Applications linéaires

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ est l'un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Tous les résultats présentés demeurent cela dit vrais sur un corps $\mathbb{K}$ quelconque — à l'exception de ceux du paragraphe sur les symétries.

1 Applications linéaires, équations linéaires

1.1 Définition et premiers exemples

Définition (Application linéaire) Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. On appelle *application linéaire de E dans F* toute application $f : E \longrightarrow F$ qui préserve les combinaisons linéaires :

$$\forall x, y \in E, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \quad f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y).$$

L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathscr{L}(E,F)$.

Lorsque $E = F$, on dit plutôt que f est un *endomorphisme de E*. L'ensemble des endomorphismes de E est noté $\mathscr{L}(E)$.

Lorsque $F = \mathbb{K}$, on dit plutôt que f est une *forme linéaire de E*.

Toute application linéaire $f \in \mathscr{L}(E,F)$ est un **morphisme de groupes additifs**, donc : $\boxed{f(0_E) = 0_F.}$

Ensuite, si A est un sous-espace vectoriel de E, l'application restreinte $f|_A$ est elle aussi linéaire. En effet, s'il est vrai pour tous $x, y \in \boxed{E}$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ que : $\quad f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y), \quad$ c'est a fortiori vrai pour tous $x, y \in \boxed{A}$.

Enfin, pour vérifier que f est linéaire, il est suffisant de vérifier que $f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)$ pour tous $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ — avec **un seul scalaire**. Dans ce cas : $\quad f(\lambda x) = f(\lambda x + 0_E) = \lambda f(x) + f(0_E) = \lambda f(x) + 0_F = \lambda f(x) \quad$ pour tous $x, y \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, puis de même $f(\lambda x + \mu y) = f(\lambda x) + f(\mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$.

Définition (Homothétie) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\lambda \in \mathbb{K}$. L'application $\lambda \mathrm{Id}_E$ est un endomorphisme de E appelé l'*homothétie de E de rapport λ*. En particulier $\mathrm{Id}_E \in \mathscr{L}(E)$.

Démonstration Pour tous $x, y \in E$ et $\alpha \in \mathbb{K}$: $\quad (\lambda \mathrm{Id}_E)(\alpha x + y) = \lambda(\alpha x + y) = \alpha(\lambda \mathrm{Id}_E)(x) + (\lambda \mathrm{Id}_E)(y).$

Exemple L'application $(x,y) \xmapsto{f} \big(x, x+y, x-2y\big)$ est linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$.

Démonstration Pour tous $(x,y), (x',y') \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f\big(\lambda(x,y) + (x',y')\big) &= f\big(\lambda x + x', \lambda y + y'\big) = \big(\lambda x + x', (\lambda x + x') + (\lambda y + y'), (\lambda x + x') - (2\lambda y + 2y')\big) \\ &= \lambda\big(x, x+y, x-2y\big) + \big(x', x'+y', x'-2y'\big) = \lambda f(x,y) + f(x',y'). \end{aligned}$$

Exemple

- Pour tout $x \in \mathbb{K}$, l'application $P \longmapsto P(x)$ d'évaluation en x est une **forme** linéaire de $\mathbb{K}[X]$.
- Pour tout $A \in \mathbb{K}[X]$, l'application $P \longmapsto AP$ de multiplication par A est un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$.
- Pour tout $Q \in \mathbb{K}[X]$, l'application $P \longmapsto P \circ Q$ de composition **à droite** par Q est un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$.
- L'application $P \longmapsto P'$ de dérivation est un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$.

Exemple

- Pour tout intervalle I, l'application $f \longmapsto f'$ est linéaire de $\mathscr{D}(I,\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ ou de $\mathscr{C}^1(I,\mathbb{R})$ dans $\mathscr{C}(I,\mathbb{R})$. Comme elle envoie $\mathscr{C}^\infty(I,\mathbb{R})$ dans lui-même, c'est également un endomorphisme de $\mathscr{C}^\infty(I,\mathbb{R})$.
- L'application $f \longmapsto \displaystyle\int_0^1 f$ est une **forme** linéaire de $\mathscr{C}\big([0,1],\mathbb{R}\big)$.
- L'application $u \longmapsto \lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ est une **forme** linéaire de l'espace vectoriel des suites réelles convergentes.

Exemple

- L'application $(x,y) \overset{\varphi}{\longmapsto} x+y+1$ N'EST PAS linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ car $\varphi(0,0)=1\neq 0$.
- L'application $(x,y) \overset{\psi}{\longmapsto} x^2+y^2$ N'EST PAS linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ car $\psi\big(2(1,1)\big)=\psi(2,2)=8\neq 4=2\psi(1,1)$.

Définition-théorème (Application linéaire canoniquement associée à une matrice) Soit $A\in\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. L'application $X\longmapsto AX$ est linéaire de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ et appelée l'*application linéaire canoniquement associée à A*. Je la noterai souvent $\widehat{A}$ dans ce cours mais il ne s'agit pas là d'une notation universelle.

L'application $X\longmapsto AX$ est définie de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ et non l'inverse pour une simple raison de compatibilité des formats.

Pour tous $A\in\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $B\in\mathscr{M}_{q,r}(\mathbb{K})$: $\boxed{\widehat{AB}=\widehat{A}\circ\widehat{B}}$ car pour tout $X\in\mathbb{K}^r$:

$$\widehat{AB}(X)=(AB)X=A(BX)=\widehat{A}(BX)=\widehat{A}\big(\widehat{B}(X)\big)=\widehat{A}\circ\widehat{B}(X).$$

Exemple L'application linéaire canoniquement associée à $\begin{pmatrix}0&1&2\\3&4&5\end{pmatrix}$ est l'application $(x,y,z)\longmapsto(y+2z,3x+4y+5z)$ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$.

Définition-théorème (Formes coordonnées relativement à une base) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On suppose que E possède une base $\mathscr{B}=(e_i)_{i\in I}$. Pour tout $i\in I$, l'application qui associe à tout vecteur de E sa coordonnée dans $\mathscr{B}$ selon e_i est une forme linéaire de E appelée la *$i^{\text{ème}}$ forme coordonnée de E (dans $\mathscr{B}$)*. Pour tout $x\in E$: $\displaystyle x=\sum_{i\in I}e_i^\star(x)e_i$.

Démonstration Soient $x,y\in E$ de coordonnées respectives $(x_i)_{i\in I}$, $(y_i)_{i\in I}$ dans $\mathscr{B}$ et $\lambda\in\mathbb{K}$. Le vecteur $\lambda x+y$ admet $\big(\lambda x_i+y_i\big)_{i\in I}$ pour coordonnées dans $\mathscr{B}$ car : $\displaystyle\lambda x+y=\lambda\sum_{i\in I}x_ie_i+\sum_{i\in I}y_ie_i=\sum_{i\in I}\big(\lambda x_i+y_i\big)e_i$. En particulier, pour tout $i\in I$, la coordonnée selon e_i de $\lambda x+y$ est λx_i+y_i. C'est la linéarité souhaitée !

Exemple

- Les formes coordonnées de $\mathbb{R}^n$ pour sa base canonique sont, dans cet ordre, les applications $(x_1,\dots,x_n)\longmapsto x_1$, $(x_1,\dots,x_n)\longmapsto x_2$, ..., $(x_1,\dots,x_n)\longmapsto x_n$.
- Les formes coordonnées de $\mathbb{R}_n[X]$ pour sa base canonique sont, dans cet ordre, les applications $P\longmapsto a_0$, $P\longmapsto a_1$, ..., $P\longmapsto a_n$ si on note $a_0,\dots,a_n$ les coefficients de P : $P=a_nX^n+\ldots+a_1X+a_0$.

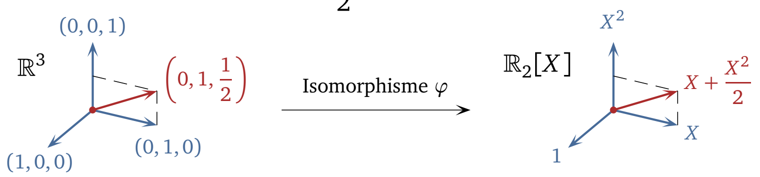
Définition (Isomorphisme, espaces vectoriels isomorphes) Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

- **Isomorphisme (d'espaces vectoriels) :** On appelle *isomorphisme (d'espace vectoriel) de E sur F* toute application linéaire bijective de E sur F.

  Lorsque $E=F$, on parle plutôt d'*automorphisme (d'espace vectoriel) de E*. L'ensemble des automorphismes de E est noté $\mathrm{GL}(E)$ et appelé le *groupe linéaire de E*.
- **Espaces vectoriels isomorphes :** On dit que F est *isomorphe à E (en tant qu'espace vectoriel)* s'il existe un isomorphisme de E sur F.

Le fait que deux espaces vectoriels soient isomorphes signifie qu'à défaut d'être identiques au sens propre, ils le sont au moins d'un point de vue vectoriel. Tout isomorphisme entre eux est comme un dictionnaire parfait pour passer de l'un à l'autre. Toute propriété vectorielle — i.e. que l'on peut exprimer en termes de combinaisons linéaires — de l'un des espaces a son analogue dans l'autre espace. Nous verrons bientôt que les isomorphismes préservent la dimension.

L'application linéaire $(a,b,c)\overset{\varphi}{\longmapsto}a+bX+cX^2$ est par exemple un isomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}_2[X]$. Cet isomorphisme « géométrise » $\mathbb{R}_2[X]$ en en faisant une sorte de copie parfaite de $\mathbb{R}^3$. La coplanarité des vecteurs $(0,1,0)$, $(0,0,1)$ et $\left(0,1,\dfrac{1}{2}\right)$ se traduit dans $\mathbb{R}_2[X]$ par celle des vecteurs X, X^2 et $X+\dfrac{X^2}{2}$.



Exemple L'application $f \stackrel{S}{\longmapsto} \big(f', f(0)\big)$ est un isomorphisme de $\mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ sur $\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \times \mathbb{R}$. Cet isomorphisme est un peu surprenant car $\mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est à la fois beaucoup plus petit que $\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et isomorphe à $\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \times \mathbb{R}$, donc plus gros que $\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$!

Démonstration L'application S est linéaire car pour tous $f, g \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$S(\lambda f + g) = \big((\lambda f + g)', (\lambda f + g)(0)\big) = \big(\lambda f' + g', \lambda f(0) + g(0)\big) = \lambda\big(f', f(0)\big) + \big(g', g(0)\big) = \lambda S(f) + S(g).$$

Ensuite, il n'est pas dur de comprendre que l'application T qui associe à tout couple $(g, a) \in \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \times \mathbb{R}$ la fonction $x \longmapsto a + \displaystyle\int_0^x g(t)\,dt$ de classe $\mathscr{C}^1$ admet S pour réciproque.

1.2 Opérations sur les applications linéaires

Théorème (Composition d'applications linéaires, réciproque d'un isomorphisme) Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

(i) **Composition :** Pour tous $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$: $\quad g \circ f \in \mathscr{L}(E,G)$.
En particulier, si f est un isomorphisme de E sur F et g un isomorphisme de F sur G, $g \circ f$ est un isomorphisme de E sur G.

(ii) **Réciproque :** Si f est un isomorphisme de E sur F, f^{-1} est un isomorphisme de F sur E.

En particulier, la relation d'isomorphisme entre espaces vectoriels est une relation d'équivalence — pour la réflexivité, remarquer simplement que Id_E est un isomorphisme de E pour tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

Démonstration

(i) Soient $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$. Pour tous $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$:
$$\big(g \circ f\big)(\lambda x + y) = g\big(f(\lambda x + y)\big) = g\big(\lambda f(x) + f(y)\big) = \lambda g\big(f(x)\big) + g\big(f(y)\big) = \lambda\big(g \circ f\big)(x) + \big(g \circ f\big)(y).$$

(ii) Nous savons que f^{-1} est bijective de F sur E, mais est-elle linéaire ? Pour tous $y, y' \in F$ et $\lambda \in \mathbb{K}$:
$$f^{-1}\big(\lambda y + y'\big) = f^{-1}\Big(\lambda f\big(f^{-1}(y)\big) + f\big(f^{-1}(y')\big)\Big) = f^{-1}\Big(f\big(\lambda f^{-1}(y) + f^{-1}(y')\big)\Big) = \lambda f^{-1}(y) + f^{-1}(y').$$

Exemple L'application $P \longmapsto XP'\big(X^2\big)$ est un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$.

