APPLICATIONS LINÉAIRES

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ est l'un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et I est un ensemble non vide quelconque. Tous les résultats présentés sont en réalité vrais pour un corps $\mathbb{K}$ quelconque — à l'exception de ceux du paragraphe sur les symétries.

1 APPLICATIONS LINÉAIRES, ÉQUATIONS LINÉAIRES

1.1 DÉFINITION ET PREMIERS EXEMPLES

Définition (Application linéaire) Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. On appelle *application linéaire de E dans F* toute application $f : E \longrightarrow F$ qui préserve les combinaisons linéaires :

$$\forall x, y \in E, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \quad f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y).$$

L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathscr{L}(E,F)$.

Cas particulier où $E = F$: Une application linéaire de E dans E est aussi appelée un *endomorphisme de E*. L'ensemble des endomorphismes de E est noté $\mathscr{L}(E)$.

Cas particulier où $F = \mathbb{K}$: Une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$ est aussi appelée une *forme linéaire de E*.

Clairement : $f(0_E) = f(0_E + 0_E) = f(0_E) + f(0_E)$, donc après simplification : $\boxed{f(0_E) = 0_F.}$

Ensuite, si A est un sous-espace vectoriel de E, alors $f|_A$ est aussi linéaire — mais sur A. En effet, s'il est vrai pour tous $x, y \in \boxed{E}$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ que : $f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$, c'est a fortiori vrai pour tous $x, y \in \boxed{A}$.

En pratique Pour vérifier que f est linéaire, il est suffisant de vérifier que : $f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)$ pour tous $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ — avec UN SEUL SCALAIRE. Dans ce cas : $f(\lambda x) = f(\lambda x + 0_E) = \lambda f(x) + f(0_E) = \lambda f(x) + 0_F = \lambda f(x)$ pour tous $x, y \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, puis de même : $f(\mu y) = \mu f(y)$, donc enfin : $f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$.

Définition (Homothétie) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\lambda \in \mathbb{K}$. On appelle *homothétie de E de rapport λ* l'application $\lambda \mathrm{Id}_E$, i.e. : $\left\{\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & \lambda x. \end{array}\right.$ Cette application est un endomorphisme de E. En particulier : $\mathrm{Id}_E \in \mathscr{L}(E)$.

Démonstration Pour tous $x, y \in E$ et $\alpha \in \mathbb{K}$: $(\lambda \mathrm{Id}_E)(\alpha x + y) = \lambda(\alpha x + y) = \alpha(\lambda \mathrm{Id}_E)(x) + (\lambda \mathrm{Id}_E)(y)$. ■

Exemple L'application $(x,y) \overset{f}{\longmapsto} \big(x, x+y, x-2y\big)$ est linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$.

Démonstration Pour tous $(x,y), (x',y') \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f\Big(\lambda(x,y) + (x',y')\Big) &= f\big(\lambda x + x', \lambda y + y'\big) = \Big(\lambda x + x', \big(\lambda x + x'\big) + \big(\lambda y + y'\big), \big(\lambda x + x'\big) - \big(2\lambda y + 2y'\big)\Big) \\ &= \lambda\big(x, x+y, x-2y\big) + \big(x', x'+y', x'-2y'\big) = \lambda f(x,y) + f(x',y'). \end{aligned}$$

Exemple

- Pour tout $x \in \mathbb{K}$, l'application $P \longmapsto P(x)$ d'évaluation en x est une FORME linéaire de $\mathbb{K}[X]$.
- Pour tout $A \in \mathbb{K}[X]$, l'application $P \longmapsto AP$ de multiplication par A est un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$.
- Pour tout $Q \in \mathbb{K}[X]$, l'application $P \longmapsto P \circ Q$ de composition À DROITE par Q est un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$.
- L'application $P \longmapsto P'$ de dérivation est un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$.

Exemple

- Pour tout intervalle I, l'application $f \longmapsto f'$ est linéaire de $\mathscr{D}(I,\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ ou de $\mathscr{C}^1(I,\mathbb{R})$ dans $\mathscr{C}(I,\mathbb{R})$. Comme elle envoie $\mathscr{C}^\infty(I,\mathbb{R})$ dans lui-même, c'est également un endomorphisme de $\mathscr{C}^\infty(I,\mathbb{R})$.
- L'application $f \longmapsto \int_0^1 f$ est une **FORME** linéaire de $\mathscr{C}\big([0,1],\mathbb{R}\big)$.
- L'application $u \longmapsto \lim_{n\to+\infty} u_n$ est une **FORME** linéaire de l'espace vectoriel des suites réelles convergentes.

Exemple

- L'application $(x,y) \overset{\varphi}{\longmapsto} x+y+1$ **N'est PAS** linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ car : $\varphi(0,0)=1\neq 0$.
- L'application $(x,y) \overset{\psi}{\longmapsto} x^2+y^2$ **N'est PAS** linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ car : $\psi\big(2(1,1)\big)=\psi(2,2)=8\neq 4=2\psi(1,1)$.

Définition-théorème (Application linéaire canoniquement associée à une matrice) Soit $A\in\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. L'application $X\longmapsto AX$ est linéaire de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ et appelée l'*application linéaire canoniquement associée à* A. Nous la noterons souvent $\widehat{A}$ dans ce cours mais il ne s'agit pas là d'une notation universelle.

L'application $X\longmapsto AX$ est définie de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ et non l'inverse pour une simple raison de compatibilité des formats.

Pour tous $A\in\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $B\in\mathscr{M}_{q,r}(\mathbb{K})$: $\boxed{\widehat{AB}=\widehat{A}\circ\widehat{B}}$ car pour tout $X\in\mathbb{K}^r$:

$$\widehat{AB}(X)=(AB)X=A(BX)=\widehat{A}(BX)=\widehat{A}\big(\widehat{B}(X)\big)=\widehat{A}\circ\widehat{B}(X).$$

Exemple L'application linéaire canoniquement associée à $\begin{pmatrix}0&1&2\\3&4&5\end{pmatrix}$ est l'application $(x,y,z)\longmapsto(y+2z,3x+4y+5z)$ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$.

Définition-théorème (Formes coordonnées relativement à une base) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On suppose que E possède une base $\mathscr{B}=(e_i)_{i\in I}$. Pour tout $i\in I$, l'application qui associe à tout vecteur de E sa coordonnée dans $\mathscr{B}$ selon le vecteur e_i est une forme linéaire de E appelée la $i^{\text{ème}}$ *forme coordonnée de* E *(dans* $\mathscr{B}$*)*.

Démonstration Soient $x,y\in E$ de coordonnées respectives $(x_i)_{i\in I}$, $(y_i)_{i\in I}$ dans $\mathscr{B}$ et $\lambda\in\mathbb{K}$. Le vecteur $\lambda x+y$ admet $\big(\lambda x_i+y_i\big)_{i\in I}$ pour coordonnées dans $\mathscr{B}$ car : $\lambda x+y=\lambda\sum_{i\in I}x_ie_i+\sum_{i\in I}y_ie_i=\sum_{i\in I}\big(\lambda x_i+y_i\big)\,e_i$. En particulier, pour tout $i\in I$, la coordonnée selon e_i de $\lambda x+y$ est λx_i+y_i. Si on y réfléchit bien, c'est exactement la linéarité souhaitée. ■

Exemple

- Les formes coordonnées de $\mathbb{R}^3$ pour sa base canonique sont les applications $(x,y,z)\longmapsto x$, $(x,y,z)\longmapsto y$ et $(x,y,z)\longmapsto z$.
- Les formes coordonnées de $\mathbb{R}_3[X]$ pour sa base canonique sont les applications $P\longmapsto d$, $P\longmapsto c$, $P\longmapsto b$ et $P\longmapsto a$ si on note a,b,c,d les coefficients de P : $P=aX^3+bX^2+cX+d$.

Théorème (Composition d'applications linéaires) Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Pour tous $f\in\mathscr{L}(E,F)$ et $g\in\mathscr{L}(F,G)$: $g\circ f\in\mathscr{L}(E,G)$.

Démonstration Pour tous $x,y\in E$ et $\lambda\in\mathbb{K}$:

$$(g\circ f)(\lambda x+y)=g\big(f(\lambda x+y)\big)=g\big(\lambda f(x)+f(y)\big)=\lambda g\big(f(x)\big)+g\big(f(y)\big)=\lambda\big(g\circ f\big)(x)+\big(g\circ f\big)(y).$$ ■

Exemple L'application $P\overset{\psi}{\longmapsto}XP'\big(X^2\big)$ est un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$.

Démonstration Les applications $P\longmapsto P'$, $P\longmapsto P\big(X^2\big)$ et $P\longmapsto XP$ sont linéaires, donc $P\longmapsto XP'\big(X^2\big)$ aussi par composition.

Exemple L'application $f \stackrel{\chi}{\longmapsto} \displaystyle\int_0^1 f\left(t^2\right) \mathrm{d}t$ est linéaire de $\mathscr{C}\big([0,1],\mathbb{R}\big)$ dans $\mathbb{R}$.

Démonstration Les applications $f \longmapsto f \circ \left(t \longmapsto t^2\right)$ et $f \longmapsto \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ sont linéaires, donc χ aussi par composition.

1.2 Image d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire

Théorème (Image d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire) Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathscr{L}(E,F)$.

- Pour tout sous-espace vectoriel A de E, l'image $f(A)$ de A par f est un sous-espace vectoriel de F.
- En particulier, $\mathrm{Im}\, f = f(E)$ est un sous-espace vectoriel de F sur lequel on peut lire la surjectivité de f :

$$f \text{ est surjective de } E \text{ sur } F \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathrm{Im}\, f = F.$$

Démonstration Soit A un sous-espace vectoriel de E. Montrons que $f(A)$ est un sous-espace vectoriel de F. Pour commencer : $f(A) \subset F$ et $0_F = f(0_E) \in f(A)$. Ensuite, pour la stabilité par combinaison linéaire, soient $y, y' \in f(A)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, disons : $y = f(a)$ et $y' = f(a')$ pour certains $a, a' \in A$. Par linéarité de f : $\lambda y + y' = \lambda f(a) + f(a') = f\big(\lambda a + a'\big)$, et par ailleurs : $\lambda a + a' \in A$ car A est un sous-espace vectoriel de E, donc comme voulu : $\lambda y + y' \in f(A)$. ■

Exemple L'image de l'endomorphisme $(x,y,z) \stackrel{g}{\longmapsto} \big(x+2y+z, 2x+y-z, x+2y+z\big)$ de $\mathbb{R}^3$ est le plan d'équation : $z = x$.

Démonstration Pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$: $(x,y,z) \in \mathrm{Im}\, g \iff \boxed{\exists\, (a,b,c) \in \mathbb{R}^3/}\ (x,y,z) = g(a,b,c)$

C'est l'EXISTENCE d'un antécédent qui compte.

$$\Longleftrightarrow \quad \exists\,(a,b,c) \in \mathbb{R}^3/ \quad \left\{\begin{array}{rcrcrcl} a & + & 2b & + & c & = & x \\ 2a & + & b & - & c & = & y \\ a & + & 2b & + & c & = & z \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \quad \exists\,(a,b,c) \in \mathbb{R}^3/ \quad \left\{\begin{array}{rcrcrcl} a & + & 2b & + & c & = & x \\ & & 3b & + & 3c & = & 2x-y \\ & & & & 0 & = & z-x \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow 2L_1 - L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} \quad \Longleftrightarrow \quad z = x.$$

La dernière équivalence dans laquelle le système disparaît n'est pas un tour de passe-passe à reproduire bêtement. Le système final possède une solution — EXISTENCE — si et seulement si : $z = x$. Il est clair qu'il n'a pas de solution si : $z \neq x$, et on en obtient si : $z = x$ en utilisant c comme paramètre.

Théorème (Image d'un Vect par une application linéaire) Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathscr{L}(E,F)$.

- Pour toute partie X de E : $f\big(\mathrm{Vect}(X)\big) = \mathrm{Vect}\big(f(X)\big)$.
- En particulier, si E possède une base $(e_i)_{i\in I}$: $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Vect}\big(f(e_i)\big)_{i \in I}$.

Démonstration

$$f\big(\mathrm{Vect}(X)\big) = f\left(\left\{\sum_{i\in I} \lambda_i x_i\right\}_{\substack{(\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I \\ \text{presque nulle}}}\right) = \left\{f\left(\sum_{i\in I} \lambda_i x_i\right)\right\}_{\substack{(\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I \\ \text{presque nulle}}} = \left\{\sum_{i\in I} \lambda_i f(x_i)\right\}_{\substack{(\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I \\ \text{presque nulle}}} = \mathrm{Vect}\big(f(X)\big).$$

Dans le cas particulier d'une base $(e_i)_{i\in I}$ de E : $\mathrm{Im}\, f = f(E) = f\big(\mathrm{Vect}(e_i)_{i\in I}\big) = \mathrm{Vect}\big(f(e_i)\big)_{i\in I}$. ■

Exemple On note f l'application linéaire $(x,y) \longmapsto \big(2x+y, 3x+5y, y\big)$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$. Alors $\big((2,3,0),(1,5,1)\big)$ est une base de $\mathrm{Im}\, f$.

Démonstration La famille $\big((1,0),(0,1)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^2$, donc $\big(f(1,0), f(0,1)\big) = \big((2,3,0),(1,5,1)\big)$ engendre $\mathrm{Im}\, f$ d'après le théorème précédent, et cette famille est évidemment libre.

