposition n'est ni plus ni moins précise que la précédente mais elle est plus lisible et plus économe.

> Tout petit o est un **NIVEAU DE PRÉCISION**, un **SEUIL DE VISIBILITÉ**.
> De vous-mêmes, **À CHAQUE INSTANT**, faites le ménage, coupez la tête de tous les « invisibles » !

Théorème (Limites finies et petits o)

- **Fonctions :** Soient $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction, $a \in \overline{D}$ et $\ell \in \mathbb{R}$. Alors : $\lim_a f = \ell \iff f \underset{a}{=} \ell + o(1)$.

  En particulier : $\lim_a f = 0 \iff f \underset{a}{=} o(1)$. En résumé : $\boxed{o(1) = \text{« une fonction de limite nulle en } a \text{ »}.}$
- **Suites :** Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite et $\ell \in \mathbb{R}$. Alors : $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \iff u_n \underset{n\to+\infty}{=} \ell + o(1)$.

  En particulier : $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0 \iff u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(1)$. En résumé : $\boxed{o(1) = \text{« une suite de limite nulle »}.}$

Démonstration $\lim_a f = \ell \iff \lim_a \dfrac{f-\ell}{1} = 0 \iff f - \ell \underset{a}{=} o(1) \iff f \underset{a}{=} \ell + o(1)$. ■

1.2 OPÉRATIONS SUR LES PETITS O

En vue des théorèmes du présent paragraphe, introduisons quelques objets une fois pour toutes :

- Soient f, $\widetilde{f}$, g, $\widetilde{g}$ et h des fonctions définies sur D et à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $a \in \overline{D}$. Chaque fois qu'on écrira une relation : $f \underset{a}{=} o(g)$, on supposera que g ne s'annule pas au voisinage de a — sauf peut-être en a avec : $f(a) = 0$.
- Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\widetilde{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\widetilde{v}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites. Chaque fois qu'on écrira une relation : $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$, on supposera que : $v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang.

Théorème (Les petits o absorbent les constantes multiplicatives) Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

- **Fonctions :** Si : $f \underset{a}{=} o(g)$, alors : $f \underset{a}{=} o(\lambda g)$ et $\lambda f \underset{a}{=} o(g)$.
- **Suites :** Si : $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$, alors : $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(\lambda v_n)$ et $\lambda u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$.

Démonstration Si : $\lim_a \dfrac{f}{g} = 0$, alors : $\lim_a \dfrac{f}{\lambda g} = 0$ et $\lim_a \dfrac{\lambda f}{g} = 0$. ■

Exemple Si on admet l'égalité : $\mathrm{e}^{\frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{=} 1+\frac{1}{n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$, alors : $2\,\mathrm{e}^{\frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{=} 2+\frac{2}{n}+\underline{\underline{2\,\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)}} \underset{n\to+\infty}{=} 2+\frac{2}{n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$.

Théorème (La somme de deux petits o est un petit o)

- **Fonctions :** Si : $f \underset{a}{=} \mathrm{o}(g)$ et $\widetilde{f} \underset{a}{=} \mathrm{o}(g)$, alors : $f+\widetilde{f} \underset{a}{=} \mathrm{o}(g)$.
- **Suites :** Si : $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(v_n)$ et $\widetilde{u}_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(v_n)$, alors : $u_n+\widetilde{u}_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(v_n)$.

Démonstration Si : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n}=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\widetilde{u}_n}{v_n}=0$, alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n+\widetilde{u}_n}{v_n}=0$ par somme. ■

Exemple Si on admet les égalités : $\mathrm{e}^x \underset{x\to0}{=} 1+x+\mathrm{o}(x)$ et $\sin x \underset{x\to0}{=} x+\mathrm{o}(x)$, alors :

$$\mathrm{e}^x+\sin x \underset{x\to0}{=} \big(1+x+\mathrm{o}(x)\big)+\big(x+\mathrm{o}(x)\big) \underset{x\to0}{=} 1+2x+\underline{\underline{\mathrm{o}(x)+\mathrm{o}(x)}} \underset{x\to0}{=} 1+2x+\mathrm{o}(x).$$

Théorème (Un petit o d'un petit o est un petit o) La relation « être négligeable » est transitive.

- **Fonctions :** Si : $f \underset{a}{=} \mathrm{o}(g)$ et $g \underset{a}{=} \mathrm{o}(h)$, alors : $f \underset{a}{=} \mathrm{o}(h)$.
- **Suites :** Si : $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(v_n)$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(w_n)$, alors : $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(w_n)$.

Démonstration Si : $\lim\limits_{a} \frac{f}{g}=0$ et $\lim\limits_{a} \frac{g}{h}=0$, alors : $\lim\limits_{a} \frac{f}{h}=0$ par produit. ■

Exemple Si on admet l'égalité : $\mathrm{e}^{\frac{1}{n^2}} \underset{n\to+\infty}{=} 1+\frac{1}{n^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$, alors comme : $\frac{1}{n^2} \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$, il vient :

$$\mathrm{e}^{\frac{1}{n^2}} \underset{n\to+\infty}{=} 1+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)+\underline{\underline{\mathrm{o}\left(\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)}} \underset{n\to+\infty}{=} 1+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} 1+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right).$$

Théorème (Avec le produit, tout va bien)

- **Fonctions :** Si : $f \underset{a}{=} \mathrm{o}(g)$ et $\widetilde{f} \underset{a}{=} \mathrm{o}(\widetilde{g})$, alors : $f\widetilde{f} \underset{a}{=} \mathrm{o}(g\widetilde{g})$.
  Si : $f \underset{a}{=} \mathrm{o}(g)$, alors : $fh \underset{a}{=} \mathrm{o}(gh)$.
- **Suites :** Si : $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(v_n)$ et $\widetilde{u}_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(\widetilde{v}_n)$, alors : $u_n\widetilde{u}_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(v_n\widetilde{v}_n)$.
  Si : $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(v_n)$, alors : $u_nw_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(v_nw_n)$.

Exemple Si on admet les égalités : $\mathrm{e}^x \underset{x\to0}{=} 1+x+\mathrm{o}(x)$ et $\sin x \underset{x\to0}{=} x+\mathrm{o}(x)$, alors :

$$\mathrm{e}^x\sin x \underset{x\to0}{=} \big(1+x+\mathrm{o}(x)\big)\times\big(x+\mathrm{o}(x)\big) \underset{x\to0}{=} x+\mathrm{o}(x)+x^2+\underline{\underline{2x\,\mathrm{o}(x)}}+\underline{\underline{\mathrm{o}(x)\times\mathrm{o}(x)}} \underset{x\to0}{=} x+\mathrm{o}(x)+\underbrace{x^2+\mathrm{o}\big(x^2\big)+\mathrm{o}\big(x^2\big)}_{\underset{x\to0}{=}\mathrm{o}(x)} \underset{x\to0}{=} x+\mathrm{o}(x).$$

Théorème (Avec la composition À DROITE et les suites extraites, tout va bien)

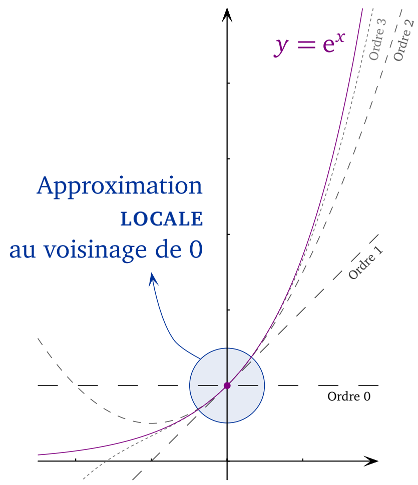
- **Fonctions :** Soient $b\in\overline{\mathbb{R}}$ et φ une fonction définie au voisinage de b à valeurs dans I. Si : $f \underset{a}{=} \mathrm{o}(g)$ et $\lim\limits_{b}\varphi=a$, alors : $f\circ\varphi \underset{b}{=} \mathrm{o}(g\circ\varphi)$.
- **Suites :** Soit $\varphi:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}$ strictement croissante. Si : $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(v_n)$, alors : $u_{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\big(v_{\varphi(n)}\big)$.

En pratique Pour : $a \neq \pm\infty$, ce résultat permet en particulier de ramener par translation toute relation : $f(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}\big(g(x)\big)$ au voisinage de a en une relation : $f(a+h) \underset{h\to 0}{=} \mathrm{o}\big(g(a+h)\big)$ au voisinage de 0.

Exemple Comme : $\sqrt{x} \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}(x)$, alors : $\sqrt{\ln x} \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}(\ln x)$ après composition **À DROITE** par ln.
Également, comme : $2^n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\big(3^n\big)$, alors : $2^{n^2} \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\big(3^{n^2}\big)$.

ATTENTION ! Il est **FORMELLEMENT INTERDIT** de composer une relation de négligeabilité par la gauche. Par exemple : $\ln x \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}(x)$, **MAIS :** $\dfrac{1}{\ln x} \underset{x\to+\infty}{\cancel{=}} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

2 Développements limités



2.1 Introduction

Nous cherchons dans ce paragraphe à approximer les fonctions par des fonctions polynomiales au voisinage d'un point, généralement 0. Nous allons par exemple montrer que : $e^x \underset{x\to 0}{=} 1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}+\mathrm{o}\big(x^3\big)$. Ce résultat signifie que la fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à 3 la plus proche de l'exponentielle au voisinage de 0 est la fonction $x \longmapsto 1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}$. Pour la même raison, comme : $e^x \underset{x\to 0}{=} 1+x+\dfrac{x^2}{2}+\mathrm{o}\big(x^2\big)$, la fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à 2 la plus proche de l'exponentielle au voisinage de 0 est la fonction $x \longmapsto 1+x+\dfrac{x^2}{2}$.

Définition (Développement limité) Soient $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction, $a \in \overline{D} \cap \overline{\mathbb{R}}$ et $n \in \mathbb{N}$. On dit que f *possède un développement limité à l'ordre n au voisinage de a* s'il existe des réels $a_0, \ldots, a_n$ pour lesquels :

$$f(x) \underset{x\to a}{=} a_0 + a_1(x-a) + \ldots + a_n(x-a)^n + \mathrm{o}\big((x-a)^n\big).$$

Explication Plus n est grand, plus la quantité $(x-a)^n$ est petite au voisinage de a. Du coup, plus n est grand, plus l'approximation de f obtenue au voisinage de a est précise.

Exemple Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\dfrac{1}{1-x} \underset{x\to 0}{=} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k + \mathrm{o}\big(x^n\big) \underset{x\to 0}{=} 1+x+x^2+\ldots+x^n+\mathrm{o}\big(x^n\big)$.

Démonstration Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \big\{1\big\}$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$,

or : $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x}{1-x} = 0$, donc : $\displaystyle\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + x^n \frac{x}{1-x} \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} x^k + x^n\mathrm{o}(1) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} x^k + \mathrm{o}\big(x^n\big)$.