Démonstration Les applications $P \stackrel{\alpha}{\longmapsto} P'$, $P \stackrel{\beta}{\longmapsto} P\big(X^2\big)$ et $P \stackrel{\gamma}{\longmapsto} XP$ sont linéaires, donc $\gamma \circ \beta \circ \alpha$ aussi.

Exemple L'application $f \longmapsto \displaystyle\int_0^1 f\big(t^2\big)\,dt$ est linéaire de $\mathscr{C}\big([0,1],\mathbb{R}\big)$ dans $\mathbb{R}$.

Démonstration Les applications $f \stackrel{\alpha}{\longmapsto} f \circ \big(t \longmapsto t^2\big)$ et $f \stackrel{\beta}{\longmapsto} \displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ sont linéaires, donc $\beta \circ \alpha$ aussi.

Théorème (Traduction de l'inversibilité en termes d'application linéaire canoniquement associée) Une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si et seulement si l'application linéaire $\widehat{A}$ canoniquement associée à A est un automorphisme de $\mathbb{K}^n$. Dans ce cas : $\quad \widehat{A}^{-1} = \widehat{A^{-1}}$.

Démonstration D'après la caractérisation de l'inversibilité en termes de systèmes linéaires :

$$A \text{ est inversible} \iff \forall Y \in \mathbb{K}^n,\quad \exists! X \in \mathbb{K}^n,\quad Y = AX \iff \forall Y \in \mathbb{K}^n,\quad \exists! X \in \mathbb{K}^n,\quad Y = \widehat{A}(X)$$
$$\iff \widehat{A} \text{ est un automorphisme de } \mathbb{K}^n.$$

Dans ce cas $\widehat{A} \circ \widehat{A^{-1}} = \widehat{AA^{-1}} = \widehat{I_n} = \mathrm{Id}_{\mathbb{K}^n}$ et de même $\widehat{A^{-1}} \circ \widehat{A} = \mathrm{Id}_{\mathbb{K}^n}$, donc en effet $\widehat{A}^{-1} = \widehat{A^{-1}}$.

Exemple L'application $(x, y) \longmapsto (3x + y, 5x + 2y)$ est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$.
Sa réciproque est l'application $(x, y) \longmapsto (2x - y, -5x + 3y)$ car la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ est inversible d'inverse $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$.

Théorème (Combinaisons linéaires d'applications linéaires) Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. L'ensemble $\mathscr{L}(E,F)$ est un sous-espace vectoriel de F^E, donc un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. En d'autres termes, toute combinaison linéaire d'applications linéaires de E dans F est une application linéaire de E dans F.

Démonstration Pour commencer $\mathscr{L}(E,F) \subset F^E$ et l'application nulle $x \longmapsto 0_F$ est linéaire de E dans F.
Pour la stabilité par combinaison linéaire, soient $f,g \in \mathscr{L}(E,F)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Montrons que $\lambda f + g \in \mathscr{L}(E,F)$, i.e. que $\lambda f + g$ est linéaire. Pour tous $x,y \in E$ et $\alpha \in \mathbb{K}$:

$$\begin{aligned}(\lambda f + g)(\alpha x + y) &= \lambda f(\alpha x + y) + g(\alpha x + y) = \lambda\big(\alpha f(x) + f(y)\big) + \big(\alpha g(x) + g(y)\big)\\ &= \alpha\big(\lambda f(x) + g(x)\big) + \big(\lambda f(y) + g(y)\big) = \alpha\big(\lambda f + g\big)(x) + \big(\lambda f + g\big)(y).\end{aligned}$$

Exemple L'application $P \overset{f}{\longmapsto} P\big(X^2\big) + 2P'(1)$ est un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$.

Démonstration L'application $P \longmapsto P\big(X^2\big)$ est linéaire. Ensuite, $P \overset{d}{\longmapsto} P'$ et $P \overset{e}{\longmapsto} P(1)$ sont linéaires, donc $P \overset{e\circ d}{\longmapsto} P'(1)$ aussi par composition. Par combinaison linéaire, f est comme voulu un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$.

Observons à présent que pour toutes $f,f' \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g,g' \in \mathscr{L}(F,G)$:

$$g \circ \big(f + f'\big) = \big(g \circ f\big) + \big(g \circ f'\big) \qquad \text{et} \qquad \big(g + g'\big) \circ f = \big(g \circ f\big) + \big(g' \circ f\big).$$

Attention cependant ! La relation $\big(g + g'\big) \circ f = \big(g \circ f\big) + \big(g' \circ f\big)$ est vraie en toute généralité sans linéarité alors que la relation $g \circ \big(f + f'\big) = \big(g \circ f\big) + \big(g \circ f'\big)$ requiert à tout prix la linéarité de g. Faites l'effort de vous en convaincre.

L'énoncé qui suit repose entièrement sur l'idée que pour tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, la composée de deux endomorphismes de E est encore un endomorphisme de E. En d'autres termes, la composition est une LOI INTERNE sur $\mathscr{L}(E)$.

Théorème (Anneau $\mathscr{L}(E)$) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

- Le triplet $\big(\mathscr{L}(E),+,\circ\big)$ est un anneau d'élément neutre multiplicatif $1_{\mathscr{L}(E)} = \mathrm{Id}_E$, non commutatif en général.
- $\mathrm{GL}(E)$ est le groupe des inversibles de l'anneau $\mathscr{L}(E)$: $\quad \mathrm{U}\big(\mathscr{L}(E)\big) = \mathrm{GL}(E)$.

On omet souvent de noter le symbole $\circ$ de composition en notant gf à la place de $g \circ f$ pour tous $f,g \in \mathscr{L}(E)$.

La loi produit de $\mathscr{L}(E)$ est la COMPOSITION. Pour tous $f \in \mathscr{L}(E)$ et $n \in \mathbb{N}$, f^n désigne donc Id_E si $n = 0$ et $\underbrace{f \circ \ldots \circ f}_{n \text{ termes}}$ si $n \geqslant 1$. Pour tout $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$, on pose ensuite $P(f) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k f^k$. On parle ici de *polynômes en f*.

Comme dans tout anneau, deux formules importantes sont vraies dans $\mathscr{L}(E)$:

$$(f+g)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^k g^{n-k} \qquad \text{(formule du binôme)} \qquad \text{et} \qquad f^n - g^n = (f-g)\sum_{k=0}^{n-1} f^k g^{n-k-1}$$

pour tous $f,g \in \mathscr{L}(E)$ QUI COMMUTENT. Il est essentiel que f et g commutent. Pour montrer que $(f+g)(f-g) = f^2 - g^2$ par exemple, il faut pouvoir simplifier fg avec gf.

Démonstration Pour commencer, $\mathscr{L}(E)$ est un groupe commutatif pour l'addition en tant que sous-espace vectoriel de E^E.

Ensuite, la composition est une loi de composition interne sur $\mathscr{L}(E)$ car la composée de deux applications linéaires est linéaire. Cette loi est associative et admet Id_E, qui est linéaire, pour élément neutre.

Enfin, nous avons vu juste avant que la composition est distributive sur l'addition.

Exemple Les endomorphismes $P \overset{D}{\longmapsto} P'$ et $P \overset{M}{\longmapsto} XP$ de $\mathbb{K}[X]$ NE commutent PAS, donc l'anneau $\mathscr{L}\big(\mathbb{K}[X]\big)$ N'est PAS commutatif. Par exemple $D \circ M(X) = \big(X^2\big)' = 2X$ alors que $M \circ D(X) = X \times X' = X$.

Définition (Endomorphisme nilpotent) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathscr{L}(E)$. On dit que f est *nilpotent* si $f^k = 0_{\mathscr{L}(E)}$ pour un certain $k \in \mathbb{N}^*$. Le plus petit de ces entiers k est alors appelé l'*indice de nilpotence de f*.

Exemple Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'endomorphisme $P \overset{D}{\longmapsto} P'$ de $\mathbb{K}_n[X]$ est nilpotent d'indice $n+1$.

Démonstration Pour tout $P \in \mathbb{K}_n[X]$: $\quad P^{(n+1)} = 0, \quad$ donc $D^{n+1} = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{K}_n[X])}$, donc D est nilpotent d'indice au plus $n+1$. L'égalité $\big(X^n\big)^{(n)} = n!$ montre cependant que $D^n \neq 0_{\mathscr{L}(\mathbb{K}_n[X])}$, donc D est d'indice $n+1$ (exactement).

1.3 Image d'un sous-espace vectoriel

Théorème (Image d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire) Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Pour tout sous-espace vectoriel A de E, l'image $f(A)$ de A par f est un sous-espace vectoriel de F.

En particulier, l'image $f(E)$ est un sous-espace vectoriel de F noté $\operatorname{Im} f$ et f est surjective de E sur F si et seulement si $\operatorname{Im} f = F$.

Démonstration Soit A un sous-espace vectoriel de E. Montrons que $f(A)$ est un sous-espace vectoriel de F. Pour commencer $f(A) \subset F$ et $0_F = f(0_E) \in f(A)$. Ensuite, soient $y, y' \in f(A)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, disons $y = f(a)$ et $y' = f(a')$ pour certains $a, a' \in A$. Par linéarité de f, $\lambda y + y' = \lambda f(a) + f(a') = f\big(\lambda a + a'\big)$ avec $\lambda a + a' \in A$ car A est un sous-espace vectoriel de E, donc $\lambda y + y' \in f(A)$.

Exemple L'image de l'endomorphisme $(x,y,z) \stackrel{g}{\longmapsto} \big(x+2y+z, 2x+y-z, x+2y+z\big)$ de $\mathbb{R}^3$ est le plan d'équation $z = x$.

Démonstration Pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$: $\quad (x,y,z) \in \operatorname{Im} g \iff \boxed{\exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,} \quad (x,y,z) = g(a,b,c)$

C'est l'EXISTENCE d'un antécédent qui compte.

$$\iff \exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3, \quad \left\{\begin{array}{rcrcrcl} a & + & 2b & + & c & = & x \\ 2a & + & b & - & c & = & y \\ a & + & 2b & + & c & = & z \end{array}\right.$$

$$\iff \exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3, \quad \left\{\begin{array}{rcrcrcl} a & + & 2b & + & c & = & x \\ & & 3b & + & 3c & = & 2x - y \\ & & & & 0 & = & z - x \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow 2L_1 - L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} \qquad \iff \qquad z = x.$$

La dernière équivalence dans laquelle le système disparaît n'est pas un tour de passe-passe à reproduire bêtement. Le système final possède une solution — EXISTENCE — si et seulement si $z = x$. Il est clair qu'il n'a pas de solution si $z \neq x$, et on en obtient si $z = x$ en utilisant c comme paramètre.

Théorème (Image d'un Vect par une application linéaire) Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Pour toute partie X de E : $\quad f\big(\operatorname{Vect}(X)\big) = \operatorname{Vect}\big(f(X)\big)$.
En particulier, si E possède une base $(e_i)_{i\in I}$: $\quad \operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}\big(f(e_i)\big)_{i\in I}$.

Démonstration $f\big(\operatorname{Vect}(X)\big)$ est un sous-espace vectoriel de F contenant $f(X)$, donc $\operatorname{Vect}\big(f(X)\big) \subset f\big(\operatorname{Vect}(X)\big)$.
Inversement, pour tout $y \in f\big(\operatorname{Vect}(X)\big)$, $y = f(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n)$ pour certains $x_1, \ldots, x_n \in X$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, donc par linéarité de f : $\quad y = \lambda_1 f(x_1) + \ldots + \lambda_n f(x_n) \in \operatorname{Vect}\big(f(X)\big)$.
Enfin, si E possède une base $(e_i)_{i\in I}$: $\quad \operatorname{Im} f = f(E) = f\big(\operatorname{Vect}(e_i)_{i\in I}\big) = \operatorname{Vect}\big(f(e_i)\big)_{i\in I}$.