Exemple Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'image de la dérivation D des polynômes sur $\mathbb{K}_n[X]$ est $\mathbb{K}_{n-1}[X]$.

Démonstration Comme $\left(1, X, \ldots, X^n\right)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$:

$$\text{Im } D = \text{Vect}\Big(D(1), D(X), \ldots, D\big(X^n\big)\Big) = \text{Vect}\Big(0, 1, 2X, \ldots, nX^{n-1}\Big) = \text{Vect}\Big(1, X, \ldots, X^{n-1}\Big) = \mathbb{K}_{n-1}[X].$$

Définition-théorème (Image d'une matrice) Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ de colonnes $C_1, \ldots, C_p$.

- **Définition :** On appelle *image de A* et on note $\text{Im } A$ l'image de son application linéaire canoniquement associée $X \longmapsto AX$ de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$.
- **Lien avec les colonnes :** $\text{Im } A = \text{Vect}(C_1, \ldots, C_p)$.

Démonstration
Notons $(E_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$: $\text{Im } A = \text{Vect}\Big(\widehat{A}(E_i)\Big)_{1 \leqslant i \leqslant n} = \text{Vect}\big(AE_i\big)_{1 \leqslant i \leqslant n} = \text{Vect}(C_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$. ■

Exemple L'image de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$: $\text{Vect}\Big((1,0,1), (1,1,2), (4,0,4), (0,1,1)\Big)$
$= \text{Vect}\Big((1,0,1), (0,1,1)\Big)$.

1.3 Équations linéaires et noyau d'une application linéaire

Nous avons déjà rencontré beaucoup d'équations linéaires, mais nous n'avions pas jusqu'ici un concept clair de linéarité. On approfondit dans ce paragraphe en les généralisant quelques-unes de vos connaissances antérieures, dont le fameux : « Solution générale de l'équation complète = solution particulière + solution générale de l'équation homogène ».

Théorème (Image réciproque d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire) Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $f \in \mathscr{L}(E, F)$ et B un sous-espace vectoriel de F. L'image réciproque $f^{-1}(B)$ de B par f est alors un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration Pour commencer : $f^{-1}(B) \subset E$ et $0_E \in f^{-1}(B)$ car : $f(0_E) = 0_F$. Pour la stabilité par combinaison linéaire, soient $x, x' \in f^{-1}(B)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Par hypothèse : $f(x) \in B$ et $f(x') \in B$ et B est un sous-espace vectoriel de F, donc : $\lambda f(x) + f(x') \in B$. Or : $f\big(\lambda x + x'\big) = \lambda f(x) + f(x')$ par linéarité de f, donc : $f\big(\lambda x + x'\big) \in B$, i.e. : $\lambda x + x' \in f^{-1}(B)$ comme voulu. ■

Définition-théorème (Noyau d'une application linéaire ou d'une matrice)

- Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathscr{L}(E, F)$. On appelle *noyau de f* et on note $\text{Ker } f$ l'ensemble :
$$\text{Ker } f = f^{-1}\Big(\big\{0_F\big\}\Big) = \big\{x \in E / \quad f(x) = 0_F\big\}.$$
Il s'agit là d'un sous-espace vectoriel DE E et on peut notamment y lire l'injectivité de f :
$$f \text{ est injective sur } E \qquad \Longleftrightarrow \qquad \text{Ker } f = \big\{0_E\big\}.$$
- Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle *noyau de A* le noyau de son application linéaire canoniquement associée, noté $\text{Ker } A$, qui est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^p$.

Le noyau de f n'est jamais que l'ensemble des solutions de l'ÉQUATION LINÉAIRE HOMOGÈNE : $f(x) = 0_F$ d'inconnue $x \in E$. On peut dire aussi que $\text{Ker } f$ est l'ensemble des éléments de E qui ne comptent pas aux yeux de f, qu'elle ne voit pas. En effet, pour tous $x \in E$ et $k \in \text{Ker } f$: $f(x + k) = f(x)$ par linéarité.

✎ En pratique ✎

- En tant que sous-espace vectoriel de E, $\text{Ker } f$ contient 0_E, donc pour montrer que f est injective, il suffit en réalité de montrer l'INCLUSION : $\text{Ker } f \subset \big\{0_E\big\}$.

- Le noyau d'une matrice se lit souvent bien sur ses coefficients. Notons par exemple A la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$ et C_1, C_2, C_3, C_4 ses colonnes. L'égalité : $C_3 = C_1 + C_2$, i.e. : $C_1 + C_2 - C_3 = 0$, s'écrit aussi : $A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, ou encore : $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker} A$. De la même manière : $C_1 + C_2 + C_3 + C_4 = 0$, donc : $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker} A$.

Démonstration

- Supposons f injective et montrons qu'alors : $\operatorname{Ker} f = \{0_E\}$. ou encore : $\operatorname{Ker} f \subset \{0_F\}$. Or pour tout $x \in \operatorname{Ker} f$: $f(x) = 0_F = f(0_E)$, donc comme f est injective : $x = 0_E$.
- Sous l'hypothèse que : $\operatorname{Ker} f = \{0_E\}$, montrons que f est injective. Soient $x, x' \in E$ pour lesquels : $f(x) = f(x')$. Alors : $f(x - x') = f(x) - f(x') = 0_F$ par linéarité, donc : $x - x' \in \operatorname{Ker} f = \{0_E\}$, donc : $x - x' = 0_E$, i.e. : $x = x'$. ■

Exemple La dérivation polynomiale $P \stackrel{D}{\longmapsto} P'$ sur $\mathbb{K}[X]$ a pour noyau : $\operatorname{Ker} D = \mathbb{K}_0[X]$.

Exemple Notons f l'application linéaire $(x,y,z) \longmapsto \big(2x + y - z, x - y\big)$ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$.
Alors : $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}\big((1,1,3)\big)$, mais comme f est l'application linéaire canoniquement associée à la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, on peut aussi dire que : $\operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{Vect}\big((1,1,3)\big)$.

Démonstration Pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$:

$$(x,y,z) \in \operatorname{Ker} f \iff f(x,y,z) = (0,0) \iff \begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = x \\ z = 3x, \end{cases}$$

donc : $\operatorname{Ker} f = \big\{(x,x,3x)\big\}_{x \in \mathbb{R}} = \operatorname{Vect}\big((1,1,3)\big)$.

Exemple On pose : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. L'endomorphisme $M \stackrel{\varphi}{\longmapsto} AM - \operatorname{tr}(M)A$ de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ est injectif.

Démonstration Il nous suffit de montrer l'inclusion : $\operatorname{Ker} \varphi \subset \{0\}$, or pour tout $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$: $\varphi(M) = \begin{pmatrix} 2b - d & c - 2a \\ b - 2d & 2c - a \end{pmatrix}$ après calcul, donc si $M \in \operatorname{Ker} \varphi$, alors en effet : $M = 0$ car : $2b - d = b - 2d = c - 2a = 2c - a = 0$.

Exemple L'endomorphisme $f \stackrel{S}{\longmapsto} f \times \sin$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ **N'est PAS** injectif, mais sa restriction $S|_{\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})}$ l'est.

Démonstration

- Le noyau $\operatorname{Ker} S$ de S est l'ensemble des fonctions f pour lesquelles pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(x)\sin x = 0$, c'est donc l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui sont nulles sur $\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ — mais de valeurs quelconques sur $\pi\mathbb{Z}$. En particulier : $\operatorname{Ker} S \neq \{0_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}}\}$, donc S **N'est PAS** injective.
- Ensuite : $\operatorname{Ker} S|_{\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})} = \Big\{f \in \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}) / \ S(f) = 0_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}}\Big\} = \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \cap \operatorname{Ker} S$. Or dans $\operatorname{Ker} S$, seule la fonction nulle est **CONTINUE**, donc : $\operatorname{Ker} S|_{\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})} = \{0_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}}\}$, et donc $S|_{\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})}$ est injective.

En pratique Que faut-il retenir de l'exemple précédent ? Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et A un sous-espace vectoriel de E. Alors : $\boxed{\operatorname{Ker} f|_A = A \cap \operatorname{Ker} f,}$ mais par contre **ATTENTION** : $\boxed{\operatorname{Im} f|_A \ne A \cap \operatorname{Im} f,}$ ne serait-ce que pour la raison suivante : $\operatorname{Im} f \subset F$ alors que : $A \subset E$.

Théorème (Solutions d'une équation linéaire) Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $y_0 \in F$.

- Si : $y_0 \notin \operatorname{Im} f$, l'équation : $f(x) = y_0$ d'inconnue $x \in E$ n'a pas de solution.
- Si : $y_0 \in \operatorname{Im} f$, l'ensemble des solutions de l'équation : $f(x) = y_0$ d'inconnue $x \in E$ est un sous-espace affine de E de direction $\operatorname{Ker} f$.

Solution générale de l'équation complète	=	Solution particulière	+	Solution générale de l'équation HOMOGÈNE

Démonstration Dans le cas où $y_0 \in \operatorname{Im} f$: $y_0 = f(x_0)$ pour un certain $x_0 \in E$, donc pour tout $x \in E$:

$$y_0 = f(x) \iff f(x_0) = f(x) \iff f(x - x_0) = 0_F \iff x - x_0 \in \operatorname{Ker} f \iff x \in x_0 + \operatorname{Ker} f.$$

L'ensemble des solutions de l'équation : $f(x) = y_0$ d'inconnue $x \in E$ est ainsi l'ensemble $x_0 + \operatorname{Ker} f$, donc un sous-espace affine de E de direction $\operatorname{Ker} f$. ■

Exemple On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $u_0 = 0$ et $u_1 = 5$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n - 4$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = 2^n + 4n - 1$.

Démonstration

- L'application $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \overset{T}{\longmapsto} \big(x_{n+2} - 3x_{n+1} + 2x_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est linéaire de $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ comme on le vérifie aisément. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étudiée est donc une solution de l'équation LINÉAIRE : $T\big((x_n)_{n\in\mathbb{N}}\big) = (-4)_{n\in\mathbb{N}}$ d'inconnue $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- Les solutions de l'équation homogène associée sont toutes les suites récurrentes linéaires d'ordre 2 de polynôme caractéristique $X^2 - 3X + 2$, i.e. les suites $\big(2^n\lambda + \mu\big)_{n\in\mathbb{N}}$, λ et μ décrivant $\mathbb{R}$.
- Il est facile de vérifier que la suite $(4n)_{n\in\mathbb{N}}$ est solution particulière de l'équation complète. Notre suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc de la forme $\big(2^n\lambda + \mu + 4n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ pour certains $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, or : $u_0 = 0$ et $u_1 = 5$, donc en fait : $\lambda = 1$ et $\mu = -1$.

1.4 Isomorphismes et espaces vectoriels isomorphes

Définition (Isomorphisme, espaces vectoriels isomorphes) Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

- On appelle *isomorphisme de E sur F* toute application linéaire bijective de E sur F.

  Cas particulier où $E = F$: Un isomorphisme de E sur E est aussi appelée un *automorphisme de E*. L'ensemble des automorphismes de E est noté $\mathrm{GL}(E)$ et appelé le *groupe linéaire de E*.
- On dit que F est *isomorphe à E* s'il existe un isomorphisme de E sur F.

Le fait que deux espaces vectoriels soient isomorphes signifie intuitivement que ces deux espaces sont « identiques » d'un strict point de vue vectoriel. Un isomorphisme est alors comme un dictionnaire parfait pour passer de l'un de ces espaces à l'autre. Toute propriété vectorielle — i.e. que l'on peut exprimer en termes de combinaisons linéaires — de l'un des espaces a son analogue dans l'autre espace.

Théorème (Composition d'isomorphismes, réciproque d'un isomorphisme) Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

(i) Si f est un isomorphisme de E sur F et g un isomorphisme de F sur G, $g \circ f$ est un isomorphisme de E sur G.

(ii) Si f est un isomorphisme de E sur F, alors f^{-1} est un isomorphisme de F sur E.

En d'autres termes, la relation d'isomorphisme entre espaces vectoriels est une relation d'équivalence — pour la réflexivité, remarquer simplement que Id_E est un isomorphisme de E pour tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

Démonstration

(i) La composée de deux applications bijectives (resp. linéaires) est bijective (resp. linéaire).

(ii) Nous savons que f^{-1} est bijective de F sur E, mais est-elle linéaire ? Pour tous $y, y' \in F$ et $\lambda \in \mathbb{K}$:

$$f^{-1}(\lambda y + y') = f^{-1}\Big(\lambda f\big(f^{-1}(y)\big) + f\big(f^{-1}(y')\big)\Big) = f^{-1}\Big(f\big(\lambda f^{-1}(y) + f^{-1}(y')\big)\Big) = \lambda f^{-1}(y) + f^{-1}(y'). \quad \blacksquare$$

Théorème (Traduction de l'inversibilité en termes d'application linéaire canoniquement associée) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

A est inversible si et seulement si l'application linéaire $\widehat{A}$ canoniquement associée à A est un automorphisme de $\mathbb{K}^n$.

Dans ce cas : $\widehat{A}^{-1} = \widehat{A^{-1}}$.