En pratique

- On peut ramener tout développement limité au voisinage de a à un développement limité au voisinage de 0. Précisément, si : $f(x) \underset{x\to a}{=} a_0 + a_1(x-a) + \ldots + a_n(x-a)^n + \mathrm{o}\big((x-a)^n\big)$, alors après composition **À DROITE** par la fonction $x \longmapsto x+a$: $f(x+a) \underset{x\to 0}{=} a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \mathrm{o}\big(x^n\big)$.
- Supposons qu'on ait un développement limité de f à l'ordre n : $f(x) \underset{x\to a}{=} a_0+a_1(x-a)+\ldots+a_n(x-a)^n+\mathrm{o}\big((x-a)^n\big)$. On dispose alors d'un développement limité de f à tout ordre $m \leqslant n$: $f(x) \underset{x\to a}{=} a_0+a_1(x-a)+\ldots+a_m(x-a)^m+\mathrm{o}\big((x-a)^m\big)$. Cette opération d'oubli des termes de degré compris entre $m+1$ et n est appelée *troncature à l'ordre m*.

Théorème (Unicité des coefficients d'un développement limité) En cas d'existence, la liste des coefficients d'un développement limité est unique.

Démonstration Soient $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $a \in \overline{D} \cap \mathbb{R}$. Faisons l'hypothèse ABSURDE que f possède deux développements limités DISTINCTS à l'ordre n au voisinage de a :

$$f(x) \underset{x \to a}{=} a_0 + \ldots + a_n(x-a)^n + \mathrm{o}\big((x-a)^n\big) \underset{x \to a}{=} b_0 + \ldots + b_n(x-a)^n + \mathrm{o}\big((x-a)^n\big)$$

avec $a_0, \ldots, a_n, b_0, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$. Nous pouvons alors noter p le plus petit indice pour lequel : $a_p \neq b_p$. Après troncature : $a_p(x-a)^p + \mathrm{o}\big((x-a)^p\big) \underset{x \to a}{=} b_p(x-a)^p + \mathrm{o}\big((x-a)^p\big)$, donc : $a_p - b_p \underset{x \to a}{=} \mathrm{o}(1)$, donc enfin : $a_p = b_p$ — contradiction ! ■

Le résultat suivant est une conséquence immédiate des définitions de la continuité et de la dérivabilité en un point.

Théorème (Lien développement limité/continuité/dérivabilité) Soient $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $a \in D$.

- f est continue en a si et seulement si f possède un développement limité à l'ordre 0 au voisinage de a. Précisément, dans ce cas : $f(x) \underset{x \to a}{=} f(a) + \mathrm{o}(1)$.
- f est dérivable en a si et seulement si f possède un développement limité à l'ordre 1 au voisinage de a. Précisément, dans ce cas : $f(x) \underset{x \to a}{=} f(a) + f'(a)(x-a) + \mathrm{o}(x-a)$.

✌ **Explication** ✌ Dans un développement limité de f au voisinage de a, le coefficient d'ordre 0 est TOUJOURS $f(a)$ et le coefficient d'ordre 1 TOUJOURS $f'(a)$.

Théorème (Lien développement limité/parité/imparité) On suppose que $\overline{D}$ contient 0 et que D est symétrique par rapport à 0. Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

- Si f est paire et possède un développement limité au voisinage de 0, alors les coefficients de rang impair sont nuls.
- Si f est impaire et possède un développement limité au voisinage de 0, alors les coefficients de rang pair sont nuls.

✌ **Explication** ✌ Au voisinage de 0 pour une fonction IMPAIRE n'apparaissent réellement que x, x^3, x^5, $x^7 \ldots$

Démonstration Sous l'hypothèse que f est paire, commençons par écrire son développement limité à l'ordre n au voisinage de 0 : $f(x) \underset{x \to 0}{=} a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \mathrm{o}\big(x^n\big)$ avec $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Composons à droite par $x \longmapsto -x$: $f(x) = f(-x) \underset{x \to 0}{=} a_0 - a_1 x + a_2 x^2 - a_3 x^3 + \ldots + (-1)^n a_n x^n + \mathrm{o}\big(x^n\big)$, et donc aussitôt, par unicité des coefficients : $a_1 = -a_1$ donc : $a_1 = 0$, $a_3 = -a_3$ donc : $a_3 = 0$, etc. ■

2.2 PRIMITIVATION DES DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

On commence par un lemme simple avant la version plus générale.

Théorème (Lemme de primitivation des développements limités) Soient $g \in \mathscr{D}(D, \mathbb{R})$, $a \in D$ et $n \in \mathbb{N}$.

Si : $g'(x) \underset{x \to a}{=} \mathrm{o}\big((x-a)^n\big)$, alors : $g(x) \underset{x \to a}{=} g(a) + \mathrm{o}\big((x-a)^{n+1}\big)$.

« Constante de primitivation »

Démonstration Pour tout $x \in D \setminus \{a\}$, g est continue sur $[a,x]$ (ou $[x,a]$) et dérivable sur $]a,x[$ (ou $]x,a[$), donc d'après le théorème des accroissements finis : $\dfrac{g(x)-g(a)}{x-a} = g'(c_x)$ pour un certain $c_x \in\,]a,x[$ (ou $]x,a[$). Ce procédé nous fournit une fonction $c : D\setminus\{a\} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in D\setminus\{a\}$: $|c_x - a| < |x-a|$ — donc : $\lim\limits_{x\to a} c_x = a$. Aussitôt : $\left|\dfrac{g(x)-g(a)}{(x-a)^{n+1}}\right| = \left|\dfrac{g'(c_x)}{(x-a)^n}\right| = \underbrace{\left|\dfrac{g'(c_x)}{(c_x-a)^n}\right|}_{\underset{x\to a}{\longrightarrow}0} \times \underbrace{\left|\dfrac{c_x-a}{x-a}\right|^n}_{\leqslant 1} \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0.$ ■

Théorème (Primitivation des développements limités) Soient $f \in \mathscr{D}(D,\mathbb{R})$ et $a \in D$. Si f' possède un développement limité à l'ordre n au voisinage de a : $f'(x) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k(x-a)^k + o\big((x-a)^n\big)$ avec $a_0,\ldots,a_n \in \mathbb{R}$, alors f possède un développement limité à l'ordre $n+1$ au voisinage de a : $f(x) \underset{x\to a}{=} f(a) + \sum_{k=0}^{n} a_k \dfrac{(x-a)^{k+1}}{k+1} + o\big((x-a)^{n+1}\big).$

« Constante de primitivation »

Explication On peut donc TOUJOURS primitiver terme à terme le développement limité d'une dérivée !

Démonstration La fonction $x \overset{g}{\longmapsto} f(x) - f(a) - \sum_{k=0}^{n} a_k \dfrac{(x-a)^{k+1}}{k+1}$ est dérivable sur D de dérivée la fonction $x \overset{g'}{\longmapsto} f'(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k(x-a)^k$. Or ici : $g'(x) \underset{x\to a}{=} o\big((x-a)^n\big)$, donc d'après le lemme : $g(x) \underset{x\to a}{=} g(a) + o\big((x-a)^{n+1}\big)$, et c'est exactement le résultat voulu. ■

Exemple Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1}\dfrac{x^k}{k} + o(x^n) \underset{x\to 0}{=} x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n+1}\dfrac{x^n}{n} + o(x^n).$

Démonstration Puisque : $\dfrac{1}{1-x} \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n-1} x^k + o(x^{n-1})$, alors : $\dfrac{1}{1+x} \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^k + o(x^{n-1})$ après composition par $x \longmapsto -x$. Primitivons : $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1}\dfrac{x^k}{k} + o(x^n)$ sachant que : $\ln 1 = 0$.

Exemple Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\operatorname{Arctan} x \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \dfrac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+1}) \underset{x\to 0}{=} x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^7}{7} + \ldots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1}).$
On remarque que les coefficients de rang pair sont tous nuls — évidemment puisque la fonction arctangente est impaire.

Démonstration Puisque : $\dfrac{1}{1-x} \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n)$, alors : $\dfrac{1}{1+x^2} \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} + o(x^{2n})$ après composition par $x \longmapsto -x^2$. Primitivons : $\operatorname{Arctan} x \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \dfrac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+1})$ sachant que : $\operatorname{Arctan} 0 = 0$.

2.3 FORMULE DE TAYLOR-YOUNG

Théorème (Formule de Taylor-Young) Soient $n \in \mathbb{N}$, $f \in \mathscr{C}^n(D,\mathbb{R})$ et $a \in D$. Alors f possède un développement limité à l'ordre n au voisinage de a. Précisément : $f(x) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o\big((x-a)^n\big).$

✌ **Explication** ✌ Ce résultat est avant tout un théorème d'EXISTENCE de développements limités. Sur cette question, nous disposons à présent de deux équivalences et d'une IMPLICATION (seulement) :

Continuité	$\Longleftrightarrow$	Existence d'un développement limité à l'ordre 0
Dérivabilité	$\Longleftrightarrow$	Existence d'un développement limité à l'ordre 1
Classe $\mathscr{C}^n$	$\Longrightarrow$	Existence d'un développement limité à l'ordre n

Démonstration Par récurrence — au rang n : $\forall f \in \mathscr{C}^n(D,\mathbb{R}),\quad f(x) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \mathrm{o}\big((x-a)^n\big)$.

Initialisation : Nous savons déjà que pour toute fonction $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ continue : $f(x) \underset{x\to a}{=} f(a) + \mathrm{o}(1)$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose la proposition vraie au rang n. Soit $f \in \mathscr{C}^{n+1}(D,\mathbb{R})$. Alors f' est de classe $\mathscr{C}^n$ sur D, donc par hypothèse de récurrence :

$$f'(x) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{(f')^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \mathrm{o}\big((x-a)^n\big) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(a)}{k!}(x-a)^k + \mathrm{o}\big((x-a)^n\big).$$

Le théorème de primitivation des développements limités montre aussitôt le résultat souhaité :

$$f(x) \underset{x\to a}{=} f(a) + \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(a)}{k!}\,\frac{(x-a)^{k+1}}{k+1} + \mathrm{o}\big((x-a)^{n+1}\big) \underset{x\to a}{=} f(a) + \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(a)}{(k+1)!}(x-a)^{k+1} + \mathrm{o}\big((x-a)^{n+1}\big)$$

$$\underset{x\to a}{=} f(a) + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \mathrm{o}\big((x-a)^{n+1}\big) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \mathrm{o}\big((x-a)^{n+1}\big). \quad ■$$

Exemple Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\mathrm{e}^x \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \mathrm{o}\big(x^n\big) \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \mathrm{o}\big(x^n\big)$.

Également : $\mathrm{sh}\, x \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \mathrm{o}\big(x^{2n+1}\big) \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \mathrm{o}\big(x^{2n+1}\big)$

et $\mathrm{ch}\, x \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \mathrm{o}\big(x^{2n}\big) \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \mathrm{o}\big(x^{2n}\big)$.

