

ANALYSE ASYMPTOTIQUE DE NIVEAU 1

Les fonctions qu'on étudie en analyse sont souvent définies sur des intervalles, mais souvent aussi sur des réunions d'intervalles comme \mathbb{R}^* ou $[0, 1] \cup [2, 3]$. Dans ce chapitre, pour simplifier, les lettres D, E, \dots désigneront toujours des réunions finies d'intervalles — mais on pourrait généraliser à certaines réunions infinies d'intervalles comme $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[+ \pi\mathbb{Z}$.

1 NÉGLIGEABILITÉ

1.1 INTRODUCTION

Définition (Négligeabilité)

- **Fonctions** : Soient $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : D \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions et $a \in \overline{D}$. On suppose que g ne s'annule pas au voisinage de a — sauf peut-être en a avec dans ce cas : $f(a) = 0$. On dit que f est *négligeable devant g au voisinage de a* si : $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, ce qu'on note : $f \underset{a}{=} o(g)$ ou $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(g(x))$, « f est un petit o de g au voisinage de a ».
- **Suites** : Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites. On suppose : $v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang. On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est *négligeable devant $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$* si : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$, ce qu'on note : $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(v_n)$, « u_n est un petit o de v_n ».

Exemple $x^2 \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(x^4)$, MAIS : $x^4 \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^2)$. $\frac{1}{x^2} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{x}\right)$, MAIS : $\frac{1}{x} \underset{x \rightarrow 0}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$.
 $n^2 \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(n^4)$. $2^n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(3^n)$. $\frac{1}{n^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right)$.

📌 **Explication** 📌 Les petits o sont la formalisation définitive des « croissances comparées ». Certains infinis sont plus infinis que d'autres, certains zéros sont plus zéros que d'autres. Dire que : $x^2 \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(x^4)$, c'est affirmer l'immensité de x^4 par rapport à x^2 lorsque x est grand, et dire que : $x^4 \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^2)$, c'est affirmer l'infinie petitesse de x^4 par rapport à x^2 lorsque x est petit.

Théorème (Croissances comparées usuelles des fonctions au voisinage de $+\infty$) Soient $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

- Si $\alpha < \beta$: $x^\alpha \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(x^\beta)$.
- Si $\alpha > 0$: $(\ln x)^\beta \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(x^\alpha)$.
- Si $0 < a < b$: $a^x \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(b^x)$.
- Si $a > 1$: $x^\alpha \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(a^x)$.

Théorème (Croissances comparées usuelles des fonctions au voisinage de 0) Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

- Si $\alpha < \beta$: $x^\beta \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^\alpha)$.
- Si $\alpha > 0$: $x^\alpha \underset{x \rightarrow 0}{=} o(|\ln x|^\beta)$.

Théorème (Croissances comparées usuelles des suites) Les croissances comparées usuelles des fonctions en $+\infty$ peuvent bien sûr être exprimées en termes de suites — remplacer x par n .

On a par ailleurs, pour tout $a \in \mathbb{R}$: $a^n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(n!)$.

📖 **Explication** 📖

- Nous avons introduit la notation « petit o » sous sa forme la plus élémentaire — mise en relation de deux fonctions ou de deux suites — mais on la rencontre en réalité le plus souvent sous la forme suivante :

$$f = g + o(h) \quad \text{pour les fonctions} \quad \text{et} \quad u_n = v_n + o(w_n) \quad \text{pour les suites.}$$

Ce qui est affirmé ici, c'est que : $f = g + \varepsilon$ avec : $\varepsilon = o(h)$ et que : $u_n = v_n + \varepsilon_n$ avec : $\varepsilon_n = o(w_n)$, i.e. que $o(h)$ est « UNE certaine fonction négligeable devant h au voisinage de a » et $o(w_n)$ « UNE certaine suite négligeable devant $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ».

- Partons de l'affirmation : $e^x = 1 + x + x^2 + o(x)$, selon laquelle grosso modo, pour x proche de 0 : $e^x \approx 1 + x + x^2$. Cette approximation n'a de sens que si l'on peut y mesurer l'erreur commise. En l'occurrence, ici : $e^x \approx 1 + x + x^2$ À UN $o(x)$ PRÈS. C'est un peu comme quand on dit que : $\pi \approx 3,14$ à 10^{-2} près.

Imaginez justement qu'on vous dise : « π est égal à 3,14012 à 10^{-2} près », vous répondrez naturellement : « Pourquoi pas seulement 3,14 puisqu'on raisonne à 10^{-2} près ? » Et vous aurez raison, raisonner à 10^{-2} près, c'est négliger tout ce qui est plus petit que 10^{-2} . Ainsi l'approximation : $\pi \approx 3,14$ à 10^{-2} près est aussi précise que l'approximation : $\pi \approx 3,141592$ à 10^{-2} près, quand bien même on écrit deux décimales correctes dans un cas et six dans l'autre.

Il se passe la même chose avec les petits o. Comme : $x^2 = o(x)$, la quantité x^2 est inutile dans la relation : $e^x = 1 + x + x^2 + o(x)$ donc nous pouvons lui couper la tête : $e^x = 1 + x + o(x)$. Cette nouvelle proposition n'est ni plus ni moins précise que la précédente mais elle est plus lisible et plus économe.

Tout petit o est un NIVEAU DE PRÉCISION, un SEUIL DE VISIBILITÉ.
De vous-mêmes, À CHAQUE INSTANT, faites le ménage, coupez la tête de tous les « invisibles » !

Théorème (Limites finies et petits o)

- **Fonctions** : Soient $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction, $a \in \overline{D}$ et $\ell \in \mathbb{R}$. Alors : $\lim_a f = \ell \iff f = \ell + o(1)$.

En particulier : $\lim_a f = 0 \iff f = o(1)$. En résumé : $o(1) = \ll \text{une fonction de limite nulle en } a \gg$.

- **Suites** : Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite et $\ell \in \mathbb{R}$. Alors : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \iff u_n = \ell + o(1)$.

En particulier : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0 \iff u_n = o(1)$. En résumé : $o(1) = \ll \text{une suite de limite nulle} \gg$.

Démonstration $\lim_a f = \ell \iff \lim_a \frac{f - \ell}{1} = 0 \iff f - \ell = o(1) \iff f = \ell + o(1)$. ■

1.2 OPÉRATIONS SUR LES PETITS O

En vue des théorèmes du présent paragraphe, introduisons quelques objets une fois pour toutes :

- Soient $f, \tilde{f}, g, \tilde{g}$ et h des fonctions définies sur D et à valeurs dans \mathbb{R} et $a \in \overline{D}$. Chaque fois qu'on écrira une relation : $f = o(g)$, on supposera que g ne s'annule pas au voisinage de a — sauf peut-être en a avec : $f(a) = 0$.
- Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}, (\tilde{u}_n)_{n \in \mathbb{N}}, (v_n)_{n \in \mathbb{N}}, (\tilde{v}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des suites. Chaque fois qu'on écrira une relation : $u_n = o(v_n)$, on supposera que : $v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang.

Théorème (Les petits o absorbent les constantes multiplicatives) Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

- **Fonctions** : Si : $f = o(g)$, alors : $f = o(\lambda g)$ et $\lambda f = o(g)$.
- **Suites** : Si : $u_n = o(v_n)$, alors : $u_n = o(\lambda v_n)$ et $\lambda u_n = o(v_n)$.

Démonstration Si : $\lim_a \frac{f}{g} = 0$, alors : $\lim_a \frac{f}{\lambda g} = 0$ et $\lim_a \frac{\lambda f}{g} = 0$. ■

Exemple Si on admet l'égalité : $e^{\frac{1}{n}} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$, alors : $2e^{\frac{1}{n}} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 2 + \frac{2}{n} + \underline{\underline{2o\left(\frac{1}{n}\right)}}$ $\underset{n \rightarrow +\infty}{=} 2 + \frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Théorème (La somme de deux petits o est un petit o)

- **Fonctions** : Si : $f \underset{a}{=} o(g)$ et $\tilde{f} \underset{a}{=} o(g)$, alors : $f + \tilde{f} \underset{a}{=} o(g)$.
- **Suites** : Si : $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(v_n)$ et $\tilde{u}_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(v_n)$, alors : $u_n + \tilde{u}_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(v_n)$.

Démonstration Si : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\tilde{u}_n}{v_n} = 0$, alors : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n + \tilde{u}_n}{v_n} = 0$ par somme. ■

Exemple Si on admet les égalités : $e^x \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + o(x)$ et $\sin x \underset{x \rightarrow 0}{=} x + o(x)$, alors :

$$e^x + \sin x \underset{x \rightarrow 0}{=} \left(1 + x + o(x)\right) + \left(x + o(x)\right) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + 2x + \underline{\underline{o(x) + o(x)}} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + 2x + o(x).$$

Théorème (Un petit o d'un petit o est un petit o) La relation « être négligeable » est transitive.

- **Fonctions** : Si : $f \underset{a}{=} o(g)$ et $g \underset{a}{=} o(h)$, alors : $f \underset{a}{=} o(h)$.
- **Suites** : Si : $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(v_n)$ et $v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(w_n)$, alors : $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(w_n)$.