Démonstration D'après la caractérisation de l'inversibilité en termes de systèmes linéaires :

$$\begin{aligned} A \text{ est inversible} \quad &\Longleftrightarrow \quad \forall Y \in \mathbb{K}^n, \quad \exists\,!\, X \in \mathbb{K}^n / \quad Y = AX \quad \Longleftrightarrow \quad \forall Y \in \mathbb{K}^n, \quad \exists\,!\, X \in \mathbb{K}^n / \quad Y = \widehat{A}(X) \\ &\Longleftrightarrow \quad \widehat{A} \text{ est un automorphisme de } \mathbb{K}^n. \end{aligned}$$

Dans ce cas : $\widehat{A} \circ \widehat{A^{-1}} = \widehat{A A^{-1}} = \widehat{I_n} = \mathrm{Id}_{\mathbb{K}^n}$ et de même : $\widehat{A^{-1}} \circ \widehat{A} = \mathrm{Id}_{\mathbb{K}^n}$, donc en effet : $\widehat{A}^{-1} = \widehat{A^{-1}}$. $\blacksquare$

Exemple L'application $(x, y) \longmapsto (3x + y, 5x + 2y)$ est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$.
Sa réciproque est l'application $(x, y) \longmapsto (2x - y, -5x + 3y)$ car la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ est inversible d'inverse $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$.

Exemple L'application $f \overset{S}{\longmapsto} \big(f', f(0)\big)$ est un isomorphisme de $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ sur $\mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}$.

Démonstration Pour tout $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, il est bien clair que : $S(f) \in \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}$.

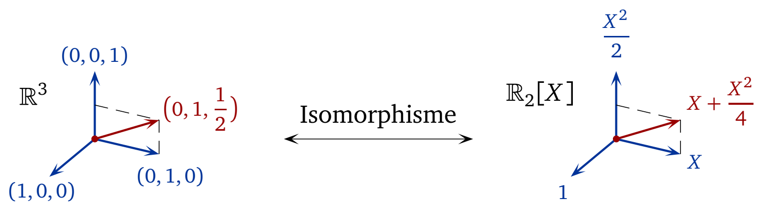
- **Linéarité :** Pour tous $f, g \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$S(\lambda f + g) = \Big((\lambda f + g)', (\lambda f + g)(0)\Big) = \Big(\lambda f' + g', \lambda f(0) + g(0)\Big) = \lambda\big(f', f(0)\big) + \big(g', g(0)\big) = \lambda S(f) + S(g).$$

- **Bijectivité :** Il n'est pas dur de comprendre que l'application T qui, à tout couple $(g, a) \in \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}$, associe la fonction de classe $\mathscr{C}^1$ $x \longmapsto a + \displaystyle\int_0^x g(t)\,dt$ est réciproque de S, i.e. que : $T \circ S = \mathrm{Id}_{\mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})}$ et $S \circ T = \mathrm{Id}_{\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \times \mathbb{R}}$. Tout simplement, on connaît tout d'une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ quand on connaît sa dérivée et sa valeur en 0 !

Exemple Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application $P \longmapsto \Big(P(0), P'(0), \ldots, P^{(n)}(0)\Big)$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$ sur $\mathbb{K}^{n+1}$ de réciproque $(a_k)_{0 \leqslant k \leqslant n} \longmapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k!} X^k$ — c'est la formule de Taylor polynomiale.

En particulier $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}_2[X]$ sont isomorphes, i.e. « identiques » comme espaces vectoriels. La figure ci-dessous illustre la manière dont CET ISOMORPHISME « GÉOMÉTRISE » L'ESPACE $\mathbb{R}_2[X]$. On y associe à tout triplet $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, comme dans l'exemple précédent, le polynôme $a + bX + \dfrac{c}{2} X^2 \in \mathbb{R}_2[X]$.



En réalité, le théorème qui suit montre que les $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie sont tous « identiques » à un $\mathbb{K}^n$.

Théorème (Effet d'un isomorphisme sur la dimension)

(i) Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Si E est de dimension finie et si F est isomorphe à E, alors F est de dimension finie et : $\dim E = \dim F$.

(ii) Réciproquement, deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de MÊMES dimensions finies sont isomorphes. En particulier, tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \neq 0$ est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.

D'après (i), si deux espaces vectoriels sont « identiques » comme espaces vectoriels, ils ont en particulier la même dimension. D'après (ii), on connaît tout d'un espace vectoriel de dimension finie en tant que tel quand on connaît sa dimension. **À ISOMORPHISME PRÈS**, les seuls $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie non nulle sont les espaces $\mathbb{K}^n$, n décrivant $\mathbb{N}^*$. C'est à la fois un résultat satisfaisant — chouette, nous les avons tous trouvés et $\mathbb{K}^n$ est une grande vérité des mathématiques — et décevant — mince, quel manque d'exotisme !

Démonstration

(i) On peut supposer $E \neq \{0_E\}$ et noter f un isomorphisme de E sur F. De dimension finie $n \neq 0$, E possède une base $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$. En particulier, par surjectivité de f : $F = \operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}\big(f(e_i)\big)_{1\leqslant i\leqslant n}$, donc F est engendré par la famille $\big(f(e_i)\big)_{1\leqslant i\leqslant n}$ — donc est de dimension finie. Nous allons en fait montrer que cette famille est libre. Il en découlera que c'est une base de F, et donc que : $\dim F = n = \dim E$.

Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ pour lesquels : $\sum_{i=1}^n \lambda_i f(e_i) = 0_F$. Aussitôt : $f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i\right) = 0_F$, donc : $\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \in \operatorname{Ker} f$, mais comme f est injective : $\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i = 0_E$. Finalement comme voulu, la famille $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ étant libre : $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$.

(ii) Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de même dimension finie n. On peut supposer $n \neq 0$. Nous allons montrer que E est isomorphe à $\mathbb{K}^n$, ce sera aussi le cas de F pour la même raison et E et F seront alors isomorphes tout court.

Comme $n \neq 0$, E possède une base $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et nous pouvons noter φ l'application $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \longmapsto \sum_{i=1}^n x_i e_i$ de $\mathbb{K}^n$ dans E. Il nous suffit de montrer que φ est un isomorphisme de $\mathbb{K}^n$ sur E. En tout cas, φ est linéaire car pour tous $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}, (x'_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathbb{K}^n$ et $\lambda \in \mathbb{K}$:

$$\begin{aligned}\varphi\Big(\lambda(x_1, \ldots, x_n) + (x'_1, \ldots, x'_n)\Big) &= \varphi\big(\lambda x_1 + x'_1, \ldots, \lambda x_n + x'_n\big) = \sum_{i=1}^n \big(\lambda x_i + x'_i\big)\, e_i = \lambda \sum_{i=1}^n x_i e_i + \sum_{i=1}^n x'_i e_i \\ &= \lambda \varphi(x_1, \ldots, x_n) + \varphi(x'_1, \ldots, x'_n).\end{aligned}$$

Enfin, φ est bijective de $\mathbb{K}^n$ sur E, car $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ étant une base de E, tout vecteur de E en est combinaison linéaire d'une et une seule manière : $\forall x \in E, \quad \exists\,!\, (x_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathbb{K}^n / \quad x = \sum_{i=1}^n x_i e_i = \varphi\Big((x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}\Big)$. ■

L'application φ de la preuve précédente mérite qu'on s'y attarde un instant. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille **QUELCONQUE** de E — plus forcément une base de E. L'application $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \overset{\varphi}{\longmapsto} \sum_{i=1}^n x_i e_i$ est toujours linéaire de $\mathbb{K}^n$ dans E.

— À quelle condition φ est-elle surjective ? Elle l'est si et seulement si : $\forall x \in E, \quad \exists\, (x_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathbb{K}^n / \quad x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, i.e. si et seulement si la famille $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ engendre E.

— À quelle condition φ est-elle injective ? Elle l'est si et seulement si : $\operatorname{Ker} \varphi = \big\{(0, \ldots, 0)\big\}$, i.e. si et seulement si : $\forall (x_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathbb{K}^n, \quad \sum_{i=1}^n x_i e_i = 0_E \implies x_1 = \ldots = x_n = 0$, i.e. si et seulement si la famille $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est libre.

Le théorème qui suit n'est pas vraiment à sa place dans ce paragraphe, mais il complète utilement l'explication qui précède.

Théorème (Caractérisation de l'injectivité/surjectivité d'une application linéaire par l'image d'une base) Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathscr{L}(E, F)$. On suppose que E possède une base $(e_i)_{i\in I}$.

(i) f est surjective de E sur F si et seulement si $\big(f(e_i)\big)_{i\in I}$ engendre F.

(ii) f est injective sur E si seulement si $\big(f(e_i)\big)_{i\in I}$ est libre.

(iii) f est un isomorphisme de E sur F si et seulement si $\big(f(e_i)\big)_{i\in I}$ est une base de F.

Démonstration

(i) On sait que : $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}\big(f(e_i)\big)_{i\in I}$. Ainsi : $\operatorname{Im} f = F$ si et seulement si $\big(f(e_i)\big)_{i\in I}$ engendre F.

(ii) Supposons f injective et montrons que $\big(f(e_i)\big)_{i\in I}$ est libre. Soit $(\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I$ presque nulle telle que : $\displaystyle\sum_{i\in I} \lambda_i f(e_i) = 0_F$. Aussitôt : $\displaystyle f\left(\sum_{i\in I} \lambda_i e_i\right) = 0_F$ donc : $\displaystyle\sum_{i\in I} \lambda_i e_i \in \operatorname{Ker} f$, donc comme f est injective : $\displaystyle\sum_{i\in I} \lambda_i e_i = 0_E$, et comme enfin $(e_i)_{i\in I}$ est libre : $\lambda_i = 0$ pour tout $i \in I$.

Réciproquement, supposons $\big(f(e_i)\big)_{i\in I}$ est libre et montrons que f est injective, i.e. que : $\operatorname{Ker} f \subset \{0_E\}$. Soient $x \in \operatorname{Ker} f$ de coordonnées $(x_i)_{i\in I}$ dans $(e_i)_{i\in I}$. Alors : $\displaystyle 0_F = f(x) = f\left(\sum_{i\in I} x_i e_i\right) = \sum_{i\in I} x_i f(e_i)$, donc par hypothèse pour tout $i \in I$: $x_i = 0$, et donc a fortiori : $x = 0_E$. ■

Exemple Pour tous $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K}$ distincts, l'application $P \longmapsto \big(P(x_1), \ldots, P(x_n)\big)$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ sur $\mathbb{K}^n$.

Démonstration Linéaire, cette application transforme la base $(L_1, \ldots, L_n)$ des polynômes de Lagrange de $x_1, \ldots, x_n$ en une BASE de $\mathbb{K}^n$, à savoir la base canonique de $\mathbb{K}^n$ car pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$: $L_i(x_j) = \delta_{ij}$.

2 Un lien étroit entre le noyau et l'image

2.1 Effet d'une application linéaire sur la dimension et notion de rang

Définition (Application linéaire de rang fini, rang) Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels pas nécessairement de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

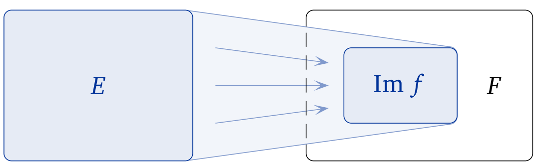
- On dit que f est *de rang fini* si $\operatorname{Im} f$ est de dimension finie, et *de rang infini* sinon.
- Si f est de rang fini, on appelle *rang de f*, noté $\operatorname{rg}(f)$, la dimension de $\operatorname{Im} f$.

Les notions de rang d'une famille de vecteurs et de rang d'une application linéaire ne sont pas sans rapport. Dans le cas où E est de dimension finie non nulle et de base $\mathscr{B}$: $\operatorname{rg}(f) = \dim \operatorname{Im} f = \dim \operatorname{Vect}\big(f(\mathscr{B})\big) = \operatorname{rg}\big(f(\mathscr{B})\big)$.

Théorème (Inégalités sur le rang et cas d'égalité) Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

(i) Si F est de dimension finie, f est de rang fini et : $\operatorname{rg}(f) \leqslant \dim F$, avec égalité si et seulement si f est surjective.

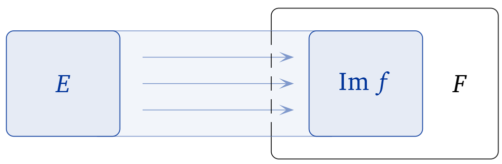
(ii) Si E est de dimension finie, f est de rang fini et : $\operatorname{rg}(f) \leqslant \dim E$, avec égalité si et seulement si f est injective.

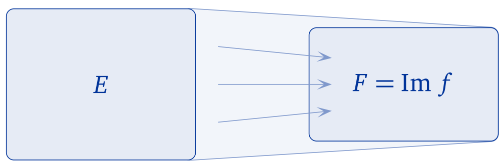


En général, une application ne peut que « contracter » son ensemble de définition. Si E et F sont de dimension finie, il est donc clair que :

$$\operatorname{rg}(f) \leqslant \dim E \qquad \text{et} \qquad \operatorname{rg}(f) \leqslant \dim F.$$

f est injective si et seulement si : $\operatorname{rg}(f) = \dim E$.





f est surjective si et seulement si : $\operatorname{rg}(f) = \dim F$.

Démonstration

(i) Comme : $\operatorname{Im} f \subset F$, alors $\operatorname{Im} f$ est de dimension finie et : $\operatorname{rg}(f) = \dim \operatorname{Im} f \leqslant \dim F$, avec égalité si et seulement si : $\operatorname{Im} f = F$, i.e. si et seulement si f est surjective.

