

# ARITHMÉTIQUE DES POLYNÔMES ET FRACTIONS RATIONNELLES

Dans tout ce chapitre,  $\mathbb{K}$  est l'un des corps  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . Les preuves qui ressemblent trop fort à celles du chapitre « Arithmétique des entiers relatifs » seront souvent omises.

## 1 FACTORISATION IRRÉDUCTIBLE SUR $\mathbb{R}$ OU $\mathbb{C}$

**Définition (Polynôme irréductible)** Soit  $P \in \mathbb{K}[X]$ . On dit que  $P$  est *irréductible* (sur  $\mathbb{K}$ ) si  $P$  n'est PAS CONSTANT et si ses seuls diviseurs sont 1 et  $P$  à constante multiplicative non nulle près.

✘ **ATTENTION !** ✘ La précision « irréductible SUR  $\mathbb{K}$  » n'est pas superflue. Le polynôme  $X^2 + 1$  n'est pas irréductible sur  $\mathbb{C}$  car :  $X^2 + 1 = (X + i)(X - i)$ , mais nous allons voir dans un instant qu'il l'est sur  $\mathbb{R}$ .

**Exemple** Tout polynôme de degré 1 est irréductible.

**Démonstration** Soit  $P \in \mathbb{K}[X]$  de degré 1. Soient  $D$  un diviseur de  $P$  et  $A \in \mathbb{K}[X]$  tel que :  $P = AD$ . Comme  $A$  est non nul :  $\deg(A) \geq 0$ , donc :  $\deg(D) \leq \deg(P)$ . Ainsi  $D$  est de degré 0 ou 1.

— Si :  $\deg(D) = 0$ ,  $D$  est constant non nul.

— Si :  $\deg(D) = 1$ , alors :  $\deg(A) = 0$ , i.e.  $A$  est constant non nul  $a$ . Aussitôt  $D$  s'écrit :  $D = \frac{1}{a} P$ .

Comme voulu,  $P$  est irréductible sur  $\mathbb{K}$ .

Le résultat suivant est un théorème d'EXISTENCE facile à démontrer. Il montre que les polynômes irréductibles sont l'analogue polynomial des nombres premiers dans  $\mathbb{Z}$  et des particules élémentaires en physique. Tout polynôme peut être cassé en petits morceaux que l'on ne peut pas casser davantage. Nous aurons plus tard un théorème d'UNICITÉ.

**Théorème (Existence de la factorisation irréductible)** Tout polynôme non constant de  $\mathbb{K}[X]$  est un produit de polynômes irréductibles sur  $\mathbb{K}$ .

🌀 **Explication** 🌀 Dans cet énoncé lapidaire, on considère les polynômes constants non nuls comme le produit de 0 polynôme irréductible et tout polynôme irréductible comme le produit d'1 polynôme irréductible — soi-même.

**Démonstration** Par récurrence forte sur le degré.

- **Initialisation** : Les polynômes de degré 1 sont irréductibles, tout simplement.
- **Hérédité** : Soit  $n \geq 2$ . Faisons l'hypothèse que tout polynôme non nul de  $\mathbb{K}[X]$  de degré strictement inférieur à  $n$  est un produit de polynômes irréductibles sur  $\mathbb{K}$ . Soit  $P \in \mathbb{K}[X]$  non nul de degré  $n$ . Deux cas possibles — soit  $P$  est irréductible, soit il ne l'est pas. Si  $P$  est irréductible, c'est terminé, il est produit de polynômes irréductibles. Dans le cas contraire :  $P = AB$  pour certains  $A, B \in \mathbb{K}[X]$  non constants — donc de degrés strictement inférieurs à  $n$ . Par hypothèse de récurrence,  $A$  et  $B$  sont des produits de polynômes irréductibles sur  $\mathbb{K}$ , donc  $P$  aussi par produit. ■

Il nous reste bien sûr à comprendre ce que sont concrètement les polynômes irréductibles de  $\mathbb{R}[X]$  et  $\mathbb{C}[X]$ . Nous avons vu que les polynômes de degré 1 le sont de toute façon. La réciproque est vraie dans  $\mathbb{C}[X]$  — c'est une autre manière d'énoncer le théorème de d'Alembert-Gauss.