Démonstration Si : $\lim_a \frac{f}{g} = 0$ et $\lim_a \frac{g}{h} = 0$, alors : $\lim_a \frac{f}{h} = 0$ par produit. ■

Exemple Si on admet l'égalité : $e^{\frac{1}{n^2}} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, alors comme : $\frac{1}{n^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right)$, il vient :

$$e^{\frac{1}{n^2}} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 + o\left(\frac{1}{n}\right) + \underline{\underline{o\left(o\left(\frac{1}{n}\right)\right)}} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 + o\left(\frac{1}{n}\right) + o\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Théorème (Avec le produit, tout va bien)

- **Fonctions** : Si : $f \underset{a}{=} o(g)$ et $\tilde{f} \underset{a}{=} o(\tilde{g})$, alors : $f\tilde{f} \underset{a}{=} o(g\tilde{g})$.
Si : $f \underset{a}{=} o(g)$, alors : $fh \underset{a}{=} o(gh)$.
- **Suites** : Si : $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(v_n)$ et $\tilde{u}_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(\tilde{v}_n)$, alors : $u_n\tilde{u}_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(v_n\tilde{v}_n)$.
Si : $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(v_n)$, alors : $u_n w_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(v_n w_n)$.

Exemple Si on admet les égalités : $e^x \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + o(x)$ et $\sin x \underset{x \rightarrow 0}{=} x + o(x)$, alors :

$$e^x \sin x \underset{x \rightarrow 0}{=} \left(1 + x + o(x)\right) \times \left(x + o(x)\right) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + o(x) + x^2 + \underline{\underline{2x o(x)}} + \underline{\underline{o(x) \times o(x)}} \underset{x \rightarrow 0}{=} x + o(x) + \underbrace{x^2 + o(x^2) + o(x^2)}_{\underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^2)} \underset{x \rightarrow 0}{=} x + o(x).$$

Théorème (Avec la composition à DROITE et les suites extraites, tout va bien)

- **Fonctions** : Soient $b \in \overline{\mathbb{R}}$ et φ une fonction définie au voisinage de b à valeurs dans I . Si : $f \underset{a}{=} o(g)$ et $\lim_b \varphi = a$, alors : $f \circ \varphi \underset{b}{=} o(g \circ \varphi)$.
- **Suites** : Soit $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante. Si : $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(v_n)$, alors : $u_{\varphi(n)} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(v_{\varphi(n)})$.

En pratique Pour : $a \neq \pm\infty$, ce résultat permet en particulier de ramener par translation toute relation : $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(g(x))$ au voisinage de a en une relation : $f(a+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} o(g(a+h))$ au voisinage de 0.

Exemple Comme : $\sqrt{x} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(x)$, alors : $\sqrt{\ln x} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(\ln x)$ après composition à DROITE par \ln .

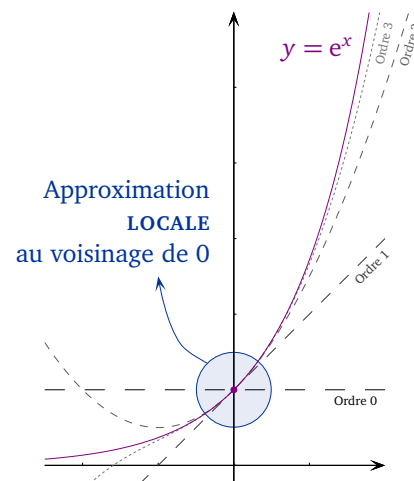
Également, comme : $2^n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(3^n)$, alors : $2^{n^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(3^{n^2})$.

ATTENTION ! Il est FORMELLEMENT INTERDIT de composer une relation de négligeabilité par la gauche. Par exemple : $\ln x \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(x)$, MAIS : $\frac{1}{\ln x} \not\underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{x}\right)$.

2 DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

2.1 INTRODUCTION

Nous cherchons dans ce paragraphe à approximer les fonctions par des fonctions polynomiales au voisinage d'un point, généralement 0. Nous allons par exemple montrer que : $e^x \underset{x \rightarrow 0}{=} 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)$. Ce résultat signifie que la fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à 3 la plus proche de l'exponentielle au voisinage de 0 est la fonction $x \mapsto 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}$. Pour la même raison, comme : $e^x \underset{x \rightarrow 0}{=} 1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)$, la fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à 2 la plus proche de l'exponentielle au voisinage de 0 est la fonction $x \mapsto 1+x+\frac{x^2}{2}$.



Définition (Développement limité) Soient $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction, $a \in \overline{D} \cap \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. On dit que f possède un développement limité à l'ordre n au voisinage de a s'il existe des réels a_0, \dots, a_n pour lesquels :

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} a_0 + a_1(x-a) + \dots + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n).$$

Explication Plus n est grand, plus la quantité $(x-a)^n$ est petite au voisinage de a . Du coup, plus n est grand, plus l'approximation de f obtenue au voisinage de a est précise.

Exemple Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\frac{1}{1-x} \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n x^k + o(x^n) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1+x+x^2+\dots+x^n+o(x^n)$.

Démonstration Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$: $\sum_{k=0}^n x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$,

or : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1-x} = 0$, donc : $\frac{1}{1-x} \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n x^k + x^n \frac{x}{1-x} \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n x^k + x^n o(1) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n x^k + o(x^n)$.

En pratique

- On peut ramener tout développement limité au voisinage de a à un développement limité au voisinage de 0. Précisément, si : $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} a_0 + a_1(x-a) + \dots + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$, alors après composition à DROITE par la fonction $x \mapsto x+a$: $f(x+a) \underset{x \rightarrow 0}{=} a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + o(x^n)$.
- Supposons qu'on ait un développement limité de f à l'ordre n : $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} a_0 + a_1(x-a) + \dots + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$. On dispose alors d'un développement de f à tout ordre $m \leq n$: $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} a_0 + a_1(x-a) + \dots + a_m(x-a)^m + o((x-a)^m)$. Cette opération d'oubli des termes de degré compris entre $m+1$ et n est appelée *troncature à l'ordre m* .

Théorème (Unicité des coefficients d'un développement limité) En cas d'existence, la liste des coefficients d'un développement limité est unique.

Démonstration Soient $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $a \in \overline{D} \cap \mathbb{R}$. Faisons l'hypothèse **ABSURDE** que f possède deux développements limités **DISTINCTS** à l'ordre n au voisinage de a :

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} a_0 + \dots + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n) \underset{x \rightarrow a}{=} b_0 + \dots + b_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$$

avec $a_0, \dots, a_n, b_0, \dots, b_n \in \mathbb{R}$. Nous pouvons alors noter p le plus petit indice pour lequel : $a_p \neq b_p$. Après troncature : $a_p(x-a)^p + o((x-a)^p) \underset{x \rightarrow a}{=} b_p(x-a)^p + o((x-a)^p)$, donc : $a_p - b_p \underset{x \rightarrow a}{=} o(1)$, donc enfin : $a_p = b_p$ — contradiction ! ■

Le résultat suivant est une conséquence immédiate des définitions de la continuité et de la dérivabilité en un point.

Théorème (Lien développement limité/continuité/dérivabilité) Soient $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $a \in D$.

- f est continue en a si et seulement si f possède un développement limité à l'ordre 0 au voisinage de a .
Précisément, dans ce cas : $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} f(a) + o(1)$.
- f est dérivable en a si et seulement si f possède un développement limité à l'ordre 1 au voisinage de a .
Précisément, dans ce cas : $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} f(a) + f'(a)(x-a) + o(x-a)$.

🐇 **Explication** 🐇

Dans un développement limité de f au voisinage de a ,
le coefficient d'ordre 0 est **TOUJOURS** $f(a)$ et le coefficient d'ordre 1 **TOUJOURS** $f'(a)$.

Théorème (Lien développement limité/parité/imparité) On suppose que \overline{D} contient 0 et que D est symétrique par rapport à 0. Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

- Si f est paire et possède un développement limité au voisinage de 0, alors les coefficients de rang impair sont nuls.
- Si f est impaire et possède un développement limité au voisinage de 0, alors les coefficients de rang pair sont nuls.


🐇 **Explication** 🐇 Au voisinage de 0 pour une fonction **IMPAIRE** n'apparaissent réellement que $x, x^3, x^5, x^7 \dots$

Démonstration Sous l'hypothèse que f est paire, commençons par écrire son développement limité à l'ordre n au voisinage de 0 : $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + o(x^n)$ avec $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Composons à droite par $x \mapsto -x$: $f(x) = f(-x) \underset{x \rightarrow 0}{=} a_0 - a_1x + a_2x^2 - a_3x^3 + \dots + (-1)^n a_nx^n + o(x^n)$, et donc aussitôt, par unicité des coefficients : $a_1 = -a_1$ donc : $a_1 = 0$, $a_3 = -a_3$ donc : $a_3 = 0$, etc. ■

2.2 PRIMITIVATION DES DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

On commence par un lemme simple avant la version plus générale.

Théorème (Lemme de primitivation des développements limités) Soient $g \in \mathcal{D}(D, \mathbb{R})$, $a \in D$ et $n \in \mathbb{N}$.

