Analyse asymptotique de niveau 2

Ce chapitre est avant tout un recueil de problèmes typiques d'analyse asymptotique plus difficiles que ceux que nous avons résolus au chapitre « Analyse asymptotique de niveau 1 ». À l'exception de la formule de Stirling, aucun des résultats généraux que j'ai choisi d'encadrer ne figure au programme de MPSI. Ces résultats doivent être étudiés comme des exemples privilégiés, des idées classiques qu'il convient de maîtriser et non pas pas des théorèmes de cours à connaître.

1 Études de sommes par encadrement d'intégrales

Nous avons vu récemment que les intégrales peuvent être définies comme des « aires sous la courbe » de fonctions en escalier, et donc que toute intégrale peut être approchée par des sommes. L'idée de base de ce paragraphe, c'est qu'on peut aussi espérer faire l'inverse et approximer une somme par certaines intégrales. C'est déjà ce que nous avons fait avec les sommes de Riemann.

Exemple $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{=} \ln n+\mathrm{O}(1)$. En particulier : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$.

Démonstration Pour tous $k\in\mathbb{N}^*$ et $t\in[k,k+1]$: $\dfrac{1}{k+1}\leqslant\dfrac{1}{t}\leqslant\dfrac{1}{k}$, donc : $\displaystyle\frac{1}{k+1}\leqslant\int_k^{k+1}\frac{\mathrm{d}t}{t}\leqslant\frac{1}{k}$.

Sommons alors. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $\displaystyle\ln n=\int_1^n\frac{\mathrm{d}t}{t}\leqslant\int_1^{n+1}\frac{\mathrm{d}t}{t}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k+1}\leqslant1+\int_1^n\frac{\mathrm{d}t}{t}=\ln n+1$.

Conclusion : $\displaystyle 0\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n\leqslant1$, donc en effet : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\underset{n\to+\infty}{=}\ln n+\mathrm{O}(1)$.

Le théorème qui suit reprend l'idée précédente, mais il va plus loin.

Théorème **(Comparaison somme-intégrale)** Soit $f\in\mathscr{C}\big([1,+\infty[,\mathbb{R}\big)$ une fonction positive décroissante.

Pour un certain $\ell\in\mathbb{R}$: $$\sum_{k=1}^{n}f(k)\underset{n\to+\infty}{=}\int_1^n f(t)\,\mathrm{d}t+\ell+\mathrm{o}(1).$$

Démonstration Posons pour tout $n\geqslant2$: $\displaystyle a_n=\int_{n-1}^n f(t)\,\mathrm{d}t-f(n)$ et $\displaystyle A_n=\sum_{k=2}^{n}a_k$.

- Par décroissance, pour tout $n\geqslant2$: $\displaystyle f(n)=\int_{n-1}^n f(n)\,\mathrm{d}t\leqslant\int_{n-1}^n f(t)\,\mathrm{d}t\leqslant\int_{n-1}^n f(n-1)\,\mathrm{d}t=f(n-1)$, donc : $0\leqslant a_n\leqslant f(n-1)-f(n)$.
- Il en découle que la suite $(A_n)_{n\geqslant2}$ est croissante car pour tout $n\geqslant2$: $A_{n+1}-A_n=a_n\geqslant0$, mais aussi qu'elle est majorée car pour tout $n\geqslant2$: $\displaystyle A_n=\sum_{k=2}^{n}a_k\leqslant\sum_{k=2}^{n}\big(f(k-1)-f(k)\big)=f(1)-f(n)\leqslant f(1)$. La suite $(A_n)_{n\geqslant2}$ est ainsi convergente d'après le théorème de la limite monotone, disons de limite λ.
- Or pour tout $n\geqslant2$: $\displaystyle A_n=\sum_{k=2}^{n}\left(\int_{k-1}^k f(t)\,\mathrm{d}t-f(k)\right)=\int_1^n f(t)\,\mathrm{d}t-\sum_{k=2}^{n}f(k)$, donc :
$$\sum_{k=1}^{n}f(k)=f(1)+\int_1^n f(t)\,\mathrm{d}t-A_n\underset{n\to+\infty}{=}\int_1^n f(t)\,\mathrm{d}t+\ell+\mathrm{o}(1)$$ si on pose : $\ell=f(1)-\lambda$. ■

En particulier, dans le cas de la fonction inverse :

Théorème **(Développement asymptotique de la série harmonique et constante d'Euler)**

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\underset{n\to+\infty}{=}\ln n+\gamma+\mathrm{o}(1)$$ pour un certain réel γ appelé la *constante d'Euler* : $\gamma\approx0,577$.