(ii) Supposons $E \neq \{0_E\}$ et donnons-nous une base $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ de E. Aussitôt : $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Vect}\big(f(e_i)\big)_{1\leqslant i\leqslant n}$, donc $\mathrm{Im}\, f$ est de dimension finie et : $\mathrm{rg}(f) = \dim \mathrm{Im}\, f \leqslant n = \dim E$, avec égalité si et seulement si $\big(f(e_i)\big)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est libre, i.e. si et seulement si f est injective. ■

Théorème (Applications linéaires entre espaces vectoriels de mêmes dimensions finies)

(i) Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies ÉGALES et $f \in \mathscr{L}(E,F)$.

$$f \text{ est bijective} \quad\Longleftrightarrow\quad f \text{ est injective} \quad\Longleftrightarrow\quad f \text{ est surjective.}$$

(ii) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$.

$$f \in \mathrm{GL}(E) \quad\Longleftrightarrow\quad f \text{ est inversible à gauche i.e. : } \exists\, g \in \mathscr{L}(E)/\quad g\circ f = \mathrm{Id}_E \quad\Longleftrightarrow\quad f \text{ est inversible à droite i.e. : } \exists\, g \in \mathscr{L}(E)/\quad f\circ g = \mathrm{Id}_E.$$

Il faut rappeler ici que par définition, f est inversible dans l'anneau $\mathscr{L}(E)$ si et seulement s'il existe $g \in \mathscr{L}(E)$ tel que : $f\circ g = \mathrm{Id}_E$ ET $g\circ f = \mathrm{Id}_E$. Lorsque E est de dimension finie, une seule de ces deux égalités suffit donc.

✖ **ATTENTION !** ✖ L'assertion (i) ne dit pas que : bijectif = surjectif = injectif en algèbre linéaire ! Elle affirme seulement que c'est vrai lorsque les espaces vectoriels de départ et d'arrivée ont **MÊME DIMENSION FINIE**.

Démonstration

(i) Par hypothèse : $\dim E = \dim F$. Du coup, f est injective si et seulement si : $\mathrm{rg}(f) = \dim E$, i.e. si et seulement si : $\mathrm{rg}(f) = \dim F$, i.e. si et seulement si f est surjective.

(ii) Si : $f\circ g = \mathrm{Id}_E$ pour un certain $g \in \mathscr{L}(E)$, nous savons que f est surjective, et si : $g\circ f = \mathrm{Id}_E$, que f est injective. Le résultat découle alors de l'assertion (i). ■

Exemple L'application $(x,y,z) \overset{\varphi}{\longmapsto} \big(x+y, -x+y, z\big)$ est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.

Démonstration

- **Preuve n°1 :** **ENDO**morphisme **EN DIMENSION FINIE**, φ sera bijective si nous montrons simplement qu'elle est injective. Pour tout $(x,y,z) \in \mathrm{Ker}\,\varphi$: $\varphi(x,y,z) = \big(x+y, -x+y, z\big) = (0,0,0)$, donc rapidement : $x=y=z=0$. Comme voulu : $\mathrm{Ker}\,\varphi = \big\{(0,0,0)\big\}$.
- **Preuve n°2 :** φ n'est jamais que l'application linéaire canoniquement associée à la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, laquelle est inversible car la famille de ses colonnes, clairement, est libre.

Exemple Soit $n \in \mathbb{N}$. L'application $P \overset{\psi}{\longmapsto} XP' + P(0)$ est un automorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$.

Démonstration L'application ψ est bien à valeurs dans $\mathbb{K}_n[X]$ car pour tout $P \in \mathbb{K}_n[X]$:

$$\deg\big(XP' + P(0)\big) \leqslant \max\Big\{\deg(XP'), \deg\big(P(0)\big)\Big\} \leqslant \max\Big\{1+\deg(P'), \deg\big(P(0)\big)\Big\} \leqslant \deg(P) \leqslant n.$$

Comme ψ est un **ENDO**morphisme **EN DIMENSION FINIE**, il nous suffit, pour en montrer la bijectivité, d'en montrer l'injectivité. Soit $P \in \mathrm{Ker}\,\psi$. Aussitôt : $XP' = -P(0)$, donc : $1+\deg(P') \leqslant 0$, ce qui n'est possible que si P est constant. Ainsi : $\psi(P) = P(0) = 0$, donc : $P = 0$. Comme voulu : $\mathrm{Ker}\,\psi = \{0\}$.

Théorème (Inversibilité à gauche/à droite d'une matrice carrée) Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Si : $AB = I_n$, alors A et B sont toutes deux inversibles et inverses l'une de l'autre.

Par définition, A est inversible si et seulement s'il existe une matrice B pour laquelle : $AB = I_n$ ET $BA = I_n$, mais nous découvrons aujourd'hui qu'une seule des deux relations suffit et que l'autre en découle de fait.

Démonstration Si : $AB = I_n$, alors : $\widehat{A}\circ\widehat{B} = \widehat{AB} = \widehat{I_n} = \mathrm{Id}_{\mathbb{K}^n}$. L'endomorphisme $\widehat{B}$ est ainsi inversible à gauche dans $\mathscr{L}\big(\mathbb{K}^n\big)$, donc est un automorphisme de $\mathbb{K}^n$ d'après le théorème précédent. Nous avons déjà vu qu'alors B est inversible. Pour finir : $B^{-1} = I_nB^{-1} = ABB^{-1} = A$. ■

2.2 Le théorème du rang

Le noyau et l'image d'une application linéaire sont fortement liés, on s'en rend déjà bien compte sur l'exemple simple des matrices. Notons par exemple A la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ de colonnes C_1, C_2 et C_3. Clairement : $C_3 = C_1 + C_2$, donc : $\mathrm{Im}\, A = \mathrm{Vect}(C_1, C_2, C_3) = \mathrm{Vect}(C_1, C_2)$, donc $\mathrm{Im}\, A$ est de dimension au plus 2. Or la relation : $C_3 = C_1 + C_2$, indique aussi que : $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}\, A$, et donc que $\mathrm{Ker}\, A$ est au moins de dimension 1. Il semblerait ainsi que la somme $\dim \mathrm{Ker}\, A + \mathrm{rg}(A)$ soit constante, i.e. que : ce qu'on perd d'un côté, on le gagne de l'autre. C'est exactement ce que nous allons démontrer.

Théorème (Forme géométrique du théorème du rang) Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels pas nécessairement de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E, F)$.
Si $\mathrm{Ker}\, f$ possède un supplémentaire I dans E, alors $f|_I$ est un isomorphisme de I sur $\mathrm{Im}\, f$.

Nous l'avons dit, $\mathrm{Ker}\, f$ est exactement l'ensemble des éléments de E que f ne voit pas. Dans l'égalité : $E = I \oplus \mathrm{Ker}\, f$, f ne voit donc passer que I, et comme il ne touche $\mathrm{Ker}\, f$ que du bout de son zéro, f y est injective et envoie donc bijectivement I sur $\mathrm{Im}\, f$.

De manière moins imagée, $f|_I^{-1}$ est l'application qui, à tout élément de $\mathrm{Im}\, f$, associe son unique antécédent dans I.

Démonstration Par restriction, $f|_I$ est linéaire de I dans $\mathrm{Im}\, f$.
- Pour l'injectivité, sachant que I et $\mathrm{Ker}\, f$ sont en somme directe : $\mathrm{Ker}\, f|_I = I \cap \mathrm{Ker}\, f = \{0_E\}$.
- Pour la surjectivité, soit $y \in \mathrm{Im}\, f$, disons : $y = f(x)$ pour un certain $x \in E$. Comme $E = I + \mathrm{Ker}\, f$: $x = i + k$ pour certains $i \in I$ et $k \in \mathrm{Ker}\, f$, donc : $y = f(x) = f(i) + f(k) = f(i) + 0_F = f|_I(i)$. ■

Théorème (Théorème du rang) Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathscr{L}(E, F)$.
Si E est de dimension finie : $\dim E = \dim \mathrm{Ker}\, f + \mathrm{rg}(f)$.

Morale de l'histoire : Si je connais le noyau, je connais un peu l'image — et vice versa.

Plus précisément, le théorème du rang est une **loi de conservation de la dimension au départ** au même titre qu'il existe une loi de conservation de l'énergie en mécanique newtonienne pour un système isolé.

L'hypothèse selon laquelle E est de dimension finie garantit en particulier que $\mathrm{Ker}\, f$ et $\mathrm{Im}\, f$ le sont aussi.

Démonstration Comme E est de dimension finie, $\mathrm{Ker}\, f$ possède un supplémentaire I dans E. Ensuite, la forme géométrique du théorème du rang montre que $f|_I$ est un isomorphisme de I sur $\mathrm{Im}\, f$, donc :

$$\mathrm{rg}(f) = \dim \mathrm{Im}\, f = \dim I = \dim E - \dim \mathrm{Ker}\, f.$$ ■

Exemple On pose : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 8 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Alors : $\mathrm{Ker}\, A = \mathrm{Vect}\big((3, -2, -1)\big)$ et $\mathrm{Im}\, A = \mathrm{Vect}\big((1, 2, 1), (2, -1, 1)\big)$.

Démonstration
- **Noyau :** Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$: $(x, y, z) \in \mathrm{Ker}\, A \iff \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x - y + 8z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ \quad\;\; y - 2z = 0 & L_2 \leftarrow \frac{2}{5} L_1 - \frac{1}{5} L_2 \\ \quad\;\; y - 2z = 0 & L_3 \leftarrow L_1 - L_3 \end{cases} \iff y = 2z \quad \text{et} \quad x = -3z.$$

Conclusion : $\mathrm{Ker}\, A = \big\{(-3z, 2z, z)\big\}_{z \in \mathbb{R}} = \mathrm{Vect}\big((3, -2, -1)\big)$.

- **Image :** D'après le théorème du rang, $\mathrm{Im}\, A$ est de dimension : $\dim \mathrm{Im}\, A = 3 - \dim \mathrm{Ker}\, A = 2$. Or : $\mathrm{Im}\, A = \mathrm{Vect}\big((1,2,1),(2,-1,1),(-1,8,1)\big)$ et la famille $\big((1,2,1),(2,-1,1)\big)$ est libre, donc cette famille est une base de $\mathrm{Im}\, A$.

Exemple Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$. Si : $f^3 = 0_{\mathscr{L}(E)}$, alors : $\mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}\big(f^2\big) \leqslant \dim E$.

Démonstration L'égalité : $f^3 = 0_{\mathscr{L}(E)}$ montre que pour tout $x \in E$: $f\big(f^2(x)\big) = 0_E$, i.e. que : $\mathrm{Im}\, f^2 \subset \mathrm{Ker}\, f$, et donc en particulier que : $\mathrm{rg}\big(f^2\big) \leqslant \dim \mathrm{Ker}\, f$. Appliquons alors le théorème du rang à f, ce qui est possible car E est de dimension finie : $\dim E = \dim \mathrm{Ker}\, f + \mathrm{rg}(f) \geqslant \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}\big(f^2\big)$.

2.3 Rang d'une matrice

Définition (Rang d'une matrice) Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

(i) **Définition :** Le rang de l'application linéaire canoniquement associée à A est égal au rang de la famille des colonnes de A. On appelle *rang de A*, noté $\mathrm{rg}(A)$, la valeur commune de ces deux rangs.
En particulier : $\mathrm{rg}(A) \leqslant \min\{n,p\}$.

(ii) **Lien avec l'inversibilité :** Dans le cas où : $n = p$, A est inversible si et seulement si : $\mathrm{rg}(A) = n$.

Démonstration Notons $C_1, \ldots, C_p$ les colonnes de A. Pour (i), nous savons déjà que : $\mathrm{Im}\, A = \mathrm{Vect}(C_1, \ldots, C_p)$, et pour (ii) avec : $n = p$, que A est inversible si et seulement si $(C_1, \ldots, C_n)$ est libre, i.e. si et seulement si : $\mathrm{rg}(C_1, \ldots, C_n) = n$. ■

Le gros problème de cette définition, c'est qu'elle ne nous donne pas d'algorithme de calcul du rang, mais le résultat qui suit, en apparence éloigné du sujet, va nous en donner un.

Théorème (Invariance du rang par composition avec un isomorphisme) Soient E, F, E', F' des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E,F)$.

(i) Pour tout isomorphisme φ de E' sur E : $\mathrm{rg}(f \circ \varphi) = \mathrm{rg}(f)$.

(ii) Pour tout isomorphisme ψ de F sur F' : $\mathrm{rg}(\psi \circ f) = \mathrm{rg}(f)$.

Démonstration

(i) Puisque $\mathrm{Im}\, \varphi = E$: $\mathrm{Im}\,(f \circ \varphi) = \big\{f \circ \varphi(x)\big\}_{x \in E'} = \big\{f(y)\big\}_{y \in E} = \mathrm{Im}\, f$, donc : $\mathrm{rg}(f \circ \varphi) = \mathrm{rg}(f)$.

(ii) Pour commencer : $\mathrm{Im}(\psi \circ f) = \big\{\psi \circ f(x)\big\}_{x \in E} = \Big\{\psi_{|\mathrm{Im} f}\big(f(x)\big)\Big\}_{x \in E} = \Big\{\psi_{|\mathrm{Im} f}(y)\Big\}_{y \in \mathrm{Im}\, f} = \mathrm{Im}\, \psi_{|\mathrm{Im} f}$.
Ensuite, ψ est injective donc $\psi_{|\mathrm{Im} f}$ également, donc $\psi_{|\mathrm{Im} f}$ est un isomorphisme de $\mathrm{Im}\, f$ sur son image $\mathrm{Im}(\psi \circ f)$. En particulier : $\mathrm{rg}(f) = \dim \mathrm{Im}\, f = \dim \mathrm{Im}(\psi \circ f) = \mathrm{rg}(\psi \circ f)$. ■

Théorème (Les opérations élémentaires préservent le rang) Toute opération élémentaire sur les lignes ou les colonnes d'une matrice en préserve le rang.