Exemple On note f l'application linéaire $(x,y) \longmapsto \big(2x+y, 3x+5y, y\big)$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$. Alors $\big((2,3,0),(1,5,1)\big)$ est une base de $\operatorname{Im} f$.

Démonstration La famille $\big((1,0),(0,1)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^2$, donc $\big(f(1,0), f(0,1)\big) = \big((2,3,0),(1,5,1)\big)$ engendre $\operatorname{Im} f$ d'après le théorème précédent, et cette famille est évidemment libre.

Exemple Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'image de la dérivation D des polynômes sur $\mathbb{K}_n[X]$ est $\mathbb{K}_{n-1}[X]$.

Démonstration Comme $\big(1, X, \ldots, X^n\big)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$:

$$\operatorname{Im} D = \operatorname{Vect}\Big(D(1), D(X), \ldots, D\big(X^n\big)\Big) = \operatorname{Vect}\Big(0, 1, 2X, \ldots, nX^{n-1}\Big) = \operatorname{Vect}\Big(1, X, \ldots, X^{n-1}\Big) = \mathbb{K}_{n-1}[X].$$

Définition-théorème (Image d'une matrice) Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ de colonnes $C_1, \ldots, C_p$. On appelle *image de A* et on note $\operatorname{Im} A$ l'image de son application linéaire canoniquement associée $X \longmapsto AX$ de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$.

L'image de A se calcule aisément à partir des COLONNES de A : $\quad \operatorname{Im} A = \operatorname{Vect}(C_1, \ldots, C_p)$.

Démonstration En notant $(E_1, \ldots, E_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$:

$$\operatorname{Im} A = \operatorname{Vect}\Big(\widehat{A}(E_1), \ldots, \widehat{A}(E_n)\Big) = \operatorname{Vect}\big(AE_1, \ldots, AE_n\big) = \operatorname{Vect}(C_1, \ldots, C_n).$$

Les Vect tolèrent très bien qu'on y permute les vecteurs et qu'on y remplace un vecteur x par une combinaison linéaire des autres à condition de ne pas faire disparaître x complètement. Pour ces raisons, l'image d'une matrice peut être calculée rapidement par des opérations élémentaires sur les COLONNES.

Exemple
$$\mathrm{Im}\begin{pmatrix}1 & 2 & 4 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 4 & 1\end{pmatrix} = \mathrm{Im}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 3 & 4 & 1\\ 2 & 3 & 4 & 1\end{pmatrix} \quad \begin{matrix} C_2 \leftarrow 2C_1 - C_2 \\ C_3 \leftarrow 4C_1 - C_3\end{matrix} \quad = \mathrm{Im}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix} = \mathrm{Im}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix} \quad C_1 \leftarrow C_1 - C_2$$
$$= \mathrm{Vect}\big((1,0,1),(0,1,1)\big).$$

1.4 Équations linéaires et noyau

Nous avons déjà rencontré beaucoup d'équations linéaires, mais nous n'avions pas jusqu'ici un concept clair de linéarité. On approfondit dans ce paragraphe en les généralisant quelques-unes de vos connaissances antérieures, dont le fameux principe « Solution générale de l'équation complète = solution particulière + solution générale de l'équation homogène ».

Théorème (Image réciproque d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire) Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et B un sous-espace vectoriel de F. L'image réciproque $f^{-1}(B)$ de B par f est alors un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration Pour commencer $f^{-1}(B) \subset E$ et $0_E \in f^{-1}(B)$ car $f(0_E) = 0_F$. Ensuite, soient $x, x' \in f^{-1}(B)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Par hypothèse $f(x) \in B$ et $f(x') \in B$ et B est un sous-espace vectoriel de F, donc $\lambda f(x) + f(x') \in B$. Or $f\big(\lambda x + x'\big) = \lambda f(x) + f(x')$ par linéarité de f, donc $f\big(\lambda x + x'\big) \in B$, i.e. $\lambda x + x' \in f^{-1}(B)$.

Pour bien comprendre ce qui suit, n'oublions pas que toute application linéaire est un morphisme de groupes additifs, donc possède un noyau à ce titre et on sait déjà que celui-ci caractérise l'injectivité.

Définition-théorème (Noyau d'une application linéaire ou d'une matrice)

- **Noyau d'une application linéaire :** Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathscr{L}(E,F)$. On appelle *noyau de f* le sous-espace vectoriel de E : $\mathrm{Ker}\, f = f^{-1}\big(\{0_F\}\big) = \big\{x \in E \mid \ f(x) = 0_F\big\}$.

  En outre, f est injective si et seulement si $\mathrm{Ker}\, f = \{0_E\}$.
- **Noyau d'une matrice :** Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle *noyau de A* le noyau de son application linéaire canoniquement associée, noté $\mathrm{Ker}\, A$, qui est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^p$.

  Les LIGNES de A décrivent les équations du système linéaire homogène dont $\mathrm{Ker}\, A$ est l'ensemble des solutions.

Le noyau de f n'est jamais que l'ensemble des solutions de l'ÉQUATION LINÉAIRE HOMOGÈNE $f(x) = 0_F$ d'inconnue $x \in E$. On peut dire aussi que $\mathrm{Ker}\, f$ est l'ensemble des éléments de E qui ne comptent pas aux yeux de f, qu'elle ne voit pas. En effet, pour tous $x \in E$ et $k \in \mathrm{Ker}\, f$: $\quad f(x+k) = f(x) \quad$ par linéarité.

Le noyau d'une matrice se lit parfois bien sur ses coefficients. Notons par exemple A la matrice $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & -6\\ 0 & 1 & 1 & -2\\ 1 & 1 & 2 & -4\end{pmatrix}$ et C_1, C_2, C_3, C_4 ses colonnes.

— Tout d'abord $C_3 = C_1 + C_2$, donc $C_1 + C_2 - C_3 = 0$, donc $(1,1,-1,0) \in \mathrm{Ker}\, A$ car $A\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$.

— De même, $C_1 + C_2 + C_3 + C_4 = 0$, donc $(1,1,1,1) \in \mathrm{Ker}\, A$.

Exemple La dérivation polynomiale $P \overset{D}{\longmapsto} P'$ sur $\mathbb{K}[X]$ a pour noyau $\mathrm{Ker}\, D = \mathbb{K}_0[X]$.

Exemple Notons f l'application linéaire $(x,y,z) \longmapsto \big(2x+y-z, x-y\big)$ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$. Alors $\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Vect}\big((1,1,3)\big)$, mais on peut aussi dire, de façon équivalente, que $\mathrm{Ker}\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix} = \mathrm{Vect}\big((1,1,3)\big)$.

Démonstration Pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$:
$$(x,y,z) \in \mathrm{Ker}\, f \iff f(x,y,z) = (0,0)$$
$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & y & - & z & = & 0\\ x & - & y & & & = & 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} y & = & x\\ z & = & 3x,\end{array}\right.$$
donc $\mathrm{Ker}\, f = \big\{(x,x,3x) \mid \ x \in \mathbb{R}\big\} = \mathrm{Vect}\big((1,1,3)\big)$.

Exemple On pose $A = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$. L'endomorphisme $M \overset{\varphi}{\longmapsto} AM - \mathrm{tr}(M)A$ de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ est injectif.

Démonstration L'inclusion $\mathrm{Ker}\, \varphi \subset \{0\}$ suffira. Pour tout $M = \begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}\, \varphi$: $\quad \varphi(M) = \begin{pmatrix}2b-d & c-2a\\ b-2d & 2c-a\end{pmatrix} = 0$, donc $2b - d = b - 2d = c - 2a = 2c - a = 0$, puis après calcul $a = b = c = d = 0$, i.e. $M = 0$.

Exemple L'endomorphisme $f \overset{S}{\longmapsto} f \times \sin$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ **N'est PAS** injectif, mais sa restriction $S|_{\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})}$ l'est.

Démonstration

- Le noyau $\operatorname{Ker} S$ de S est l'ensemble des fonctions f pour lesquelles $f(x)\sin x = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, i.e. l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui sont nulles sur $\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ — et qui prennent des valeurs quelconques sur $\pi\mathbb{Z}$. En particulier $\operatorname{Ker} S \neq \{0_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}}\}$, donc S **N'est PAS** injective.
- Ensuite : $\operatorname{Ker} S|_{\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})} = \left\{ f \in \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid \quad S(f) = 0_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}} \right\} = \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \cap \operatorname{Ker} S$. Or dans $\operatorname{Ker} S$, seule la fonction nulle est **CONTINUE**, donc $\operatorname{Ker} S|_{\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})} = \{0_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}}\}$, ce qui montre bien que $S|_{\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})}$ est injective.

Que faut-il en retenir ? Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et A un sous-espace vectoriel de E.

$\boxed{\operatorname{Ker} f|_A = A \cap \operatorname{Ker} f}$ mais par contre **ATTENTION** : $\boxed{\operatorname{Im} f|_A = f(A) \neq A \cap \operatorname{Im} f,}$

ne serait-ce que parce que $\operatorname{Im} f \subset F$ alors que $A \subset E$.

Théorème (Solutions d'une équation linéaire) Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $y_0 \in F$.

— Si $y_0 \notin \operatorname{Im} f$, l'équation $f(x) = y_0$ d'inconnue $x \in E$ n'a pas de solution.

— Si $y_0 \in \operatorname{Im} f$, l'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = y_0$ d'inconnue $x \in E$ est un sous-espace affine de E de direction $\operatorname{Ker} f$.

Solution générale de l'équation complète = Solution particulière + Solution générale de l'équation **HOMOGÈNE**

Démonstration Dans le cas où $y_0 \in \operatorname{Im} f$: $\quad y_0 = f(x_0) \quad$ pour un certain $x_0 \in E$, donc pour tout $x \in E$:

$$y_0 = f(x) \iff f(x_0) = f(x) \iff f(x - x_0) = 0_F \iff x - x_0 \in \operatorname{Ker} f \iff x \in x_0 + \operatorname{Ker} f.$$

L'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = y_0$ d'inconnue $x \in E$ est ainsi l'ensemble $x_0 + \operatorname{Ker} f$, donc un sous-espace affine de E de direction $\operatorname{Ker} f$.

Exemple On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_1 = 0$ ainsi que $u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n - 4$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad u_n = 2 - 2^n$.

Démonstration L'application $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \overset{T}{\longmapsto} \left(x_{n+2} - x_{n+1} - 2x_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est linéaire de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étudiée est donc solution de l'équation linéaire $T\big((x_n)_{n\in\mathbb{N}}\big) = (-4)_{n\in\mathbb{N}}$ d'inconnue $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Or d'une part, les solutions de l'équation homogène associée sont les suites récurrentes linéaires d'ordre 2 de polynôme caractéristique $X^2 - X - 2 = (X+1)(X-2)$, i.e. les suites $\left(2^n\lambda + (-1)^n\mu\right)_{n\in\mathbb{N}}$, λ et μ décrivant $\mathbb{R}$, mais d'autre part, il est facile de vérifier que la suite constante $(2)_{n\in\mathbb{N}}$ est solution de l'équation complète. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étudiée est ainsi de la forme $\left(2^n\lambda + (-1)^n\mu + 2\right)_{n\in\mathbb{N}}$ pour certains $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, or $u_0 = 1$ et $u_1 = 0$, donc $\lambda = -1$ et $\mu = 0$.