**Théorème (Polynômes irréductibles de  $\mathbb{C}[X]$  et unicité de la factorisation irréductible sur  $\mathbb{C}$ )**

- (i) Les irréductibles de  $\mathbb{C}[X]$  sont exactement ses polynômes de degré 1.
- (ii) La factorisation irréductible d'un polynôme non constant de  $\mathbb{C}[X]$  coïncide avec sa forme scindée — en particulier, elle est unique.

**Démonstration** Pour l'assertion (i), soit  $P \in \mathbb{C}[X]$  irréductible. Non constant,  $P$  possède une racine  $\lambda \in \mathbb{C}$  d'après le théorème de d'Alembert-Gauss, donc  $X - \lambda$  divise  $P$ . L'irréductibilité de  $P$  sur  $\mathbb{C}$  montre alors que  $P$  et  $X - \lambda$  sont associés, donc que  $P$  est de degré 1. La réciproque a été traitée à l'instant comme un exemple. ■

Que dire à présent des irréductibles de  $\mathbb{R}[X]$ ? La situation reste assez simple, mais moins que sur  $\mathbb{C}$ .

**Exemple** Tout polynôme de  $\mathbb{R}[X]$  de degré 2 **SANS RACINE RÉELLE** est irréductible sur  $\mathbb{R}$  — par exemple  $X^2 + 1$ .

**Démonstration** Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$  de degré 2 sans racine réelle. Soient  $D$  un diviseur de  $P$  et  $A \in \mathbb{R}[X]$  tel que :  $P = AD$ . Comme  $A$  est non nul :  $\deg(A) \geq 0$ , donc :  $\deg(D) \leq \deg(P)$ . Ainsi  $D$  est de degré 0, 1 ou 2.

- Si :  $\deg(D) = 0$ ,  $D$  est constant non nul.
- Si :  $\deg(D) = 2$ , alors :  $\deg(A) = 0$ , i.e.  $A$  est constant non nul  $a$ . Aussitôt  $D$  s'écrit :  $D = \frac{1}{a} P$ .
- Enfin,  $D$  peut-il être de degré 1? Si c'était le cas,  $D$  serait de la forme  $aX + b$  pour certains  $a \in \mathbb{R}^*$  et  $b \in \mathbb{R}$ , donc  $-\frac{b}{a}$  serait racine de  $P$  mais c'est contraire à nos hypothèses.

Comme voulu,  $P$  est irréductible sur  $\mathbb{R}$ .

**Théorème (Polynômes irréductibles de  $\mathbb{R}[X]$  et unicité de la factorisation irréductible sur  $\mathbb{R}$ )**

- (i) Les irréductibles de  $\mathbb{R}[X]$  sont exactement ses polynômes de degré 1 et ses polynômes de degré 2 à discriminant strictement négatif, i.e. sans racine réelle.
- (ii) La factorisation irréductible d'un polynôme non constant de  $\mathbb{R}[X]$  est unique. Elle est précisément de la forme :

$$A \prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)^{m_i} \times \prod_{j=1}^s (X^2 + b_j X + c_j)^{n_j}$$

- avec :
- $A$  pour coefficient dominant,
  - $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  pour racines réelles distinctes de multiplicités respectives  $m_1, \dots, m_r$ ,
  - des polynômes  $X^2 + b_j X + c_j$  distincts et irréductibles sur  $\mathbb{R}$  pour tout  $j \in \llbracket 1, s \rrbracket$ , et  $n_j \in \mathbb{N}^*$ .



**Démonstration**

(i) Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$  irréductible. Non constant,  $P$  possède une racine  $\lambda$  **COMPLEXE** d'après le théorème de d'Alembert-Gauss et nous savons alors,  $P$  étant à coefficients réels, que  $\bar{\lambda}$  aussi est racine de  $P$ .