Démonstration

- L'exponentielle est de classe $\mathscr{C}^n$ sur $\mathbb{R}$ donc possède un développement limité à l'ordre n au voisinage de 0 d'après la formule de Taylor-Young, et : $\mathrm{e}^x \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{\exp^{(k)}(0)}{k!} x^k + \mathrm{o}\big(x^n\big) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \mathrm{o}\big(x^n\big)$.
- Pour sh : $\mathrm{sh}\, x = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2} \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{2n+1} \frac{x^k}{k!} - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k \frac{x^k}{k!} + \mathrm{o}\big(x^{2n+1}\big) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \mathrm{o}\big(x^{2n+1}\big)$.
  Tout simplement, les termes de rang pair se simplifient deux à deux tandis que les termes de rang impair sont comptés deux fois mais aussitôt divisés par 2.

Exemple Pour tous $\alpha \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$(1+x)^\alpha \underset{x\to 0}{=} 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6} x^3 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \mathrm{o}\big(x^n\big).$$

Démonstration La fonction $x \longmapsto (1+x)^\alpha$ est de classe $\mathscr{C}^n$ sur $]-1,+\infty[$ et pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, sa dérivée $k^{\text{ème}}$ est la fonction $x \longmapsto \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}$. On conclut grâce à la formule de Taylor.

✌ **Explication** ✌ Ce développement limité de $(1+x)^\alpha$ lorsque x tend vers 0 est une conséquence de la formule du binôme lorsque α est un ENTIER NATUREL. Dans ce cas, en effet, pour tout $k \in [\![0,\alpha]\!]$: $\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}$.
Conclusion : quand vous cherchez un développement limité de $(1+x)^5$ à l'ordre 3 lorsque x tend vers 0, utilisez simplement la formule du binôme que vous connaissez bien !

$$(1+x)^5 = 1 + 5x + 10x^2 + 10x^3 + 5x^4 + x^5 = 1 + 5x + 10x^3 + \mathrm{o}\big(x^3\big).$$

Exemple Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\sin x \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \mathrm{o}\left(x^{2n+1}\right) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \mathrm{o}\left(x^{2n+1}\right)$

et $\cos x \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \mathrm{o}\left(x^{2n}\right) \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \mathrm{o}\left(x^{2n}\right)$.

Démonstration Pour tous $k \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$: $\sin^{(k)}(x) = \sin\left(x + \frac{k\pi}{2}\right)$ et $\cos^{(k)}(x) = \cos\left(x + \frac{k\pi}{2}\right)$, donc : $\begin{cases} \sin^{(2k)}(0) = 0 \\ \sin^{(2k+1)}(0) = (-1)^k \end{cases}$ et $\begin{cases} \cos^{(2k)}(0) = (-1)^k \\ \cos^{(2k+1)}(0) = 0. \end{cases}$ On conclut grâce à la formule de Taylor-Young.

Exemple $\tan x \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + \mathrm{o}\left(x^3\right)$.

On peut déterminer explicitement un développement limité de tangente à tout ordre au voisinage de 0, mais le résultat est compliqué et hors programme.

Démonstration La fonction tangente est de classe $\mathscr{C}^3$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ donc possède un développement limite à l'ordre 3 au voisinage de 0 d'après la formule de Taylor-Young. Il reste à calculer ses quatre premières dérivées en 0.

$$\tan 0 = 0, \qquad \tan' = 1 + \tan^2 \quad \text{donc :} \quad \tan'(0) = 1, \qquad \tan'' = 2\tan\tan' = 2 \quad \text{donc :} \quad \tan''(0) = 0$$

$$\text{et} \qquad \tan''' = 2\tan'^{\,2} + 2\tan\tan'' \quad \text{donc :} \quad \tan'''(0) = 2.$$

En pratique **(Dérivation des développements limités)** Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $f \in \mathscr{C}^n(D, \mathbb{R})$ et $a \in D$. D'après la formule de Taylor-Young, f possède au voisinage de a un développement limité à l'ordre n et f' un développement à l'ordre $n-1$:

$$f(x) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \mathrm{o}\left((x-a)^n\right) \qquad \text{et} \qquad f'(x) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(a)}{k!}(x-a)^k + \mathrm{o}\left((x-a)^{n-1}\right).$$

Il se trouve alors — essayez, ça marche — que le développement limité de f' s'obtient en dérivant terme à terme celui de f.

Attention ! **On ne peut pas toujours dériver un développement limité.** On le peut à l'ordre n pour une fonction **de classe** $\mathscr{C}^n$, i.e. quand on peut appliquer la formule de Taylor-Young.

Exemple Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\frac{1}{(1-x)^2} \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (k+1)x^k + \mathrm{o}\left(x^n\right) \underset{x\to 0}{=} 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots + (n+1)x^n + \mathrm{o}\left(x^n\right)$.

Démonstration Comme $x \longmapsto \frac{1}{1-x}$ est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur $]-\infty, 1[$, on n'a qu'à dériver son développement limité à l'ordre $n+1$ au voisinage de 0 : $\frac{1}{1-x} \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n+1} x^k + \mathrm{o}\left(x^{n+1}\right) \underset{x\to 0}{=} 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{n+1} + \mathrm{o}\left(x^{n+1}\right)$.

2.4 Développements limités usuels

Les formules du tableau qui suit doivent être connues **par cœur** sans délai et sans la moindre hésitation.

Pour les fonctions paires, les développements limités sont donnés à l'ordre $2n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, mais par exemple, puisque vous connaissez un développement limité de la fonction cosinus au voisinage de 0 aux ordres $0, 2, 4, 6\ldots$, bien sûr que vous en connaissez un à l'ordre 3, il suffit de tronquer au bon endroit : $\cos x \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \mathrm{o}\left(x^3\right)$. Notez bien que ce développement est **plus fin** que le développement à l'ordre 2 : $\cos x \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \mathrm{o}\left(x^2\right)$. Sur le développement à l'ordre 3, on ne voit pas de terme d'ordre 3 mais ce n'est qu'une impression, **il y a un terme d'ordre 3**, avec un coefficient 0. À l'ordre 2, c'est différent, on ne voit pas de terme d'ordre 3 parce qu'un tel terme est réellement **invisible** à ce niveau de précision.

$\dfrac{1}{1-x} \underset{x\to 0}{=} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k + \mathrm{o}\big(x^n\big) \underset{x\to 0}{=} 1+x+x^2+\ldots+x^n+\mathrm{o}\big(x^n\big)$
$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1}\dfrac{x^k}{k} + \mathrm{o}\big(x^n\big) \underset{x\to 0}{=} x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^{n+1}\dfrac{x^n}{n}+\mathrm{o}\big(x^n\big)$
$\mathrm{e}^x \underset{x\to 0}{=} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \dfrac{x^k}{k!} + \mathrm{o}\big(x^n\big) \underset{x\to 0}{=} 1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^4}{24}+\ldots+\dfrac{x^n}{n!}+\mathrm{o}\big(x^n\big)$
$(1+x)^\alpha \underset{x\to 0}{=} 1+\alpha x+\dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2}\,x^2+\dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}\,x^3+\ldots+\dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}\,x^n+\mathrm{o}\big(x^n\big)$
$\sin x \underset{x\to 0}{=} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k\dfrac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \mathrm{o}\big(x^{2n+1}\big) \underset{x\to 0}{=} x-\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^5}{120}+\ldots+(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\mathrm{o}\big(x^{2n+1}\big)$
$\cos x \underset{x\to 0}{=} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k\dfrac{x^{2k}}{(2k)!} + \mathrm{o}\big(x^{2n}\big) \underset{x\to 0}{=} 1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{24}+\ldots+(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}+\mathrm{o}\big(x^{2n}\big)$
$\mathrm{Arctan}\ x \underset{x\to 0}{=} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k\dfrac{x^{2k+1}}{2k+1} + \mathrm{o}\big(x^{2n+1}\big) \underset{x\to 0}{=} x-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^5}{5}-\dfrac{x^7}{7}+\ldots+(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}+\mathrm{o}\big(x^{2n+1}\big)$
$\tan x \underset{x\to 0}{=} x+\dfrac{x^3}{3}+\mathrm{o}\big(x^3\big)$
$\mathrm{sh}\ x \underset{x\to 0}{=} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \dfrac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \mathrm{o}\big(x^{2n+1}\big) \underset{x\to 0}{=} x+\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^5}{120}+\ldots+\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\mathrm{o}\big(x^{2n+1}\big)$
$\mathrm{ch}\ x \underset{x\to 0}{=} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \dfrac{x^{2k}}{(2k)!} + \mathrm{o}\big(x^{2n}\big) \underset{x\to 0}{=} 1+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{24}+\ldots+\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}+\mathrm{o}\big(x^{2n}\big)$

2.5 Opérations sur les développements limités

Exemple $\mathrm{e}^x \underset{x\to 0}{=} 1+x+\dfrac{x^2}{2}+\mathrm{o}\big(x^2\big)$, donc : $\mathrm{e}^{x^3} \underset{x\to 0}{=} 1+x^3+\dfrac{x^6}{2}+\mathrm{o}\big(x^6\big)$.

De même : $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x-\dfrac{x^2}{2}+\mathrm{o}\big(x^2\big)$, donc : $\ln\big(1+x^2\big) \underset{x\to 0}{=} x^2-\dfrac{x^4}{2}+\mathrm{o}\big(x^4\big)$.

Conclusion : quand on remplace simplement x par x^p dans un développement limité, l'ordre du résultat est simplement multiplié par p. Nous verrons plus loin que la situation est plus compliquée pour la composition en général.

Exemple On veut un développement limité de $\dfrac{\ln\big(1+x^2\big)}{x}$ à l'ordre 5 lorsque x tend vers 0.

Démonstration Pour commencer : $\dfrac{\ln\big(1+x^2\big)}{x} \underset{x\to 0}{=} \dfrac{x^2+\ldots+\mathrm{o}\big(x^{\cdots}\big)}{x}$. Pour obtenir un ordre 5, il nous faut un numérateur à l'ordre 6, et pour cela, on peut partir d'un développement limité de $\ln(1+x)$ à l'ordre 3.

$$\frac{\ln\big(1+x^2\big)}{x} \underset{x\to 0}{=} \frac{x^2-\dfrac{x^4}{2}+\dfrac{x^6}{3}+\mathrm{o}\big(x^6\big)}{x} \underset{x\to 0}{=} x-\frac{x^3}{2}+\frac{x^5}{3}+\mathrm{o}\big(x^5\big).$$

Exemple On veut un développement limité de $\mathrm{e}^x\cos x$ à l'ordre 4 lorsque x tend vers 0.

Démonstration

- **Échec :** $\mathrm{e}^x\cos x \underset{x\to 0}{=} \left(1+x+\dfrac{x^2}{2}+\mathrm{o}\big(x^2\big)\right)\left(1-\dfrac{x^2}{2}+\mathrm{o}\big(x^2\big)\right) \underset{x\to 0}{=} 1+x+\mathrm{o}\big(x^2\big)$. Pas assez fin !

  C'est irrémédiable, un $\mathrm{o}\big(x^2\big)$ apparaît.