Si : $g'(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o((x-a)^n)$, alors : $g(x) \underset{x \rightarrow a}{=} g(a) + o((x-a)^{n+1})$.
 « Constante de primitivation »

Démonstration Pour tout $x \in D \setminus \{a\}$, g est continue sur $[a, x]$ (ou $[x, a]$) et dérivable sur $]a, x[$ (ou $]x, a[$), donc d'après le théorème des accroissements finis : $\frac{g(x) - g(a)}{x - a} = g'(c_x)$ pour un certain $c_x \in]a, x[$ (ou $]x, a[$). Ce procédé nous fournit une fonction $c : D \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in D \setminus \{a\}$: $|c_x - a| < |x - a|$ — donc : $\lim_{x \rightarrow a} c_x = a$. Aussitôt : $\left| \frac{g(x) - g(a)}{(x - a)^{n+1}} \right| = \left| \frac{g'(c_x)}{(x - a)^n} \right| = \underbrace{\left| \frac{g'(c_x)}{(c_x - a)^n} \right|}_{\xrightarrow{x \rightarrow a} 0} \times \underbrace{\left| \frac{c_x - a}{x - a} \right|^n}_{\leq 1} \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$. ■

Théorème (Primitivation des développements limités) Soient $f \in \mathcal{D}(D, \mathbb{R})$ et $a \in D$. Si f' possède un développement limité à l'ordre n au voisinage de a : $f'(x) \underset{x \rightarrow a}{=} \sum_{k=0}^n a_k (x - a)^k + o((x - a)^n)$ avec $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, alors f possède un développement limité à l'ordre $n + 1$ au voisinage de a : $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} f(a) + \sum_{k=0}^n a_k \frac{(x - a)^{k+1}}{k + 1} + o((x - a)^{n+1})$.
 « Constante de primitivation » \curvearrowright

📖 **Explication** 📖 On peut donc TOUJOURS primitiver terme à terme le développement limité d'une dérivée !

Démonstration La fonction $x \mapsto f(x) - f(a) - \sum_{k=0}^n a_k \frac{(x - a)^{k+1}}{k + 1}$ est dérivable sur D de dérivée la fonction $x \mapsto f'(x) - \sum_{k=0}^n a_k (x - a)^k$. Or ici : $g'(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o((x - a)^n)$, donc d'après le lemme : $g(x) \underset{x \rightarrow a}{=} g(a) + o((x - a)^{n+1})$, et c'est exactement le résultat voulu. ■

Exemple Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\ln(1 + x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + o(x^n) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$.

Démonstration Puisque : $\frac{1}{1 - x} \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^{n-1} x^k + o(x^{n-1})$, alors : $\frac{1}{1 + x} \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^k + o(x^{n-1})$ après composition par $x \mapsto -x$. Primitivons : $\ln(1 + x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + o(x^n)$ sachant que : $\ln 1 = 0$.

Exemple Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\text{Arctan } x \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k + 1} + o(x^{2n+1}) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n + 1} + o(x^{2n+1})$.
 On remarque que les coefficients de rang pair sont tous nuls — évidemment puisque la fonction arctangente est impaire.

Démonstration Puisque : $\frac{1}{1 - x} \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n x^k + o(x^n)$, alors : $\frac{1}{1 + x^2} \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n (-1)^k x^{2k} + o(x^{2n})$ après composition par $x \mapsto -x^2$. Primitivons : $\text{Arctan } x \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k + 1} + o(x^{2n+1})$ sachant que : $\text{Arctan } 0 = 0$.

2.3 FORMULE DE TAYLOR-YOUNG

Théorème (Formule de Taylor-Young) Soient $n \in \mathbb{N}$, $f \in \mathcal{C}^n(D, \mathbb{R})$ et $a \in D$. Alors f possède un développement limité à l'ordre n au voisinage de a . Précisément : $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k + o((x - a)^n)$.

🦋 **Explication** 🦋 Ce résultat est avant tout un théorème d'EXISTENCE de développements limités. Sur cette question, nous disposons à présent de deux équivalences et d'une IMPLICATION (seulement) :

Continuité	⇔	Existence d'un développement limité à l'ordre 0
Dérivabilité	⇔	Existence d'un développement limité à l'ordre 1
Classe \mathcal{C}^n	⇒	Existence d'un développement limité à l'ordre n

Démonstration Par récurrence — au rang n : $\forall f \in \mathcal{C}^n(D, \mathbb{R}), f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + o((x-a)^n)$.

Initialisation : Nous savons déjà que pour toute fonction $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ continue : $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} f(a) + o(1)$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose la proposition vraie au rang n . Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}(D, \mathbb{R})$. Alors f' est de classe \mathcal{C}^n sur D , donc par hypothèse de récurrence :

$$f'(x) \underset{x \rightarrow a}{=} \sum_{k=0}^n \frac{(f')^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + o((x-a)^n) \underset{x \rightarrow a}{=} \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k+1)}(a)}{k!} (x-a)^k + o((x-a)^n).$$

Le théorème de primitivation des développements limités montre aussitôt le résultat souhaité :

$$\begin{aligned} f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} f(a) + \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k+1)}(a)}{k!} \frac{(x-a)^{k+1}}{k+1} + o((x-a)^{n+1}) &\underset{x \rightarrow a}{=} f(a) + \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k+1)}(a)}{(k+1)!} (x-a)^{k+1} + o((x-a)^{n+1}) \\ &\underset{x \rightarrow a}{=} f(a) + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + o((x-a)^{n+1}) \underset{x \rightarrow a}{=} \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + o((x-a)^{n+1}). \end{aligned}$$

Exemple Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $e^x \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$.

Également : $\operatorname{sh} x \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1}) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$

et $\operatorname{ch} x \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n}) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$.

Démonstration

- L'exponentielle est de classe \mathcal{C}^n sur \mathbb{R} donc possède un développement limité à l'ordre n au voisinage de 0 d'après la formule de Taylor-Young, et : $e^x \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{\exp^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$.

- Pour sh : $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{x^k}{k!} - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k \frac{x^k}{k!} + o(x^{2n+1}) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1})$.

Tout simplement, les termes de rang pair se simplifient deux à deux tandis que les termes de rang impair sont comptés deux fois mais aussitôt divisés par 2.

Exemple Pour tous $\alpha \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$(1+x)^\alpha \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6} x^3 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n).$$

Démonstration La fonction $x \mapsto (1+x)^\alpha$ est de classe \mathcal{C}^n sur $] -1, +\infty[$ et pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, sa dérivée $k^{\text{ème}}$ est la fonction $x \mapsto \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}$. On conclut grâce à la formule de Taylor.

🦋 **Explication** 🦋 Ce développement limité de $(1+x)^\alpha$ lorsque x tend vers 0 est une conséquence de la formule du binôme lorsque α est un ENTIER NATUREL. Dans ce cas, en effet, pour tout $k \in \llbracket 0, \alpha \rrbracket$: $\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}$.

Conclusion : quand vous cherchez un développement limité de $(1+x)^5$ à l'ordre 3 lorsque x tend vers 0, utilisez simplement la formule du binôme que vous connaissez bien !

$$(1+x)^5 = 1 + 5x + 10x^2 + 10x^3 + 5x^4 + x^5 = 1 + 5x + 10x^3 + o(x^3).$$

Exemple Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sin x \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1}) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$$

et

$$\cos x \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n}) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}).$$


Démonstration Pour tous $k \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$: $\sin^{(k)}(x) = \sin\left(x + \frac{k\pi}{2}\right)$ et $\cos^{(k)}(x) = \cos\left(x + \frac{k\pi}{2}\right)$,
 donc : $\begin{cases} \sin^{(2k)}(0) = 0 \\ \sin^{(2k+1)}(0) = (-1)^k \end{cases}$ et $\begin{cases} \cos^{(2k)}(0) = (-1)^k \\ \cos^{(2k+1)}(0) = 0. \end{cases}$ On conclut grâce à la formule de Taylor-Young.

Exemple $\tan x \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$.

On peut déterminer explicitement un développement limité de tangente à tout ordre au voisinage de 0, mais le résultat est compliqué et hors programme.

Démonstration La fonction tangente est de classe \mathcal{C}^3 sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ donc possède un développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 d'après la formule de Taylor-Young. Il reste à calculer ses quatre premières dérivées en 0.

$$\begin{aligned} \tan 0 = 0, \quad \tan' = 1 + \tan^2 \quad \text{donc : } \tan'(0) = 1, \quad \tan'' = 2 \tan \tan' = 2 \quad \text{donc : } \tan''(0) = 0 \\ \text{et} \quad \tan''' = 2 \tan'^2 + 2 \tan \tan'' \quad \text{donc : } \tan'''(0) = 2. \end{aligned}$$

 **En pratique**  (**Dérivation des développements limités**) Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $f \in \mathcal{C}^n(D, \mathbb{R})$ et $a \in D$. D'après la formule de Taylor-Young, f possède au voisinage de a un développement limité à l'ordre n et f' un développement à l'ordre $n-1$:

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + o((x-a)^n) \quad \text{et} \quad f'(x) \underset{x \rightarrow a}{=} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(a)}{k!} (x-a)^k + o((x-a)^{n-1}).$$

Il se trouve alors — essayez, ça marche — que le développement limité de f' s'obtient en dérivant terme à terme celui de f .

✗ ATTENTION ! ✗ ON NE PEUT PAS TOUJOURS DÉRIVER UN DÉVELOPPEMENT LIMITÉ. On le peut à l'ordre n pour une fonction DE CLASSE \mathcal{C}^n , i.e. quand on peut appliquer la formule de Taylor-Young.

Exemple Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\frac{1}{(1-x)^2} \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n (k+1)x^k + o(x^n) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots + (n+1)x^n + o(x^n)$.

Démonstration Comme $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ est de classe \mathcal{C}^{n+1} sur $]-\infty, 1[$, on n'a qu'à dériver son développement limité à l'ordre $n+1$ au voisinage de 0 : $\frac{1}{1-x} \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^{n+1} x^k + o(x^{n+1}) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{n+1} + o(x^{n+1})$.

2.4 DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS USUELS

Les formules du tableau qui suit doivent être connues PAR CŒUR sans délai et sans la moindre hésitation.