- Si :  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $X - \lambda$  divise  $P$  dans  $\mathbb{R}[X]$ , or  $P$  est irréductible sur  $\mathbb{R}$ , donc  $P$  et  $X - \lambda$  sont associés et  $P$  est de degré 1.
- Si :  $\lambda \notin \mathbb{R}$ , alors :  $\bar{\lambda} \neq \lambda$ , donc :  $P = (X - \lambda)(X - \bar{\lambda})Q$  pour un certain  $Q \in \mathbb{C}[X]$ , mais si on développe :  $P = \underbrace{(X^2 - 2\text{Re}(\lambda)X + |\lambda|^2)}_{\in \mathbb{R}[X]} Q$ , donc en réalité  $Q$  est à coefficients **RÉELS** par unicité

de la division euclidienne dans  $\mathbb{C}[X]$ . De là,  $P$  étant irréductible sur  $\mathbb{R}$ ,  $P$  et  $X^2 - 2\text{Re}(\lambda)X + |\lambda|^2$  sont associés et  $P$  est de degré 2. En outre, enfin,  $P$  est bien sans racine réelle.

(ii) Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$  non constant. Nous savons que  $P$  est scindé **SUR**  $\mathbb{C}$ , mais aussi, parce qu'il est à coefficients **RÉELS**, que ses racines non réelles peuvent être regroupées par paires de conjuguées de mêmes multiplicités. Comme en (i), le regroupement de termes  $X - \lambda$  et  $X - \bar{\lambda}$  donne un terme  $X^2 - 2\text{Re}(\lambda)X + |\lambda|^2$  irréductible. Pour finir, cette factorisation irréductible sur  $\mathbb{R}$  est unique, car si elle ne l'était pas,  $P$  aurait plusieurs formes scindées sur  $\mathbb{C}$  — ce que nous savons être faux. ■

 **En pratique**  La factorisation irréductible sur  $\mathbb{R}$  se calcule à partir de la factorisation irréductible sur  $\mathbb{C}$  par regroupement des racines non réelles par paires de conjuguées.

**Exemple** La factorisation irréductible de  $X^4 + 16$  sur  $\mathbb{C}$  est :  $X^4 + 16 = (X - 2e^{-\frac{i\pi}{4}})(X - 2e^{\frac{i\pi}{4}})(X - 2e^{-\frac{3i\pi}{4}})(X - 2e^{\frac{3i\pi}{4}})$ .  
 Quant à sa factorisation irréductible sur  $\mathbb{R}$  :  $X^4 + 16 = (X^2 - 2\sqrt{2}X + 4)(X^2 + 2\sqrt{2}X + 4)$ .

**Démonstration**

- **Factorisation irréductible sur  $\mathbb{C}$**  : Qui sont les racines complexes de  $X^4 + 16$  ? Pour tout  $r \in \mathbb{C}$  :

$$r^4 + 16 = 0 \iff r^4 = -16 = \left(2e^{\frac{i\pi}{4}}\right)^4 \iff \exists k \in \llbracket 0, 3 \rrbracket, r = 2e^{\frac{i\pi}{4} + \frac{2ik\pi}{4}}.$$

Les racines de  $X^4 + 16$  sont donc :  $2e^{\frac{i\pi}{4}}$  ( $k = 0$ ),  $2e^{\frac{3i\pi}{4}}$  ( $k = 1$ ),  $2e^{-\frac{3i\pi}{4}}$  ( $k = 2$ ) et  $2e^{-\frac{i\pi}{4}}$  ( $k = 3$ ). La factorisation irréductible de  $X^4 + 16$  sur  $\mathbb{C}$  en découle — avec ici des racines simples.