  Ordre 2 $\times$ ordre 2 $\cancel{=}$ ordre 4

  En développant, on voit apparaître des $\mathrm{o}\big(x^2\big)$, des $\mathrm{o}\big(x^3\big)$ et des $\mathrm{o}\big(x^4\big)$, DONC le calcul est mené à la précision $\mathrm{o}\big(x^2\big)$.

- **Succès :** $\mathrm{e}^x\cos x \underset{x\to 0}{=} \left(1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^4}{24}+\mathrm{o}\big(x^4\big)\right)\left(1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{24}+\mathrm{o}\big(x^4\big)\right) \underset{x\to 0}{=} 1+x-\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^4}{6}+\mathrm{o}\big(x^4\big)$.

Exemple On veut un développement limité de $\ln(1+x)\sin x$ à l'ordre 4 lorsque x tend vers 0.

Démonstration

- **Demi-échec :** $$\ln(1+x)\sin x \underset{x\to 0}{=} \left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\mathrm{o}\left(x^4\right)\right)\left(x-\frac{x^3}{6}+\mathrm{o}\left(x^4\right)\right) \underset{x\to 0}{=} x^2-\frac{x^3}{2}+\frac{x^4}{6}-\frac{x^5}{6}+\mathrm{o}\left(x^5\right).$$ Cette fois c'est trop fin !

  Trop de finesse vaut mieux que pas assez, mais nous avons fait trop de calculs.

- **Succès :** $$\ln(1+x)\sin x \underset{x\to 0}{=} \left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\mathrm{o}\left(x^3\right)\right)\left(x-\frac{x^3}{6}+\mathrm{o}\left(x^3\right)\right) \underset{x\to 0}{=} x^2-\frac{x^3}{2}+\frac{x^4}{6}+\mathrm{o}\left(x^4\right).$$

Exemple On veut un développement limité de $\mathrm{e}^x\sin\left(x^2\right)$ à l'ordre 7 lorsque x tend vers 0.

Démonstration On ne va pas tâtonner chaque fois ! Tâchons d'anticiper. Ce qui compte, ce sont les premiers termes des deux quantités multipliées et l'ordre 7 auquel on veut aboutir.

$$\mathrm{e}^x\sin\left(x^2\right) \underset{x\to 0}{=} \left(1+\ldots+\mathrm{o}\left(x^{\cdots}\right)\right)\left(x^2+\ldots+\mathrm{o}\left(x^{\cdots}\right)\right).$$

Il nous faut ici un $\mathrm{o}\left(x^5\right)$. Il nous faut ici un $\mathrm{o}\left(x^7\right)$.

Or, pour avoir un développement limité de $\sin\left(x^2\right)$ à l'ordre 7, il faut partir d'un développement limité de $\sin x$ à l'ordre 4. Le reste n'est qu'un calcul : $$\mathrm{e}^x\sin\left(x^2\right) \underset{x\to 0}{=} \left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+\frac{x^5}{120}+\mathrm{o}\left(x^5\right)\right)\left(x^2-\frac{x^6}{6}+\mathrm{o}\left(x^7\right)\right) \underset{x\to 0}{=} x^2+x^3+\frac{x^4}{2}+\frac{x^5}{6}-\frac{x^6}{8}-\frac{19x^7}{120}+\mathrm{o}\left(x^7\right).$$

Exemple On veut un développement limité de $(\operatorname{Arctan} x)^2\cos x$ à l'ordre 5 lorsque x tend vers 0.

Démonstration $$(\operatorname{Arctan} x)^2\cos x \underset{x\to 0}{=} \left(x-\frac{x^3}{3}+\mathrm{o}\left(x^4\right)\right)^2\left(1-\frac{x^2}{2}+\mathrm{o}\left(x^3\right)\right) \underset{x\to 0}{=} \left(x^2-\frac{2x^4}{3}+\mathrm{o}\left(x^5\right)\right)\left(1-\frac{x^2}{2}+\mathrm{o}\left(x^3\right)\right) \underset{x\to 0}{=} x^2-\frac{7x^4}{6}+\mathrm{o}\left(x^5\right).$$

Exemple On veut un développement limité de $\operatorname{sh}^4 x$ à l'ordre 7 lorsque x tend vers 0.

Démonstration : $$\operatorname{sh}^4 x \underset{x\to 0}{=} \left(x+\ldots+\mathrm{o}\left(x^4\right)\right)\left(x+\ldots+\mathrm{o}\left(x^4\right)\right)\left(x+\ldots+\mathrm{o}\left(x^4\right)\right)\left(x+\ldots+\mathrm{o}\left(x^4\right)\right).$$

Il nous faut pour chaque $\operatorname{sh} x$ un $\mathrm{o}\left(x^4\right)$.

Après calcul : $$\operatorname{sh}^4 x \underset{x\to 0}{=} \left(x+\frac{x^3}{6}+\mathrm{o}\left(x^4\right)\right)^4 \underset{x\to 0}{=} \left(x^2+\frac{x^4}{3}+\mathrm{o}\left(x^5\right)\right)^2 \underset{x\to 0}{=} x^4+\frac{2x^6}{3}+\mathrm{o}\left(x^7\right).$$

Exemple On veut un développement limité de $\sqrt{1+\operatorname{Arctan} x}$ à l'ordre 3 lorsque x tend vers 0.

Démonstration C'est plus compliqué, nous avons ici affaire à une composée.

- **Échec :** $\sqrt{1+u} \underset{u\to 0}{=} 1+\dfrac{u}{2}-\dfrac{u^2}{8}+\dfrac{u^3}{16}+\mathrm{o}\left(u^3\right)$ et $\operatorname{Arctan} x \underset{x\to 0}{=} x+\mathrm{o}(x)$, donc :

  $$\sqrt{1+\operatorname{Arctan} x} \underset{x\to 0}{=} 1+\frac{1}{2}\left(x+\mathrm{o}(x)\right)-\frac{1}{8}\left(x+\mathrm{o}(x)\right)^2+\frac{1}{16}\left(x+\mathrm{o}(x)\right)^3+\underbrace{\mathrm{o}\left(\left(x+\mathrm{o}(x)\right)^3\right)}_{\underset{x\to 0}{=}\mathrm{o}\left(x^3\right)} \underset{x\to 0}{=} 1+\frac{x}{2}+\mathrm{o}(x).$$

  Le $\mathrm{o}(x)$ de $\operatorname{Arctan} x$ mange tous les $\mathrm{o}\left(x^2\right)$, $\mathrm{o}\left(x^3\right)$... qui peuvent apparaître ailleurs.

  Le $\mathrm{o}\left(u^3\right)$ de $\sqrt{1+u}$ est irrémédiablement perdu.

  Pas assez fin !

  Nous sommes partis d'un développement limité de $\sqrt{1+u}$ à l'ordre 3, mais la précision du développement limité de $\operatorname{Arctan} x$ compte aussi manifestement.

- **Échec :** $\sqrt{1+u} \underset{u\to 0}{=} 1+\dfrac{u}{2}+\mathrm{o}(u)$ et $\operatorname{Arctan} x \underset{x\to 0}{=} x-\dfrac{x^3}{3}+\mathrm{o}\left(x^3\right)$, donc :

  $$\sqrt{1+\operatorname{Arctan} x} \underset{x\to 0}{=} 1+\frac{1}{2}\left(x-\frac{x^3}{3}+\mathrm{o}\left(x^3\right)\right)+\mathrm{o}\underbrace{\left(x-\frac{x^3}{3}+\mathrm{o}\left(x^3\right)\right)}_{\underset{x\to 0}{=}\mathrm{o}(x)} \underset{x\to 0}{=} 1+\frac{x}{2}+\mathrm{o}(x).$$ Pas assez fin !

  Le $\mathrm{o}\left(x^3\right)$ de $\operatorname{Arctan} x$ est irrémédiablement perdu.

  Le $\mathrm{o}(u)$ de $\sqrt{1+u}$ annule toute la finesse du $\mathrm{o}\left(x^3\right)$ de $\operatorname{Arctan} x$.

- **Succès :** $\sqrt{1+u} \underset{u\to 0}{=} 1+\dfrac{u}{2}-\dfrac{u^2}{8}+\dfrac{u^3}{16}+\mathrm{o}\left(u^3\right)$ et $\mathrm{Arctan}\, x \underset{x\to 0}{=} x-\dfrac{x^3}{3}+\mathrm{o}\left(x^3\right)$, donc :

$$\sqrt{1+\mathrm{Arctan}\, x} \underset{x\to 0}{=} 1+\frac{1}{2}\Bigg(x-\frac{x^3}{3}+\underset{\uparrow}{\mathrm{o}\left(x^3\right)}\Bigg)-\frac{1}{8}\left(x-\frac{x^3}{3}+\mathrm{o}\left(x^3\right)\right)^2+\frac{1}{16}\left(x-\frac{x^3}{3}+\mathrm{o}\left(x^3\right)\right)^3+\underbrace{\mathrm{o}\left(\left(x-\frac{x^3}{3}+\mathrm{o}\left(x^3\right)\right)^3\right)}_{\underset{x\to 0}{=}\mathrm{o}\left(x^3\right)}$$

Le $\mathrm{o}\left(x^3\right)$ de Arctan x
mange tous les $\mathrm{o}\left(x^4\right)$, $\mathrm{o}\left(x^5\right)$...
qui peuvent apparaître ailleurs.

Même chose ici
avec le $\mathrm{o}\left(u^3\right)$ de $\sqrt{1+u}$.

$$\underset{x\to 0}{=} 1+\frac{1}{2}\left(x-\frac{x^3}{3}\right)-\frac{1}{8}\left(x-\frac{x^3}{3}\right)^2+\frac{1}{16}\left(x-\frac{x^3}{3}\right)^3+\mathrm{o}\left(x^3\right)$$

$$\underset{x\to 0}{=} 1+\frac{1}{2}\left(x-\frac{x^3}{3}\right)-\frac{1}{8}\left(x^2\right)+\frac{1}{16}\left(x^3\right)+\mathrm{o}\left(x^3\right) \underset{x\to 0}{=} 1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}-\frac{5x^3}{48}+\mathrm{o}\left(x^3\right).$$

La précision globale du calcul effectué dépend **À LA FOIS** du $\mathrm{o}\left(x^3\right)$ de Arctan x **ET** du $\mathrm{o}\left(u^3\right)$ de $\sqrt{1+u}$. Cela veut dire qu'il faut toujours réfléchir à la précision choisie pour les **DEUX** fonctions qu'on compose quand on calcule un développement limité d'une composée.

Exemple On veut un développement limité de $\mathrm{Arctan}\left(x^3 \mathrm{e}^x\right)$ à l'ordre 11 lorsque x tend vers 0.