2 SUITES RÉCURRENTES

Dans l'exemple qui suit, les termes du développement asymptotique sont obtenus les uns après les autres du plus grand au plus petit selon un principe de « boucle ». À chaque fois qu'on vient d'obtenir un terme d'une certaine précision, on réinjecte le tout dans la relation de récurrence et on obtient ainsi un nouveau terme. On peut sur le papier obtenir de cette manière des précisions aussi fines que voulu, mais plus on avance, plus les réinjections sont calculatoires.

Exemple On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = \sqrt{u_n + n^2}$.
Alors : $u_n \underset{n\to+\infty}{=} n - \dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{8n} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Démonstration Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \geqslant 0$: $\sqrt{x+n^2} \geqslant 0$ et : $u_0 \geqslant 0$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = \sqrt{u_{n-1} + (n-1)^2} \geqslant n-1$, donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ par minoration.
- Montrons ensuite par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \leqslant n$. **Initialisation :** Évidente.
  Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Si : $u_n \leqslant n$, alors : $u_{n+1} = \sqrt{u_n + n^2} \overset{\text{HDR}}{\leqslant} \sqrt{n^2+n} \leqslant \sqrt{n^2+2n+1} = n+1$.
- À ce stade, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $n-1 \leqslant u_n \leqslant n$, donc : $1 - \dfrac{1}{n} \leqslant \dfrac{u_n}{n} \leqslant 1$, donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{n} = 1$ par encadrement, ou encore : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n$.
- Ensuite : $u_{n+1} - n = \sqrt{u_n+n^2} - n = n\left(\sqrt{1+\dfrac{u_n}{n^2}} - 1\right)$, avec : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{n^2} = 0$, donc :
$$u_{n+1} - n \underset{n\to+\infty}{\sim} n \times \frac{u_n}{2n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}, \qquad \text{et donc :} \quad u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{=} n + \frac{1}{2} + \mathrm{o}(1).$$
  Conclusion : $u_n \underset{n\to+\infty}{=} (n-1) + \dfrac{1}{2} + \mathrm{o}(1) \underset{n\to+\infty}{=} n - \dfrac{1}{2} + \mathrm{o}(1)$.
- On poursuit sur cette lancée avec un développement limité plus fin de $x \longmapsto \sqrt{1+x}$ au voisinage de 0 :
$$u_{n+1} = \sqrt{u_n+n^2} = n\sqrt{1+\frac{u_n}{n^2}} \underset{n\to+\infty}{=} n\sqrt{1+\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)} \underset{n\to+\infty}{=} n\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2}\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$
$$\underset{n\to+\infty}{=} n\left(1 + \frac{1}{2n} - \frac{3}{8n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} n + \frac{1}{2} - \frac{3}{8n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right).$$
  Conclusion : $u_n \underset{n\to+\infty}{=} (n-1) + \dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{8(n-1)} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n-1}\right) \underset{n\to+\infty}{=} n - \dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{8n} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Exemple On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n}$.
Alors : $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \sqrt{2n} + \mathrm{O}\left(\dfrac{\ln n}{\sqrt{n}}\right)$. En particulier : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2n}$, et même : $u_n - \sqrt{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Démonstration Pour commencer, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie car l'intervalle $[1,+\infty[$, qui contient u_0, est stable par la fonction $x \longmapsto x + \dfrac{1}{x}$. En outre, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \geqslant 1$. On pourrait bien sûr ensuite déterminer la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ grâce au théorème de la limite monotone, mais cela ne suffirait pas à nous donner un équivalent.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1}^2 = u_n^2 + 2 + \dfrac{1}{u_n^2}$, i.e. : $u_{n+1}^2 - u_n^2 = 2 + \dfrac{1}{u_n^2}$, donc par somme et simplification télescopique : $u_n^2 = 2n + u_0^2 + \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{1}{u_k^2} \geqslant 2n$, donc par minoration en particulier : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
- Nous venons de voir que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n \geqslant \sqrt{2n}$, mais donc aussi : $\dfrac{1}{u_n^2} \leqslant \dfrac{1}{2n}$. De nouveau, sommons. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $0 \leqslant \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{1}{u_k^2} \leqslant 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \dfrac{1}{2k}$, donc comme : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$, on peut dire que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{1}{u_k^2} \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}(\ln n)$. Conclusion : $u_n^2 = 2n + 1 + \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{1}{u_k^2} \underset{n\to+\infty}{=} 2n + \mathrm{O}(\ln n)$, et enfin :
$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} \sqrt{2n + \mathrm{O}(\ln n)} \underset{n\to+\infty}{=} \sqrt{2n}\sqrt{1 + \mathrm{O}\left(\frac{\ln n}{n}\right)} \underset{n\to+\infty}{=} \sqrt{2n}\left(1 + \mathrm{O}\left(\frac{\ln n}{n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} \sqrt{2n} + \mathrm{O}\left(\frac{\ln n}{\sqrt{n}}\right).$$