- **Factorisation irréductible sur  $\mathbb{R}$**  : Il nous reste à regrouper les racines par paires de conjuguées.

$$(X - 2e^{-\frac{i\pi}{4}})(X - 2e^{\frac{i\pi}{4}}) = X^2 - 2\left(e^{-\frac{i\pi}{4}} + e^{\frac{i\pi}{4}}\right)X + 4 = X^2 - 4\cos\frac{\pi}{4} \times X + 4 = X^2 - 2\sqrt{2}X + 4$$

et :  $(X - 2e^{-\frac{3i\pi}{4}})(X - 2e^{\frac{3i\pi}{4}}) = X^2 - 2\left(e^{-\frac{3i\pi}{4}} + e^{\frac{3i\pi}{4}}\right)X + 4 = X^2 - 4\cos\frac{3\pi}{4} \times X + 4 = X^2 + 2\sqrt{2}X + 4.$

## 2 PGCD, PPCM

**Définition (Diviseur/multiple commun)** Soient  $A_1, \dots, A_r \in \mathbb{K}[X]$ .

- On appelle *diviseur commun* de  $A_1, \dots, A_r$  tout polynôme de  $\mathbb{K}[X]$  qui divise à la fois  $A_1, \dots, A_r$ .
- On appelle *multiple commun* de  $A_1, \dots, A_r$  tout polynôme de  $\mathbb{K}[X]$  divisible à la fois par  $A_1, \dots, A_r$ .

### 2.1 PGCD DE DEUX POLYNÔMES

**Définition-théorème (PGCD de deux polynômes)**

- Soient  $A, B \in \mathbb{K}[X]$  avec :  $A \neq 0$  ou  $B \neq 0$ . On appelle *plus grand commun diviseur* (ou PGCD) de  $A$  et  $B$  tout diviseur commun de  $A$  et  $B$  de degré maximal.
- On convient que 0 est le seul PGCD de 0 et 0.

**Démonstration** Justifions l'existence d'un PGCD dans le cas où :  $A \neq 0$ . Or l'ensemble des DEGRÉS des diviseurs communs non nuls de  $A$  et  $B$  contient 0 — car  $A$  et  $B$  sont divisibles par 1 — et il est majoré par  $\deg(A)$ . Partie non vide majorée de  $\mathbb{N}$ , cet ensemble possède un plus grand élément. ■

**Exemple** Pour tout  $A \in \mathbb{K}[X]$ , les PGCD de  $A$  et 0 sont exactement les associés de  $A$ .

**Démonstration** Si :  $A \neq 0$ , les diviseurs communs de  $A$  et 0 sont exactement les diviseurs de  $A$  et les diviseurs de  $A$  de degré maximal sont exactement ses associés.

**Théorème (Idée fondamentale de l'algorithme d'Euclide)** Pour tous  $A, B, K \in \mathbb{K}[X]$ ,  $A + BK$  et  $B$  ont les mêmes diviseurs communs que  $A$  et  $B$ , et donc aussi les mêmes PGCD.

🦋 **Explication** 🦋 En particulier, pour tous  $A, B \in \mathbb{K}[X]$  avec :  $B \neq 0$ , en notant  $R$  le reste de la division euclidienne de  $A$  par  $B$ ,  $B$  et  $R$  ont les mêmes diviseurs communs que  $A$  et  $B$ .

**Démonstration** Tout diviseur commun de  $A$  et  $B$  divise aussi  $A + BK$  et  $B$ , et inversement, tout diviseur commun de  $A + BK$  et  $B$  divise aussi  $A = (A + BK) - BK$  et  $B$ . ■

**Théorème** (« Unicité » du PGCD de deux polynômes, diviseurs communs et diviseurs du PGCD) Soient  $A, B \in \mathbb{K}[X]$ .



- Les PGCD de  $A$  et  $B$  sont associés. Un seul d'entre eux est donc unitaire — ou nul si :  $A = B = 0$  — on l'appelle LE PGCD de  $A$  et  $B$  et on le note  $A \wedge B$ .
- Les diviseurs communs de  $A$  et  $B$  sont exactement les diviseurs de  $A \wedge B$ .

**Démonstration** Nous allons mettre en œuvre dans cette preuve un algorithme de calcul du PGCD qu'on appelle l'*algorithme d'Euclide*. Soient  $A, B \in \mathbb{K}[X]$ . On peut supposer que :  $\deg(B) \leq \deg(A)$  sans perte de généralité. On définit une suite de polynômes  $R_0, R_1, R_2 \dots$  de la manière suivante.