1.5 DÉTERMINATION D'UNE APPLICATION LINÉAIRE SUR UNE BASE OU UNE SOMME DIRECTE

Pour connaître une application en général, on n'a pas trop d'autre choix que de connaître l'ensemble de ses valeurs point par point. Pour une application linéaire en revanche, ce lot considérable d'informations peut être résumé par un nombre restreint de valeurs stratégiques. On connaît par exemple parfaitement l'application $(x,y,z) \longmapsto (2x+y+z, 3x-z)$ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ **SI ON SAIT QU'ELLE EST LINÉAIRE** et si on sait que : $\quad f(1,0,0) = (2,3), \quad f(0,1,0) = (1,0) \quad$ et $\quad f(0,0,1) = (1,-1)$. En effet, pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$:

$$f(x,y,z) = f\Big(x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1)\Big) = xf(1,0,0) + yf(0,1,0) + zf(0,0,1)$$
$$= x(2,3) + y(1,0) + z(1,-1) = (2x+y+z, 3x-z).$$

Le théorème qui suit, fondamental, généralise ce principe.

Théorème (Détermination d'une application linéaire par l'image d'une base) Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. On suppose que E possède une base $(e_i)_{i\in I}$. Pour toute famille $(f_i)_{i\in I}$ de vecteurs de F, il existe une et une seule application linéaire u de E dans F pour laquelle pour tout $i \in I$: $\quad u(e_i) = f_i$.

Pour connaître/définir une application linéaire complètement, il suffit de connaître/définir les valeurs qu'elle prend sur une base de l'espace de départ.

Démonstration Pour tout $j \in I$, notons $e_j^\star$ la forme coordonnée de E selon e_j dans la base $(e_i)_{i\in I}$ — c'est-à-dire l'application qui, à tout vecteur de E, associe sa coordonnée selon e_j dans la base $(e_i)_{i\in I}$. Nous avons déjà vu que les formes coordonnées sont des formes linéaires de E.

Soit $(f_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de F.

- **Analyse :** Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$. On suppose que $u(e_i) = f_i$ pour tout $i \in I$. Alors pour tout $x \in E$:
$$u(x) = u\left(\sum_{i\in I} e_i^\star(x)\,e_i\right) = \sum_{i\in I} e_i^\star(x)\,u(e_i) = \sum_{i\in I} e_i^\star(x)\,f_i.$$
- **Synthèse :** Notons u l'application $\displaystyle\sum_{i\in I} e_i^\star f_i$ de E dans F. Cette application est linéaire car les formes coordonnées le sont, mais détaillons. Pour tous $x, x' \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$:
$$u(\lambda x + x') = \sum_{i\in I} e_i^\star(\lambda x + x')\,f_i = \sum_{i\in I}\Big(\lambda e_i^\star(x) + e_i^\star(x')\Big) f_i = \lambda \sum_{i\in I} e_i^\star(x)\,f_i + \sum_{i\in I} e_i^\star(x')\,f_i = \lambda u(x) + u(x').$$
Enfin, pour tout $j \in I$: $\displaystyle u(e_j) = \sum_{i\in I} e_i^\star(e_j)\,f_i = \sum_{i\in I} \delta_{ij}\,f_i = f_j.$ ■

Dans le théorème qui suit, on ne définit plus les applications linéaires par l'image d'une base mais par leurs restrictions à deux sous-espaces vectoriels supplémentaires. L'idée est la même, cela dit.

Théorème (Détermination d'une application linéaire sur une somme directe) Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E et $u_1 \in \mathscr{L}(E_1,F)$, $u_2 \in \mathscr{L}(E_2,F)$. Il existe une et une seule application linéaire $u \in \mathscr{L}(E,F)$ pour laquelle $u|_{E_1} = u_1$ et $u|_{E_2} = u_2$.

En résumé, tout élément de $\mathscr{L}(E,F)$ est une sorte de concaténation ou de recollement d'un élément de $\mathscr{L}(E_1,F)$ et d'un élément de $\mathscr{L}(E_2,F)$.

Démonstration Par hypothèse $E = E_1 \oplus E_2$, donc tout vecteur de E est la somme d'une et une seule manière d'un vecteur de E_1 et d'un vecteur de E_2.

- **Analyse :** Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$. On suppose que $u|_{E_1} = u_1$ et $u|_{E_2} = u_2$. Pour tout $x = x_1 + x_2 \in E$ avec $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$: $u(x) = u(x_1+x_2) = u(x_1) + u(x_2) = u_1(x_1) + u_2(x_2)$. Cette expression qui ne dépend que de u_1, u_2 et x montre l'unicité cherchée.
- **Synthèse :** Pour tout $x = x_1 + x_2 \in E$ avec $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$, posons $u(x) = u_1(x_1) + u_2(x_2)$. On définit ainsi une application de E dans F.
  - Pour tout $x_1 \in E_1$: $u(x_1) = u(x_1 + 0_E) = u_1(x_1) + u_2(0_E) = u_1(x_1)$, donc $u|_{E_1} = u_1$, et de même $u|_{E_2} = u_2$.
  - Pour la linéarité de u, soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x = x_1 + x_2, y = y_1 + y_2 \in E$ avec $x_1, y_1 \in E_1$ et $x_2, y_2 \in E_2$. Aussitôt $\lambda x + y = \big(\lambda x_1 + y_1\big) + \big(\lambda x_2 + y_2\big)$ avec $\lambda x_1 + y_1 \in E_1$ et $\lambda x_2 + y_2 \in E_2$, donc :
$$\begin{aligned} u\big(\lambda x + y\big) &= u_1\big(\lambda x_1 + y_1\big) + u_2\big(\lambda x_2 + y_2\big) = \Big(\lambda u_1(x_1) + u_1(y_1)\Big) + \Big(\lambda u_2(x_2) + u_2(y_2)\Big) \\ &= \lambda\Big(u_1(x_1) + u_2(x_2)\Big) + \Big(u_1(y_1) + u_2(y_2)\Big) = \lambda u(x) + u(y). \end{aligned}$$ ■

Exemple C'est bien connu : $\mathbb{R}_4[X] = \mathbb{R}_3[X] \oplus \mathrm{Vect}\big(X^4\big)$. D'après le théorème précédent, il existe une et une seule application linéaire φ de $\mathbb{R}_4[X]$ dans $\mathbb{R}_2[X]$ pour laquelle pour tout $P \in \mathbb{R}_3[X]$: $\varphi(P) = P'$ et $\varphi\big(X^4\big) = X$. Cette application est obtenue à partir de l'application linéaire $P \longmapsto P'$ de $\mathbb{R}_3[X]$ dans $\mathbb{R}_2[X]$ et de l'unique application linéaire qui envoie X^4 sur X de $\mathrm{Vect}\big(X^4\big)$ dans $\mathrm{Vect}(X)$.

Concrètement, pour tout $P = aX^4 + bX^3 + cX^2 + dX + e \in \mathbb{R}_4[X]$: $\varphi(P) = aX + \big(3bX^2 + 2cX + d\big) = 3bX^2 + (a+2c)X + d.$

2 Ce qu'on perd d'un côté, on le gagne de l'autre

2.1 Effet d'une application linéaire sur la dimension, notion de rang

En guise d'introduction, donnons-nous un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et des vecteurs $e_1, \dots, e_n \in E$ et notons φ l'application $(x_1, \dots, x_n) \longmapsto x_1e_1 + \dots + x_ne_n$ de $\mathbb{K}^n$ dans E. Avec cette expression, φ est l'unique application linéaire de $\mathbb{K}^n$ dans E qui envoie la base canonique de $\mathbb{K}^n$ sur la famille $(e_1, \dots, e_n)$. À quelle condition φ est-elle surjective/injective ?

— D'abord, φ est surjective si et seulement si : $\forall x \in E, \quad \exists\, (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n, \quad x = x_1e_1 + \dots + x_ne_n,$ i.e. si et seulement si la famille $(e_1, \dots, e_n)$ engendre E.

— Ensuite, φ est injective si et seulement si $\operatorname{Ker} \varphi = \big\{(0, \dots, 0)\big\}$, i.e. si et seulement si :
$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n, \quad x_1e_1 + \dots + x_ne_n = 0_E \quad \Longrightarrow \quad x_1 = \dots = x_n = 0,$$
i.e. si et seulement si la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est libre.

Cet exemple mérite d'être étudié avec soin même si le théorème qui suit le généralise largement.

Théorème (Caractérisation de l'injectivité/surjectivité d'une application linéaire par l'image d'une base) Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathscr{L}(E, F)$. On suppose que E possède une base $(e_i)_{i\in I}$.

(i) f est surjective de E sur F si et seulement si $\big(f(e_i)\big)_{i\in I}$ engendre F.

(ii) f est injective sur E si seulement si $\big(f(e_i)\big)_{i\in I}$ est libre.

(iii) f est un isomorphisme de E sur F si et seulement si $\big(f(e_i)\big)_{i\in I}$ est une base de F.

Démonstration

(i) $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}\big(f(e_i)\big)_{i\in I}$, donc $\operatorname{Im} f = F$ si et seulement si $\big(f(e_i)\big)_{i\in I}$ engendre F.

(ii) Supposons f injective et montrons que $\big(f(e_i)\big)_{i\in I}$ est libre. Soit $(\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I$ une famille presque nulle pour laquelle $\displaystyle\sum_{i\in I} \lambda_i f(e_i) = 0_F$. Par linéarité $f\left(\displaystyle\sum_{i\in I} \lambda_i e_i\right) = 0_F$, donc $\displaystyle\sum_{i\in I} \lambda_i e_i \in \operatorname{Ker} f$, donc $\displaystyle\sum_{i\in I} \lambda_i e_i = 0_E$ par injectivité de f. Enfin, $(e_i)_{i\in I}$ étant libre : $\lambda_i = 0$ pour tout $i \in I$.

Réciproquement, supposons $\big(f(e_i)\big)_{i\in I}$ libre et montrons que f est injective. Soient $x \in \operatorname{Ker} f$ de coordonnées $(x_i)_{i\in I}$ dans $(e_i)_{i\in I}$. Alors : $0_F = f(x) = f\left(\displaystyle\sum_{i\in I} x_i e_i\right) = \displaystyle\sum_{i\in I} x_i f(e_i)$, donc $x_i = 0$ pour tout $i \in I$ par liberté de $\big(f(e_i)\big)_{i\in I}$. A fortiori $x = 0_E$.

Exemple Pour tous $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$ distincts, l'application $P \longmapsto \big(P(x_1), \dots, P(x_n)\big)$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ sur $\mathbb{K}^n$.

Démonstration Linéaire, cette application transforme la base $(L_1, \dots, L_n)$ des polynômes de Lagrange de $x_1, \dots, x_n$ en une **base** de $\mathbb{K}^n$, à savoir la base canonique de $\mathbb{K}^n$ car pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$: $L_i(x_j) = \delta_{ij}$.

D'après la classification des espaces vectoriels de dimension finie que voici, les $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie sont tous isomorphes à un et un seul $\mathbb{K}^n$. En d'autres termes, à isomorphisme près, on connaît tout d'un espace vectoriel de dimension finie quand on connaît sa dimension. Une telle classification est à la fois satisfaisante — chouette, $\mathbb{K}^n$ est une grande vérité des mathématiques — et décevante — bof, quel manque d'exotisme !

Théorème (Effet d'un isomorphisme sur la dimension)

(i) Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Si E est de dimension finie et si F est isomorphe à E, alors F est de dimension finie et $\dim E = \dim F$.

(ii) Réciproquement, deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de **mêmes** dimensions finies sont isomorphes. En particulier, tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.

Démonstration

(i) Par hypothèse, on peut se donner un isomorphisme f de E sur F et une base finie $\mathscr{B}$ de E. Comme voulu, $f(\mathscr{B})$ est une base de F d'après le théorème précédent.

(ii) Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de même dimension finie n. Nous allons montrer que E est isomorphe à $\mathbb{K}^n$, F le sera aussi par symétrie et E et F seront alors isomorphes tout court.

Tout simplement, donnons-nous une base $(e_1,\dots,e_n)$ de E. Comme nous l'avons vu au début de ce paragraphe, l'application $(x_1,\dots,x_n) \longmapsto x_1e_1+\dots+x_ne_n$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}^n$ sur E. ■

En pratique, ce résultat signifie que pour calculer la dimension d'un espace vectoriel, au lieu d'en exhiber une base, on peut montrer qu'il est isomorphe à un espace vectoriel de dimension connue.