3 Suites d'intégrales et fonctions définies par une intégrale

Comme nous le savons déjà, il suffit parfois d'un simple encadrement pour trouver un équivalent d'intégrale.

Exemple $\displaystyle\int_x^{x+1} e^t \ln t \, dt \underset{x\to+\infty}{\sim} e^x(e-1)\ln x.$

Démonstration Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$: $\quad \displaystyle\ln x \int_x^{x+1} e^t \, dt \leqslant \int_x^{x+1} e^t \ln t \, dt \leqslant \ln(x+1)\int_x^{x+1} e^t \, dt,$ donc :

$$\left(e^{x+1}-e^x\right)\ln x \leqslant \int_x^{x+1} e^t \ln t \, dt \leqslant \left(e^{x+1}-e^x\right)\ln(x+1),$$

puis : $\quad \displaystyle 1 \leqslant \frac{1}{e^x(e-1)\ln x}\int_x^{x+1} e^t \ln t \, dt \leqslant \frac{\ln(x+1)}{\ln x}$ — d'où le résultat par encadrement.

Souvent hélas, encadrer ne suffit pas, voici donc une idée parmi d'autres. Une intégration par parties transforme toujours une intégrale en une somme de deux termes — un « crochet » et une autre intégrale — et quand on s'y prend bien, cette décomposition peut fournir un début de développement asymptotique pour l'intégrale de départ.

Théorème (Un exemple de développement asymptotique par IPP) Soit $f \in \mathscr{C}^1\big([0,1],\mathbb{R}\big)$.

$$\int_0^1 t^n f(t) \, dt \underset{n\to+\infty}{=} \frac{f(1)}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right), \qquad \text{donc en particulier, si } f(1)\neq 0 : \quad \int_0^1 t^n f(t)\, dt \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{f(1)}{n}.$$

Démonstration Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\int_0^1 t^n f(t)\, dt \overset{\text{IPP}}{=} \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} f(t)\right]_{t=0}^{t=1} - \frac{1}{n+1}\int_0^1 t^{n+1} f'(t)\, dt = \frac{f(1)}{n+1} + \frac{1}{n+1}\int_0^1 t^{n+1} f'(t)\, dt.$$

Or f' est continue sur le **segment** $[0,1]$, donc bornée d'après le théorème des bornes atteintes. Du coup, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\displaystyle\left|\int_0^1 t^{n+1} f'(t)\, dt\right| \leqslant \|f'\|_\infty \int_0^1 t^{n+1}\, dt = \frac{\|f'\|_\infty}{n+2},$ donc : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 t^{n+1} f'(t)\, dt = 0$ par encadrement. Conclusion : $\displaystyle\int_0^1 t^n f(t)\, dt \underset{n\to+\infty}{=} \frac{f(1)}{n+1} + o\left(\frac{1}{n+1}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{f(1)}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$ ■

Exemple $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{e^t+1}\, dt \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n(e+1)}.$

Démonstration Il s'agit seulement de reproduire dans un cas particulier la preuve du théorème précédent — anecdotique, donc pas au programme ! Pour tout $n \in \mathbb{N}$, intégrons d'abord par parties :

$$\int_0^1 \frac{t^n}{e^t+1}\, dt = \left[\frac{t^{n+1}}{(n+1)\left(e^t+1\right)}\right]_{t=0}^{t=1} + \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{t^{n+1}e^t}{\left(e^t+1\right)^2}\, dt = \frac{1}{(n+1)(e+1)} + \frac{1}{n+1}\int_0^1 t^{n+1}\frac{e^t}{\left(e^t+1\right)^2}\, dt.$$