Démonstration On part de ceci : $\mathrm{Arctan}\, u \underset{u\to 0}{=} u+\ldots+\mathrm{o}\left(u^{\cdot\cdot}\right)$ et $x^3\mathrm{e}^x \underset{x\to 0}{=} x^3+\ldots+\mathrm{o}\left(x^{\cdot\cdot}\right)$.
À cause du u et du $\mathrm{o}\left(x^{\cdot\cdot}\right)$, il faut pousser $x^3\mathrm{e}^x$ à l'ordre 11, donc e^x à l'ordre 8. À cause du x^3 et du $\mathrm{o}\left(u^{\cdot\cdot}\right)$, il faut pousser Arctan u à l'ordre 4. Ensuite il faut calculer — ici c'est affreux !

Exemple On veut un développement limité de $\ln\cos x$ à l'ordre 6 lorsque x tend vers 0.

Démonstration On part de ceci : $\ln(1+u) \underset{u\to 0}{=} u+\ldots+\mathrm{o}\left(u^{\cdot\cdot}\right)$ et $\cos x-1 \underset{x\to 0}{=} -\dfrac{x^2}{2}+\ldots+\mathrm{o}\left(x^{\cdot\cdot}\right)$.
À cause du u et du $\mathrm{o}\left(x^{\cdot\cdot}\right)$, il faut pousser $\cos x-1$ à l'ordre 6. À cause du $-\dfrac{x^2}{2}$ et du $\mathrm{o}\left(u^{\cdot\cdot}\right)$, il faut pousser $\ln(1+u)$ à l'ordre 3. Ensuite on calcule : $\ln\cos x \underset{x\to 0}{=} -\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^4}{12}-\dfrac{x^6}{45}+\mathrm{o}\left(x^6\right)$.

Exemple On veut un développement limité de $\sqrt[3]{\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x}}$ à l'ordre 3 lorsque x tend vers 0.

Démonstration Tout d'abord : $\sqrt[3]{1+u}=(1+u)^{\frac{1}{3}} \underset{u\to 0}{=} 1+\dfrac{u}{3}-\dfrac{u^2}{9}+\dfrac{5u^3}{81}+\mathrm{o}\left(u^3\right)$.

Également : $\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x} \underset{x\to 0}{=} \dfrac{x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^4}{24}+\mathrm{o}\left(x^4\right)}{x} \underset{x\to 0}{=} 1+\dfrac{x}{2}+\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{x^3}{24}+\mathrm{o}\left(x^3\right)$. Du coup :

$$\sqrt[3]{\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}} \underset{x\to 0}{=} \left(1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+\frac{x^3}{24}+\mathrm{o}\left(x^3\right)\right)^{\frac{1}{3}} \underset{x\to 0}{=} 1+\frac{1}{3}\left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+\frac{x^3}{24}\right)-\frac{1}{9}\left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+\frac{x^3}{24}\right)^2+\frac{5}{81}\left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+\frac{x^3}{24}\right)^3+\mathrm{o}\left(x^3\right)$$

$$\underset{x\to 0}{=} 1+\frac{1}{3}\left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+\frac{x^3}{24}\right)-\frac{1}{9}\left(\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{6}\right)+\frac{5}{81}\left(\frac{x^3}{8}\right)+\mathrm{o}\left(x^3\right) \underset{x\to 0}{=} 1+\frac{x}{6}+\frac{x^2}{36}+\frac{x^3}{324}+\mathrm{o}\left(x^3\right).$$

✎ **En pratique** ✎ Pour calculer un développement limité de $\dfrac{1}{f}$ au voisinage de 0 lorsque : $\lim\limits_{0} f=1$, on compose simplement un développement limité de f au voisinage de 0 avec un développement limité de $\dfrac{1}{1+u}$ lorsque u tend vers 0.

Exemple $\dfrac{1}{\cos x} \underset{x\to 0}{=} 1+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{5x^4}{24}+\mathrm{o}\left(x^4\right)$.

Démonstration Comme : $\cos x \underset{x\to 0}{=} 1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{24}+\mathrm{o}\left(x^4\right)$ et $\dfrac{1}{1+u} \underset{u\to 0}{=} 1-u+u^2+\mathrm{o}\left(u^2\right)$, alors :

$$\frac{1}{\cos x} \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{1+\left(-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{24}+\mathrm{o}\left(x^4\right)\right)} \underset{x\to 0}{=} 1-\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}\right)+\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}\right)^2+\mathrm{o}\left(x^4\right)$$

$$\underset{x\to 0}{=} 1-\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}\right)+\left(\frac{x^4}{4}\right)+\mathrm{o}\left(x^4\right) \underset{x\to 0}{=} 1+\frac{x^2}{2}+\frac{5x^4}{24}+\mathrm{o}\left(x^4\right).$$

Exemple $\dfrac{x^3}{\operatorname{sh} x - x} \underset{x\to 0}{=} 6 - \dfrac{3x^2}{10} + \mathrm{o}\big(x^2\big)$.

Démonstration $\dfrac{x^3}{\operatorname{sh} x - x} \underset{x\to 0}{=} \dfrac{x^3}{\dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120} + \mathrm{o}\big(x^5\big)} \underset{x\to 0}{=} \dfrac{6}{1 + \dfrac{x^2}{20} + \mathrm{o}\big(x^2\big)} \underset{x\to 0}{=} 6\left(1 - \dfrac{x^2}{20} + \mathrm{o}\big(x^2\big)\right) \underset{x\to 0}{=} 6 - \dfrac{3x^2}{10} + \mathrm{o}\big(x^2\big)$.

Exemple $\ln x \underset{x\to 2}{=} \ln 2 + \dfrac{x-2}{2} - \dfrac{(x-2)^2}{8} + \dfrac{(x-2)^3}{24} + \mathrm{o}\big((x-2)^3\big)$.

Démonstration On ramène le problème en 0 grâce au changement de variable : $x = 2+h$. Chercher un développement limité de $\ln x$ à l'ordre 3 lorsque x tend vers 2 revient alors à chercher un développement limité de $\ln(2+h)$ à l'ordre 3 lorsque h tend vers 0. Or : $\ln(2+h) = \ln 2 + \ln\left(1 + \dfrac{h}{2}\right) \underset{h\to 0}{=} \ln 2 + \dfrac{h}{2} - \dfrac{h^2}{8} + \dfrac{h^3}{24} + \mathrm{o}\big(h^3\big)$.

Exemple $\cos x \underset{x\to\frac{\pi}{4}}{=} \dfrac{1}{\sqrt{2}} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) - \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)^2 + \dfrac{1}{6\sqrt{2}}\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)^3 + \mathrm{o}\left(\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)^3\right)$.

Démonstration On ramène le problème en 0 via le changement de variable : $x = \dfrac{\pi}{4} + h$.

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} + h\right) = \frac{\cos h - \sin h}{\sqrt{2}} \underset{h\to 0}{=} \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left(1 - \frac{h^2}{2} + \mathrm{o}\big(h^3\big)\right) - \left(h - \frac{h^3}{6} + \mathrm{o}\big(h^3\big)\right)\right) \underset{h\to 0}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{h}{\sqrt{2}} - \frac{h^2}{2\sqrt{2}} + \frac{h^3}{6\sqrt{2}} + \mathrm{o}\big(h^3\big).$$

3 Équivalence

3.1 Introduction

Définition (Équivalence)

- **Fonctions :** Soient $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions et $a \in \overline{D}$. On suppose que f et g ne s'annulent pas au voisinage de a — sauf peut-être en a toutes les deux. On dit que f est *équivalente à g au voisinage de a* si : $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, ce qu'on note : $f \underset{a}{\sim} g$ ou $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$.
- **Suites :** Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites. On suppose : $u_n \neq 0$ et $v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *équivalente à $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$* si : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$, ce qu'on note : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$.

Exemple $x^2 + x + 5 \underset{x\to+\infty}{\sim} x^2$. $x + x^2 \underset{x\to 0}{\sim} x$. $\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$. $3^n + 2^n \underset{n\to+\infty}{\sim} 3^n$.

✖ **Attention !** ✖ Quand vous cherchez un équivalent, votre résultat ne doit **jamais** se présenter comme une **somme de deux ou trois termes de tailles distinctes**. Par exemple, si l'on vous demande un équivalent de $x - 3x^2 + x^5$ lorsque x tend vers 0, ne répondez pas : $x - 3x^2 + x^5 \underset{x\to 0}{\sim} x - 3x^2$. C'est correct puisque : $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x - 3x^2 + x^5}{x - 3x^2} = 1$, mais non abouti car vous pouvez encore comparer x et x^2, et en l'occurrence : $x^2 \underset{x\to 0}{=} \mathrm{o}(x)$. L'équivalence intéressante est donc : $x - 3x^2 + x^5 \underset{x\to 0}{\sim} x$. En résumé : **IL NE DOIT EN RESTER QU'UN** — le plus gros, celui qu'on voit de loin.

✌ **Explication** ✌ Dans l'armoire des suites, la notion de limite crée des tiroirs qui permettent de faire un premier tri. Dans le « tiroir $+\infty$ » sont rangées toutes les suites de limite $+\infty$, dans le « tiroir 2 » toutes les suites de limite 2… et dans le « tiroir sans limite » toutes les suites sans limite. Or dans certains tiroirs, il serait intéressant que de nouveaux sous-tiroirs soient créés. Les suites $\big(n^2\big)_{n\in\mathbb{N}}$, $\big(n^2+n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\big(2^n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ sont toutes trois dans le « tiroir $+\infty$ » par exemple, mais on sent bien que $\big(n^2\big)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\big(2^n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ portent des infinis de tailles différentes tandis que $\big(n^2\big)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\big(n^2+n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ portent le même infini.

Les tiroirs « limite » : $-\infty$, -2, 0, 1, π, $+\infty$, Pas de limite

Les nouveaux sous-tiroirs !

« Tiroir -2^n »	« Tiroir $-n^3$ »	« Tiroir $-\frac{1}{n}$ »	« Tiroir e^{-n} »	« Tiroir $\sqrt{n}$ »	« Tiroir $n!$ »	« Tiroir $(-1)^n$ »	« Tiroir $n\sin n$ »
-2^n	$-n^3$	$-\frac{1}{n}$	e^{-n}	$\sqrt{n}$	$n!$	$(-1)^n$	$n\sin n$
$n-2^{n+\frac{1}{n}}$	$-n^3+2n$	$-\frac{n}{n^2+1}$	$\mathrm{e}^{-n}+4^{-n}$	$\sqrt{n+\ln n}$	$n!-4^n$	$\frac{(-1)^n n^2}{n^2+2}$	$n^{\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}}\sin n$
$\frac{-2^n n}{n+\sqrt{n}}$	$\frac{-n^4}{n+\sin n}$	$\dots$	$\frac{1}{\mathrm{e}^n+n^4}$	$\frac{\sqrt{n+1}}{1+\mathrm{e}^{-n}}$	$\frac{(n+2)!}{\sqrt{n^4+3}}$	$\dots$	$\frac{\mathrm{e}^n n\sin n}{\sqrt[3]{\mathrm{e}^{3n}+1}}$
$\dots$	$\dots$		$\dots$	$\dots$	$\dots$		$\dots$

En vue des théorèmes du présent paragraphe et des suivants, on introduit une fois pour toutes quelques objets :

- Soient f, $\widetilde{f}$, g, $\widetilde{g}$ et h des fonctions définies sur D et à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $a \in \overline{D}$. Chaque fois qu'on écrira une relation : $f \underset{a}{\sim} g$, on supposera que f et g ne s'annulent pas au voisinage de a — sauf peut-être en a toutes les deux.
- Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\widetilde{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\widetilde{v}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites. Chaque fois qu'on écrira une relation : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, on supposera que : $u_n \neq 0$ et $v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang.