Exemple L'ensemble $\mathscr{D}$ des matrices par blocs de la forme $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$, (A,B) décrivant $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2$, est un sous-espace vectoriel de dimension $2n^2$ de $\mathscr{M}_{2n}(\mathbb{K})$.

Démonstration L'application $(A,B) \overset{f}{\longmapsto} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ est clairement linéaire et injective sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2$ et admet $\mathscr{D}$ pour image. Il en découle à la fois que $\mathscr{D}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{2n}(\mathbb{K})$ et que f est un isomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2$ sur $\mathscr{D}$. Conclusion : $\dim \mathscr{D} = \dim \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2 = 2\dim \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) = 2n^2$.

Théorème (Dimension d'un espace vectoriel d'applications linéaires) Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. Alors $\mathscr{L}(E,F)$ est de dimension finie et : $\dim \mathscr{L}(E,F) = \dim E \times \dim F$.

Démonstration Donnons-nous une base $(e_1,\dots,e_n)$ de E avec $n=\dim E$. L'application $u \overset{\varphi}{\longmapsto} \big(u(e_1),\dots,u(e_n)\big)$ est clairement linéaire de $\mathscr{L}(E,F)$ dans F^n et elle est bijective d'après un théorème précédent :

$$\forall (f_1,\dots,f_n) \in F^n, \quad \exists!\, u \in \mathscr{L}(E,F), \quad \varphi(u) = (f_1,\dots,f_n).$$

Bref, φ est un isomorphisme de $\mathscr{L}(E,F)$ sur F^n. Or F étant de dimension finie, F^n l'est par produit, donc $\mathscr{L}(E,F)$ aussi par isomorphisme. Finalement : $\dim \mathscr{L}(E,F) = \dim F^n = n \times \dim F = \dim E \times \dim F$. ■

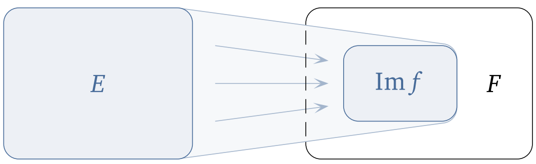
Définition (Application linéaire de rang fini, rang) Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels pas nécessairement de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E,F)$. On dit que f est *de rang fini* si $\operatorname{Im} f$ est de dimension finie et on appelle dans ce cas *rang de f* l'entier $\operatorname{rg}(f) = \dim \operatorname{Im} f$.

Les notions de rang d'une famille de vecteurs et de rang d'une application linéaire ne sont pas sans rapport. Dans le cas où E est de dimension finie et de base $\mathscr{B}$: $\operatorname{rg}(f) = \dim \operatorname{Im} f = \dim \operatorname{Vect}\big(f(\mathscr{B})\big) = \operatorname{rg}\big(f(\mathscr{B})\big)$.

Théorème (Inégalités sur le rang et cas d'égalité) Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathscr{L}(E,F)$.

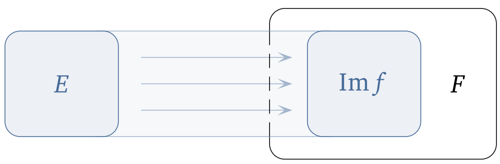
(i) Si F est de dimension finie, f est de rang fini et $\operatorname{rg}(f) \leqslant \dim F$, avec égalité si et seulement si f est surjective.

(ii) Si E est de dimension finie, f est de rang fini et $\operatorname{rg}(f) \leqslant \dim E$, avec égalité si et seulement si f est injective.

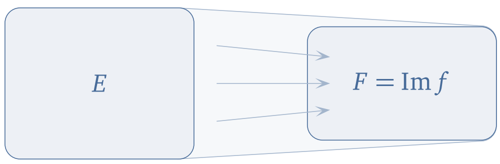


En général, une application ne peut que « contracter » son ensemble de définition, donc si E et F sont de dimension finie :

$\operatorname{rg}(f) \leqslant \dim E$ et $\operatorname{rg}(f) \leqslant \dim F$.



f est injective si et seulement si $\operatorname{rg}(f) = \dim E$.



f est surjective si et seulement si $\operatorname{rg}(f) = \dim F$.

Démonstration

(i) Inclus dans F, $\operatorname{Im} f$ est de dimension finie et $\operatorname{rg}(f) = \dim \operatorname{Im} f \leqslant \dim F$, avec égalité si et seulement si $\operatorname{Im} f = F$, i.e. si et seulement si f est surjective.

(ii) Donnons-nous une base $(e_1,\dots,e_n)$ de E. Aussitôt : $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}\big(f(e_1),\dots,f(e_n)\big)$, donc $\operatorname{Im} f$ est de dimension finie et $\operatorname{rg}(f) = \dim \operatorname{Im} f \leqslant n = \dim E$, avec égalité si et seulement si $\big(f(e_1),\dots,f(e_n)\big)$ est libre, i.e. si et seulement si f est injective. ■

Théorème (Applications linéaires entre espaces vectoriels de mêmes dimensions finies)

(i) Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies ÉGALES et $f \in \mathscr{L}(E,F)$.

$$f \text{ est bijective} \quad \iff \quad f \text{ est injective} \quad \iff \quad f \text{ est surjective.}$$

(ii) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$.

$$f \in \mathrm{GL}(E) \quad \iff \quad f \text{ est inversible à gauche dans } \mathscr{L}(E) \text{ i.e. : } \exists\, g \in \mathscr{L}(E),\ g \circ f = \mathrm{Id}_E \quad \iff \quad f \text{ est inversible à droite dans } \mathscr{L}(E) \text{ i.e. : } \exists\, g \in \mathscr{L}(E),\ f \circ g = \mathrm{Id}_E.$$

L'assertion (i) est la version applications linéaires de la caractérisation des bases en dimension finie selon laquelle une famille de n vecteurs en dimension $n \neq 0$ est une base si et seulement si elle est libre ou génératrice. Cette fois, on ne dit pas que bijectif = surjectif = injectif en toute généralité, mais que c'est vrai pour les applications linéaires dont les espaces de départ et d'arrivée ont MÊME DIMENSION FINIE.

L'assertion (ii) est quant à elle la version endomorphismes du résultat sur les matrices carrées selon lequel pour tous $A, B \in \mathscr{M}_n(K)$, A et B sont inversibles si $AB = I_n$.

Démonstration

(i) f est injective si et seulement si $\mathrm{rg}(f) = \dim E$, i.e. par hypothèse si et seulement si $\mathrm{rg}(f) = \dim F$, i.e. si et seulement si f est surjective.

(ii) Si $f \circ g = \mathrm{Id}_E$ pour un certain $g \in \mathscr{L}(E)$, nous savons que f est surjective, et si $g \circ f = \mathrm{Id}_E$, que f est injective. Le résultat découle donc de l'assertion (i).

Exemple L'application $(x,y,z) \overset{\varphi}{\longmapsto} \big(x+y, -x+y, z\big)$ est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.

Démonstration

- **Preuve n°1 :** ENDOmorphisme EN DIMENSION FINIE, φ sera bijective si nous montrons simplement qu'elle est injective. Or pour tout $(x,y,z) \in \mathrm{Ker}\,\varphi$: $\varphi(x,y,z) = \big(x+y, -x+y, z\big) = (0,0,0)$, donc rapidement $x = y = z = 0$. Comme voulu $\mathrm{Ker}\,\varphi = \big\{(0,0,0)\big\}$.
- **Preuve n°2 :** φ n'est jamais que l'application linéaire canoniquement associée à la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, inversible car la famille de ses colonnes est clairement libre.

Exemple L'application $P \overset{\psi}{\longmapsto} XP' + P(0)$ est un automorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration Fixons $n \in \mathbb{N}$. L'application ψ est bien à valeurs dans $\mathbb{K}_n[X]$ car pour tout $P \in \mathbb{K}_n[X]$:

$$\deg\big(XP' + P(0)\big) \leqslant \max\Big\{\deg(XP'), \deg\big(P(0)\big)\Big\} \leqslant \max\Big\{1 + \deg(P'), \deg\big(P(0)\big)\Big\} \leqslant \deg(P) \leqslant n.$$

Comme ψ est un ENDOmorphisme EN DIMENSION FINIE, il nous suffit, pour en montrer la bijectivité, d'en montrer l'injectivité. Soit $P \in \mathrm{Ker}\,\psi$. Aussitôt $XP' = -P(0)$, donc $1 + \deg(P') \leqslant 0$, ce qui n'est possible que si P est constant. En retour $\psi(P) = P(0) = 0$, donc $P = 0$. Comme voulu $\mathrm{Ker}\,\psi = \big\{0\big\}$.

2.2 LE THÉORÈME DU RANG

Le noyau et l'image d'une application linéaire sont fortement liés, on s'en rend déjà bien compte sur l'exemple simple des matrices. Notons par exemple A la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ de colonnes C_1, C_2 et C_3. Il est clair que $C_3 = C_1 + C_2$, donc $\mathrm{Im}\,A = \mathrm{Vect}(C_1, C_2, C_3) = \mathrm{Vect}(C_1, C_2)$, donc $\mathrm{Im}\,A$ est de dimension au plus 2. Or la relation $C_3 = C_1 + C_2$ indique aussi que $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}\,A$, et donc que $\mathrm{Ker}\,A$ est au moins de dimension 1. Il semblerait ainsi que la somme $\dim \mathrm{Ker}\,A + \mathrm{rg}(A)$ soit constante, i.e. que : ce qu'on perd d'un côté, on le gagne de l'autre. C'est exactement ce qui se passe.

Théorème (Forme géométrique du théorème du rang) Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels pas nécessairement de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E,F)$.
Si $\mathrm{Ker}\,f$ possède un supplémentaire I dans E, $f|_I$ est un isomorphisme de I sur $\mathrm{Im}\,f$.

Dans l'égalité $E = I \oplus \operatorname{Ker} f$, $\operatorname{Ker} f$ est l'ensemble des éléments de E que f ne voit pas, donc f ne voit passer que I, et comme I ne touche $\operatorname{Ker} f$ que du bout de son zéro, f est injective sur I, donc envoie bijectivement I sur $\operatorname{Im} f$.

De manière moins imagée, $\left(f|_I\right)^{-1}$ est l'application qui associe à tout élément de $\operatorname{Im} f$ son unique antécédent dans I.

Démonstration Par restriction, $f|_I$ est linéaire de I dans $\operatorname{Im} f$.

- **Injectivité :** $\operatorname{Ker} f|_I = I \cap \operatorname{Ker} f = \{0_E\}$ car I et $\operatorname{Ker} f$ sont en somme directe.
- **Surjectivité :** Soit $y \in \operatorname{Im} f$, disons $y = f(x)$ pour un certain $x \in E$. Aussitôt $x = i + k$ pour certains $i \in I$ et $k \in \operatorname{Ker} f$ car $E = I + \operatorname{Ker} f$, donc $y = f(x) = f(i) + f(k) = f(i) + 0_F = f|_I(i)$.

Théorème (Théorème du rang) Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathscr{L}(E,F)$.
Si E est de dimension finie : $\dim E = \dim \operatorname{Ker} f + \operatorname{rg}(f)$.

Morale de l'histoire : Si je connais le noyau, je connais un peu l'image — et vice versa.

Plus précisément, le théorème du rang est une LOI DE CONSERVATION DE LA DIMENSION AU DÉPART au même titre qu'il existe une loi de conservation de l'énergie en mécanique newtonienne pour un système isolé.

L'hypothèse selon laquelle E est de dimension finie garantit que $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ le sont aussi.

Démonstration Comme E est de dimension finie, $\operatorname{Ker} f$ possède un supplémentaire I dans E. Ensuite, $f|_I$ est un isomorphisme de I sur $\operatorname{Im} f$ d'après la forme géométrique du théorème du rang, donc $\dim I = \dim \operatorname{Im} f$, et enfin par supplémentarité de I et $\operatorname{Ker} f$ dans E : $\operatorname{rg}(f) = \dim \operatorname{Im} f = \dim I = \dim E - \dim \operatorname{Ker} f$.