Pour les fonctions paires, les développements limités sont donnés à l'ordre $2n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, mais par exemple, puisque vous connaissez un développement limité de la fonction cosinus au voisinage de 0 aux ordres 0, 2, 4, 6... , bien sûr que vous en connaissez un à l'ordre 3, il suffit de tronquer au bon endroit : $\cos x \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$. Notez bien que ce développement est PLUS FIN que le développement à l'ordre 2 : $\cos x \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$. Sur le développement à l'ordre 3, on ne voit pas de terme d'ordre 3 mais ce n'est qu'une impression, IL Y A UN TERME D'ORDRE 3, avec un coefficient 0. À l'ordre 2, c'est différent, on ne voit pas de terme d'ordre 3 parce qu'un tel terme est réellement INVISIBLE à ce niveau de précision.

$\frac{1}{1-x} \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n x^k + o(x^n) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + x^2 + \dots + x^n + o(x^n)$
$\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + o(x^n) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$
$e^x \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$
$(1+x)^\alpha \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6} x^3 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n)$
$\sin x \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1}) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$
$\cos x \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n}) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$
$\text{Arctan } x \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+1}) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1})$
$\tan x \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$
$\text{sh } x \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1}) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$
$\text{ch } x \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n}) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$

2.5 OPÉRATIONS SUR LES DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

Exemple $e^x \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$, donc : $e^{x^3} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x^3 + \frac{x^6}{2} + o(x^6)$.

De même : $\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$, donc : $\ln(1+x^2) \underset{x \rightarrow 0}{=} x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4)$.

Conclusion : quand on remplace simplement x par x^p dans un développement limité, l'ordre du résultat est simplement multiplié par p . Nous verrons plus loin que la situation est plus compliquée pour la composition en général.

Exemple On veut un développement limité de $\frac{\ln(1+x^2)}{x}$ à l'ordre 5 lorsque x tend vers 0.

Démonstration Pour commencer : $\frac{\ln(1+x^2)}{x} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{x^2 + \dots + o(x^6)}{x}$. Pour obtenir un ordre 5, il nous faut un numérateur à l'ordre 6, et pour cela, on peut partir d'un développement limité de $\ln(1+x)$ à l'ordre 3.

$$\frac{\ln(1+x^2)}{x} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} + o(x^6)}{x} \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{3} + o(x^5).$$

Exemple On veut un développement limité de $e^x \cos x$ à l'ordre 4 lorsque x tend vers 0.

Démonstration

- **Échec** : $e^x \cos x \underset{x \rightarrow 0}{=} \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + o(x^2)$. Pas assez fin !
↑
C'est irrémédiable, un $o(x^2)$ apparaît. Ordre 2 × ordre 2 ~~×~~ ordre 4

En développant, on voit apparaître des $o(x^2)$, des $o(x^3)$ et des $o(x^4)$, DONC le calcul est mené à la précision $o(x^2)$.

- **Succès** : $e^x \cos x \underset{x \rightarrow 0}{=} \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right) \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{6} + o(x^4)$.

Exemple On veut un développement limité de $\ln(1+x)\sin x$ à l'ordre 4 lorsque x tend vers 0.

Démonstration

• **Demi-échec :**
$$\ln(1+x)\sin x \underset{x \rightarrow 0}{=} \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)\right) \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)$$

$$\underset{x \rightarrow 0}{=} x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{6} - \frac{x^5}{6} + o(x^5).$$
 Cette fois c'est trop fin !

Trop de finesse vaut mieux que pas assez, mais nous avons fait trop de calculs.

• **Succès :**
$$\ln(1+x)\sin x \underset{x \rightarrow 0}{=} \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) \underset{x \rightarrow 0}{=} x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{6} + o(x^4).$$

Exemple On veut un développement limité de $e^x \sin(x^2)$ à l'ordre 7 lorsque x tend vers 0.

Démonstration On ne va pas tâtonner chaque fois ! Tâchons d'anticiper. Ce qui compte, ce sont les premiers termes des deux quantités multipliées et l'ordre 7 auquel on veut aboutir.

$$e^x \sin(x^2) \underset{x \rightarrow 0}{=} \left(1 + \dots + o(x^{\dots})\right) \left(x^2 + \dots + o(x^{\dots})\right).$$

Il nous faut ici un $o(x^5)$. \uparrow \uparrow Il nous faut ici un $o(x^7)$.

Or, pour avoir un développement limité de $\sin(x^2)$ à l'ordre 7, il faut partir d'un développement limité de $\sin x$ à l'ordre 4. Le reste n'est qu'un calcul :

$$e^x \sin(x^2) \underset{x \rightarrow 0}{=} \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)\right) \left(x^2 - \frac{x^6}{6} + o(x^7)\right)$$

$$\underset{x \rightarrow 0}{=} x^2 + x^3 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^5}{6} - \frac{x^6}{8} - \frac{19x^7}{120} + o(x^7).$$

Exemple On veut un développement limité de $(\text{Arctan } x)^2 \cos x$ à l'ordre 5 lorsque x tend vers 0.

Démonstration
$$(\text{Arctan } x)^2 \cos x \underset{x \rightarrow 0}{=} \left(x - \frac{x^3}{3} + o(x^4)\right)^2 \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right)$$

$$\underset{x \rightarrow 0}{=} \left(x^2 - \frac{2x^4}{3} + o(x^5)\right) \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right) \underset{x \rightarrow 0}{=} x^2 - \frac{7x^4}{6} + o(x^5).$$

Exemple On veut un développement limité de $\text{sh}^4 x$ à l'ordre 7 lorsque x tend vers 0.

Démonstration :
$$\text{sh}^4 x \underset{x \rightarrow 0}{=} \left(x + \dots + o(x^4)\right) \left(x + \dots + o(x^4)\right) \left(x + \dots + o(x^4)\right) \left(x + \dots + o(x^4)\right).$$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$
Il nous faut pour chaque $\text{sh } x$ un $o(x^4)$.

Après calcul :
$$\text{sh}^4 x \underset{x \rightarrow 0}{=} \left(x + \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^4 \underset{x \rightarrow 0}{=} \left(x^2 + \frac{x^4}{3} + o(x^5)\right)^2 \underset{x \rightarrow 0}{=} x^4 + \frac{2x^6}{3} + o(x^7).$$

Exemple On veut un développement limité de $\sqrt{1 + \text{Arctan } x}$ à l'ordre 3 lorsque x tend vers 0.

Démonstration C'est plus compliqué, nous avons ici affaire à une composée.

• **Échec :**
$$\sqrt{1+u} \underset{u \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{u}{2} - \frac{u^2}{8} + \frac{u^3}{16} + o(u^3)$$
 et $\text{Arctan } x \underset{x \rightarrow 0}{=} x + o(x)$, donc :

$$\sqrt{1 + \text{Arctan } x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{1}{2} \left(x + o(x)\right) - \frac{1}{8} \left(x + o(x)\right)^2 + \frac{1}{16} \left(x + o(x)\right)^3 + o\left(\left(x + o(x)\right)^3\right) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{x}{2} + o(x).$$

Le $o(x)$ de $\text{Arctan } x$ mange tous les $o(x^2), o(x^3), \dots$ qui peuvent apparaître ailleurs. Le $o(u^3)$ de $\sqrt{1+u}$ est irrémédiablement perdu. Pas assez fin !

Nous sommes partis d'un développement limité de $\sqrt{1+u}$ à l'ordre 3, mais la précision du développement limité de $\text{Arctan } x$ compte aussi manifestement.

• **Échec :**
$$\sqrt{1+u} \underset{u \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{u}{2} + o(u)$$
 et $\text{Arctan } x \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$, donc :

$$\sqrt{1 + \text{Arctan } x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{1}{2} \left(x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) + o\left(x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{x}{2} + o(x).$$

Le $o(x^3)$ de $\text{Arctan } x$ est irrémédiablement perdu. \uparrow Le $o(u)$ de $\sqrt{1+u}$ annule toute la finesse du $o(x^3)$ de $\text{Arctan } x$.

• **Succès :** $\sqrt{1+u} \underset{u \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{u}{2} - \frac{u^2}{8} + \frac{u^3}{16} + o(u^3)$ et $\text{Arctan } x \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$, donc :

$$\begin{aligned} \sqrt{1+\text{Arctan } x} \underset{x \rightarrow 0}{=} & 1 + \frac{1}{2} \left(x - \frac{x^3}{3} + o(x^3) \right) - \frac{1}{8} \left(x - \frac{x^3}{3} + o(x^3) \right)^2 + \frac{1}{16} \left(x - \frac{x^3}{3} + o(x^3) \right)^3 + o \left(\underbrace{\left(x - \frac{x^3}{3} + o(x^3) \right)^3}_{= o(x^3)} \right) \\ & \quad \uparrow \text{Le } o(x^3) \text{ de Arctan } x \text{ mange tous les } o(x^4), o(x^5) \dots \text{ qui peuvent apparaître ailleurs.} \quad \uparrow \text{Même chose ici avec le } o(u^3) \text{ de } \sqrt{1+u}. \\ \underset{x \rightarrow 0}{=} & 1 + \frac{1}{2} \left(x - \frac{x^3}{3} \right) - \frac{1}{8} \left(x - \frac{x^3}{3} \right)^2 + \frac{1}{16} \left(x - \frac{x^3}{3} \right)^3 + o(x^3) \\ \underset{x \rightarrow 0}{=} & 1 + \frac{1}{2} \left(x - \frac{x^3}{3} \right) - \frac{1}{8} (x^2) + \frac{1}{16} (x^3) + o(x^3) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{5x^3}{48} + o(x^3). \end{aligned}$$

La précision globale du calcul effectué dépend à LA FOIS du $o(x^3)$ de $\text{Arctan } x$ ET du $o(u^3)$ de $\sqrt{1+u}$. Cela veut dire qu'il faut toujours réfléchir à la précision choisie pour les DEUX fonctions qu'on compose quand on calcule un développement limité d'une composée.