Théorème (La relation « être équivalente à » est une relation d'équivalence) Qu'on parle de fonctions au voisinage d'un point ou de suites, la relation « être équivalente à » est une relation d'équivalence.

✌ **Explication** ✌ Les classes d'équivalence de la relation « être équivalente à » sont exactement les sous-tiroirs dont nous venons de parler. Dire que : $x^2+x \underset{x\to+\infty}{\sim} x^2$, c'est dire que les fonctions $x \longmapsto x^2+x$ et $x \longmapsto x^2$ portent fondamentalement la même charge infinie au voisinage de $+\infty$ — méritent le même sous-tiroir.

Démonstration

- **Réflexivité :** $\lim\limits_a \frac{f}{f} = 1$ donc : $f \underset{a}{\sim} f$.
- **Transitivité :** Si : $f \underset{a}{\sim} g$ et $g \underset{a}{\sim} h$, alors : $\lim\limits_a \frac{f}{g} = 1$ et $\lim\limits_a \frac{g}{h} = 1$, donc : $\lim\limits_a \frac{f}{h} = 1$ par produit, i.e. : $f \underset{a}{\sim} h$.
- **Symétrie :** Si : $f \underset{a}{\sim} g$, alors : $\lim\limits_a \frac{f}{g} = 1$ donc : $\lim\limits_a \frac{g}{f} = 1$, i.e. : $g \underset{a}{\sim} f$. ■

Théorème (Lien limite/équivalence)

- **Fonctions :**
  (i) Si : $f \underset{a}{\sim} g$, alors soit f et g ont toutes les deux une limite en a, en l'occurrence la même, soit aucune de ces deux fonctions ne possède de limite en a.
  (ii) Si : $\lim\limits_a f = \ell$ avec ℓ **RÉEL** et **NON NUL**, alors : $f \underset{a}{\sim} \ell$.
- **Suites :**
  (i) Si : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, alors soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ont toutes les deux une limite, en l'occurrence la même, soit aucune de ces deux suites ne possède de limite.
  (ii) Si : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ avec ℓ **RÉEL** et **NON NUL**, alors : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ell$.

✌ **Explication** ✌

- D'après (i), deux fonctions ou suites qui sont dans le même « tiroir-équivalence » sont aussi dans le même « tiroir-limite », de sorte que les « tiroirs-équivalence » sont bien des **SOUS**-tiroirs des « tiroirs-limite ».
- D'après (ii), pour tout $\ell \in \mathbb{R}^*$, **TOUTE** suite de limite ℓ est équivalente à la suite constante $(\ell)_{n\in\mathbb{N}}$, donc le « tiroir ℓ » n'a pas de sous-tiroir. Nous n'avons par conséquent créé des sous-tiroirs que pour quatre « tiroirs-limite » — le « tiroir $-\infty$ », le « tiroir 0 », le « tiroir $+\infty$ » et le « tiroir sans-limite ».

✖ **Attention !** ✖

$$\lim_a f = \lim_a g \quad \not\Longrightarrow \quad f \underset{a}{\sim} g$$
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n \quad \not\Longrightarrow \quad u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$$

Ne pas comprendre ceci, c'est ne rien comprendre au chapitre.

Par exemple : $\lim_{x\to+\infty} e^x = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$ mais : $e^x \underset{x\to+\infty}{\not\sim} x$. De même : $\lim_{x\to 0} x^2 = \lim_{x\to 0} x = 0$ mais : $x^2 \underset{x\to 0}{\not\sim} x$.

Enfin : $\lim_{n\to+\infty} 2^n = \lim_{n\to+\infty} n = +\infty$ mais : $2^n \underset{n\to+\infty}{\not\sim} n$.

De plus, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède une limite : $\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} u_n$, mais en général : $u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\not\sim} u_n$ — pensez par exemple à la suite $\left(2^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Théorème (Lien petit o/équivalence)

- **Fonctions :** $f \underset{a}{\sim} g \iff f \underset{a}{=} g + o(g)$.
- **Suites :** $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \iff u_n \underset{n\to+\infty}{=} v_n + o(v_n)$.

✌ **Explication** ✌ Résultat essentiel selon lequel : IL Y A TOUJOURS UN PETIT O DANS UNE ÉQUIVALENCE, un petit o caché qui contrôle l'approximation de f par g ou de u_n par v_n.

Démonstration $f \underset{a}{\sim} g \iff \lim_a \dfrac{f}{g} = 1 \iff \lim_a \dfrac{f-g}{g} = 0 \iff f - g \underset{a}{=} o(g)$. ■

Théorème (Lien développement limité/équivalence) Soient $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction, $a \in \overline{D} \cap \mathbb{R}$, $n, p \in \mathbb{N}$ avec $p \leqslant n$ et $a_p, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Si : $f(x) \underset{x\to a}{=} a_p(x-a)^p + \ldots + a_n(x-a)^n + o\big((x-a)^n\big)$ avec : $a_p \neq 0$, alors : $f(x) \underset{x\to a}{\sim} a_p(x-a)^p$.

✌ **Explication** ✌ En résumé, le PREMIER TERME NON NUL d'un développement limité peut tenir lieu d'équivalent. Les équivalents usuels au voisinage de 0 sont ainsi les suivants :

$$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x. \qquad e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x. \qquad (1+x)^\alpha - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \alpha x. \qquad \mathrm{sh}\, x \underset{x\to 0}{\sim} x. \qquad \mathrm{ch}\, x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2}.$$

$$\sin x \underset{x\to 0}{\sim} x. \qquad \cos x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}. \qquad \tan x \underset{x\to 0}{\sim} x. \qquad \mathrm{Arctan}\, x \underset{x\to 0}{\sim} x.$$

Théorème (Nouveaux équivalents usuels au voisinage de 0)

$$\mathrm{Arcsin}\, x \underset{x\to 0}{\sim} x. \qquad \mathrm{Arccos}\, x \underset{x\to 0}{=} \frac{\pi}{2} - x + o(x), \quad \text{donc :} \quad \mathrm{Arccos}\, x - \frac{\pi}{2} \underset{x\to 0}{\sim} -x. \qquad \mathrm{th}\, x \underset{x\to 0}{\sim} x.$$

Démonstration Les fonctions Arcsin, Arccos et th sont de classe $\mathscr{C}^1$ au voisinage de 0, on peut donc utiliser la formule de Taylor-Young à l'ordre 1. ■

✖ **Attention !** ✖ Ne présentez jamais vos équivalents comme une SOMME DE TERMES DE TAILLES DISTINCTES car dans une telle somme en réalité, seul le plus grand des termes compte, les autres sont négligeables.

À la place de : $e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$, n'écrivez donc pas : $e^x \underset{x\to 0}{\sim} 1 + x$. Cette équivalence est correcte, mais comme : $x \underset{x\to 0}{=} o(1)$, écrire que : $e^x \underset{x\to 0}{\sim} 1 + x$ c'est écrire ceci : $e^x \underset{x\to 0}{\sim} 1$ — résultat moins précis ! En d'autres termes, la précision de l'équivalence : $e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$ est $o(x)$ alors que la précision de l'équivalence : $e^x \underset{x\to 0}{\sim} 1 + x$ est $o(1)$.

3.2 Opérations sur les équivalents

Théorème **(Dans les petits o, on peut remplacer toute fonction/suite par une fonction/suite équivalente)**

- **Fonctions :** Si : $f \underset{a}{=} \mathrm{o}(g)$ et $g \underset{a}{\sim} \widetilde{g}$, alors : $f \underset{a}{=} \mathrm{o}(\widetilde{g})$.
- **Suites :** Si : $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(v_n)$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \widetilde{v}_n$, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(\widetilde{v}_n)$.

Démonstration Si : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{v_n}{\widetilde{v}_n} = 1$, alors : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{\widetilde{v}_n} = 0$ par produit. ■

Exemple $\sin(\sin x) \underset{x\to0}{=} \sin\big(x+\mathrm{o}(x)\big) \underset{x\to0}{=} \big(x+\mathrm{o}(x)\big) + \underline{\underline{\mathrm{o}\Big(\overbrace{x+\mathrm{o}(x)}^{\underset{x\to0}{\sim} x}\Big)}} \underset{x\to0}{=} \big(x+\mathrm{o}(x)\big)+\mathrm{o}(x) \underset{x\to0}{=} x+\mathrm{o}(x)$.

On aurait pu procéder autrement en composant l'équivalence : $\sin x \underset{x\to0}{\sim} x$ avec elle-même : $\sin(\sin x) \underset{x\to0}{\sim} \sin x \underset{x\to0}{\sim} x$.

Théorème **(Avec le produit, l'inverse et les puissances, tout va bien)**

- **Fonctions :** Si : $f \underset{a}{\sim} \widetilde{f}$ et $g \underset{a}{\sim} \widetilde{g}$, alors : $fg \underset{a}{\sim} \widetilde{f}\widetilde{g}$.
  Si : $f \underset{a}{\sim} g$ et si f ne s'annule pas au voisinage de a, alors : $\dfrac{1}{f} \underset{a}{\sim} \dfrac{1}{g}$.
  Si : $f \underset{a}{\sim} g$ et si f est strictement positive au voisinage de a : $f^\alpha \underset{a}{\sim} g^\alpha$ pour tout $\alpha\in\mathbb{R}$.
- **Suites :** Si : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \widetilde{u}_n$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \widetilde{v}_n$, alors : $u_nv_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \widetilde{u}_n\widetilde{v}_n$.
  Si : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et si : $u_n \neq 0$ à partir d'un certain rang, alors : $\dfrac{1}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{v_n}$.
  Si : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et si : $u_n > 0$ à partir d'un certain rang : $u_n^\alpha \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n^\alpha$ pour tout $\alpha\in\mathbb{R}$.

Théorème **(Avec la composition à droite et les suites extraites, tout va bien)**

- **Fonctions :** Soient $b\in\overline{\mathbb{R}}$ et φ une fonction définie au voisinage de b à valeurs dans I. Si : $f \underset{a}{\sim} g$ et $\displaystyle\lim_b \varphi = a$, alors : $f\circ\varphi \underset{b}{\sim} g\circ\varphi$.
- **Suites :** Soit $\varphi : \mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}$ une fonction strictement croissante. Si : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, alors : $u_{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{\sim} v_{\varphi(n)}$.

✖ **Attention !** ✖ Avec les équivalents, deux opérations sont **formellement interdites**.