Démonstration Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Nous avons déjà vu que toute opération élémentaire sur les LIGNES de A peut être obtenue par multiplication À GAUCHE par une certaine matrice inversible. Soit donc $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Parce que P est inversible, son application linéaire canoniquement associée $\widehat{P}$ est un automorphisme de $\mathbb{K}^n$, donc : $\mathrm{rg}(PA) = \mathrm{rg}\big(\widehat{PA}\big) = \mathrm{rg}\big(\widehat{P} \circ \widehat{A}\big) = \mathrm{rg}\big(\widehat{A}\big) = \mathrm{rg}(A)$. On procéderait de même sur les colonnes. ■

✎ **En pratique** ✎ **(Algorithme du pivot pour le calcul du rang)** Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. L'algorithme qui suit, fondé sur celui du pivot, ramène le calcul du rang de A au calcul du rang d'une matrice de taille strictement plus petite $(n-1) \times (p-1)$. Le procédé doit être ensuite répété à l'identique jusqu'à obtention du résultat.

0) Si : $A=0$, alors : $\mathrm{rg}(A)=0$ — sortie de l'algorithme.
1) Sinon au moins un coefficient de A est non nul, disons a, et va pouvoir nous servir de pivot. On le place en position $(1,1)$ par une éventuelle permutation de lignes et colonnes.
2) À l'aide du pivot a, on annule par des opérations élémentaires sur les lignes tous les termes de la première colonne situés sous a.

   Étape facultative — toujours à l'aide du pivot a, on annule par des opérations élémentaires sur les colonnes tous les termes de la première ligne situés à droite de a.
3) À ce stade, la première colonne de la matrice obtenue est clairement **NON** combinaison linéaire des autres colonnes, donc la sous-matrice A' obtenue par oubli des première ligne et colonne est de rang : $\mathrm{rg}(A')=\mathrm{rg}(A)-1$.

L'algorithme ainsi décrit se termine avec certitude car A' est strictement plus petite en taille que A.

$$\mathrm{rg}(A)=\mathrm{rg}\underbrace{\begin{pmatrix} a & \times & \cdots & \times \\ \times & \times & \cdots & \times \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \times & \times & \cdots & \times \end{pmatrix}}_{\text{Étape 1)}} = \mathrm{rg}\underbrace{\begin{pmatrix} a & \times & \cdots & \times \\ 0 & & & \\ \vdots & & A' & \\ 0 & & & \end{pmatrix}}_{\text{Étape 2)}} = \mathrm{rg}\overbrace{\begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & A' & \\ 0 & & & \end{pmatrix}}^{\text{Étape facultative}} \underset{\text{Étape 3)}}{=} \mathrm{rg}(A')+1.$$

Une dernière remarque. Alors que vous devez choisir de travailler sur les lignes **OU-EXCLUSIF** sur les colonnes pour inverser une matrice avec l'algorithme que nous avons étudié au chapitre « Matrices et systèmes linéaires », vous pouvez ici mélanger comme vous voulez les opérations sur les lignes et celles sur les colonnes.

Exemple $$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & -4 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad C_1 \leftrightarrow C_2 \qquad = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 4 & -2 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad L_1 \leftrightarrow L_4$$

$$= 1+\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \qquad = 1+\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad L_4 \leftarrow \frac{1}{2}L_1+\frac{1}{2}L_4 \qquad = 2+\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2+2=4.$$

3 Il suffit de peu pour connaître une application linéaire

3.1 Détermination d'une application linéaire sur une base

Pour connaître une application en général, on n'a pas trop d'autre choix que de connaître l'ensemble de ses valeurs point par point. Pour une application linéaire en revanche, ce lot considérable d'informations peut être résumé par un nombre restreint de valeurs stratégiques. On connaît par exemple parfaitement l'application $(x,y,z) \longmapsto (2x+y+z, 3x-z)$ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ **SI ON SAIT QU'ELLE EST LINÉAIRE** et si on sait que : $f(1,0,0)=(2,3)$, $f(0,1,0)=(1,0)$ et $f(0,0,1)=(1,-1)$. En effet, pour tout $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$:

$$f(x,y,z)=f\Big(x(1,0,0)+y(0,1,0)+z(0,0,1)\Big) \overset{\text{Linéarité}}{=} xf(1,0,0)+yf(0,1,0)+zf(0,0,1) = x(2,3)+y(1,0)+z(1,-1) = (2x+y+z, 3x-z).$$

Le théorème qui suit, fondamental, généralise ce principe.

Théorème (Détermination d'une application linéaire par l'image d'une base) Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. On suppose que E possède une base $(e_i)_{i\in I}$. Pour toute famille $(f_i)_{i\in I}$ de vecteurs de F, il existe une et une seule application linéaire u de E dans F telle que pour tout $i\in I$: $u(e_i)=f_i$.

Pour connaître/définir une application linéaire complètement, il suffit de connaître/définir les valeurs qu'elle prend sur une base de l'espace de départ.

Démonstration Pour tout $j \in I$, nous noterons $e_j^\star$ la forme coordonnée de E selon e_j dans la base $(e_i)_{i\in I}$ — c'est-à-dire l'application qui, à tout vecteur de E, associe sa coordonnée selon e_j dans la base $(e_i)_{i\in I}$. Nous avons déjà vu que les formes coordonnées sont des formes linéaires de E.

Soit $(f_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de F.

- **Analyse :** Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$. On suppose que pour tout $i \in I$: $u(e_i) = f_i$.
  Alors pour tout $x \in E$: $u(x) = u\left(\sum_{i\in I} e_i^\star(x)\, e_i\right) = \sum_{i\in I} e_i^\star(x)\, u(e_i) = \sum_{i\in I} e_i^\star(x)\, f_i$.
- **Synthèse :** Posons : $u = \sum_{i\in I} e_i^\star\, f_i$. Il s'agit bien là d'une application de E dans F. Elle est linéaire car les formes coordonnées le sont, mais détaillons. Tout simplement, pour tous $x, x' \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$:
  $$u(\lambda x + x') = \sum_{i\in I} e_i^\star(\lambda x + x')\, f_i = \sum_{i\in I} \big(\lambda e_i^\star(x) + e_i^\star(x')\big)\, f_i = \lambda \sum_{i\in I} e_i^\star(x)\, f_i + \sum_{i\in I} e_i^\star(x')\, f_i = \lambda u(x) + u(x')$$
  Enfin, pour tout $j \in I$: $u(e_j) = \sum_{i\in I} e_i^\star(e_j)\, f_i = \sum_{i\in I} \delta_{ij}\, f_i = f_j$. ■

3.2 Espaces vectoriels d'applications linéaires

Théorème (Opérations sur les applications linéaires) Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

(i) $\mathscr{L}(E,F)$ est un sous-espace vectoriel de F^E, donc un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

(ii) Pour toutes $f, f' \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g, g' \in \mathscr{L}(F,G)$: $g\circ(f+f') = (g\circ f)+(g\circ f')$ et $(g+g')\circ f = (g\circ f)+(g'\circ f)$.

D'apparence compliquée, l'assertion (i) signifie seulement que **toute combinaison d'applications linéaires est linéaire**. Par exemple, les applications $P \longmapsto XP'$ et $P \longmapsto P(0)$ sont des endomorphismes de $\mathbb{K}[X]$, donc l'application $P \longmapsto XP' + 2P(0)$ aussi.

Démonstration

(i) Pour commencer $\mathscr{L}(E,F) \subset F^E$ et l'application nulle $x \longmapsto 0_F$ est linéaire de E dans F.
Pour la stabilité par combinaison linéaire, soient $f, g \in \mathscr{L}(E,F)$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Nous devons montrer que $\lambda f + \mu g \in \mathscr{L}(E,F)$, i.e. que $\lambda f + \mu g$ est linéaire. Or pour tous $x, y \in E$ et $\alpha \in \mathbb{K}$:

$$\begin{aligned}(\lambda f + \mu g)(\alpha x + y) &= \lambda f(\alpha x + y) + \mu g(\alpha x + y) = \lambda\big(\alpha f(x) + f(y)\big) + \mu\big(\alpha g(x) + g(y)\big) = \lambda\alpha f(x) + \lambda f(y) + \mu\alpha g(x) + \mu g(y) \\ &= \alpha\big(\lambda f(x) + \mu g(x)\big) + \big(\lambda f(y) + \mu g(y)\big) = \alpha(\lambda f + \mu g)(x) + (\lambda f + \mu g)(y).\end{aligned}$$

(ii) À vous de jouer, mais attention ! La relation : $(g+g')\circ f = (g\circ f)+(g'\circ f)$ est vraie sans linéarité alors que la relation : $g\circ(f+f') = (g\circ f)+(g\circ f')$ requiert à tout prix la linéarité de g. ■

Exemple Pour tout $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, l'application $M \overset{\varphi}{\longmapsto} AM - MA$ est un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Démonstration Les applications $M \longmapsto AM$ et $M \longmapsto MA$ sont linéaires, donc φ aussi par différence.

Exemple L'application $P \overset{\psi}{\longmapsto} P(X^2) + P'(1)$ est un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$.

Démonstration L'application $P \longmapsto P(X^2)$ est linéaire. Ensuite, $P \longmapsto P'$ et $P \longmapsto P(1)$ sont linéaires, donc $P \longmapsto P'(1)$ aussi par composition. Par somme, ψ est comme voulu un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$.

Théorème (Dimension d'un espace vectoriel d'applications linéaires) Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. Alors $\mathscr{L}(E,F)$ est de dimension finie et : $\dim \mathscr{L}(E,F) = \dim E \times \dim F$.

Démonstration

- Si : $\dim E = 0$, la seule application linéaire de E dans F est l'application nulle qui envoie 0_E sur 0_F, donc : $\mathscr{L}(E,F) = \{0_{\mathscr{L}(E,F)}\}$ et $\dim \mathscr{L}(E,F) = 0 = \dim E \times \dim F$.

- Si : $\dim E \neq 0$, nous pouvons nous donner une base $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ de E. Il n'est pas trop dur de vérifier que l'application $u \overset{\varphi}{\longmapsto} \big(u(e_i)\big)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est linéaire de $\mathscr{L}(E,F)$ dans F^n, et d'après un théorème précédent :
$$\forall (f_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in F^n, \quad \exists\,!\, u \in \mathscr{L}(E,F)/ \quad \varphi(u) = (f_i)_{1\leqslant i\leqslant n}.$$
Conclusion : linéaire bijective, φ est un isomorphisme de $\mathscr{L}(E,F)$ sur F^n. Or F est de dimension finie, donc F^n aussi par produit, puis $\mathscr{L}(E,F)$ par isomorphisme. Finalement :
$$\dim \mathscr{L}(E,F) = \dim F^n = n \times \dim F = \dim E \times \dim F.$$
■

L'énoncé qui suit repose entièrement sur l'idée que pour tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, la composée de deux endomorphismes de E est encore un endomorphisme de E. En d'autres termes, la composition est une **loi interne** sur $\mathscr{L}(E)$.

Théorème (Anneau $\mathscr{L}(E)$) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

- $\big(\mathscr{L}(E), +, \circ\big)$ est un anneau, non commutatif en général, avec : $1_{\mathscr{L}(E)} = \mathrm{Id}_E$.
- $\mathrm{GL}(E)$ est le groupe des inversibles de l'anneau $\mathscr{L}(E)$: $U\big(\mathscr{L}(E)\big) = \mathrm{GL}(E)$.

On omet souvent de noter le symbole $\circ$ de composition en notant gf à la place de $g \circ f$ pour tous $f, g \in \mathscr{L}(E)$.

La loi produit de $\mathscr{L}(E)$ est la **composition**. Pour tous $f \in \mathscr{L}(E)$ et $n \in \mathbb{N}$, f^n désigne donc Id_E si : $n = 0$ et : $\underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n \text{ fois}}$ si : $n \geqslant 1$. Comme dans tout anneau, deux formules importantes sont vraies dans $\mathscr{L}(E)$:
$$(f+g)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^k g^{n-k} \qquad \text{(formule du binôme)} \qquad \text{et} \qquad f^n - g^n = (f-g) \sum_{k=0}^{n-1} f^k g^{n-k-1}$$
pour tous $f, g \in \mathscr{L}(E)$ **qui commutent**. Il est essentiel que f et g commutent, car pour avoir : $(f+g)(f-g) = f^2 - g^2$ par exemple, il faut pouvoir simplifier fg avec gf.

Démonstration Pour commencer, $\mathscr{L}(E)$ est un groupe commutatif pour l'addition en tant que sous-espace vectoriel de E^E.

Ensuite la composition est une loi de composition interne sur $\mathscr{L}(E)$ car la composée de deux applications linéaires est linéaire. Cette loi est associative et admet Id_E, qui est linéaire, pour élément neutre.

Enfin, d'après le théorème précédent, la composition est distributive sur l'addition. ■

Exemple Les endomorphismes $P \overset{D}{\longmapsto} P'$ et $P \overset{M}{\longmapsto} XP$ de $\mathbb{K}[X]$ **ne** commutent **pas**, l'anneau $\mathscr{L}\big(\mathbb{K}[X]\big)$ **n'**est donc **pas** commutatif.