Or pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\displaystyle\left|\int_0^1 t^{n+1}\frac{e^t}{\left(e^t+1\right)^2}\, dt\right| \leqslant \int_0^1 t^{n+1} e\, dt = \frac{e}{n+2},$ donc : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 t^n \frac{te^t}{\left(e^t+1\right)^2}\, dt = 0$ par encadrement. Conclusion : $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{e^t+1}\, dt \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{(n+1)(e+1)} + o\left(\frac{1}{n+1}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n(e+1)}.$

4 Solutions d'équations définies implicitement

Exemple Pour tout $\varepsilon > 0$, l'équation : $\mathrm{e}^{-\varepsilon x} = x$ d'inconnue x possède une et une seule solution x_ε dans $\mathbb{R}_+$.

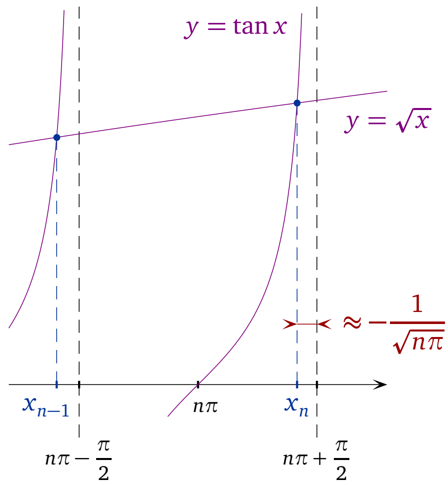
Alors : $x_\varepsilon \underset{\varepsilon\to 0}{=} 1 - \varepsilon + \dfrac{3\varepsilon^2}{2} + \mathrm{o}\big(\varepsilon^2\big)$.

Démonstration

- Soit $\varepsilon > 0$. La fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{-\varepsilon x} - x$ est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$ par somme, de valeur 1 en 0 et de limite $-\infty$ en $+\infty$. D'après le TVI strictement monotone, 0 possède un unique antécédent x_ε par cette fonction.
- Pour tout $\varepsilon > 0$: $x_\varepsilon \geqslant 0$, donc : $0 \leqslant x_\varepsilon = \mathrm{e}^{-\varepsilon x_\varepsilon} \leqslant 1$, donc en retour : $\mathrm{e}^{-\varepsilon} \leqslant x_\varepsilon \leqslant 1$. Conclusion, par encadrement : $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} x_\varepsilon = 1$, ou encore : $x_\varepsilon \underset{\varepsilon\to 0}{=} 1 + \mathrm{o}(1)$.
- On poursuit : $x_\varepsilon = \mathrm{e}^{-\varepsilon x_\varepsilon} \underset{\varepsilon\to 0}{=} \mathrm{e}^{-\varepsilon(1+\mathrm{o}(1))} \underset{\varepsilon\to 0}{=} \mathrm{e}^{-\varepsilon+\mathrm{o}(\varepsilon)} \underset{\varepsilon\to 0}{=} 1 - \varepsilon + \mathrm{o}(\varepsilon)$.
- Et encore :
$$x_\varepsilon = \mathrm{e}^{-\varepsilon x_\varepsilon} \underset{\varepsilon\to 0}{=} \mathrm{e}^{-\varepsilon(1-\varepsilon+\mathrm{o}(\varepsilon))} \underset{\varepsilon\to 0}{=} \mathrm{e}^{-\varepsilon+\varepsilon^2+\mathrm{o}(\varepsilon^2)} \underset{\varepsilon\to 0}{=} 1 + \big(-\varepsilon+\varepsilon^2\big) + \frac{1}{2}\big(-\varepsilon+\varepsilon^2\big)^2 + \mathrm{o}\big(\varepsilon^2\big)$$
$$\underset{\varepsilon\to 0}{=} 1 - \varepsilon + \frac{3\varepsilon^2}{2} + \mathrm{o}\big(\varepsilon^2\big).$$

Exemple Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation : $\tan x = \sqrt{x}$ d'inconnue $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2} + n\pi, \dfrac{\pi}{2} + n\pi\right[$ possède une unique solution x_n.

En outre : $x_n \underset{n\to+\infty}{=} n\pi + \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{\sqrt{n\pi}} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$.