Exemple On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 8 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Alors $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Vect}\big((3,-2,-1)\big)$ et $\operatorname{Im} A = \operatorname{Vect}\big((1,2,1),(2,-1,1)\big)$.

Démonstration

- **Noyau :** Pour varier les plaisirs, calculons $\operatorname{Ker} A$ matriciellement par des opérations élémentaires sur les LIGNES de A. Plutôt que des opérations sur les lignes d'un système linéaire homogène, pourquoi ne pas faire les mêmes opérations directement sur A ?

  C'est facile : $$\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 8 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & -10 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_2 \leftarrow 2L_1 - L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{matrix} = \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$
  $$= \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 \quad = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \quad x + 3z = 0 \quad \text{et} \quad y - 2z = 0\Big\}$$
  $$= \Big\{(-3z, 2z, z) \mid \quad z \in \mathbb{R}\Big\} = \operatorname{Vect}\big((3,-2,-1)\big)$$
- **Image :** $\operatorname{Im} A = \operatorname{Vect}\big((1,2,1),(2,-1,1),(-1,8,1)\big)$ et $\dim \operatorname{Im} A = 3 - \dim \operatorname{Ker} A = 2$ d'après le théorème du rang. La famille $\big((1,2,1),(2,-1,1)\big)$ étant libre, elle constitue ainsi une base de $\operatorname{Im} A$.

Exemple Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$. Si $f^3 = 0_{\mathscr{L}(E)}$, alors $\operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}\big(f^2\big) \leqslant \dim E$.

Démonstration L'égalité $f^3 = 0_{\mathscr{L}(E)}$ montre que $f\big(f^2(x)\big) = 0_E$ pour tout $x \in E$, i.e. que $\operatorname{Im} f^2 \subset \operatorname{Ker} f$, et donc en particulier que $\operatorname{rg}\big(f^2\big) \leqslant \dim \operatorname{Ker} f$. Appliquons alors le théorème du rang à f, ce qui est possible car E est de dimension finie : $\dim E = \dim \operatorname{Ker} f + \operatorname{rg}(f) \geqslant \operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}\big(f^2\big)$.

2.3 RANG D'UNE MATRICE

Définition (Rang d'une matrice) Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

(i) **Définition :** Le rang de l'application linéaire canoniquement associée à A est égal au rang de la famille des colonnes de A. On appelle *rang de* A, noté $\operatorname{rg}(A)$, la valeur commune de ces deux rangs.
En particulier : $\operatorname{rg}(A) \leqslant \min\{n,p\}$.

(ii) **Lien avec l'inversibilité :** Si A est carrée de taille n, A est inversible si et seulement si $\operatorname{rg}(A) = n$.

Démonstration Notons $C_1, \dots, C_p$ les colonnes de A. Pour (i), nous savons déjà que $\operatorname{Im} A = \operatorname{Vect}(C_1, \dots, C_p)$, et pour (ii) avec $p = n$, que A est inversible si et seulement si $(C_1, \dots, C_n)$ est libre, i.e. si et seulement si $\operatorname{rg}(C_1, \dots, C_n) = n$. ■

Théorème (Rang d'une famille de vecteurs, rang d'une matrice associée) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $\mathscr{B}$ une base de E et $\mathscr{X}$ une famille finie de vecteurs de E. Alors $\operatorname{rg}(\mathscr{X}) = \operatorname{rg}\big(\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{X})\big)$.

Démonstration Introduisons les vecteurs de $\mathscr{B}$ et $\mathscr{X}$: $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathscr{X} = (x_1, \dots, x_p)$, ainsi que les colonnes $C_1, \dots, C_p$ de $\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{X})$ et φ l'isomorphisme $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \longmapsto \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$ de $\mathbb{K}^n$ sur E.

Pour tout $j \in [\![1, p]\!]$: $\varphi(C_j) = x_j$, donc $\varphi_{|\operatorname{Vect}(C_1,\dots,C_p)}$ est un isomorphisme de $\operatorname{Vect}(C_1, \dots, C_p)$ sur $\operatorname{Vect}(\mathscr{X})$, donc $\operatorname{rg}(\mathscr{X}) = \dim \operatorname{Vect}(\mathscr{X}) = \dim \operatorname{Vect}(C_1, \dots, C_p) = \operatorname{rg}(C_1, \dots, C_p) = \operatorname{rg}\big(\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{X})\big)$. ■

Le gros problème de la définition qui précède, c'est qu'elle ne nous donne pas d'algorithme de calcul du rang d'une matrice. Le résultat qui suit, en apparence éloigné du sujet, va nous en fournir un.

Théorème (Invariance du rang par composition avec un isomorphisme) Soient E, F, E', F' des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

(i) Pour tout isomorphisme φ de E' sur E : $\operatorname{rg}(f \circ \varphi) = \operatorname{rg}(f)$.

(ii) Pour tout isomorphisme ψ de F sur F' : $\operatorname{rg}(\psi \circ f) = \operatorname{rg}(f)$.

Démonstration

(i) $\operatorname{Im}(f \circ \varphi) = \Big\{ f \circ \varphi(x) \ \big| \ x \in E' \Big\} \overset{\operatorname{Im} \varphi = E}{=} \Big\{ f(y) \ \big| \ y \in E \Big\} = \operatorname{Im} f$, donc $\operatorname{rg}(f \circ \varphi) = \operatorname{rg}(f)$.

(ii) $\operatorname{Im}(\psi \circ f) = \Big\{ \psi \circ f(x) \ \big| \ x \in E \Big\} = \Big\{ \psi_{|\operatorname{Im} f}\big(f(x)\big) \ \big| \ x \in E \Big\} = \Big\{ \psi_{|\operatorname{Im} f}(y) \ \big| \ y \in \operatorname{Im} f \Big\} = \operatorname{Im} \psi_{|\operatorname{Im} f}$.

Ensuite, ψ est injective donc $\psi_{|\operatorname{Im} f}$ également, donc $\psi_{|\operatorname{Im} f}$ est un isomorphisme de $\operatorname{Im} f$ sur son image $\operatorname{Im}(\psi \circ f)$. En particulier : $\operatorname{rg}(f) = \dim \operatorname{Im} f = \dim \operatorname{Im}(\psi \circ f) = \operatorname{rg}(\psi \circ f)$. ■

Théorème (Les opérations élémentaires préservent le rang) Toute opération élémentaire sur les lignes ou les colonnes d'une matrice en préserve le rang.

Démonstration Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Nous avons déjà vu que toute opération élémentaire sur les **LIGNES** de A peut être obtenue par multiplication **À GAUCHE** par une certaine matrice inversible. Soit donc $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Parce que P est inversible, son application linéaire canoniquement associée $\widehat{P}$ est un automorphisme de $\mathbb{K}^n$, donc $\operatorname{rg}(PA) = \operatorname{rg}\big(\widehat{PA}\big) = \operatorname{rg}\big(\widehat{P} \circ \widehat{A}\big) = \operatorname{rg}\big(\widehat{A}\big) = \operatorname{rg}(A)$. On procéderait de même sur les colonnes. ■

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. L'algorithme qui suit est une adaptation de l'algorithme du pivot au calcul du rang de A. Il ramène ce calcul à celui du rang d'une matrice de taille strictement plus petite $(n-1) \times (p-1)$. Le procédé doit être ensuite répété à l'identique jusqu'à obtention du résultat.

0) Si $A = 0$, évidemment $\operatorname{rg}(A) = 0$ et on sort de l'algorithme.

1) Dans le cas contraire, au moins un coefficient de A est non nul, disons a, et va pouvoir nous servir de pivot. On le place en position $(1,1)$ par une éventuelle permutation de lignes et colonnes.

2) À l'aide du pivot a, on annule par des opérations élémentaires sur les lignes tous les termes de la première colonne situés sous a.

   Étape masquée en pratique — toujours à l'aide du pivot a, on annule par des opérations élémentaires sur les colonnes tous les termes de la première ligne situés à droite de a.

3) À ce stade, la première colonne de la matrice obtenue est clairement **NON** combinaison linéaire des autres colonnes, donc la sous-matrice A' obtenue par oubli des première ligne et colonne est de rang $\operatorname{rg}(A') = \operatorname{rg}(A) - 1$.

L'algorithme ainsi décrit se termine avec certitude car A' est strictement plus petite en taille que A.

$$\operatorname{rg}(A) \overset{\text{Étape 1)}}{=} \operatorname{rg}\begin{pmatrix} a & \times & \cdots & \times \\ \times & \times & \cdots & \times \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \times & \times & \cdots & \times \end{pmatrix} \overset{\text{Étape 2)}}{=} \operatorname{rg}\begin{pmatrix} a & \times & \cdots & \times \\ 0 & & & \\ \vdots & & A' & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \overbrace{=}^{\text{Étape masquée}} \operatorname{rg}\begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & A' & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \overset{\text{Étape 3)}}{=} \operatorname{rg}(A') + 1.$$

Une dernière remarque. Alors que vous devez choisir de travailler sur les lignes **OU-EXCLUSIF** sur les colonnes pour inverser une matrice, vous pouvez ici mélanger librement les opérations sur les lignes et celles sur les colonnes.

Exemple $\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & -4 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad C_1 \leftrightarrow C_2 \quad = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 4 & -2 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad L_1 \leftrightarrow L_4$

$$= 1 + \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} = 1 + \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad L_4 \leftarrow \frac{1}{2}L_1 + \frac{1}{2}L_4 \quad = 2 + \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2 + 2 = 4.$$

Il découle par exemple de ce calcul que : $\quad \dim \mathrm{Vect}\Big(-X^4 - 2X^3 + X, X^3, 3X^4 - 4X^3 + X^2 - X + 1, X^3 + 2X^2 + 2X + 3\Big) = 4$ après écriture matricielle dans la base canonique $\big(1, X, X^2, X^3, X^4\big)$. Jusqu'ici, nous aurions plutôt utilisé l'algorithme de la base incomplète pour calculer cette dimension.

3 Formes linéaires et hyperplans

Rappelons pour commencer qu'une **forme** linéaire n'est jamais qu'une application linéaire **à valeurs dans** $\mathbb{K}$.

Théorème (Formes linéaires et formes coordonnées en dimension finie) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. La famille $\big(e_1^\star, \ldots, e_n^\star\big)$ des formes coordonnées associée est une base du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathscr{L}(E, \mathbb{K})$ des formes linéaires de E.

En résumé, en dimension finie, les formes linéaires ne sont rien de plus que les combinaisons linéaires des formes coordonnées dans une base fixée.

Démonstration

- **Caractère générateur :** Soit $\varphi \in \mathscr{L}(E, \mathbb{K})$.
  Pour tout $x \in E$: $\quad x = \sum_{i=1}^n \underbrace{e_i^\star(x)}_{\in \mathbb{K}} e_i, \quad$ donc $\varphi(x) = \sum_{i=1}^n \varphi(e_i) e_i^\star(x)$ par linéarité de φ, donc $\varphi = \sum_{i=1}^n \underbrace{\varphi(e_i)}_{\in \mathbb{K}} e_i^\star$.
- **Liberté :** Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$. Si $\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i^\star = 0_{\mathscr{L}(E,\mathbb{K})}$, alors $\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i^\star(e_j) = 0$ pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, donc $\lambda_j = 0$.

Exemple Soit φ une forme linéaire de $\mathbb{K}^n$. Notons $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et posons $a_i = \varphi(e_i)$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. Pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$: $\quad \varphi(x_1, \ldots, x_n) = \varphi\big(x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n\big) = x_1 \varphi(e_1) + \ldots + x_n \varphi(e_n) = a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n$, donc φ est l'application $(x_1, \ldots, x_n) \longmapsto a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n$. Vous avez là sous les yeux la forme générale de toutes les formes linéaires de $\mathbb{K}^n$, et n'oubliez pas que les applications $(x_1, \ldots, x_n) \longmapsto x_1$, ..., $(x_1, \ldots, x_n) \longmapsto x_n$ sont les formes coordonnées de la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

Exemple Soit φ une forme linéaire de $\mathbb{K}_n[X]$. Posons $\varphi_k = \varphi\big(X^k\big)$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$.