Exemple On veut un développement limité de $\text{Arctan}(x^3 e^x)$ à l'ordre 11 lorsque x tend vers 0.

Démonstration On part de ceci : $\text{Arctan } u \underset{u \rightarrow 0}{=} u + \dots + o(u^{\dots})$ et $x^3 e^x \underset{x \rightarrow 0}{=} x^3 + \dots + o(x^{\dots})$.

À cause du u et du $o(x^{\dots})$, il faut pousser $x^3 e^x$ à l'ordre 11, donc e^x à l'ordre 8. À cause du x^3 et du $o(u^{\dots})$, il faut pousser $\text{Arctan } u$ à l'ordre 4. Ensuite il faut calculer — ici c'est affreux !

Exemple On veut un développement limité de $\ln \cos x$ à l'ordre 6 lorsque x tend vers 0.

Démonstration On part de ceci : $\ln(1+u) \underset{u \rightarrow 0}{=} u + \dots + o(u^{\dots})$ et $\cos x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{x^2}{2} + \dots + o(x^{\dots})$.

À cause du u et du $o(x^{\dots})$, il faut pousser $\cos x - 1$ à l'ordre 6. À cause du $-\frac{x^2}{2}$ et du $o(u^{\dots})$, il faut pousser $\ln(1+u)$

à l'ordre 3. Ensuite on calcule : $\ln \cos x \underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{45} + o(x^6)$.

Exemple On veut un développement limité de $\sqrt[3]{\frac{e^x - 1}{x}}$ à l'ordre 3 lorsque x tend vers 0.

Démonstration Tout d'abord : $\sqrt[3]{1+u} = (1+u)^{\frac{1}{3}} \underset{u \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{u}{3} - \frac{u^2}{9} + \frac{5u^3}{81} + o(u^3)$.

Également : $\frac{e^x - 1}{x} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)}{x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + o(x^3)$. Du coup :

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{\frac{e^x - 1}{x}} \underset{x \rightarrow 0}{=} & \left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + o(x^3) \right)^{\frac{1}{3}} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{1}{3} \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} \right) - \frac{1}{9} \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} \right)^2 + \frac{5}{81} \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} \right)^3 + o(x^3) \\ \underset{x \rightarrow 0}{=} & 1 + \frac{1}{3} \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} \right) - \frac{1}{9} \left(\frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{6} \right) + \frac{5}{81} \left(\frac{x^3}{8} \right) + o(x^3) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{x}{6} + \frac{x^2}{36} + \frac{x^3}{324} + o(x^3). \end{aligned}$$

En pratique Pour calculer un développement limité de $\frac{1}{f}$ au voisinage de 0 lorsque : $\lim_0 f = 1$, on compose simplement un développement limité de f au voisinage de 0 avec un développement limité de $\frac{1}{1+u}$ lorsque u tend vers 0.

Exemple $\frac{1}{\cos x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + o(x^4)$.

Démonstration Comme : $\cos x \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$ et $\frac{1}{1+u} \underset{u \rightarrow 0}{=} 1 - u + u^2 + o(u^2)$, alors :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos x} \underset{x \rightarrow 0}{=} & \frac{1}{1 + \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) \right)} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \right) + \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \right)^2 + o(x^4) \\ \underset{x \rightarrow 0}{=} & 1 - \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \right) + \left(\frac{x^4}{4} \right) + o(x^4) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + o(x^4). \end{aligned}$$

Exemple $\frac{x^3}{\operatorname{sh} x - x} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 6 - \frac{3x^2}{10} + o(x^2).$

Démonstration $\frac{x^3}{\operatorname{sh} x - x} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^3}{\frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{6}{1 + \frac{x^2}{20} + o(x^2)} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 6 \left(1 - \frac{x^2}{20} + o(x^2) \right) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 6 - \frac{3x^2}{10} + o(x^2).$

Exemple $\ln x \underset{x \rightarrow 2}{\sim} \ln 2 + \frac{x-2}{2} - \frac{(x-2)^2}{8} + \frac{(x-2)^3}{24} + o((x-2)^3).$

Démonstration On ramène le problème en 0 grâce au changement de variable : $x = 2 + h$. Chercher un développement limité de $\ln x$ à l'ordre 3 lorsque x tend vers 2 revient alors à chercher un développement limité de $\ln(2+h)$ à l'ordre 3 lorsque h tend vers 0. Or : $\ln(2+h) = \ln 2 + \ln \left(1 + \frac{h}{2} \right) \underset{h \rightarrow 0}{\sim} \ln 2 + \frac{h}{2} - \frac{h^2}{8} + \frac{h^3}{24} + o(h^3).$

Exemple $\cos x \underset{x \rightarrow \frac{\pi}{4}}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \left(x - \frac{\pi}{4} \right) - \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(x - \frac{\pi}{4} \right)^2 + \frac{1}{6\sqrt{2}} \left(x - \frac{\pi}{4} \right)^3 + o \left(\left(x - \frac{\pi}{4} \right)^3 \right).$

Démonstration On ramène le problème en 0 via le changement de variable : $x = \frac{\pi}{4} + h$.

$$\cos \left(\frac{\pi}{4} + h \right) = \frac{\cos h - \sin h}{\sqrt{2}} \underset{h \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\left(1 - \frac{h^2}{2} + o(h^3) \right) - \left(h - \frac{h^3}{6} + o(h^3) \right) \right) \underset{h \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{h}{\sqrt{2}} - \frac{h^2}{2\sqrt{2}} + \frac{h^3}{6\sqrt{2}} + o(h^3).$$

3 ÉQUIVALENCE

3.1 INTRODUCTION

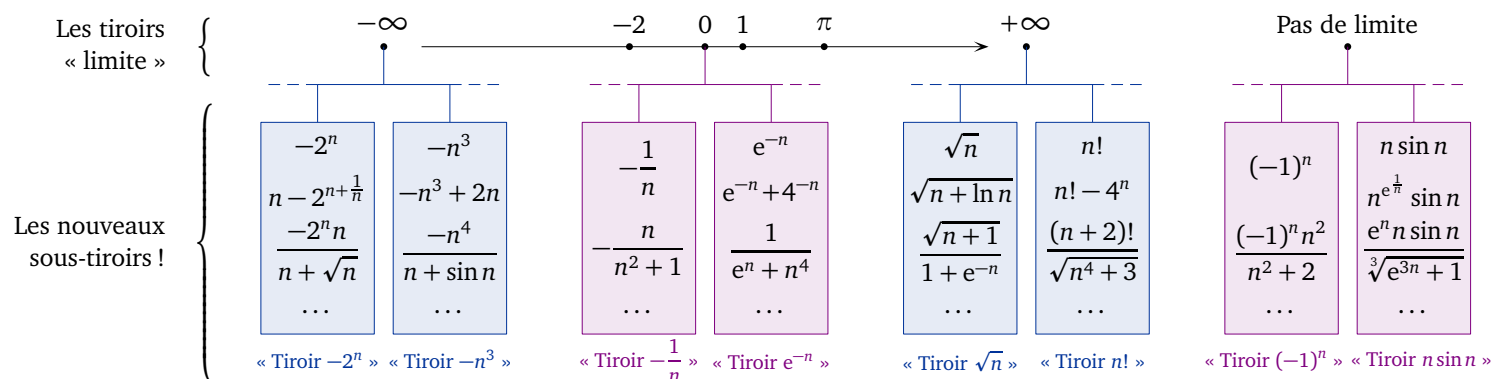
Définition (Équivalence)

- **Fonctions** : Soient $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : D \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions et $a \in \overline{D}$. On suppose que f et g ne s'annulent pas au voisinage de a — sauf peut-être en a toutes les deux. On dit que f est *équivalente* à g au voisinage de a si : $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, ce qu'on note : $f \underset{a}{\sim} g$ ou $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$.
- **Suites** : Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites. On suppose : $u_n \neq 0$ et $v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang. On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est *équivalente* à $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$, ce qu'on note : $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$.

Exemple $x^2 + x + 5 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^2.$ $x + x^2 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x.$ $\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}.$ $3^n + 2^n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 3^n.$

✗ ATTENTION ! ✗ Quand vous cherchez un équivalent, votre résultat ne doit **JAMAIS** se présenter comme une **SOMME DE DEUX OU TROIS TERMES DE TAILLES DISTINCTES**. Par exemple, si l'on vous demande un équivalent de $x - 3x^2 + x^5$ lorsque x tend vers 0, ne répondez pas : $x - 3x^2 + x^5 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x - 3x^2$. C'est correct puisque : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - 3x^2 + x^5}{x - 3x^2} = 1$, mais non abouti car vous pouvez encore comparer x et x^2 , et en l'occurrence : $x^2 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} o(x)$. L'équivalence intéressante est donc : $x - 3x^2 + x^5 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$. En résumé : **IL NE DOIT EN RESTER QU'UN** — le plus gros, celui qu'on voit de loin.