Démonstration Par exemple : $D \circ M(X) = \big(X^2\big)' = 2X$ alors que : $M \circ D(X) = X \times X' = X$.

3.3 Détermination d'une application linéaire sur une somme directe

Dans le théorème qui suit, on ne définit plus les applications linéaires par l'image d'une base mais par leurs restrictions à deux sous-espaces vectoriels supplémentaires — cela dit l'idée est la même.

Théorème (Détermination d'une application linéaire sur une somme directe) Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E et $u_1 \in \mathscr{L}(E_1, F)$, $u_2 \in \mathscr{L}(E_2, F)$. Il existe une et une seule application linéaire $u \in \mathscr{L}(E,F)$ telle que : $u|_{E_1} = u_1$ et $u|_{E_2} = u_2$.

En résumé, tout élément de $\mathscr{L}(E,F)$ est une sorte de concaténation ou de recollement d'un élément de $\mathscr{L}(E_1,F)$ et d'un élément de $\mathscr{L}(E_2,F)$.

Démonstration Par hypothèse : $E = E_1 \oplus E_2$, donc tout vecteur de E est la somme, d'une unique manière, d'un vecteur de E_1 et d'un vecteur de E_2.

- **Analyse :** Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$. On suppose que : $u|_{E_1} = u_1$ et $u|_{E_2} = u_2$. Pour tout $x = x_1 + x_2 \in E$ avec $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$: $u(x) = u(x_1 + x_2) = u(x_1) + u(x_2) = u_1(x_1) + u_2(x_2)$. Cette expression qui ne dépend que de u_1, u_2 et x montre l'unicité cherchée.

- **Synthèse :** Pour tout $x = x_1 + x_2 \in E$ avec $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$, posons : $u(x) = u_1(x_1) + u_2(x_2)$. On définit ainsi une application de E dans F.
  - Pour tout $x_1 \in E_1$: $u(x_1) = u(x_1 + 0_E) = u_1(x_1) + u_2(0_E) = u_1(x_1)$, donc : $u|_{E_1} = u_1$, et de même : $u|_{E_2} = u_2$.
  - Pour la linéarité de u, soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x = x_1 + x_2, y = y_1 + y_2 \in E$ avec $x_1, y_1 \in E_1$ et $x_2, y_2 \in E_2$. Alors : $\lambda x + y = \big(\lambda x_1 + y_1\big) + \big(\lambda x_2 + y_2\big)$ avec : $\lambda x_1 + y_1 \in E_1$ et $\lambda x_2 + y_2 \in E_2$, donc :

$$\begin{aligned} u\big(\lambda x + y\big) &= u_1\big(\lambda x_1 + y_1\big) + u_2\big(\lambda x_2 + y_2\big) = \Big(\lambda u_1(x_1) + u_1(y_1)\Big) + \Big(\lambda u_2(x_2) + u_2(y_2)\Big) \\ &= \lambda\Big(u_1(x_1) + u_2(x_2)\Big) + \Big(u_1(y_1) + u_2(y_2)\Big) = \lambda u(x) + u(y). \end{aligned}$$

Exemple C'est bien connu : $\mathbb{R}_4[X] = \mathbb{R}_3[X] \oplus \mathrm{Vect}\big(X^4\big)$. D'après le théorème précédent, il existe une et une seule application linéaire φ de $\mathbb{R}_4[X]$ dans $\mathbb{R}_2[X]$ telle que pour tout $P \in \mathbb{R}_3[X]$: $\varphi(P) = P'$ et $\varphi\big(X^4\big) = X$. Cette application est obtenue à partir de l'application linéaire $P \longmapsto P'$ de $\mathbb{R}_3[X]$ dans $\mathbb{R}_2[X]$ et de l'unique application linéaire qui envoie X^4 sur X de $\mathrm{Vect}\big(X^4\big)$ dans $\mathrm{Vect}(X)$.
Concrètement, pour tout $P = aX^4 + bX^3 + cX^2 + dX + e \in \mathbb{R}_4[X]$: $\varphi(P) = aX + \big(3bX^2 + 2cX + d\big) = 3bX^2 + (a+2c)X + d$.

4 Formes linéaires et hyperplans

Rappelons pour commencer qu'une **forme** linéaire n'est jamais qu'une application linéaire **à valeurs dans** $\mathbb{K}$. On ne confondra pas « **application** linéaire » et « **forme** linéaire » !

Nous avons vu quelques exemples de formes linéaires, mais pour comprendre ce concept en général, donnons-nous un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie n et de base $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et une forme linéaire φ de E. Posons pour tout $i \in [\![1,n]\!]$: $a_i = \varphi(e_i)$. Alors pour tout vecteur x de E de coordonnées $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$: $\varphi(x) = \varphi\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n x_i \varphi(e_i) = \sum_{i=1}^n a_i x_i$.
Conclusion : φ envoie tout vecteur de E sur une certaine combinaison linéaire de ses coordonnées, toujours avec les mêmes coefficients — mais qui dépendent tout de même de la base choisie. En résumé :

En dimension finie :	Forme linéaire	=	Combinaison linéaire des formes coordonnées dans une base fixée

Exemple Soit φ une forme linéaire de $\mathbb{R}^3$. Posons : $a = \varphi(1,0,0)$, $b = \varphi(0,1,0)$ et $c = \varphi(0,0,1)$. Pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$: $\varphi(x,y,z) = \varphi\big(x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1)\big) = x\varphi(1,0,0) + y\varphi(0,1,0) + z\varphi(0,0,1) = ax + by + cz$, donc φ est l'application $(x,y,z) \longmapsto ax + by + cz$.

Exemple Soit φ une forme linéaire de $\mathbb{R}_n[X]$. Posons : $\varphi_k = \varphi\big(X^k\big)$ pour tout $k \in [\![0,n]\!]$.
Pour tout $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{R}_n[X]$: $\varphi(P) = \sum_{k=0}^n a_k \varphi\big(X^k\big) = \sum_{k=0}^n \varphi_k a_k$, donc φ est l'application $P \longmapsto \sum_{k=0}^n \varphi_k a_k$.
Par exemple, la forme linéaire $P \longmapsto P(2)$ de $\mathbb{R}_3[X]$ envoie tout polynôme $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$ sur la combinaison linéaire suivante de a, b, c, d : $P(2) = 8a + 4b + 2c + d$.

Définition (Hyperplan) Soit $E \neq \big\{0_E\big\}$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel — pas forcément de dimension finie. On appelle *hyperplan de* E tout noyau d'une forme linéaire **non nulle** de E.

Le noyau de la forme linéaire nulle $x \longmapsto 0_E$ est E tout entier. On précise donc « non nulle » dans la définition pour éviter que E lui-même soit un hyperplan de E.

En dimension finie, nous pouvons lier la notion d'hyperplan à celles de coordonnées dans une base :

En dimension finie :	Hyperplan	=	Ensemble décrit par **une** équation linéaire non nulle sur les coordonnées dans une base fixée

Exemple

- L'ensemble $\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/\quad 2x+y-z=0\right\}$ est un hyperplan de $\mathbb{R}^3$ — noyau de la forme linéaire non nulle $(x,y,z)\longmapsto 2x+y-z$.
- L'ensemble $H=\left\{P\in\mathbb{R}_3[X]/\quad P'(1)+P(0)=0\right\}$ est un hyperplan de $\mathbb{R}_3[X]$ — noyau de la forme linéaire non nulle $P\longmapsto P'(1)+P(0)$. On voit moins bien sur cet exemple que sur le précédent que H est décrit par une équation linéaire sur les coordonnées, mais si on introduit les coefficients a,b,c,d de P : $P=aX^3+bX^2+cX+d$, alors H est décrit par l'équation : $3a+2b+c+d=0$.
- L'ensemble $\left\{f\in\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})/\quad f'(0)=f(0)\right\}$ est un hyperplan de $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ — noyau de la forme linéaire non nulle $f\longmapsto f(0)-f'(0)$. Comme nous ne connaissons aucune base de $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$, nous ne pouvons pas ici réécrire l'équation : $f'(0)=f(0)$ avec des coordonnées.

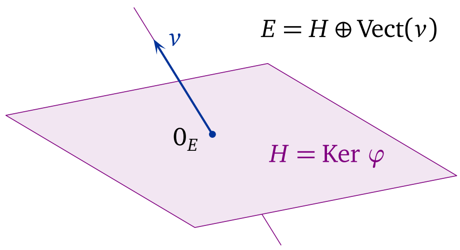
Théorème (Caractérisation géométrique des hyperplans) Soient $E\neq\left\{0_E\right\}$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et H une partie de E. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) H est un hyperplan de E. (ii) H est supplémentaire d'une droite de E.

En particulier, si E est de dimension finie non nulle n, les hyperplans de E sont exactement ses sous-espaces vectoriels de dimension $n-1$.

En dimension 3 : hyperplan = plan. En dimension 2 : hyperplan = droite.

Démonstration



(ii) $\Longrightarrow$ (i) Par hypothèse : $E=H\oplus\mathrm{Vect}(v)$ pour un certain $v\in E$ non nul. Notons alors φ l'unique forme linéaire de E pour laquelle : $\varphi|_H=0_{\mathscr{L}(H,\mathbb{K})}$ et $\varphi(v)=1$. Une telle forme linéaire existe et est unique d'après le théorème de détermination d'une application linéaire sur une somme directe. Clairement φ est non nulle, et tout aussi clairement : $\mathrm{Ker}\ \varphi=H$, donc H est un hyperplan de E.

(i) $\Longrightarrow$ (ii) Notons φ une forme linéaire non nulle de noyau H. Comme φ est non nulle, nous pouvons nous donner un vecteur $v\in E\setminus\mathrm{Ker}\ \varphi$. Nous allons montrer qu'alors : $E=H\oplus\mathrm{Vect}(v)$, et comme il est évident que : $H\cap\mathrm{Vect}(v)=\left\{0_E\right\}$, nous n'avons qu'à montrer l'inclusion : $E\subset H+\mathrm{Vect}(v)$.

Soit $x\in E$. Par définition de v : $\varphi(v)\neq 0$, donc : $\varphi\left(x-\dfrac{\varphi(x)}{\varphi(v)}\,v\right)=\varphi(x)-\dfrac{\varphi(x)}{\varphi(v)}\,\varphi(v)=0$.

Conclusion : $x-\dfrac{\varphi(x)}{\varphi(v)}\,v\in\mathrm{Ker}\ \varphi=H$, et enfin : $x\in H+\mathrm{Vect}(v)$. ■

Exemple Pour tout $n\in\mathbb{N}$, pour une simple raison de dimension, $\mathbb{K}_n[X]$ est un hyperplan de $\mathbb{K}_{n+1}[X]$ et $\mathbb{K}^n\times\left\{0\right\}$ un hyperplan de $\mathbb{K}^{n+1}$.

Exemple

- L'ensemble $\left\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4/\quad 2x+y=z+t\right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ de dimension $4-1=3$ en tant que noyau de la FORME linéaire non nulle $(x,y,z,t)\longmapsto 2x+y-z-t$.
- L'ensemble $\left\{P\in\mathbb{R}_4[X]/\quad P(0)=P(1)\right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_4[X]$ de dimension $5-1=4$ en tant que noyau de la FORME linéaire non nulle $P\longmapsto P(1)-P(0)$.

Théorème (Comparaison des équations d'un hyperplan) Soient $E\neq\left\{0_E\right\}$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, H un hyperplan de E et φ,ψ deux formes linéaires non nulles de E dont H est le noyau. Alors : $\psi=\lambda\varphi$ pour un certain $\lambda\in\mathbb{K}^*$.

Il n'existe donc en réalité qu'une seule « vraie » équation d'un hyperplan, toutes les équations sont multiples les unes des autres. C'est un résultat que nous connaissions bien en géométrie élémentaire, le plan d'équation : $x+y+2z=0$ et le plan d'équation : $2x+2y+4z=0$ sont évidemment un seul et même plan, et ce plan n'a pas d'équation fondamentalement différente.

Démonstration Grâce au théorème précédent, écrivons : $E = H \oplus \mathrm{Vect}(v)$ pour un certain $v \in E$. La forme linéaire $\varphi(v)\psi - \psi(v)\varphi$ est alors nulle sur H par définition de φ et ψ, et par ailleurs nulle en v, donc nulle sur E tout entier par linéarité. Or : $\varphi(v) \neq 0$ car sinon φ serait nulle sur E tout entier elle aussi, donc enfin : $\psi = \lambda\varphi$ avec : $\lambda = \dfrac{\psi(v)}{\varphi(v)}$. ■

Théorème (Intersections d'hyperplans) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle n et $r \in [\![1, n]\!]$.

(i) L'intersection de r hyperplans de E est un sous-espace vectoriel de E de dimension **AU MOINS** $n - r$.

(ii) Tout sous-espace vectoriel de E de dimension $n - r$ est l'intersection d'exactement r hyperplans de E.

Dans l'espace $\mathbb{R}^3$, on sait bien qu'une équation scalaire décrit un plan et que deux telles équations, pour peu qu'elles ne soient pas multiples l'une de l'autre, décrivent une droite. L'idée générale du théorème ci-dessus, c'est que dans un système linéaire, chaque équation occasionne **POTENTIELLEMENT** la perte d'une dimension par rapport au nombre total d'inconnues. Pourquoi potentiellement ? Parce que certaines équations peuvent être redondantes et ne pas compter vraiment dans le système. Par exemple, le système linéaire : $\begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \\ 3x - z = 0 \end{cases}$ d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ décrit une droite et non un point de $\mathbb{R}^3$ car la troisième de ses équations n'est autre que la somme des deux premières.