Pour tout $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{K}_n[X]$: $\quad \varphi(P) = \sum_{k=0}^n a_k \varphi\big(X^k\big) = \sum_{k=0}^n \varphi_k a_k, \quad$ donc φ est l'application $P \longmapsto \sum_{k=0}^n \varphi_k a_k$.
Par exemple, la forme linéaire $P \longmapsto P(2)$ de $\mathbb{R}_3[X]$ envoie tout polynôme $P = a_3 X^3 + a_2 X^2 + a_1 X + a_0$ sur la combinaison linéaire suivante de a_0, a_1, a_2 et a_3 : $\quad P(2) = a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3$.

Définition (Hyperplan) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel — pas forcément de dimension finie. On appelle *hyperplan de E* tout noyau d'une forme linéaire **non nulle** de E.

Le noyau de la forme linéaire nulle $x \longmapsto 0_E$ est E tout entier. On précise donc « non nulle » dans la définition pour éviter que E lui-même soit un hyperplan de E.

En dimension finie :	Hyperplan	=	Ensemble décrit par **une** équation linéaire non nulle sur les coordonnées dans une base fixée

Exemple

- Le plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$ d'équation $2x + y - z = 0$ est un hyperplan de $\mathbb{R}^3$ — noyau de la forme linéaire non nulle $(x, y, z) \longmapsto 2x + y - z$.

- L'ensemble $H = \left\{ P \in \mathbb{R}_3[X] \mid \quad P'(1) + P(0) = 0 \right\}$ est un hyperplan de $\mathbb{R}_3[X]$ — noyau de la forme linéaire non nulle $P \longmapsto P'(1) + P(0)$. On voit moins bien ici que H est décrit par une équation linéaire sur les coordonnées, mais si on introduit les coefficients a, b, c, d de P : $\quad P = aX^3 + bX^2 + cX + d, \quad H$ est décrit par l'équation $3a + 2b + c + d = 0$.
- L'ensemble $\left\{ f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \quad f'(0) = f(0) \right\}$ est un hyperplan de $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ — noyau de la forme linéaire non nulle $f \longmapsto f(0) - f'(0)$. Ici, $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est de dimension infinie.

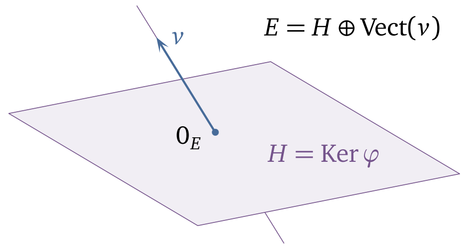
Théorème (Caractérisation géométrique des hyperplans) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et H une partie de E. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) H est un hyperplan de E. (ii) H est supplémentaire d'une droite de E.

Si E est de dimension finie $n \geqslant 1$, les hyperplans de E sont donc ses sous-espaces vectoriels de dimension $n - 1$.

En dimension 3 : hyperplan = plan. En dimension 2 : hyperplan = droite.

Démonstration



(ii) $\Longrightarrow$ (i) Par hypothèse, $E = H \oplus \mathrm{Vect}(v)$ pour un certain $v \in E$ non nul. Notons alors φ l'unique forme linéaire de E pour laquelle $\varphi|_H = 0_{\mathscr{L}(H,\mathbb{K})}$ et $\varphi(v) = 1$. Une telle forme linéaire existe et est unique d'après le théorème de détermination d'une application linéaire sur une somme directe. Il est clair que φ est non nulle et tout aussi clair que $\mathrm{Ker}\,\varphi = H$, donc H est un hyperplan de E.

(i) $\Longrightarrow$ (ii) Donnons-nous une forme linéaire non nulle φ de noyau H et, φ étant non nulle, un vecteur v de $E \setminus \mathrm{Ker}\,\varphi$. Nous allons montrer que $E = H \oplus \mathrm{Vect}(v)$. Comme $H \cap \mathrm{Vect}(v) = \left\{0_E\right\}$, nous n'avons qu'à montrer l'inclusion $E \subset H + \mathrm{Vect}(v)$.

Soit $x \in E$. Par définition de v : $\quad \varphi(v) \neq 0, \quad$ donc $\varphi\left(x - \dfrac{\varphi(x)}{\varphi(v)}\, v\right) = \varphi(x) - \dfrac{\varphi(x)}{\varphi(v)}\, \varphi(v) = 0$. En d'autres termes $x - \dfrac{\varphi(x)}{\varphi(v)}\, v \in \mathrm{Ker}\,\varphi = H$, donc $x \in H + \mathrm{Vect}(v)$. ■

Exemple Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour une raison de dimension, $\mathbb{K}_n[X]$ est un hyperplan de $\mathbb{K}_{n+1}[X]$ et $\mathbb{K}^n \times \left\{0\right\}$ un hyperplan de $\mathbb{K}^{n+1}$.

Exemple

- L'ensemble $\left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid \quad 2x + y = z + t \right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ de dimension $4 - 1 = 3$ en tant que noyau de la FORME linéaire non nulle $(x, y, z, t) \longmapsto 2x + y - z - t$.
- L'ensemble $\left\{ P \in \mathbb{R}_4[X] \mid \quad P(0) = P(1) \right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_4[X]$ de dimension $5 - 1 = 4$ en tant que noyau de la FORME linéaire non nulle $P \longmapsto P(1) - P(0)$.

Théorème (Comparaison des équations d'un hyperplan) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, H un hyperplan de E et φ, ψ deux formes linéaires non nulles de E dont H est le noyau. Alors $\psi = \lambda \varphi$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{K}^*$.

En résumé, tout hyperplan possède une et une seule « vraie » équation, toutes ses équations sont multiples les unes des autres. Nous connaissions bien ce résultat en géométrie élémentaire, le plan d'équation $x + y + 2z = 0$ et le plan d'équation $2x + 2y + 4z = 0$ sont évidemment un seul et même plan, et ce plan n'a pas d'équation « vraiment » différente.

Démonstration Grâce au théorème précédent, $E = H \oplus \mathrm{Vect}(v)$ pour un certain $v \in E$. La forme linéaire $\varphi(v)\,\psi - \psi(v)\,\varphi$ est alors nulle sur H par définition de φ et ψ, mais également nulle en v, donc nulle sur E tout entier par linéarité. Or $\varphi(v) \neq 0$ — sans quoi φ serait nulle sur E tout entier — donc $\psi = \lambda \varphi$ avec $\lambda = \dfrac{\psi(v)}{\varphi(v)}$. ■

Théorème (Intersections d'hyperplans) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle n et $r \in [\![1, n]\!]$.

(i) L'intersection de r hyperplans de E est un sous-espace vectoriel de E de dimension AU MOINS $n - r$.

(ii) Tout sous-espace vectoriel de E de dimension $n - r$ est l'intersection d'exactement r hyperplans de E.

Dans $\mathbb{R}^3$, nous savons bien qu'une équation scalaire décrit un plan et que deux telles équations, pour peu qu'elles ne soient pas multiples l'une de l'autre, décrivent une droite. L'idée générale du théorème ci-dessus, c'est que dans un système linéaire, chaque équation occasionne **POTENTIELLEMENT** la perte d'une dimension par rapport au nombre total d'inconnues. Pourquoi potentiellement ? Parce que certaines équations peuvent être redondantes et ne pas compter vraiment dans le système. Par exemple, le système linéaire $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & 2z & = & 0 \\ 2x & - & y & + & z & = & 0 \\ 3x & & & - & z & = & 0 \end{array}\right.$ d'inconnue $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ décrit une droite et non un point de $\mathbb{R}^3$ car la troisième équation n'est jamais que la somme des deux premières.

Démonstration

(i) Soient $H_1,\dots,H_r$ des hyperplans de E. Pour tout $k\in[\![1,r]\!]$, notons φ_k une forme linéaire non nulle de E dont H_k est le noyau. L'application $x \stackrel{\Phi}{\longmapsto} \big(\varphi_1(x),\dots,\varphi_r(x)\big)$ est linéaire de E dans $\mathbb{K}^r$ de noyau $H_1\cap\ldots\cap H_r$, donc d'après le théorème du rang : $\dim\big(H_1\cap\ldots\cap H_r\big)=\dim E-\mathrm{rg}(\Phi)\geqslant \dim E-\dim\mathbb{K}^r=n-r$.

(ii) Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension $n-r$. Donnons-nous une base $(e_1,\dots,e_n)$ de E dont les $n-r$ derniers vecteurs forment une base de F et pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, notons $e_i^\star$ la $i^{\text{ème}}$ forme coordonnée associée. Pour tout $x\in E$: $x\in F \iff x\in\mathrm{Vect}(e_{r+1},\dots,e_n) \iff e_1^\star(x)=\ldots=e_r^\star(x)=0$
$\iff x\in\mathrm{Ker}\,e_1^\star\cap\ldots\cap\mathrm{Ker}\,e_r^\star$.

Conclusion : $F=\mathrm{Ker}\,e_1^\star\cap\ldots\cap\mathrm{Ker}\,e_r^\star$, ce qui fait bien de F l'intersection de r hyperplans de E.

4 Projecteurs et symétries

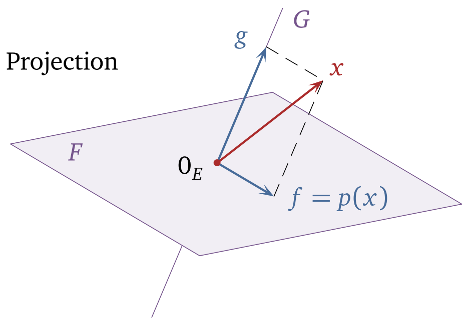
Définition (Projecteur et symétrie) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E. Tout élément $x\in E$ s'écrit d'une et une seule façon comme la somme $x=f+g$ d'un élément $f\in F$ et d'un élément $g\in G$. Avec ces notations :

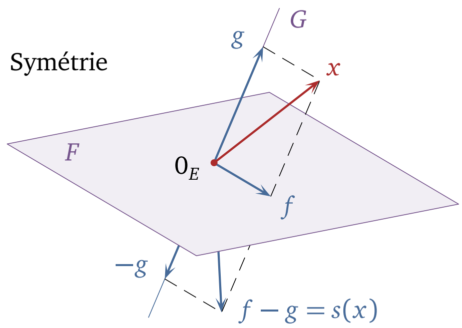
— l'application de E dans E qui à x associe f est appelée *projection sur F parallèlement à G* ou encore *projecteur sur F de direction G*,

— l'application de E dans E qui à x associe $f-g$ est appelée *symétrie par rapport à F parallèlement à G* ou encore *symétrie par rapport à F de direction G*.

Dans les deux cas, F est appelé la *base* et G la *direction* de la projection ou de la symétrie.

On comprend mieux ces définitions un peu abstraites au moyen de quelques figures. Notons p la projection sur F parallèlement à G et s la symétrie par rapport à F parallèlement à G.





Exemple La projection de $\mathbb{R}^3$ par rapport à $F=\big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0\big\}$ parallèlement à $G=\mathrm{Vect}\big((1,1,1)\big)$ est l'application linéaire canoniquement associée à la matrice $\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Démonstration Montrons d'abord que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$, le reste en découlera. Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. Pour tous $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ et $\lambda\in\mathbb{R}$:

$$\begin{array}{r} (x,y,z)=(a,b,c)+\lambda(1,1,1) \\ \text{et}\quad (a,b,c)\in F \end{array} \iff \left\{\begin{array}{ccccccccl} a & & & & & + & \lambda & = & x \\ & & b & & & + & \lambda & = & y \\ & & & & c & + & \lambda & = & z \\ a & + & b & + & c & & & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{cccccccc} a & & & + & \lambda & = & x & \\ & b & & + & \lambda & = & y & \\ & & c & + & \lambda & = & z & \\ & & & & \lambda & = & \dfrac{x+y+z}{3} & L_4 \leftarrow \dfrac{L_1+L_2+L_3-L_4}{3} \end{array}\right.$$

$$\iff \quad (a,b,c) = \left(\frac{2x-y-z}{3}, \frac{-x+2y-z}{3}, \frac{-x-y+2z}{3}\right) \quad \text{et} \quad \lambda = \frac{x+y+z}{3}.$$

La supplémentarité de F et G dans $\mathbb{R}^3$ est ainsi démontrée, mais comme le projeté de (x,y,z) par rapport à F parallèlement à G est par définition le vecteur (a,b,c), la projection cherchée est finalement l'application :

$$(x,y,z) \longmapsto \left(\frac{2x-y-z}{3}, \frac{-x+2y-z}{3}, \frac{-x-y+2z}{3}\right).$$

Théorème (Propriétés des projecteurs et des symétries) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E. On note p la projection sur F parallèlement à G et s la symétrie par rapport à F parallèlement à G.