🦋 Explication 🦋 Dans l'armoire des suites, la notion de limite crée des tiroirs qui permettent de faire un premier tri. Dans le « tiroir $+\infty$ » sont rangées toutes les suites de limite $+\infty$, dans le « tiroir 2 » toutes les suites de limite 2... et dans le « tiroir sans limite » toutes les suites sans limite. Or dans certains tiroirs, il serait intéressant que de nouveaux sous-tiroirs soient créés. Les suites $(n^2)_{n \in \mathbb{N}}$, $(n^2 + n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(2^n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont toutes trois dans le « tiroir $+\infty$ » par exemple, mais on sent bien que $(n^2)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(2^n)_{n \in \mathbb{N}}$ portent des infinis de tailles différentes tandis que $(n^2)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(n^2 + n)_{n \in \mathbb{N}}$ portent le même infini.



En vue des théorèmes du présent paragraphe et des suivants, on introduit une fois pour toutes quelques objets :

- Soient $f, \tilde{f}, g, \tilde{g}$ et h des fonctions définies sur D et à valeurs dans \mathbb{R} et $a \in \overline{D}$. Chaque fois qu'on écrira une relation : $f \sim_a g$, on supposera que f et g ne s'annulent pas au voisinage de a — sauf peut-être en a toutes les deux.
- Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}, (\tilde{u}_n)_{n \in \mathbb{N}}, (v_n)_{n \in \mathbb{N}}, (\tilde{v}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des suites. Chaque fois qu'on écrira une relation : $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$, on supposera que : $u_n \neq 0$ et $v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang.

Théorème (La relation « être équivalente à » est une relation d'équivalence) Qu'on parle de fonctions au voisinage d'un point ou de suites, la relation « être équivalente à » est une relation d'équivalence.

🦋 **Explication** 🦋 Les classes d'équivalence de la relation « être équivalente à » sont exactement les sous-tiroirs dont nous venons de parler. Dire que : $x^2 + x \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^2$, c'est dire que les fonctions $x \mapsto x^2 + x$ et $x \mapsto x^2$ portent fondamentalement la même charge infinie au voisinage de $+\infty$ — méritent le même sous-tiroir.

Démonstration

- **Réflexivité** : $\lim_a \frac{f}{f} = 1$ donc : $f \sim_a f$.
- **Transitivité** : Si : $f \sim_a g$ et $g \sim_a h$, alors : $\lim_a \frac{f}{g} = 1$ et $\lim_a \frac{g}{h} = 1$, donc : $\lim_a \frac{f}{h} = 1$ par produit, i.e. : $f \sim_a h$.
- **Symétrie** : Si : $f \sim_a g$, alors : $\lim_a \frac{f}{g} = 1$ donc : $\lim_a \frac{g}{f} = 1$, i.e. : $g \sim_a f$. ■

Théorème (Lien limite/équivalence)

• **Fonctions** :

- (i) Si : $f \sim_a g$, alors soit f et g ont toutes les deux une limite en a , en l'occurrence la même, soit aucune de ces deux fonctions ne possède de limite en a .
- (ii) Si : $\lim_a f = \ell$ avec ℓ RÉEL et NON NUL, alors : $f \sim_a \ell$.

• **Suites** :

- (i) Si : $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$, alors soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ont toutes les deux une limite, en l'occurrence la même, soit aucune de ces deux suites ne possède de limite.
- (ii) Si : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ avec ℓ RÉEL et NON NUL, alors : $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ell$.

🦋 **Explication** 🦋

- D'après (i), deux fonctions ou suites qui sont dans le même « tiroir-équivalence » sont aussi dans le même « tiroir-limite », de sorte que les « tiroirs-équivalence » sont bien des sous-tiroirs des « tiroirs-limite ».
- D'après (ii), pour tout $\ell \in \mathbb{R}^*$, TOUTE suite de limite ℓ est équivalente à la suite constante $(\ell)_{n \in \mathbb{N}}$, donc le « tiroir ℓ » n'a pas de sous-tiroir. Nous n'avons par conséquent créé des sous-tiroirs que pour quatre « tiroirs-limite » — le « tiroir $-\infty$ », le « tiroir 0 », le « tiroir $+\infty$ » et le « tiroir sans-limite ».

✗ ATTENTION ! ✗

$$\lim_a f = \lim_a g \not\Rightarrow f \sim_a g$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n \not\Rightarrow u_n \sim_{n \rightarrow +\infty} v_n$$

Ne pas comprendre ceci, c'est ne rien comprendre au chapitre.

Par exemple : $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ mais : $e^x \not\sim_{x \rightarrow +\infty} x$. De même : $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$ mais : $x^2 \not\sim_{x \rightarrow 0} x$.

Enfin : $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$ mais : $2^n \not\sim_{n \rightarrow +\infty} n$.

De plus, si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ possède une limite : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$, mais en général : $u_{n+1} \not\sim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ — pensez par exemple à la suite $(2^n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Théorème (Lien petit o/équivalence)

- Fonctions : $f \sim_a g \iff f = g + o(g)$.
- Suites : $u_n \sim_{n \rightarrow +\infty} v_n \iff u_n = v_n + o(v_n)$.

🐰 Explication 🐰 Résultat essentiel selon lequel : IL Y A TOUJOURS UN PETIT O DANS UNE ÉQUIVALENCE, un petit o caché qui contrôle l'approximation de f par g ou de u_n par v_n .

Démonstration $f \sim_a g \iff \lim_a \frac{f}{g} = 1 \iff \lim_a \frac{f-g}{g} = 0 \iff f-g =_a o(g)$. ■

Théorème (Lien développement limité/équivalence) Soient $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction, $a \in \overline{D} \cap \mathbb{R}$, $n, p \in \mathbb{N}$ avec $p \leq n$ et $a_p, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Si : $f(x) = a_p(x-a)^p + \dots + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$ avec : $a_p \neq 0$, alors : $f(x) \sim_{x \rightarrow a} a_p(x-a)^p$.

🐰 Explication 🐰 En résumé, le **PREMIER TERME NON NUL** d'un développement limité peut tenir lieu d'équivalent. Les équivalents usuels au voisinage de 0 sont ainsi les suivants :

$$\begin{aligned} \ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x, & \quad e^x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x, & \quad (1+x)^\alpha - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \alpha x, & \quad \operatorname{sh} x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x, & \quad \operatorname{ch} x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^2}{2}. \\ \sin x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x, & \quad \cos x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}, & \quad \tan x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x, & \quad \operatorname{Arctan} x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x. \end{aligned}$$

Théorème (Nouveaux équivalents usuels au voisinage de 0)

$$\operatorname{Arcsin} x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x, \quad \operatorname{Arccos} x = \frac{\pi}{2} - x + o(x), \quad \text{donc : } \operatorname{Arccos} x - \frac{\pi}{2} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -x, \quad \operatorname{th} x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x.$$

Démonstration Les fonctions Arcsin, Arccos et th sont de classe \mathcal{C}^1 au voisinage de 0, on peut donc utiliser la formule de Taylor-Young à l'ordre 1. ■

✗ ATTENTION ! ✗ Ne présentez jamais vos équivalents comme une **SOMME DE TERMES DE TAILLES DISTINCTES** car dans une telle somme en réalité, seul le plus grand des termes compte, les autres sont négligeables.

À la place de : $e^x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$, n'écrivez donc pas : $e^x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 1 + x$. Cette équivalence est correcte, mais comme : $x = o(1)$, écrire que : $e^x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 1 + x$ c'est écrire ceci : $e^x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 1$ — résultat moins précis ! En d'autres termes, la précision de l'équivalence : $e^x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ est $o(x)$ alors que la précision de l'équivalence : $e^x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 1 + x$ est $o(1)$.

3.2 OPÉRATIONS SUR LES ÉQUIVALENTS

Théorème (Dans les petits o , on peut remplacer toute fonction/suite par une fonction/suite équivalente)

- **Fonctions** : Si : $f \underset{a}{=} o(g)$ et $g \underset{a}{\sim} \tilde{g}$, alors : $f \underset{a}{=} o(\tilde{g})$.
- **Suites** : Si : $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(v_n)$ et $v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \tilde{v}_n$, alors $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(\tilde{v}_n)$.

Démonstration Si : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{v_n}{\tilde{v}_n} = 1$, alors : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{\tilde{v}_n} = 0$ par produit. ■

Exemple $\sin(\sin x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sin(x + o(x)) \underset{x \rightarrow 0}{=} (x + o(x)) + o(\overbrace{x + o(x)}^{\sim x}) \underset{x \rightarrow 0}{=} (x + o(x)) + o(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + o(x)$.

On aurait pu procéder autrement en composant l'équivalence : $\sin x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ avec elle-même : $\sin(\sin x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \sin x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$.

Théorème (Avec le produit, l'inverse et les puissances, tout va bien)

- **Fonctions** : Si : $f \underset{a}{\sim} \tilde{f}$ et $g \underset{a}{\sim} \tilde{g}$, alors : $f g \underset{a}{\sim} \tilde{f} \tilde{g}$.
 Si : $f \underset{a}{\sim} g$ et si f ne s'annule pas au voisinage de a , alors : $\frac{1}{f} \underset{a}{\sim} \frac{1}{g}$.
 Si : $f \underset{a}{\sim} g$ et si f est strictement positive au voisinage de a : $f^\alpha \underset{a}{\sim} g^\alpha$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.
- **Suites** : Si : $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \tilde{u}_n$ et $v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \tilde{v}_n$, alors : $u_n v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \tilde{u}_n \tilde{v}_n$.
 Si : $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$ et si : $u_n \neq 0$ à partir d'un certain rang, alors : $\frac{1}{u_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{v_n}$.
 Si : $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$ et si : $u_n > 0$ à partir d'un certain rang : $u_n^\alpha \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n^\alpha$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

Théorème (Avec la composition à DROITE et les suites extraites, tout va bien)

- **Fonctions** : Soient $b \in \overline{\mathbb{R}}$ et φ une fonction définie au voisinage de b à valeurs dans I . Si : $f \underset{a}{\sim} g$ et $\lim_b \varphi = a$, alors : $f \circ \varphi \underset{b}{\sim} g \circ \varphi$.
- **Suites** : Soit $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ une fonction strictement croissante. Si : $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$, alors : $u_{\varphi(n)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_{\varphi(n)}$.