- **Somme :** $x+1 \underset{x\to+\infty}{\sim} x$ et $3-x \underset{x\to+\infty}{\sim} 1-x$, mais : $4 \underset{x\to+\infty}{\cancel{\sim}} 1$.
- **Composition à gauche :** $n \underset{n\to+\infty}{\sim} n+\ln n$, mais si on compose par $x\longmapsto \mathrm{e}^x$ à gauche : $\mathrm{e}^n \underset{n\to+\infty}{\cancel{\sim}} n\mathrm{e}^n$.

Exemple $\sqrt{x^2+\ln x} - x \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln x}{2x}$.

Démonstration $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2} = 0$, donc : $\sqrt{x^2+\ln x}-x = x\left(\sqrt{1+\dfrac{\ln x}{x^2}}-1\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} x\times\dfrac{\ln x}{2x^2} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln x}{2x}$.

Exemple $\mathrm{e}^{\tan x} - \sqrt{1+x^2} \underset{x\to0}{\sim} x$.

Démonstration Nous ne savons pas ici à l'avance à quel ordre nous devons pousser nos développements limités de $\mathrm{e}^{\tan x}$ et $\sqrt{1+x^2}$ lorsque x tend vers 0, nous devons donc avancer à tâtons, tâcher d'anticiper et faire preuve d'intuition.

$$\mathrm{e}^{\tan x}-\sqrt{1+x^2} \underset{x\to0}{=} \mathrm{e}^{x+\mathrm{o}(x)}-\big(1+\mathrm{o}(x)\big) \underset{x\to0}{=} \big(1+x+\mathrm{o}(x)\big)-\big(1+\mathrm{o}(x)\big) \underset{x\to0}{=} x+\mathrm{o}(x),\qquad \text{donc en effet : } \mathrm{e}^{\tan x}-\sqrt{1+x^2} \underset{x\to0}{\sim} x.$$

Exemple $\ln\left(1+x^2\right)-\sin^2 x \underset{x\to 0}{\sim} -\dfrac{x^4}{6}$.

Démonstration Le tatônnement s'impose, espérons juste que le premier terme non nul n'est pas d'ordre 50.

$$\ln\left(1+x^2\right)-\sin^2 x \underset{x\to 0}{=} \left(x^2-\frac{x^4}{2}+\mathrm{o}\left(x^4\right)\right)-\left(x-\frac{x^3}{6}+\mathrm{o}\left(x^4\right)\right)^2 \underset{x\to 0}{=} \left(x^2-\frac{x^4}{2}+\mathrm{o}\left(x^4\right)\right)-\left(x^2-\frac{x^4}{3}+\mathrm{o}\left(x^4\right)\right) \underset{x\to 0}{=} -\frac{x^4}{6}+\mathrm{o}\left(x^4\right).$$

Exemple $\mathrm{ch}\, \mathrm{e}^{-n}-\cos\dfrac{\pi}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\pi^2}{2n^2}$.

Démonstration Nous allons composer les limites : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{-n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\pi}{n} = 0$ avec les développements limités suivants au voisinage de 0 : $\mathrm{ch}\, x \underset{x\to 0}{=} 1+\mathrm{o}(x)$ et $\cos x \underset{x\to 0}{=} 1-\dfrac{x^2}{2}+\mathrm{o}\left(x^2\right)$. Pourquoi ces ordres 1 pour ch et 2 pour cos ? Parce que ça marche, mais on ne peut le comprendre qu'en essayant.

$$\begin{aligned}\mathrm{ch}\, \mathrm{e}^{-n}-\cos\frac{\pi}{n} &\underset{n\to+\infty}{=} \left(1+\mathrm{o}\left(\mathrm{e}^{-n}\right)\right)-\left(1-\frac{\pi^2}{2n^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)-\left(-\frac{\pi^2}{2n^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \qquad \text{car : } \mathrm{e}^{-n} \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\\ &\underset{n\to+\infty}{=} \frac{\pi^2}{2n^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right), \qquad \text{donc en effet : } \mathrm{ch}\, \mathrm{e}^{-n}-\cos\frac{\pi}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi^2}{2n^2}.\end{aligned}$$

Exemple $\dfrac{\ln(n+1)}{n}-\dfrac{\ln n}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln n}{n^2}$.

Démonstration $\dfrac{\ln(n+1)}{n}-\dfrac{\ln n}{n+1} = \dfrac{(n+1)\ln(n+1)-n\ln n}{n(n+1)}$. Il nous suffit de trouver séparément un équivalent du numérateur et un équivalent du dénominateur. Or :

$$(n+1)\ln(n+1)-n\ln n = (n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\ln n \underset{n\to+\infty}{=} (n+1)\left(\frac{1}{n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)+\ln n \underset{n\to+\infty}{=} 1+\frac{1}{n}+\mathrm{o}(1)+\ln n \underset{n\to+\infty}{=} \ln n+\mathrm{o}(\ln n),$$

donc : $(n+1)\ln(n+1)-n\ln n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$, et comme : $n(n+1) \underset{n\to+\infty}{\sim} n^2$, on obtient bien par quotient le résultat annoncé.

4 Domination

Définition (Domination)

- **Fonctions :** Soient $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions et $a \in \overline{D}$. On suppose que g ne s'annule pas au voisinage de a — sauf peut-être en a avec dans ce cas : $f(a)=0$. On dit que f est *dominée par g au voisinage de a* si la fonction $\dfrac{f}{g}$ est bornée au voisinage de a, ce qu'on note : $f \underset{a}{=} \mathrm{O}(g)$ ou $f(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{O}\big(g(x)\big)$, « *$f$ est un grand* O *de g au voisinage de a* ».
- **Suites :** Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites. On suppose : $v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang N. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *dominée par* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n\geqslant N}$ est bornée, ce qu'on note : $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}(v_n)$, « *$u_n$ est un grand* O *de v_n* ».

✌ **Explication** ✌ En particulier, pour les fonctions : $\boxed{\mathrm{O}(1) = \text{« une fonction bornée au voisinage de } a \text{ »},}$ et pour les suites : $\boxed{\mathrm{O}(1) = \text{« une suite bornée ».}}$

Exemple $\sin\dfrac{1}{x} \underset{x\to 0}{=} \mathrm{O}(1)$. $\qquad \dfrac{(-1)^n}{n-\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{n}\right)$. $\qquad \left\lfloor \mathrm{e}^n \right\rfloor \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\mathrm{e}^n\right)$.

Théorème **(Lien grand O/petit o/équivalence)**

- **Fonctions :** Soient $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions et $a \in \overline{D}$. On suppose que g ne s'annule pas au voisinage de a — sauf peut-être en a avec dans ce cas : $f(a) = 0$.
  Si : $f \underset{a}{=} o(g)$ ou $f \underset{a}{\sim} g$, alors : $f \underset{a}{=} O(g)$.
- **Suites :** Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites. On suppose : $v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang.
  Si : $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$ ou $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, alors : $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n)$.

Démonstration Si $\lim\limits_a \frac{f}{g}$ vaut 0 ou 1, la fonction $\frac{f}{g}$ est bornée au voisinage de a. ■

✖ **Attention !** ✖ La domination n'implique ni la négligeabilité, ni l'équivalence — c'est le contraire qui est vrai. Par exemple : $2x^2 \underset{x\to 0}{=} O(x^2)$, mais : $2x^2 \cancel{\underset{x\to+\infty}{=}} o(x^2)$ et $2x^2 \cancel{\underset{x\to+\infty}{\sim}} x^2$.

Exemple

- Puisque : $e^x \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$, alors : $e^x \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + O(x^3)$. Ce résultat est plus fin qu'un développement limité à l'ordre 2, mais plus grossier qu'un développement limité à l'ordre 3.
- Puisque : $\cos x \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$, alors : $\cos x \underset{x\to 0}{=} 1 + O(x^2)$. Ce résultat est plus fin qu'un développement limité à l'ordre 1, mais plus grossier qu'un développement limité à l'ordre 2.

Les théorèmes du paragraphe « Opérations sur les petits o » sont tous vrais avec des grands O à la place des petits o :

— les grands O absorbent les constantes multiplicatives,

— la somme de deux grands O est un grand O,

— un grand O d'un grand O est un grand O,

— avec le produit, tout va bien,

— avec la composition **À DROITE** et les suites extraites, tout va bien.

5 Exemples et applications

5.1 Série harmonique et constante d'Euler

Théorème **(Développement asymptotique de la série harmonique et constante d'Euler)**

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{=} \ln n + \gamma + o(1)$$ pour un certain réel γ appelé la *constante d'Euler* : $\gamma \approx 0,577$.

✌ **Explication** ✌ En particulier : $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{=} \ln n + O(1)$, et même : $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$.

Démonstration Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1)$ et $v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$.

- On rappelle à toutes fins utiles que pour tout $x \in]-1, +\infty[$: $\ln(1+x) \leqslant x$ ★.

- Nous allons montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes. Cela montrera bien que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, disons de limite γ. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:
  — La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ décroissante car pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:
$$u_{n+1}-u_n=\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}-\ln(n+2)-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}+\ln(n+1)=\frac{1}{n+1}-\ln\frac{n+2}{n+1}=\frac{1}{n+1}-\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\overset{\star}{\geqslant}0$$
$$\text{et :}\quad v_{n+1}-v_n=\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}-\ln(n+1)-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}+\ln n=\frac{1}{n+1}+\ln\frac{n}{n+1}=-\frac{-1}{n+1}+\ln\left(1+\frac{-1}{n+1}\right)\overset{\star}{\leqslant}0.$$
  — Enfin : $\quad v_n-u_n=\ln(n+1)-\ln n=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0.$ ■

5.2 Calculs de limites

Exemple $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}-x}{x^5}=+\infty.$

Démonstration Forme indéterminée « $\frac{0}{0}$ » au premier abord. Comme il est facile de diviser les équivalents, nous allons chercher un équivalent du numérateur et un équivalent du dénominateur séparément. Ici encore, pas possible de savoir à l'avance à quel ordre nous devons pousser nos développements limités au numérateur !
$$\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}-x\underset{x\to 0}{=}\left(1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}+\mathrm{o}\big(x^3\big)\right)-\left(1-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}-\frac{x^3}{16}+\mathrm{o}\big(x^3\big)\right)-x\underset{x\to 0}{=}\frac{x^3}{8}+\mathrm{o}\big(x^3\big),$$
donc : $\quad\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}-x\underset{x\to 0}{\sim}\frac{x^3}{8},\quad$ et enfin : $\quad\displaystyle\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}-x}{x^5}\underset{x\to 0}{\sim}\frac{1}{8x^2}\underset{x\to 0}{\longrightarrow}+\infty.$

Exemple $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}n\left(\frac{\pi}{2}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}-\operatorname{Arccos}\frac{1}{n}\right)=\frac{\pi}{2}+1.$

Démonstration Forme indéterminée « $+\infty\times 0$ » au premier abord, mais : $\quad\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0,\quad$ donc :
$$n\left(\frac{\pi}{2}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}-\operatorname{Arccos}\frac{1}{n}\right)\underset{n\to+\infty}{=}n\left(\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{1}{n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)-\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)\underset{n\to+\infty}{=}n\left(\frac{\pi}{2n}+\frac{1}{n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$
$$\underset{n\to+\infty}{=}\frac{\pi}{2}+1+\mathrm{o}(1).$$
C'est le résultat annoncé car $\mathrm{o}(1)$ signifie « suite de limite nulle ».