— Au départ, on pose :  $R_0 = A$  et  $R_1 = B$ .

— Ensuite, pour  $k \in \mathbb{N}$ , TANT QUE :  $R_{k+1} \neq 0$ , on note  $R_{k+2}$  le reste de la division euclidienne de  $R_k$  par  $R_{k+1}$  — en particulier :  $\deg(R_{k+2}) < \deg(R_{k+1})$ .

À l'issue de cette construction :  $\deg(R_0) \geq \deg(R_1) > \deg(R_2) > \dots$ , et comme il n'existe qu'un nombre FINI d'entiers naturels entre 0 et  $\deg(R_0)$ , on obtient forcément :  $\deg(R_N) = -\infty$  pour un certain  $N \in \mathbb{N}^*$ , i.e. :  $R_N = 0$  — l'algorithme se termine. Or, en vertu de l'idée fondamentale de l'algorithme d'Euclide,  $A = R_0$  et  $B = R_1$  ont les mêmes diviseurs communs et les mêmes PGCD que  $R_1$  et  $R_2$ , puis que  $R_2$  et  $R_3 \dots$  et enfin que  $R_{N-1}$  et  $R_N = 0$ . Les PGCD de  $R_{N-1}$  et 0 étant exactement les associés de  $R_{N-1}$ , les diviseurs communs de  $A$  et  $B$  sont ainsi exactement les diviseurs de  $R_{N-1}$  et leurs PGCD sont exactement les associés de  $R_{N-1}$ . En particulier, les PGCD de  $A$  et  $B$  sont associés. ■

 **En pratique**  (**Algorithme d'Euclide**) Comme on vient de le voir, l'*algorithme d'Euclide* est un algorithme de calcul du PGCD de deux polynômes. Il a été montré en particulier que :  $A \wedge B = R_{N-1}$  où  $R_{N-1}$  est le dernier polynôme non nul de la liste  $R_0, R_1, R_2 \dots$ . On retiendra ceci :

À une constante multiplicative près,  $A \wedge B$  est le **DERNIER RESTE NON NUL** de la suite des restes successifs  $R_0, R_1, R_2 \dots$ .

**Exemple** On peut vérifier grâce à l'algorithme d'Euclide que :  $(X+1)^3 \wedge (X+1)^2(X+2) = (X+1)^2$ .



Si vous aimez les calculs :  $(2X^4 + 9X^3 + 12X^2 + 10X + 3) \wedge (2X^4 + X^3 - 2X^2 + 3X + 2) = X + \frac{1}{2}$ .

**Théorème (Relations de Bézout pour deux polynômes)** Soient  $A, B \in \mathbb{K}[X]$ . Il existe des polynômes  $U, V \in \mathbb{K}[X]$  pour lesquels :  $A \wedge B = AU + BV$ . Une telle relation est appelée *UNE relation de Bézout de A et B*.

**✗ ATTENTION ! ✗** Les polynômes  $U$  et  $V$  ne sont pas du tout uniques.

**Démonstration** On l'a vu précédemment, on peut toujours se ramener au cas où :  $\deg(B) \leq \deg(A)$ . On reprend dans cette preuve les restes successifs de l'algorithme d'Euclide en posant :  $R_0 = A$  et  $R_1 = B$  et en notant pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , tant que :  $R_{k+1} \neq 0$ ,  $R_{k+2}$  le reste de la division euclidienne de  $R_k$  par  $R_{k+1}$ . Le quotient de cette division euclidienne sera quant à lui noté  $Q_{k+2}$  :  $R_{k+2} = R_k - Q_{k+2}R_{k+1}$ . La suite ainsi construite est finie de rang final  $N$  pour lequel :  $R_N = 0$ .