Démonstration

(i) Soient $H_1, \ldots, H_r$ des hyperplans de E. Pour tout $k \in [\![1, r]\!]$, notons φ_k une forme linéaire non nulle de E dont H_k est le noyau. L'application $x \overset{\Phi}{\longmapsto} \big(\varphi_k(x)\big)_{1 \leqslant k \leqslant r}$ est linéaire de E dans $\mathbb{K}^r$ de noyau $\bigcap_{k=1}^{r} H_k$, donc d'après le théorème du rang : $\dim \bigcap_{k=1}^{r} H_k = \dim E - \mathrm{rg}(\Phi) \geqslant \dim E - \dim \mathbb{K}^r = n - r$.

(ii) Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension $n - r$. Donnons-nous une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E dont les $n - r$ derniers vecteurs forment une base de F et pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, notons $e_i^\star$ la $i^{\text{ème}}$ forme coordonnée associée à cette base. Pour tout $x \in E$:

$$x \in F \iff x \in \mathrm{Vect}(e_{r+1}, \ldots, e_n) \iff e_1^\star(x) = \ldots = e_r^\star(x) = 0 \iff x \in \bigcap_{k=1}^{r} \mathrm{Ker}\, e_k^\star.$$

Conclusion : $F = \bigcap_{k=1}^{r} \mathrm{Ker}\, e_k^\star$, ce qui fait bien de F l'intersection de r hyperplans de E. ■

5 Projecteurs, symétries et au-delà

5.1 Projecteurs et symétries

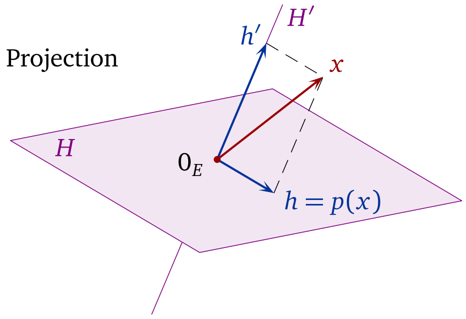
Définition (Projecteur et symétrie) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et H et H' deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E. Tout élément $x \in E$ s'écrit d'une et une seule façon comme la somme d'un élément $h \in H$ et d'un élément $h' \in H'$, de sorte que : $x = h + h'$. Avec ces notations :

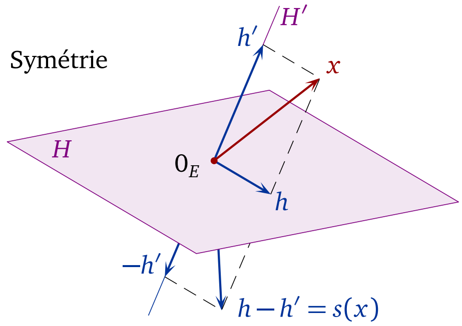
— l'application de E dans E qui à x associe h est appelée *projection sur H parallèlement à H'* ou encore *projecteur sur H de direction H'*,

— l'application de E dans E qui à x associe $h - h'$ est appelée *symétrie par rapport à H parallèlement à H'* ou encore *symétrie par rapport à H de direction H'*.

Dans les deux cas, H est appelé la *base* et H' la *direction* de la projection ou de la symétrie.

On comprend mieux ces définitions un peu abstraites au moyen de quelques figures. Notons p la projection sur H parallèlement à H' et s la symétrie par rapport à H parallèlement à H'.





Exemple La projection de $\mathbb{R}^3$ par rapport à $F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3/ \quad x+y+z=0\right\}$ parallèlement à $G = \text{Vect}\big((1,1,1)\big)$ est l'application linéaire canoniquement associée à la matrice $\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Démonstration Nous allons d'abord montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$, le reste en découlera aisément. Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Pour tous $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{r} (x,y,z) = (a,b,c) + \lambda(1,1,1) \\ \text{et} \quad (a,b,c) \in F \end{array} \iff \left\{\begin{array}{ccccccccc} a & & & & & + & \lambda & = & x \\ & & b & & & + & \lambda & = & y \\ & & & & c & + & \lambda & = & z \\ a & + & b & + & c & & & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{cccccccl} a & & & + & \lambda & = & x & \\ & b & & + & \lambda & = & y & \\ & & c & + & \lambda & = & z & \\ & & & & \lambda & = & \dfrac{x+y+z}{3} & L_4 \leftarrow \dfrac{L_1+L_2+L_3-L_4}{3} \end{array}\right.$$

$$\iff \quad (a,b,c) = \left(\frac{2x-y-z}{3}, \frac{-x+2y-z}{3}, \frac{-x-y+2z}{3}\right) \quad \text{et} \quad \lambda = \frac{x+y+z}{3}.$$

La supplémentarité de F et G dans $\mathbb{R}^3$ est ainsi démontrée, mais comme le projeté de (x,y,z) par rapport à F parallèlement à G est par définition le vecteur (a,b,c), la projection cherchée est finalement l'application :

$$(x,y,z) \longmapsto \left(\frac{2x-y-z}{3}, \frac{-x+2y-z}{3}, \frac{-x-y+2z}{3}\right).$$

Théorème (Propriétés des projecteurs et des symétries) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et H et H' deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E. On note p la projection sur H parallèlement à H' et s la symétrie par rapport à H parallèlement à H'.

(i) **Propriétés des projecteurs :** p est un endomorphisme de E et : $p^2 = p$.

$$H = \text{Im}\, p = \text{Ker}\,\big(p - \text{Id}_E\big) = \big\{x \in E/ \quad p(x) = x\big\} \qquad \text{et} \qquad H' = \text{Ker}\, p.$$

(ii) **Propriétés des symétries :** s est un automorphisme de E et : $s^2 = \text{Id}_E$, i.e. : $s^{-1} = s$.

$$H = \text{Ker}\,\big(s - \text{Id}_E\big) = \big\{x \in E/ \quad s(x) = x\big\} \qquad \text{et} \qquad H' = \text{Ker}\,\big(s + \text{Id}_E\big) = \big\{x \in E/ \quad s(x) = -x\big\}.$$

De façon plus générale, habituez-vous à l'idée que pour tous $f \in \mathscr{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$:

$$\text{Ker}\,\big(f - \lambda\text{Id}_E\big) = \big\{x \in E/ \quad (f - \lambda\text{Id}_E)(x) = 0_E\big\} = \big\{x \in E/ \quad f(x) = \lambda x\big\}.$$

Démonstration

(i) Par définition, p est l'unique endomorphisme de E pour lequel : $p|_H = \text{Id}_H$ et $p|_{H'} = 0_{\mathscr{L}(H',E)}$.
Montrons que : $p^2 = p$. Soit $x = h + h' \in E$ avec $h \in H$ et $h' \in H'$. Alors : $p(x) = h$, donc : $p(x) = h + 0_E$ avec : $h \in H$ et $0_E \in H'$, donc : $p^2(x) = p\big(p(x)\big) = h = p(x)$.

Par définition de p, si on y réfléchit deux secondes : $\text{Im}\, p \subset H \subset \big\{x \in E/ \quad p(x) = x\big\} \subset \text{Im}\, p$, donc en fait ces trois ensembles sont égaux. L'égalité : $H' = \text{Ker}\, p$ paraît tout aussi claire.

(ii) Par définition, s est l'unique endomorphisme de E pour lequel : $s|_H = \mathrm{Id}_H$ et $s|_{H'} = -\mathrm{Id}_{H'}$. Vous vérifierez seuls que : $s^2 = \mathrm{Id}_E$ ainsi que les égalités concernant $\mathrm{Ker}\,(s - \mathrm{Id}_E)$ et $\mathrm{Ker}\,(s + \mathrm{Id}_E)$. ■

Théorème (Caractérisation des projecteurs) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $p : E \longrightarrow E$ une application.

$$p \text{ est un projecteur si et seulement si } p \text{ est linéaire et : } \quad p^2 = p.$$

Dans ce cas, $\mathrm{Im}\, p$ et $\mathrm{Ker}\, p$ sont supplémentaires dans E et p est la projection sur $\mathrm{Im}\, p$ parallèlement à $\mathrm{Ker}\, p$. Concrètement, pour tout $x \in E$: $x = \underbrace{p(x)}_{\in\, \mathrm{Im}\, p} + \underbrace{x - p(x)}_{\in\, \mathrm{Ker}\, p}$.

✖ **Attention !** ✖ N'oubliez pas de mentionner/vérifier la linéarité de p, l'égalité : $p^2 = p$ ne suffit pas.

Démonstration Nous n'avons plus qu'une implication à prouver. Faisons donc l'hypothèse que p est linéaire et que : $p^2 = p$. Nous allons montrer d'abord par analyse et synthèse que $\mathrm{Im}\, p$ et $\mathrm{Ker}\, p$ sont supplémentaires dans E. Soit $x \in E$.

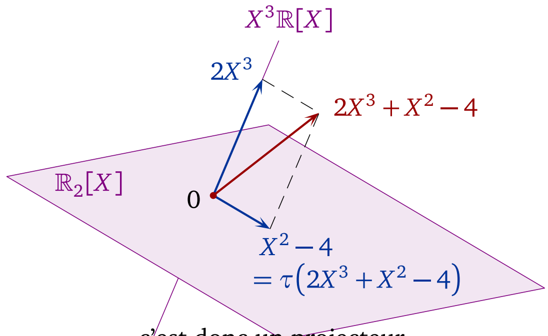
- **Analyse :** Soient $i \in \mathrm{Im}\, p$ et $k \in \mathrm{Ker}\, p$ pour lesquels : $x = i + k$. Alors : $p(k) = 0_E$ et $i = p(t)$ pour un certain $t \in E$, donc par linéarité : $p(x) = p(i)$, puis : $i = p(t) \overset{p^2=p}{=} p\big(p(t)\big) = p(i) = p(x)$, et enfin : $k = x - i = x - p(x)$.
- **Synthèse :** Posons : $i = p(x)$ et $k = x - p(x)$. Aussitôt : $x = i + k$, et clairement : $i \in \mathrm{Im}\, p$. Pour finir : $p\big(x - p(x)\big) = p(x) - p\big(p(x)\big) \overset{p^2=p}{=} p(x) - p(x) = 0_E$, donc : $x - p(x) \in \mathrm{Ker}\, p$.

Conclusion : $E = \mathrm{Im}\, p \oplus \mathrm{Ker}\, p$, et nous avons montré au passage que la décomposition correspondante de x est : $x = p(x) + \big(x - p(x)\big)$, donc en effet $p(x)$ est le projeté de x sur $\mathrm{Im}\, p$ parallèlement à $\mathrm{Ker}\, p$ par définition des projections. ■

Exemple Pour tout $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$, on pose : $\tau(P) = a_2X^2 + a_1X + a_0$.

L'application τ ainsi définie, dite *troncature à l'ordre 2*, est le projecteur de $\mathbb{R}[X]$ sur $\mathbb{R}_2[X]$ de direction $X^3\mathbb{R}[X]$.

Par exemple : $\tau\big(5X^6 + 2X^5 - 4X^4 + X^2 + 1\big) = X^2 + 1$.



Démonstration Le théorème de la division euclidienne par X^3 possède un énoncé simplifié en algèbre linéaire : $\mathbb{R}[X] = X^3\mathbb{R}[X] \oplus \mathbb{R}_2[X]$. L'application τ est donc simplement l'endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ pour lequel à la fois : $\tau|_{\mathbb{R}_2[X]} = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_2[X]}$ et $\tau|_{X^3\mathbb{R}[X]} = 0_{\mathscr{L}(X^3\mathbb{R}[X],\mathbb{R}[X])}$, c'est donc un projecteur.

- **Image :** Quels sont les points fixes de τ ? Réponse : exactement les polynômes de degré inférieur ou égal à 2, donc : $\mathrm{Im}\, \tau = \mathbb{R}_2[X]$.
- **Noyau :** Quels sont les polynômes dont la troncature à l'ordre 2 est nulle ? Réponse : tous ceux dont les trois premiers coefficients sont nuls, i.e. qu'on peut factoriser par X^3, donc : $\mathrm{Ker}\, \tau = X^3\mathbb{R}[X]$.

Théorème (Caractérisation des symétries) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $s : E \longrightarrow E$ une application.

$$s \text{ est une symétrie si et seulement si } s \text{ est linéaire et : } \quad s^2 = \mathrm{Id}_E.$$

Dans ce cas, $\mathrm{Ker}\,(s - \mathrm{Id}_E)$ et $\mathrm{Ker}\,(s + \mathrm{Id}_E)$ sont supplémentaires dans E et s est la symétrie par rapport à $\mathrm{Ker}\,(s - \mathrm{Id}_E)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}\,(s + \mathrm{Id}_E)$.

✖ **Attention !** ✖ N'oubliez pas de mentionner/vérifier la linéarité de s, l'égalité : $s^2 = \mathrm{Id}_E$ ne suffit pas.

Démonstration Nous n'avons plus qu'une implication à prouver. Faisons donc l'hypothèse que s est linéaire et que : $s^2 = \mathrm{Id}_E$. Nous allons montrer d'abord par analyse et synthèse que $\mathrm{Ker}\,(s - \mathrm{Id}_E)$ et $\mathrm{Ker}\,(s + \mathrm{Id}_E)$ sont supplémentaires dans E. Soit $x \in E$.