Démonstration

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $x \overset{f}{\longmapsto} \tan x - \sqrt{x}$ est dérivable sur $\left]-\dfrac{\pi}{2} + n\pi, \dfrac{\pi}{2} + n\pi\right[$ de dérivée $x \longmapsto 1 + \tan^2 x - \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ strictement positive, car pour tout $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2} + n\pi, \dfrac{\pi}{2} + n\pi\right[$:
$$x > \frac{\pi}{2} > \frac{1}{4}, \qquad \text{donc :} \quad 1 - \frac{1}{2\sqrt{x}} > 0.$$
D'après le TVI strictement monotone, f est donc bijective de $\left]-\dfrac{\pi}{2} + n\pi, \dfrac{\pi}{2} + n\pi\right[$ sur $\mathbb{R}$, donc s'y annule une et une seule fois, disons en x_n.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $n\pi - \dfrac{\pi}{2} \leqslant x_n \leqslant n\pi + \dfrac{\pi}{2}$, donc : $1 - \dfrac{1}{2n} \leqslant \dfrac{x_n}{n\pi} \leqslant 1 + \dfrac{1}{2n}$, et enfin : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_n}{n\pi} = 1$ par encadrement. Conclusion : $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n\pi$. En particulier : $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\tan(x_n - n\pi) = \tan x_n = \sqrt{x_n}$ avec : $x_n - n\pi \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, donc par définition d'arctangente : $x_n - n\pi = \mathrm{Arctan}\,\sqrt{x_n}$. Enfin : $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$, donc : $x_n - n\pi \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\pi}{2}$. Conclusion : $x_n \underset{n\to+\infty}{=} n\pi + \dfrac{\pi}{2} + \mathrm{o}(1)$.
- Pour finir, rappelons que pour tout $x > 0$: $\mathrm{Arctan}\, x + \mathrm{Arctan}\, \dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2}$.

  Il en découle que : $x_n - n\pi - \dfrac{\pi}{2} = \mathrm{Arctan}\,\sqrt{x_n} - \dfrac{\pi}{2} = -\mathrm{Arctan}\,\dfrac{1}{\sqrt{x_n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{\sqrt{x_n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{\sqrt{n\pi}}$.

  Comme voulu : $x_n \underset{n\to+\infty}{=} n\pi + \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{\sqrt{n\pi}} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

Exemple Pour tout $\lambda \geqslant 0$, le polynôme $X^4 + X^3 - \lambda^4$ possède une et une seule racine x_λ dans $\mathbb{R}_+$.

La fonction $\lambda \longmapsto x_\lambda$ admet le développement asymptotique suivant : $x_\lambda \underset{\lambda\to+\infty}{=} \lambda - \dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{32\lambda} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{\lambda}\right)$.

Démonstration

- La fonction $x \longmapsto x^4 + x^3$ est strictement croissante et continue sur $\mathbb{R}_+$ comme somme, donc bijective de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$ d'après le TVI strictement monotone. Pour tout $\lambda \geqslant 0$, il existe donc bien un et un seul $x_\lambda \geqslant 0$ pour lequel : $x_\lambda^4 + x_\lambda^3 = \lambda^4$. Nous noterons ci-dessous ♣ cette relation.

- Soit $\lambda \geqslant 0$. Si $x_\lambda < 1$: $\lambda^4 \overset{\clubsuit}{=} x_\lambda^4 + x_\lambda^3 < 1+1 = 2$, donc par contraposition : $x_\lambda \geqslant 1$ pour tout $\lambda \geqslant \sqrt[4]{2}$, donc : $x_\lambda^4 = \dfrac{x_\lambda^4 + x_\lambda^4}{2} \geqslant \dfrac{x_\lambda^4 + x_\lambda^3}{2} \overset{\clubsuit}{=} \dfrac{\lambda}{2}$, et enfin : $x_\lambda \geqslant \dfrac{\lambda}{\sqrt[4]{2}}$. En particulier : $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} x_\lambda = +\infty$ par minoration, donc : $x_\lambda^3 \underset{\lambda \to +\infty}{=} \mathrm{o}\left(x_\lambda^4\right)$, puis : $x_\lambda^4 \underset{\lambda \to +\infty}{\overset{\clubsuit}{\sim}} \lambda^4$, et enfin : $x_\lambda \underset{\lambda \to +\infty}{\sim} \lambda$.
- Après mise en facteur de x_λ^4 dans $\clubsuit$ puis composition par $\sqrt[4]{\cdot}$: $x_\lambda = \lambda\left(1 + \dfrac{1}{x_\lambda}\right)^{-\frac{1}{4}}$ — relation $\spadesuit$. Ainsi : $x_\lambda - \lambda \overset{\spadesuit}{=} \lambda\left(\left(1 + \dfrac{1}{x_\lambda}\right)^{-\frac{1}{4}} - 1\right) \underset{\lambda \to +\infty}{\sim} \lambda \times \dfrac{-1}{4x_\lambda} \underset{\lambda \to +\infty}{\sim} -\dfrac{1}{4}$, donc : $x_\lambda \underset{\lambda \to +\infty}{=} \lambda - \dfrac{1}{4} + \mathrm{o}(1)$.
- Pour notre terme suivant, nous devons aller plus loin que ci-dessus dans notre développement limité de $u \longmapsto (1+u)^{-\frac{1}{4}}$ au voisinage de 0. Un terme plus loin : $(1+u)^{-\frac{1}{4}} \underset{u \to 0}{=} 1 - \dfrac{u}{4} + \dfrac{5u^2}{32} + \ldots + \mathrm{o}\left(u^2\right)$. Or nous aurons à poser : $u = \dfrac{1}{x_\lambda}$, commençons donc par chercher un développement asymptotique de $\dfrac{1}{x_\lambda}$ lorsque λ tend vers $+\infty$.