✗ **ATTENTION !** ✗ Avec les équivalents, deux opérations sont **FORMELLEMENT INTERDITES**.

- **Somme** : $x + 1 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x$ et $3 - x \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} 1 - x$, mais : $4 \not\underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} 1$.
- **Composition à gauche** : $n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n + \ln n$, mais si on compose par $x \mapsto e^x$ à gauche : $e^n \not\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} ne^n$.

Exemple $\sqrt{x^2 + \ln x} - x \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln x}{2x}$.

Démonstration $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$, donc : $\sqrt{x^2 + \ln x} - x = x \left(\sqrt{1 + \frac{\ln x}{x^2}} - 1 \right) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x \times \frac{\ln x}{2x^2} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln x}{2x}$.

Exemple $e^{\tan x} - \sqrt{1 + x^2} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$.

Démonstration Nous ne savons pas ici à l'avance à quel ordre nous devons pousser nos développements limités de $e^{\tan x}$ et $\sqrt{1 + x^2}$ lorsque x tend vers 0, nous devons donc avancer à tâtons, tâcher d'anticiper et faire preuve d'intuition.

$$e^{\tan x} - \sqrt{1 + x^2} \underset{x \rightarrow 0}{=} e^{x+o(x)} - (1+o(x)) \underset{x \rightarrow 0}{=} (1+x+o(x)) - (1+o(x)) \underset{x \rightarrow 0}{=} x+o(x), \quad \text{donc en effet : } e^{\tan x} - \sqrt{1 + x^2} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x.$$

Exemple $\ln(1+x^2) - \sin^2 x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{x^4}{6}$.

Démonstration Le tâtonnement s'impose, espérons juste que le premier terme non nul n'est pas d'ordre 50.

$$\ln(1+x^2) - \sin^2 x \underset{x \rightarrow 0}{=} \left(x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4)\right) - \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^2 \underset{x \rightarrow 0}{=} \left(x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4)\right) - \left(x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)\right) \underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{x^4}{6} + o(x^4).$$

Exemple $\operatorname{ch} e^{-n} - \cos \frac{\pi}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi^2}{2n^2}$.

Démonstration Nous allons composer les limites : $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{n} = 0$ avec les développements limités suivants au voisinage de 0 : $\operatorname{ch} x \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + o(x)$ et $\cos x \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$. Pourquoi ces ordres 1 pour ch et 2 pour cos ? Parce que ça marche, mais on ne peut le comprendre qu'en essayant.

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} e^{-n} - \cos \frac{\pi}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} (1 + o(e^{-n})) - \left(1 - \frac{\pi^2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right) - \left(-\frac{\pi^2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \quad \text{car : } e^{-n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{\pi^2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad \text{donc en effet : } \operatorname{ch} e^{-n} - \cos \frac{\pi}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi^2}{2n^2}. \end{aligned}$$

Exemple $\frac{\ln(n+1)}{n} - \frac{\ln n}{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln n}{n^2}$.

Démonstration $\frac{\ln(n+1)}{n} - \frac{\ln n}{n+1} = \frac{(n+1)\ln(n+1) - n \ln n}{n(n+1)}$. Il nous suffit de trouver séparément un équivalent du numérateur et un équivalent du dénominateur. Or :

$$(n+1)\ln(n+1) - n \ln n = (n+1)\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \ln n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} (n+1)\left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) + \ln n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 + \frac{1}{n} + o(1) + \ln n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln n + o(\ln n),$$

donc : $(n+1)\ln(n+1) - n \ln n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln n$, et comme : $n(n+1) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n^2$, on obtient bien par quotient le résultat annoncé.

4 DOMINATION

Définition (Domination)

- **Fonctions** : Soient $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : D \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions et $a \in \overline{D}$. On suppose que g ne s'annule pas au voisinage de a — sauf peut-être en a avec dans ce cas : $f(a) = 0$. On dit que f est dominée par g au voisinage de a si la fonction $\frac{f}{g}$ est bornée au voisinage de a , ce qu'on note : $f \underset{a}{=} O(g)$ ou $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} O(g(x))$, « f est un grand O de g au voisinage de a ».
- **Suites** : Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites. On suppose : $v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang N . On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dominée par $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n \geq N}$ est bornée, ce qu'on note : $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(v_n)$, « u_n est un grand O de v_n ».

🦋 **Explication** 🦋 En particulier, pour les fonctions : $O(1) = \ll \text{une fonction bornée au voisinage de } a \gg$, et pour

les suites : $O(1) = \ll \text{une suite bornée} \gg$.

Exemple $\sin \frac{1}{x} \underset{x \rightarrow 0}{=} O(1)$, $\frac{(-1)^n}{n - \sqrt{n}} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{n}\right)$, $\lfloor e^n \rfloor \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(e^n)$.

Théorème (Lien grand O/petit o/équivalence)

- **Fonctions** : Soient $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : D \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions et $a \in \overline{D}$. On suppose que g ne s'annule pas au voisinage de a — sauf peut-être en a avec dans ce cas : $f(a) = 0$.
Si : $f \underset{a}{=} o(g)$ ou $f \underset{a}{\sim} g$, alors : $f \underset{a}{=} O(g)$.
- **Suites** : Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites. On suppose : $v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang.
Si : $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(v_n)$ ou $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$, alors : $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(v_n)$.

Démonstration Si $\lim_a \frac{f}{g}$ vaut 0 ou 1, la fonction $\frac{f}{g}$ est bornée au voisinage de a . ■

✗ **ATTENTION !** ✗ La domination n'implique ni la négligeabilité, ni l'équivalence — c'est le contraire qui est vrai. Par exemple : $2x^2 \underset{x \rightarrow 0}{=} O(x^2)$, mais : $2x^2 \not\underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(x^2)$ et $2x^2 \not\underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^2$.

Exemple

- Puisque : $e^x \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$, alors : $e^x \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + O(x^3)$. Ce résultat est plus fin qu'un développement limité à l'ordre 2, mais plus grossier qu'un développement limité à l'ordre 3.
- Puisque : $\cos x \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$, alors : $\cos x \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + O(x^2)$. Ce résultat est plus fin qu'un développement limité à l'ordre 1, mais plus grossier qu'un développement limité à l'ordre 2.

Les théorèmes du paragraphe « Opérations sur les petits o » sont tous vrais avec des grands O à la place des petits o :

- les grands O absorbent les constantes multiplicatives,
- la somme de deux grands O est un grand O,
- un grand O d'un grand O est un grand O,
- avec le produit, tout va bien,
- avec la composition à DROITE et les suites extraites, tout va bien.

5 EXEMPLES ET APPLICATIONS

5.1 SÉRIE HARMONIQUE ET CONSTANTE D'EULER

Théorème (Développement asymptotique de la série harmonique et constante d'Euler)

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln n + \gamma + o(1) \quad \text{pour un certain réel } \gamma \text{ appelé la constante d'Euler : } \gamma \approx 0,577.$$

🐦 **Explication** 🐦 En particulier : $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln n + O(1)$, et même : $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln n$.

Démonstration Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n+1)$ et $v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n$.

- On rappelle à toutes fins utiles que pour tout $x \in]-1, +\infty[$: $\ln(1+x) \leq x$ ★.

- Nous allons montrer que les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont adjacentes. Cela montrera bien que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente, disons de limite γ . Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

— La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante et la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ décroissante car pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+2) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \ln(n+1) = \frac{1}{n+1} - \ln \frac{n+2}{n+1} = \frac{1}{n+1} - \ln \left(1 + \frac{1}{n+1} \right) \stackrel{\star}{\geq} 0$$

$$\text{et : } v_{n+1} - v_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+1) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \ln n = \frac{1}{n+1} + \ln \frac{n}{n+1} = -\frac{1}{n+1} + \ln \left(1 + \frac{-1}{n+1} \right) \stackrel{\star}{\leq} 0.$$

— Enfin : $v_n - u_n = \ln(n+1) - \ln n = \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$ ■

5.2 CALCULS DE LIMITES

Exemple $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} - x}{x^5} = +\infty.$

Démonstration Forme indéterminée « $\frac{0}{0}$ » au premier abord. Comme il est facile de diviser les équivalents, nous allons chercher un équivalent du numérateur et un équivalent du dénominateur séparément. Ici encore, pas possible de savoir à l'avance à quel ordre nous devons pousser nos développements limités au numérateur !

$$\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} - x \underset{x \rightarrow 0}{=} \left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o(x^3) \right) - \left(1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16} + o(x^3) \right) - x \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{x^3}{8} + o(x^3),$$

donc : $\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} - x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^3}{8},$ et enfin : $\frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} - x}{x^5} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{8x^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} +\infty.$

Exemple $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(\frac{\pi}{2} e^{\frac{1}{n}} - \text{Arccos} \frac{1}{n} \right) = \frac{\pi}{2} + 1.$

Démonstration Forme indéterminée « $+\infty \times 0$ » au premier abord, mais : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0,$ donc :

$$\begin{aligned} n \left(\frac{\pi}{2} e^{\frac{1}{n}} - \text{Arccos} \frac{1}{n} \right) &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} n \left(\frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} n \left(\frac{\pi}{2n} + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{\pi}{2} + 1 + o(1). \end{aligned}$$

C'est le résultat annoncé car $o(1)$ signifie « suite de limite nulle ».