(i) **Propriétés des projecteurs :** p est un endomorphisme de E et $p^2 = p$.

$$F = \mathrm{Im}\, p = \mathrm{Ker}\big(p - \mathrm{Id}_E\big) = \big\{x \in E \mid \; p(x) = x\big\} \qquad \text{et} \qquad G = \mathrm{Ker}\, p.$$

(ii) **Propriétés des symétries :** s est un automorphisme de E et $s^2 = \mathrm{Id}_E$, i.e. $s^{-1} = s$.

$$F = \mathrm{Ker}\big(s - \mathrm{Id}_E\big) = \big\{x \in E \mid \; s(x) = x\big\} \qquad \text{et} \qquad G = \mathrm{Ker}\big(s + \mathrm{Id}_E\big) = \big\{x \in E \mid \; s(x) = -x\big\}.$$

De façon plus générale, habituez-vous à l'idée que pour tous $f \in \mathscr{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$:

$$\mathrm{Ker}\big(f - \lambda \mathrm{Id}_E\big) = \big\{x \in E \mid \; (f - \lambda \mathrm{Id}_E)(x) = 0_E\big\} = \big\{x \in E \mid \; f(x) = \lambda x\big\}.$$

Démonstration

(i) Par construction, p est l'unique endomorphisme de E pour lequel $p|_F = \mathrm{Id}_F$ et $p|_G = 0_{\mathscr{L}(G,E)}$.
Montrons que $p^2 = p$. Soit $x = f + g \in E$ avec $f \in F$ et $g \in G$. Aussitôt $p(x) = f = f + 0_E$ avec $f \in F$ et $0_E \in G$, donc $p^2(x) = p\big(p(x)\big) = f = p(x)$.

Par définition de p, si on y réfléchit deux secondes : $\mathrm{Im}\, p \subset F \subset \big\{x \in E \mid \; p(x) = x\big\} \subset \mathrm{Im}\, p$, donc les trois ensembles mentionnés sont égaux. L'égalité $G = \mathrm{Ker}\, p$ paraît tout aussi claire.

(ii) Par construction, s est l'unique endomorphisme de E pour lequel $s|_F = \mathrm{Id}_F$ et $s|_G = -\mathrm{Id}_G$. Pour le reste, à vous de jouer !

Théorème (Caractérisation algébrique des projecteurs) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $p : E \longrightarrow E$ une application.

p est un projecteur si et seulement si p est linéaire et $p^2 = p$.

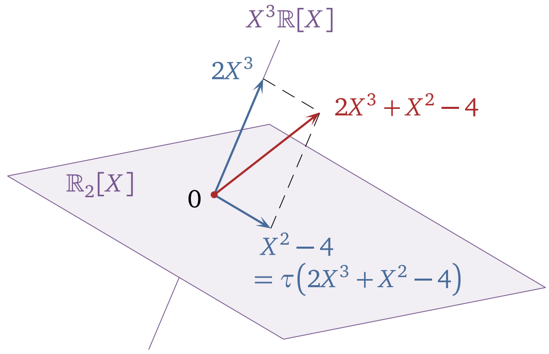
Dans ce cas, $\mathrm{Im}\, p$ et $\mathrm{Ker}\, p$ sont supplémentaires dans E et p est la projection sur $\mathrm{Im}\, p$ parallèlement à $\mathrm{Ker}\, p$. Concrètement, pour tout $x \in E$: $\quad x = \underbrace{p(x)}_{\in \mathrm{Im}\, p} + \underbrace{x - p(x)}_{\in \mathrm{Ker}\, p}.$

Démonstration Nous n'avons plus qu'une implication à prouver. Faisons l'hypothèse que p est linéaire et que $p^2 = p$ et montrons d'abord par analyse et synthèse que $\mathrm{Im}\, p$ et $\mathrm{Ker}\, p$ sont supplémentaires dans E. Soit $x \in E$.

- **Analyse :** Soient $i \in \mathrm{Im}\, p$ et $k \in \mathrm{Ker}\, p$ pour lesquels $x = i + k$. Aussitôt $p(k) = 0_E$ et $i = p(t)$ pour un certain $t \in E$, donc par linéarité $p(x) = p(i)$, puis $i = p(t) = p^2(t) = p(i) = p(x)$, et enfin $k = x - i = x - p(x)$.
- **Synthèse :** Posons $i = p(x)$ et $k = x - p(x)$. Clairement $x = i + k$ et $i \in \mathrm{Im}\, p$. En outre :
$$p\big(x - p(x)\big) = p(x) - p^2(x) = p(x) - p(x) = 0_E, \qquad \text{donc } x - p(x) \in \mathrm{Ker}\, p.$$

Conclusion : $\quad E = \mathrm{Im}\, p \oplus \mathrm{Ker}\, p, \quad$ et la décomposition de x cherchée est $x = p(x) + \big(x - p(x)\big)$, donc en effet, $p(x)$ est le projeté de x sur $\mathrm{Im}\, p$ parallèlement à $\mathrm{Ker}\, p$ par définition des projections.

Exemple Pour tout $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$, on pose $\tau(P) = a_2 X^2 + a_1 X + a_0$. L'application τ ainsi définie est le projecteur de $\mathbb{R}[X]$ sur $\mathbb{R}_2[X]$ de direction $X^3 \mathbb{R}[X]$. Par exemple : $\quad \tau\big(5X^6 + 2X^5 - 4X^4 + X^2 + 1\big) = X^2 + 1.$



Démonstration D'après le théorème de la division euclidienne par X^3 : $\mathbb{R}[X]=X^3\mathbb{R}[X]\oplus\mathbb{R}_2[X]$, donc τ est l'unique endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ pour lequel $\tau|_{\mathbb{R}_2[X]}=\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_2[X]}$ et $\tau|_{X^3\mathbb{R}[X]}=0_{\mathscr{L}(X^3\mathbb{R}[X],\mathbb{R}[X])}$. À ce titre, c'est un projecteur.

Les points fixes de τ sont exactement les polynômes de degré au plus 2, donc $\mathrm{Im}\,\tau=\mathbb{R}_2[X]$. Quant aux polynômes dont l'image par τ est nulle, ce sont ceux dont les trois premiers coefficients sont nuls, i.e. qu'on peut factoriser par X^3, donc $\mathrm{Ker}\,\tau=X^3\mathbb{R}[X]$.

Théorème (Caractérisation algébrique des symétries) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $s:E\longrightarrow E$ une application.

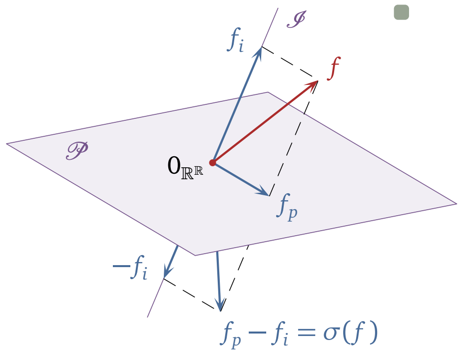
$$s \text{ est une symétrie si et seulement si } s \text{ est linéaire et } s^2=\mathrm{Id}_E.$$

Dans ce cas, $\mathrm{Ker}\big(s-\mathrm{Id}_E\big)$ et $\mathrm{Ker}\big(s+\mathrm{Id}_E\big)$ sont supplémentaires dans E et s est la symétrie par rapport à $\mathrm{Ker}\big(s-\mathrm{Id}_E\big)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}\big(s+\mathrm{Id}_E\big)$.

Démonstration Nous n'avons plus qu'une implication à prouver. Faisons l'hypothèse que s est linéaire et que $s^2=\mathrm{Id}_E$ et montrons d'abord par analyse et synthèse que $\mathrm{Ker}\big(s-\mathrm{Id}_E\big)$ et $\mathrm{Ker}\big(s+\mathrm{Id}_E\big)$ sont supplémentaires dans E. Soit $x\in E$.

- **Analyse :** Soient $x^+\in\mathrm{Ker}\big(s-\mathrm{Id}_E\big)$ et $x^-\in\mathrm{Ker}\big(s+\mathrm{Id}_E\big)$ pour lesquels $x=x^++x^-$. Aussitôt $s(x^+)=x^+$ et $s(x^-)=-x^-$, donc $s(x)=x^+-x^-$, donc $x^+=\dfrac{x+s(x)}{2}$ et $x^-=\dfrac{x-s(x)}{2}$.
- **Synthèse :** Posons $x^+=\dfrac{x+s(x)}{2}$ et $x^-=\dfrac{x-s(x)}{2}$. Aussitôt $x=x^++x^-$ et de plus :
$$s(x^+)=s\left(\frac{x+s(x)}{2}\right)=\frac{s(x)+s^2(x)}{2}=\frac{x+s(x)}{2}=x^+,$$
i.e. $x^+\in\mathrm{Ker}\big(s-\mathrm{Id}_E\big)$. On montre de même que $x^-\in\mathrm{Ker}\big(s+\mathrm{Id}_E\big)$.

Conclusion : $E=\mathrm{Ker}\big(s-\mathrm{Id}_E\big)\oplus\mathrm{Ker}\big(s+\mathrm{Id}_E\big)$, et la décomposition de x cherchée est $x=\dfrac{x+s(x)}{2}+\dfrac{x-s(x)}{2}$, donc en effet, $\dfrac{x+s(x)}{2}-\dfrac{x-s(x)}{2}=s(x)$ est le symétrique de x par rapport à $\mathrm{Ker}\big(s-\mathrm{Id}_E\big)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}\big(s+\mathrm{Id}_E\big)$.

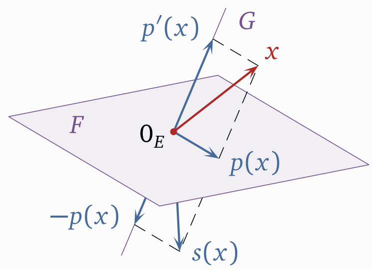


Exemple L'application σ qui associe à toute fonction $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ la fonction $x\longmapsto f(-x)$ est une symétrie de $\mathbb{R}^\mathbb{R}$, en l'occurrence par rapport à l'ensemble $\mathscr{P}$ des fonctions paires parallèlement à l'ensemble $\mathscr{I}$ des fonctions impaires.

En particulier : $\mathbb{R}^\mathbb{R}=\mathscr{P}\oplus\mathscr{I}$.

Démonstration La linéarité de σ est claire, de même que la relation $\sigma^2=\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^\mathbb{R}}$, donc σ est une symétrie et les égalités $\mathrm{Ker}\big(\sigma-\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^\mathbb{R}}\big)=\mathscr{P}$ et $\mathrm{Ker}\big(\sigma+\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^\mathbb{R}}\big)=\mathscr{I}$ découlent aisément de la définition de σ.

Théorème (Lien projecteur/symétrie)



Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E. On note p la projection sur F parallèlement à G, p' la projection sur G parallèlement à F et s la symétrie par rapport à F parallèlement à G. Dans ces conditions :

$$p+p'=\mathrm{Id}_E,\qquad p\circ p'=p'\circ p=0_{\mathscr{L}(E)}\qquad\text{et}\qquad p=\frac{s+\mathrm{Id}_E}{2}.$$

Démonstration À comprendre sur la figure !