$$\frac{1}{x_\lambda} \underset{\lambda \to +\infty}{=} \frac{1}{\lambda - \frac{1}{4} + \mathrm{o}(1)} \underset{\lambda \to +\infty}{=} \frac{1}{\lambda} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{4\lambda} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{\lambda}\right)} \underset{\lambda \to +\infty}{=} \frac{1}{\lambda}\left(1 + \frac{1}{4\lambda} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right) \underset{\lambda \to +\infty}{=} \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{4\lambda^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{\lambda^2}\right).$$

Finissons-en.

$$x_\lambda = \lambda\left(1 + \frac{1}{x_\lambda}\right)^{-\frac{1}{4}} \underset{\lambda \to +\infty}{=} \lambda\left(1 + \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{4\lambda^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)\right)^{-\frac{1}{4}} \underset{\lambda \to +\infty}{=} \lambda\left(1 - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{4\lambda^2}\right) + \frac{5}{32}\left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{4\lambda^2}\right)^2 + \mathrm{o}\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)\right)$$
$$\underset{\lambda \to +\infty}{=} \lambda\left(1 - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{4\lambda^2}\right) + \frac{5}{32}\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) + \mathrm{o}\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)\right) \underset{\lambda \to +\infty}{=} \lambda - \frac{1}{4} + \frac{3}{32\lambda} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

5 Les formules de Wallis et Stirling

La *formule de Wallis* n'est pas au programme, mais la *formule de Stirling* qui en découle l'est en revanche.

Théorème (Formule de Wallis) $\quad \dbinom{2n}{n} \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{2^{2n}}{\sqrt{n\pi}}$.

Démonstration On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \; \mathrm{d}t$ (*intégrales de Wallis*).

- Pour tout $n \geqslant 2$, intégrons par parties :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} t \times \sin t \; \mathrm{d}t = \Big[\sin^{n-1} t \times (-\cos t)\Big]_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1)\cos t \sin^{n-2} t \times (-\cos t)\; \mathrm{d}t$$
$$= 0 + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} t \cos^2 t \; \mathrm{d}t = (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} t\left(1 - \sin^2 t\right) \mathrm{d}t = (n-1)\left(I_{n-2} - I_n\right).$$

Isolant I_n, nous obtenons finalement la relation : $I_n = \dfrac{n-1}{n} I_{n-2}$ $\quad\bigstar$.

- La suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante car pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$: $\sin^{n+1} x \leqslant \sin^n x$. Elle est par ailleurs strictement positive, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$: $1 \leqslant \dfrac{I_{2n}}{I_{2n+1}} \leqslant \dfrac{I_{2n}}{I_{2n+2}} \overset{\bigstar}{=} \dfrac{2n+2}{2n+1}$, et enfin par encadrement : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{I_{2n}}{I_{2n+1}} = 1$. Nous allons maintenant donner une expression explicite de ce rapport $\dfrac{I_{2n}}{I_{2n+1}}$ que nous noterons ρ_n.

- Pour commencer : $I_0 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$ et $I_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \,\mathrm{d}t = \Big[-\cos t\Big]_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} = 1$, donc : $\rho_0 = \dfrac{\pi}{2}$.