On définit deux nouvelles suites  $(U_k)_{0 \leq k \leq N}$  et  $(V_k)_{0 \leq k \leq N}$  par :  $(U_0, V_0) = (1, 0)$ ,  $(U_1, V_1) = (0, 1)$  et pour tout  $k \in \llbracket 0, N-2 \rrbracket$  :  $(U_{k+2}, V_{k+2}) = (U_k - Q_{k+2}U_{k+1}, V_k - Q_{k+2}V_{k+1})$ . Il n'est alors pas dur de voir par récurrence double que pour tout  $k \in \llbracket 0, N \rrbracket$  :  $R_k = AU_k + BV_k$ . En particulier :  $A \wedge B = R_{N-1} = AU_{N-1} + BV_{N-1}$ . ■

 **En pratique**  (**Algorithme d'Euclide étendu**) Le principe de l'algorithme est le même qu'au chapitre « Arithmétique des entiers relatifs » et je ne re-détaillerai pas ici. Cherchons par exemple le PGCD de :  $A = 6X^4 + 8X^3 - 7X^2 - 5X - 2$  et  $B = 6X^3 - 4X^2 - X - 1$  ainsi qu'une relation de Bézout associée.

$k$	$Q_k$	$R_k$	$U_k$	$V_k$
0		$6X^4 + 8X^3 - 7X^2 - 5X - 2$	1	0
1		$6X^3 - 4X^2 - X - 1$	0	1
2	$X + 2$	$2X^2 - 2X$	1	$-X - 2$
3	$3X + 1$	$X - 1$	$-3X - 1$	$3X^2 + 7X + 3$



À chaque étape :  $R_k = AU_k + BV_k$ .

Relation de Bézout :

$$\begin{aligned} A \wedge B &= X - 1 \\ &= -(3X + 1) \times A + (3X^2 + 7X + 3) \times B. \end{aligned}$$

**Théorème (Propriétés du PGCD de deux polynômes)** Soient  $A, B, C, K \in \mathbb{K}[X]$ .

- (i) **Associativité** :  $(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$ .
- (ii) **Factorisation par un diviseur commun** :  $(AK) \wedge (BK)$  et  $K(A \wedge B)$  sont associés.



 **En pratique**  Quand on connaît la factorisation irréductible de deux polynômes  $A$  et  $B$ , on peut déterminer  $A \wedge B$  sans utiliser l'algorithme de Bézout. Le principe est le même que dans  $\mathbb{Z}$ .

**Exemple**  $(2X(X + 1)^2(X + 2)^3) \wedge (X(X + 2)^4(X^2 + 1)) = X(X + 2)^3$ .

## 2.2 PGCD D'UNE FAMILLE FINIE DE POLYNÔMES

**Définition-théorème (PGCD d'une famille finie de polynômes)**

- Soient  $A_1, \dots, A_r \in \mathbb{K}[X]$  des polynômes dont l'un au moins est non nul. On appelle *plus grand commun diviseur* (ou *PGCD*) de  $A_1, \dots, A_r$  tout diviseur commun de  $A_1, \dots, A_r$  de degré maximal.
- On peut montrer que les PGCD de  $A_1, \dots, A_r$  sont associés. Un seul d'entre eux est donc unitaire — ou nul si :  $A_1 = \dots = A_r = 0$  — on l'appelle **LE PGCD** de  $A_1, \dots, A_r$  et on le note  $A_1 \wedge \dots \wedge A_r$ .
- On pose enfin pour tout  $r \geq 2$  :  $\underbrace{0 \wedge \dots \wedge 0}_{r \text{ fois}} = 0$ .

 **En pratique**  Comme dans le cas des entiers, le calcul du PGCD d'une famille finie de polynômes peut être ramené à des calculs de PGCD de deux polynômes. Par exemple :

$$(X^3 + 4X^2 + 5X + 2) \wedge (X^3 + 4X^2 + 4X) \wedge (X^2 - 4) = (X + 2) \wedge (X^2 - 4) = X + 2.$$

**Théorème (Reprise des résultats précédents dans le cas d'une famille finie de polynômes)** Soient  $A_1, \dots, A_r \in \mathbb{K}[X]$ .