Exemple $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[5]{1+6x}-\sqrt[3]{1+x}}{3\sin x-\ln(1+x)}=\frac{13}{30}.$

Démonstration Forme indéterminée « $\frac{0}{0}$ » au premier abord. On cherche séparément un équivalent du numérateur et un équivalent du dénominateur.
$$\sqrt[5]{1+6x}-\sqrt[3]{1+x}\underset{x\to 0}{=}\left(1+\frac{6x}{5}+\mathrm{o}(x)\right)-\left(1+\frac{x}{3}+\mathrm{o}(x)\right)\underset{x\to 0}{=}\frac{13x}{15}+\mathrm{o}(x),\qquad\text{donc :}\quad\sqrt[5]{1+6x}-\sqrt[3]{1+x}\underset{x\to 0}{\sim}\frac{13x}{15}.$$
$$3\sin x-\ln(1+x)\underset{x\to 0}{=}3\big(x+\mathrm{o}(x)\big)-\big(x+\mathrm{o}(x)\big)\underset{x\to 0}{=}2x+\mathrm{o}(x),\qquad\text{donc :}\quad 3\sin x-\ln(1+x)\underset{x\to 0}{\sim}2x.$$
Conclusion : $\quad\displaystyle\frac{\sqrt[5]{1+6x}-\sqrt[3]{1+x}}{3\sin x-\ln(1+x)}\underset{x\to 0}{\sim}\frac{\frac{13x}{15}}{2x}\underset{x\to 0}{\sim}\frac{13}{30}\underset{x\to 0}{\longrightarrow}\frac{13}{30}.$

Exemple Pour tous $a,b>0$: $\quad\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}}{2}\right)^x=\sqrt{ab}.$

Démonstration D'abord : $\quad\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0,\quad$ donc : $\quad a^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^{\frac{\ln a}{x}}\underset{x\to+\infty}{=}1+\frac{\ln a}{x}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right).\quad$ Pareil pour $b^{\frac{1}{x}}$.

Ensuite : $\quad\displaystyle\frac{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}}{2}\underset{x\to+\infty}{=}1+\frac{\ln a}{2x}+\frac{\ln b}{2x}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right)\underset{x\to+\infty}{=}1+\frac{\ln\sqrt{ab}}{x}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right).$

Et un coup de logarithme à gauche : $\ln \dfrac{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}}{2} \underset{x\to+\infty}{=} \ln\left(1+\dfrac{\ln\sqrt{ab}}{x}+\mathrm{o}\left(\dfrac{1}{x}\right)\right) \underset{x\to+\infty}{=} \dfrac{\ln\sqrt{ab}}{x}+\mathrm{o}\left(\dfrac{1}{x}\right),$

puis on multiplie par x : $x\ln \dfrac{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}}{2} \underset{x\to+\infty}{=} \ln\sqrt{ab}+\mathrm{o}(1),$ et donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln \dfrac{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}}{2} = \ln\sqrt{ab}.$

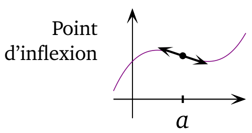
On compose enfin à gauche par la fonction exponentielle.

5.3 Position locale d'une fonction par rapport à une tangente

✌ **Explication** ✌ Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $a \in D$. On suppose que f est définie au voisinage de a à gauche et à droite et admet un développement limité au voisinage de a : $f(x) \underset{x\to a}{=} a_0+a_1(x-a)+a_n(x-a)^n+\mathrm{o}\big((x-a)^n\big)$ avec $n \geqslant 2$ et : $a_n \neq 0$. Nous savons qu'alors : $a_0 = f(a)$ et $a_1 = f'(a)$, donc : $f(x)-f(a)-f'(a)(x-a) \underset{x\to a}{\sim} a_n(x-a)^n$.

La fonction f admet la droite d'équation : $y = a_0 + a_1(x-a)$ pour tangente en a.

De plus, d'après l'équivalence précédente, la position du graphe de f au voisinage de a par rapport à sa tangente en a dépend du signe de la fonction $x \longmapsto a_n(x-a)^n$ au voisinage de a.



— Si n est pair, $x \longmapsto a_n(x-a)^n$ a le signe de a_n au voisinage de a. Le graphe de f est situé au-dessus de sa tangente en a au voisinage de a si : $a_n > 0$ et en-dessous si : $a_n < 0$. Si de plus : $a_1 = 0$, f possède un extremum local en a — un maximum local si : $a_n < 0$, un minimum local si : $a_n > 0$.

— Si n est impair, $x \longmapsto a_n(x-a)^n$ change de signe en a, donc le graphe de f traverse sa tangente en a, on dit que f possède en a un *point d'inflexion*.

Exemple La fonction $x \overset{f}{\longmapsto} \dfrac{x\sin x}{1+x^2}$ possède un minimum local en 0.

Démonstration Nous cherchons le premier terme non nul d'ordre au moins 2 dans le développement limité de f au voisinage de 0. Pas possible de savoir à l'avance à quel ordre nous allons trouver ce terme, nous pouvons juste espérer qu'il n'est pas trop grand. Ici, tout simplement : $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} x^2$, donc : $f(x) \underset{x\to 0}{=} x^2+\mathrm{o}\big(x^2\big)$. En particulier, f est positive au voisinage de 0 avec : $f(0) = 0$, donc possède un minimum local en 0.

Exemple La fonction $x \overset{g}{\longmapsto} \dfrac{\ln(1-2x)}{1+x}$ possède en 0 un point d'inflexion de tangente la droite d'équation : $y = -2x$.

Démonstration Un calcul à l'ordre 2 ne suffit pas ici, on pousse à l'ordre 3 — mais pas moyen de le deviner à l'avance !

$$g(x) \underset{x\to 0}{=} \left(-2x-2x^2-\frac{8x^3}{3}+\mathrm{o}\big(x^3\big)\right)\big(1-x+x^2+\mathrm{o}\big(x^2\big)\big) \underset{x\to 0}{=} -2x-\frac{8x^3}{3}+\mathrm{o}\big(x^3\big).$$

Comme annoncé, la tangente de g en 0 a pour équation : $y = -2x$, et comme : $g(x)+2x \underset{x\to 0}{\sim} -\dfrac{8x^3}{3}$, le graphe de g est au-dessus de sa tangente en 0 au voisinage de 0 à gauche et en-dessous à droite — point d'inflexion !

5.4 Asymptotes d'une fonction en $\pm\infty$

Définition (Asymptote d'une fonction en $\pm\infty$) Soit f une fonction réelle définie au voisinage de $+\infty$ — on ferait de même en $-\infty$ — et $a, b \in \mathbb{R}$. On dit que f *admet la droite d'équation :* $y = ax+b$ *pour asymptote au voisinage de* $+\infty$ si : $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} ax+b+\mathrm{o}(1)$.

✌ **Explication** ✌ En particulier : $\boxed{a = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{et} \quad b = \lim_{x \to +\infty} \big(f(x) - ax\big).}$

Exemple La fonction $x \longmapsto \dfrac{x^3 + \lfloor x \rfloor^2}{x^2+2}$ admet la droite d'équation : $y = x+1$ pour asymptote au voisinage de $\pm\infty$.

Démonstration Tout d'abord : $\lfloor x \rfloor \underset{x\to\pm\infty}{=} x + \mathrm{O}(1)$, donc : $\lfloor x \rfloor^2 \underset{x\to\pm\infty}{=} x^2 + \mathrm{O}(x)$. Conclusion :

$$\frac{x^3 + \lfloor x \rfloor^2}{x^2+2} = \frac{x^3 + x^2 + \mathrm{O}(x)}{x^2\left(1 + \dfrac{2}{x^2}\right)} \underset{x\to\pm\infty}{=} \left(x + 1 + \mathrm{O}\left(\frac{1}{x}\right)\right)\left(1 - \frac{2}{x^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \underset{x\to\pm\infty}{=} x+1+\mathrm{O}\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x\to\pm\infty}{=} x+1+\mathrm{o}(1).$$

Exemple La fonction $x \overset{f}{\longmapsto} \dfrac{x^2}{x+1}\,\mathrm{e}^{\cos\frac{1}{x}}$ possède une asymptote au voisinage de $+\infty$ d'équation : $y = \mathrm{e}x - \mathrm{e}$ et son graphe est situé au-dessus de cette asymptote au voisinage de $+\infty$.

Démonstration

- On peut se ramener au voisinage de 0 grâce au changement de variable : $h = \dfrac{1}{x}$ — il ne faut pas toujours faire CE changement de variable, tout dépend de ce à quoi f ressemble. Il s'agit donc d'étudier la fonction $h \longmapsto f\left(\dfrac{1}{h}\right)$ au voisinage de 0.
- Se demander si f possède une asymptote au voisinage de $+\infty$, c'est alors se demander s'il existe des réels a et b pour lesquels : $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} ax + b + \mathrm{o}(1)$, ou encore : $f\left(\dfrac{1}{h}\right) \underset{h\to 0}{=} \dfrac{a}{h} + b + \mathrm{o}(1)$.
- Si on veut plus précisément connaître la position du graphe de f par rapport à son asymptote au voisinage de $+\infty$, il suffit de connaître un équivalent de $x \longmapsto f(x) - (ax+b)$ au voisinage de $+\infty$, i.e. de trouver un terme plus fin que $\mathrm{o}(1)$.
- C'est parti : $$f\left(\frac{1}{h}\right) = \frac{\mathrm{e}^{\cos h}}{h(1+h)} \underset{h\to 0}{=} \frac{1}{h}\left(1 - h + h^2 + \mathrm{o}\big(h^2\big)\right)\mathrm{e}^{1 - \frac{h^2}{2} + \mathrm{o}(h^2)}$$ $$\underset{h\to 0}{=} \frac{\mathrm{e}}{h}\left(1 - h + h^2 + \mathrm{o}\big(h^2\big)\right)\left(1 - \frac{h^2}{2} + \mathrm{o}\big(h^2\big)\right) \underset{h\to 0}{=} \frac{\mathrm{e}}{h} - \mathrm{e} + \frac{\mathrm{e}h}{2} + \mathrm{o}(h).$$

  Après réécriture en x : $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{e}x - \mathrm{e} + \dfrac{\mathrm{e}}{2x} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{x}\right)$. En particulier : $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{e}x - \mathrm{e} + \mathrm{o}(1)$, donc f admet la droite d'équation : $y = \mathrm{e}x - \mathrm{e}$ pour asymptote au voisinage de $+\infty$. Enfin, comme : $f(x) - (\mathrm{e}x - \mathrm{e}) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{\mathrm{e}}{2x}$ est positif au voisinage de $+\infty$, le graphe de f est au-dessus de son asymptote au voisinage de $+\infty$.