Exemple $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{1+6x} - \sqrt[3]{1+x}}{3 \sin x - \ln(1+x)} = \frac{13}{30}.$

Démonstration Forme indéterminée « $\frac{0}{0}$ » au premier abord. On cherche séparément un équivalent du numérateur et un équivalent du dénominateur.

$$\sqrt[5]{1+6x} - \sqrt[3]{1+x} \underset{x \rightarrow 0}{=} \left(1 + \frac{6x}{5} + o(x) \right) - \left(1 + \frac{x}{3} + o(x) \right) \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{13x}{15} + o(x), \quad \text{donc : } \sqrt[5]{1+6x} - \sqrt[3]{1+x} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{13x}{15}.$$

$$3 \sin x - \ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 3(x + o(x)) - (x + o(x)) \underset{x \rightarrow 0}{=} 2x + o(x), \quad \text{donc : } 3 \sin x - \ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 2x.$$

Conclusion : $\frac{\sqrt[5]{1+6x} - \sqrt[3]{1+x}}{3 \sin x - \ln(1+x)} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{\frac{13x}{15}}{2x} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{13}{30} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{13}{30}.$

Exemple Pour tous $a, b > 0$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{a^{\frac{1}{x}} + b^{\frac{1}{x}}}{2} \right)^x = \sqrt{ab}.$

Démonstration D'abord : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0,$ donc : $a^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{\ln a}{x}} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} 1 + \frac{\ln a}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$ Pareil pour $b^{\frac{1}{x}}.$

Ensuite : $\frac{a^{\frac{1}{x}} + b^{\frac{1}{x}}}{2} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} 1 + \frac{\ln a}{2x} + \frac{\ln b}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} 1 + \frac{\ln \sqrt{ab}}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$

Et un coup de logarithme à gauche : $\ln \frac{a^{\frac{1}{x}} + b^{\frac{1}{x}}}{2} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \ln \left(1 + \frac{\ln \sqrt{ab}}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \right) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \frac{\ln \sqrt{ab}}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$,

puis on multiplie par x : $x \ln \frac{a^{\frac{1}{x}} + b^{\frac{1}{x}}}{2} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \ln \sqrt{ab} + o(1)$, et donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \frac{a^{\frac{1}{x}} + b^{\frac{1}{x}}}{2} = \ln \sqrt{ab}$.

On compose enfin à gauche par la fonction exponentielle.

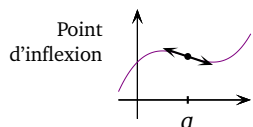
5.3 POSITION LOCALE D'UNE FONCTION PAR RAPPORT À UNE TANGENTE

Explication Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $a \in D$. On suppose que f est définie au voisinage de a à gauche et à droite et admet un développement limité au voisinage de a : $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} a_0 + a_1(x-a) + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$ avec $n \geq 2$ et : $a_n \neq 0$. Nous savons qu'alors : $a_0 = f(a)$ et $a_1 = f'(a)$, donc : $f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) \underset{x \rightarrow a}{\sim} a_n(x-a)^n$.

La fonction f admet la droite d'équation : $y = a_0 + a_1(x-a)$ pour tangente en a .

De plus, d'après l'équivalence précédente, la position du graphe de f au voisinage de a par rapport à sa tangente en a dépend du signe de la fonction $x \mapsto a_n(x-a)^n$ au voisinage de a .

- Si n est pair, $x \mapsto a_n(x-a)^n$ a le signe de a_n au voisinage de a . Le graphe de f est situé au-dessus de sa tangente en a au voisinage de a si : $a_n > 0$ et en-dessous si : $a_n < 0$. Si de plus : $a_1 = 0$, f possède un extremum local en a — un maximum local si : $a_n < 0$, un minimum local si : $a_n > 0$.
- Si n est impair, $x \mapsto a_n(x-a)^n$ change de signe en a , donc le graphe de f traverse sa tangente en a , on dit que f possède en a un point d'inflexion.



Exemple La fonction $x \mapsto \frac{x \sin x}{1+x^2}$ possède un minimum local en 0.

Démonstration Nous cherchons le premier terme non nul d'ordre au moins 2 dans le développement limité de f au voisinage de 0. Pas possible de savoir à l'avance à quel ordre nous allons trouver ce terme, nous pouvons juste espérer qu'il n'est pas trop grand. Ici, tout simplement : $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x^2$, donc : $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x^2 + o(x^2)$. En particulier, f est positive au voisinage de 0 avec : $f(0) = 0$, donc possède un minimum local en 0.

Exemple La fonction $x \mapsto \frac{\ln(1-2x)}{1+x}$ possède en 0 un point d'inflexion de tangente la droite d'équation : $y = -2x$.

Démonstration Un calcul à l'ordre 2 ne suffit pas ici, on pousse à l'ordre 3 — mais pas moyen de le deviner à l'avance !

$$g(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \left(-2x - 2x^2 - \frac{8x^3}{3} + o(x^3) \right) (1 - x + x^2 + o(x^2)) \underset{x \rightarrow 0}{=} -2x - \frac{8x^3}{3} + o(x^3).$$

Comme annoncé, la tangente de g en 0 a pour équation : $y = -2x$, et comme : $g(x) + 2x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{8x^3}{3}$, le graphe de g est au-dessus de sa tangente en 0 au voisinage de 0 à gauche et en-dessous à droite — point d'inflexion !

5.4 ASYMPTOTES D'UNE FONCTION EN $\pm\infty$

Définition (Asymptote d'une fonction en $\pm\infty$) Soit f une fonction réelle définie au voisinage de $+\infty$ — on ferait de même en $-\infty$ — et $a, b \in \mathbb{R}$. On dit que f admet la droite d'équation : $y = ax + b$ pour asymptote au voisinage de $+\infty$ si : $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} ax + b + o(1)$.

📖 **Explication** 📖 En particulier :
 $a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax)$.

📖 **Exemple** La fonction $x \mapsto \frac{x^3 + \lfloor x \rfloor^2}{x^2 + 2}$ admet la droite d'équation : $y = x + 1$ pour asymptote au voisinage de $\pm\infty$.

📖 **Démonstration** Tout d'abord : $\lfloor x \rfloor \underset{x \rightarrow \pm\infty}{=} x + O(1)$, donc : $\lfloor x \rfloor^2 \underset{x \rightarrow \pm\infty}{=} x^2 + O(x)$. Conclusion :

$$\frac{x^3 + \lfloor x \rfloor^2}{x^2 + 2} = \frac{x^3 + x^2 + O(x)}{x^2 \left(1 + \frac{2}{x^2}\right)} \underset{x \rightarrow \pm\infty}{=} \left(x + 1 + O\left(\frac{1}{x}\right)\right) \left(1 - \frac{2}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \underset{x \rightarrow \pm\infty}{=} x + 1 + O\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x \rightarrow \pm\infty}{=} x + 1 + o(1).$$

📖 **Exemple** La fonction $x \xrightarrow{f} \frac{x^2}{x+1} e^{\cos \frac{1}{x}}$ possède une asymptote au voisinage de $+\infty$ d'équation : $y = ex - e$ et son graphe est situé au-dessus de cette asymptote au voisinage de $+\infty$.

📖 **Démonstration**

- On peut se ramener au voisinage de 0 grâce au changement de variable : $h = \frac{1}{x}$ — il ne faut pas toujours faire CE changement de variable, tout dépend de ce à quoi f ressemble. Il s'agit donc d'étudier la fonction $h \mapsto f\left(\frac{1}{h}\right)$ au voisinage de 0.
- Se demander si f possède une asymptote au voisinage de $+\infty$, c'est alors se demander s'il existe des réels a et b pour lesquels : $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} ax + b + o(1)$, ou encore : $f\left(\frac{1}{h}\right) \underset{h \rightarrow 0}{=} \frac{a}{h} + b + o(1)$.
- Si on veut plus précisément connaître la position du graphe de f par rapport à son asymptote au voisinage de $+\infty$, il suffit de connaître un équivalent de $x \mapsto f(x) - (ax + b)$ au voisinage de $+\infty$, i.e. de trouver un terme plus fin que $o(1)$.
- C'est parti :
$$f\left(\frac{1}{h}\right) = \frac{e^{\cos h}}{h(1+h)} \underset{h \rightarrow 0}{=} \frac{1}{h} (1 - h + h^2 + o(h^2)) e^{1 - \frac{h^2}{2} + o(h^2)}$$

$$\underset{h \rightarrow 0}{=} \frac{e}{h} (1 - h + h^2 + o(h^2)) \left(1 - \frac{h^2}{2} + o(h^2)\right) \underset{h \rightarrow 0}{=} \frac{e}{h} - e + \frac{eh}{2} + o(h).$$

Après réécriture en x : $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} ex - e + \frac{e}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$. En particulier : $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} ex - e + o(1)$, donc f admet la droite d'équation : $y = ex - e$ pour asymptote au voisinage de $+\infty$. Enfin, comme : $f(x) - (ex - e) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e}{2x}$ est positif au voisinage de $+\infty$, le graphe de f est au-dessus de son asymptote au voisinage de $+\infty$.