  Ensuite pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\rho_n \overset{\star}{=} \dfrac{\dfrac{2n-1}{2n} I_{2n-2}}{\dfrac{2n}{2n+1} I_{2n-1}} = \dfrac{(2n+1)(2n-1)}{(2n)^2}\,\rho_{n-1}$, donc :

$$\begin{aligned}\rho_n &= \frac{(2n+1)(2n-1)}{(2n)^2} \times \frac{(2n-1)(2n-3)}{(2n-2)^2} \times \ldots \times \frac{(5)(3)}{(4)^2} \times \frac{(3)(1)}{(2)^2}\,\rho_0\\ &= \frac{(2n+1)(2n-1)^2(2n-3)^2\ldots 3^2 1}{\big((2n)(2n-2)\ldots(2)\big)^2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{(2n+1)(2n)^2(2n-1)^2(2n-2)^2(2n-3)^2\ldots 3^2 2^2 1}{\big((2n)(2n-2)\ldots(2)\big)^4} \times \frac{\pi}{2}\\ &= \left(\frac{(2n)!}{2^{2n} n!^2}\right)^2 \frac{(2n+1)\pi}{2} = \left(\frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}\right)^2 \frac{(2n+1)\pi}{2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}\right)^2 n\pi.\end{aligned}$$

  Or : $\lim\limits_{n\to+\infty} \rho_n = 1$ comme on l'a vu, donc en effet : $\dbinom{2n}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{2^{2n}}{\sqrt{n\pi}}$. ■

Théorème (Formule de Stirling) $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\dfrac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \sqrt{2n\pi}$.

Démonstration Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons : $u_n = \ln \dfrac{n^{n+\frac{1}{2}}}{n!\,\mathrm{e}^n}$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_{n+1} - u_n = \ln \dfrac{(n+1)^{n+1+\frac{1}{2}}}{(n+1)!\,\mathrm{e}^{n+1}} - \ln \dfrac{n^{n+\frac{1}{2}}}{n!\,\mathrm{e}^n} = \ln \dfrac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}}{\mathrm{e}} = \left(n+\dfrac{1}{2}\right)\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) - 1$,
  puis de là, un simple calcul de développement limité montre que : $u_{n+1}-u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{12n^2}$. En particulier : $u_{n+1}-u_n > 0$ à partir d'un certain rang, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante à partir d'un certain rang.

- Ensuite : $\lim\limits_{n\to+\infty} 12n^2\big(u_{n+1}-u_n\big) = 1$, donc : $12n^2\big(u_{n+1}-u_n\big) \leqslant \dfrac{3}{2}$ à partir d'un certain rang $N \geqslant 2$, donc pour tout $n \geqslant N$: $u_{n+1}-u_n \leqslant \dfrac{1}{8n^2}$. En retour :

$$u_n-u_N = \sum_{k=N}^{n-1}\big(u_{k+1}-u_k\big) \leqslant \sum_{k=N}^{n-1}\frac{1}{8k^2} \leqslant \frac{1}{8}\sum_{k=N}^{n-1}\frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{8}\sum_{k=N}^{n-1}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{N-1}-\frac{1}{n-1}\right) \leqslant \frac{1}{8(N-1)} \leqslant \frac{1}{8},$$

  ou encore : $u_n \leqslant u_N + \dfrac{1}{8}$, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée. Finalement, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge d'après le théorème de la limite monotone, donc la suite $\left(\mathrm{e}^{-u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ aussi, disons vers $\ell \in \mathbb{R}_+^*$.

- Nous venons d'établir que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n!\,\mathrm{e}^n}{n^{n+\frac{1}{2}}} = \ell$, i.e. que : $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\dfrac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \ell\sqrt{n}$. Il nous reste à montrer que : $\ell = \sqrt{2\pi}$. Or d'après la formule de Wallis :

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{n}}{2^{2n}}\binom{2n}{n} = \frac{\sqrt{n}}{2^{2n}} \times \frac{(2n)!}{n!^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{n}}{2^{2n}} \times \frac{\dfrac{(2n)^{2n+\frac{1}{2}}}{\mathrm{e}^{2n}}\,\ell}{\left(\dfrac{n^{n+\frac{1}{2}}}{\mathrm{e}^n}\,\ell\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{\ell} \quad \text{après simplification,}$$

  donc en effet : $\ell = \sqrt{2\pi}$. ■