- **Analyse :** Soient $x^+ \in \mathrm{Ker}\,(s - \mathrm{Id}_E)$ et $x^- \in \mathrm{Ker}\,(s + \mathrm{Id}_E)$. Si : $x = x^+ + x^-$, alors : $s(x^+) = x^+$ et $s(x^-) = -x^-$ donc : $s(x) = x^+ - x^-$, donc : $x^+ = \dfrac{x + s(x)}{2}$ et $x^- = \dfrac{x - s(x)}{2}$.
- **Synthèse :** Posons : $x^+ = \dfrac{x+s(x)}{2}$ et $x^- = \dfrac{x-s(x)}{2}$. Alors : $x = x^+ + x^-$ et de plus :

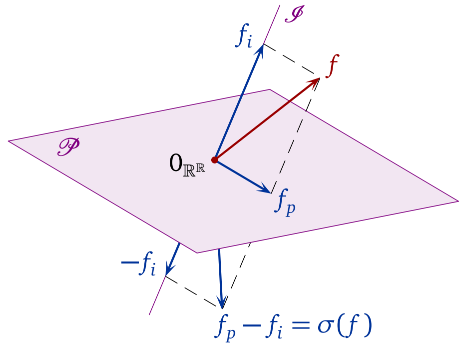
$$s(x^+) = s\left(\frac{x+s(x)}{2}\right) = \frac{s(x)+s^2(x)}{2} \overset{s^2=\mathrm{Id}_E}{=} \frac{x+s(x)}{2} = x^+,$$

  i.e. : $x^+ \in \mathrm{Ker}\,(s - \mathrm{Id}_E)$. On montre de même que : $x^- \in \mathrm{Ker}\,(s + \mathrm{Id}_E)$.

Conclusion : $E = \mathrm{Ker}\,(s - \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}\,(s + \mathrm{Id}_E)$, et nous avons montré que la décomposition correspondante de x est : $x = \dfrac{x+s(x)}{2} + \dfrac{x-s(x)}{2}$, donc en effet, puisque : $s(x) = \dfrac{x+s(x)}{2} - \dfrac{x-s(x)}{2}$, $s(x)$ est le symétrique de x par rapport à $\mathrm{Ker}\,(s - \mathrm{Id}_E)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}\,(s + \mathrm{Id}_E)$. ■

Exemple On note σ l'application qui, à toute fonction $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, associe la fonction $x \longmapsto f(-x)$. Alors σ est une symétrie de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, la symétrie par rapport à l'ensemble $\mathscr{P}$ des fonctions paires, parallèlement à l'ensemble $\mathscr{I}$ des fonctions impaires.

En particulier : $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \mathscr{P} \oplus \mathscr{I}$. Plus précisément, pour tout $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, la décomposition de f adaptée à cette égalité est : $f = f_p + f_i$ où f_p est la fonction $x \longmapsto \dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$ et f_i la fonction $x \longmapsto \dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$.



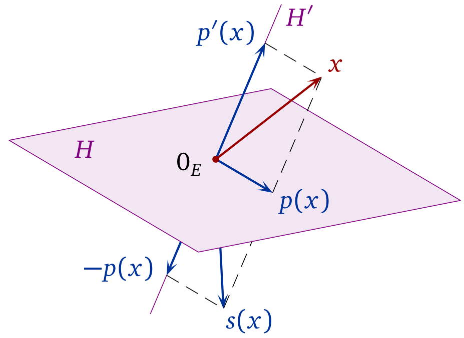
Démonstration

- Comme σ est linéaire et : $\sigma^2 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}}$, alors σ est une symétrie.
- L'ensemble $\mathrm{Ker}\,(\sigma - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}})$ des points fixes de σ est évidemment $\mathscr{P}$ par définition de σ, de même que l'ensemble $\mathrm{Ker}\,(\sigma + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}})$ est évidemment $\mathscr{I}$.

Théorème (Lien projecteur/symétrie)

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et H et H' deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E. On note p la projection sur H parallèlement à H', p' la projection sur H' parallèlement à H et s la symétrie par rapport à H parallèlement à H'. Dans ces conditions :

$$p + p' = \mathrm{Id}_E, \qquad p \circ p' = p' \circ p = 0_{\mathscr{L}(E)} \qquad \text{et} \qquad s = 2p - \mathrm{Id}_E.$$



5.2 Sommes d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels

On généralise dans ce paragraphe les définitions et résultats obtenus pour les sommes de deux sous-espaces vectoriels à des sommes d'un nombre fini quelconque de sous-espaces vectoriels. Nous omettrons certaines preuves.

Définition-théorème (Somme d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $F_1, \ldots, F_p$ des sous-espaces vectoriels de E.

- L'ensemble $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} F_k = F_1 + \ldots + F_p = \big\{f_1 + \ldots + f_p\big\}_{f_1 \in F_1, \ldots, f_p \in F_p}$ est un sous-espace vectoriel de E appelé la *somme de* $F_1, \ldots, F_p$.
- Cette somme est également le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant $F_1, \ldots, F_p$. Cela signifie que tout sous-espace vectoriel de E contenant $F_1, \ldots, F_p$ contient aussi $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} F_k$.

En lien avec ce que nous avons déjà étudié pour la somme de deux sous-espaces vectoriels, on peut montrer que pour tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et pour toutes parties $X_1,\ldots,X_p$ de E : $\mathrm{Vect}\left(\bigcup_{k=1}^{p} X_k\right) = \sum_{k=1}^{p} \mathrm{Vect}(X_k)$.

Définition **(Somme directe d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels)** Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $F_1,\ldots,F_p$ des sous-espaces vectoriels de E. On dit que les sous-espaces vectoriels $F_1,\ldots,F_p$ sont *en somme directe* si la décomposition d'un vecteur de $\sum_{k=1}^{p} F_k$ comme somme d'un vecteur de $F_1\ldots$ et d'un vecteur de F_p est toujours unique. On note alors $\bigoplus_{k=1}^{p} F_k$ ou $F_1 \oplus \ldots \oplus F_p$ la somme $\sum_{k=1}^{p} F_k$ pour indiquer qu'il y a somme directe.

Théorème **(Caractérisation de la somme directe d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels)** Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $F_1,\ldots,F_p$ des sous-espaces vectoriels de E. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $F_1,\ldots,F_p$ sont en somme directe.

(ii) L'égalité : $0_E = 0_E + \ldots + 0_E$ est la seule décomposition de 0_E comme somme d'un élément de $F_1\ldots$ et d'un élément de F_p : $\forall (f_1,\ldots,f_p) \in F_1\times\ldots\times F_p,\quad \sum_{k=1}^{p} f_k = 0_E \implies f_1 = \ldots = f_p = 0_E$.

✖ **Attention !** ✖ Nous avons caractérisé la somme directe de **deux** sous-espaces vectoriels en termes d'**intersection**, mais nous ne ferons rien de tel pour un nombre fini quelconque de sous-espaces vectoriels. Par exemple, les droites $\mathrm{Vect}\big((1,0)\big)$, $\mathrm{Vect}\big((0,1)\big)$ et $\mathrm{Vect}\big((1,1)\big)$ de $\mathbb{R}^2$ sont deux à deux d'intersection triviale, mais elles ne sont pas, à trois, en somme directe, car : $(1,0)+(0,1)+(-1,-1) = (0,0)+(0,0)+(0,0)$.

Démonstration

(i) $\implies$ (ii) Évident par définition de la somme directe.

(ii) $\implies$ (i) Donnons-nous deux décompositions : $\sum_{k=1}^{p} f_k = \sum_{k=1}^{p} f'_k$ d'un même vecteur comme somme d'un vecteur de $F_1\ldots$ et d'un vecteur de F_p, avec $(f_1,\ldots,f_p),(f'_1,\ldots,f'_p) \in F_1\times\ldots\times F_p$. Alors : $\sum_{k=1}^{p} \underbrace{\left(f'_k - f_k\right)}_{\in F_k} = 0_E$, donc d'après (ii) : $f'_k - f_k = 0_E$ pour tout $k \in [\![1,p]\!]$, i.e. : $f_k = f'_k$. ■

Exemple Dans $\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, on note F l'ensemble des fonctions 1-périodiques nulles en 0, G l'ensemble $\mathrm{Vect}(\sin)$ et H l'ensemble des fonctions polynomiales. Ce sont là trois sous-espaces vectoriels de $\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et leur somme est directe.

Démonstration Vous vérifierez seuls que F et H sont des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Pour montrer que leur somme est directe, soient $f \in F$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $P \in H$. Faisons l'hypothèse que : $f + \lambda \sin + P = 0_{\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})}$. Il s'agit de montrer qu'alors : $f = P = 0_{\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})}$ et $\lambda = 0$.

- D'après le théorème des bornes atteintes, f est bornée sur le **segment** $[0,1]$, donc sur $\mathbb{R}$ tout entier par 1-périodicité. La fonction $P = -f - \lambda\sin$ est alors bornée à son tour, donc constante car polynomiale. Or : $f(0) = 0$, donc : $P(0) = 0$ et enfin : $P = 0_{\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})}$. Conclusion : $f + \lambda\sin = 0_{\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})}$.
- Si : $\lambda \neq 0$, $\sin = \frac{f}{\lambda}$ est 1-périodique — ce qui est faux. Conclusion : $\lambda = 0$, donc : $f = 0_{\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})}$.

Théorème **(Dimension d'une somme de sous-espaces vectoriels)** Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pas nécessairement de dimension finie et $F_1,\ldots,F_p$ des sous-espaces vectoriels de dimension finie de E.

La somme $\sum_{k=1}^{p} F_k$ est alors de dimension finie et : $\dim \sum_{k=1}^{p} F_k \leqslant \sum_{k=1}^{p} \dim F_k$, avec égalité si et seulement si $F_1,\ldots,F_p$ sont en somme directe. Si $F_1,\ldots,F_p$ sont en somme directe, on peut donc affirmer que : $\dim \bigoplus_{k=1}^{p} F_k = \sum_{k=1}^{p} \dim F_k$.

Démonstration

- Notons φ l'application $(f_1,\ldots,f_p)\longmapsto \sum_{k=1}^p f_k$ de $\prod_{k=1}^p F_k$ dans $\sum_{k=1}^p F_k$. Cette application est linéaire — à vérifier — et surjective par définition de $\sum_{k=1}^p F_k$, donc comme $\prod_{k=1}^p F_k$ est de dimension finie par produit, $\sum_{k=1}^p F_k$ l'est également avec : $\dim \sum_{k=1}^p F_k \leqslant \dim \prod_{k=1}^p F_k = \sum_{k=1}^p \dim F_k$.
- L'inégalité précédente est une égalité si et seulement si φ est un isomorphisme, i.e. si et seulement elle est injective puisqu'elle est de toute façon surjective, i.e. si et seulement si non noyau est trivial. Or ce noyau est trivial si et seulement si : $\forall (f_1,\ldots,f_p)\in \prod_{k=1}^p F_k,\quad \sum_{k=1}^p f_k = 0_E \implies f_1=\ldots=f_p=0_E$, i.e. si et seulement si $F_1,\ldots,F_p$ sont en somme directe. ■

Théorème (Construction d'une somme directe à partir d'une famille libre) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $X=(x_i)_{i\in I}$ une famille libre de E. On partitionne I en p parties $I_1,\ldots,I_p$ disjointes pour lesquelles : $I=\bigsqcup_{k=1}^p I_k$ et on pose pour tout $k\in [\![1,p]\!]$: $F_k=\mathrm{Vect}(x_i)_{i\in I_k}$. Les sous-espaces vectoriels $F_1,\ldots,F_p$ de E sont alors en somme directe.

Théorème (Bases d'une somme directe d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $F_1,\ldots,F_p$ des sous-espaces vectoriels de E. On suppose que pour tout $k\in[\![1,p]\!]$, F_k possède une base $\mathscr{B}_k$. Si $F_1,\ldots,F_p$ sont en somme directe, la famille obtenue par concaténation des familles $\mathscr{B}_1,\ldots,\mathscr{B}_p$ est une base dite *adaptée* de $\bigoplus_{k=1}^p F_k$.

Théorème (Détermination d'une application linéaire sur une somme directe) Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $E_1,\ldots,E_p$ des sous-espaces vectoriels de E et $u_1\in\mathscr{L}(E_1,F),\ldots,u_p\in\mathscr{L}(E_p,F)$. On suppose que : $E=\bigoplus_{k=1}^p E_k$. Il existe une et une seule application linéaire $u\in\mathscr{L}(E,F)$ telle que pour tout $k\in[\![1,p]\!]$: $u|_{E_k}=u_k$.

Concrètement, pour tout $x\in E$ décomposé sous la forme : $x=x_1+\ldots+x_p$ avec $x_1\in E_1,\ldots,x_p\in E_p$:

$$u(x)=u_1(x_1)+\ldots+u_p(x_p).$$

Rappelons enfin que dans le cas particulier de deux sous-espaces « $E=E_1\oplus E_2$ » :

— pour : $u_1=\mathrm{Id}_{E_1}$ et $u_2=\mathrm{Id}_{E_2}$, u est l'application Id_E,

— pour : $u_1=\mathrm{Id}_{E_1}$ et $u_2=0_{\mathscr{L}(E_2,E)}$, u est la projection sur H parallèlement à H',

— pour : $u_1=\mathrm{Id}_{E_1}$ et $u_2=-\mathrm{Id}_{E_2}$, u est la symétrie par rapport à H parallèlement à H'.