- Les diviseurs communs de  $A_1, \dots, A_r$  sont exactement les diviseurs de  $A_1 \wedge \dots \wedge A_r$ .
- Pour tout  $K \in \mathbb{K}[X]$  :  $(A_1 K) \wedge \dots \wedge (A_r K)$  et  $K(A_1 \wedge \dots \wedge A_r)$  sont associés.
- Il existe des polynômes  $U_1, \dots, U_r \in \mathbb{K}[X]$  pour lesquels :  $A_1 \wedge \dots \wedge A_r = A_1 U_1 + \dots + A_r U_r$ . Une telle relation est appelée **UNE relation de Bézout** de  $A_1, \dots, A_r$ .

## 2.3 POLYNÔMES PREMIERS ENTRE EUX

**Définition (Polynômes premiers entre eux, cas de deux polynômes)** Soient  $A, B \in \mathbb{K}[X]$ . On dit que  $A$  et  $B$  sont *premiers entre eux* si 1 est leur seul diviseur commun unitaire, i.e. si :  $A \wedge B = 1$ .

**Définition (Polynômes premiers entre eux dans leur ensemble/deux à deux)** Soient  $A_1, \dots, A_r \in \mathbb{K}[X]$ .

- On dit que  $A_1, \dots, A_r$  sont *premiers entre eux dans leur ensemble* si 1 est leur seul diviseur commun unitaire, i.e. si :  $A_1 \wedge \dots \wedge A_r = 1$ .
- On dit que  $A_1, \dots, A_r$  sont *premiers entre eux deux à deux* si  $A_i$  et  $A_j$  sont premiers entre eux pour tous  $i, j \in \llbracket 1, r \rrbracket$  distincts.

✘ ATTENTION ! ✘

Premiers entre eux DEUX À DEUX  $\implies$  Premiers entre eux DANS LEUR ENSEMBLE

mais LA

RÉCIPROQUE EST FAUSSE ! Par exemple,  $X(X+1)$ ,  $X(X+2)$  et  $(X+1)(X+2)$  sont premiers entre eux dans leur ensemble MAIS :  $X(X+1) \wedge X(X+2) = X \neq 1$ ,  $X(X+2) \wedge (X+1)(X+2) = X+2 \neq 1$  et  $(X+1)(X+2) \wedge X(X+1) = X+1 \neq 1$ .

**Théorème (Théorème de Bézout)** Soient  $A, B \in \mathbb{K}[X]$ . Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i)  $A \wedge B = 1$ .                      (ii) Il existe deux polynômes  $U, V \in \mathbb{K}[X]$  tels que  $AU + BV = 1$ .

**Théorème (Théorème de Gauss)** Soient  $A, B, C \in \mathbb{K}[X]$ . Si :  $A|BC$  et si :  $A \wedge B = 1$ , alors :  $A|C$ .

**Théorème (Polynômes premiers entre eux et produit de polynômes)** Soient  $P, A_1, \dots, A_r \in \mathbb{K}[X]$ .

- (i) Si chacun des polynômes  $A_1, \dots, A_r$  est premier avec  $P$ , leur produit  $A_1 \dots A_r$  l'est aussi.  
 (ii) Si  $A_1, \dots, A_r$  divisent  $P$  et sont premiers entre eux DEUX À DEUX, leur produit  $A_1 \dots A_r$  divise  $P$ .



## 2.4 PPCM DE DEUX POLYNÔMES

**Définition (PPCM de deux polynômes)** Soient  $A, B \in \mathbb{K}[X]$ . On appelle *plus petit commun multiple* (ou PPCM) de  $A$  et  $B$  tout polynôme  $M \in \mathbb{K}[X]$  satisfaisant les deux assertions :

- $M$  est un multiple commun de  $A$  et  $B$ ,                      —  $M$  divise tout multiple commun de  $A$  et  $B$ .

**Théorème (Existence du PPCM et lien avec le PGCD)** Soient  $A, B \in \mathbb{K}[X]$ .

- **Existence et « unicité »** : Les polynômes  $A$  et  $B$  possèdent un unique PPCM UNITAIRE OU NUL appelé LE PPCM de  $A$  et  $B$  et noté  $A \vee B$ , et leurs autres PPCM sont les associés de  $A \vee B$ , i.e. les polynômes  $\lambda(A \vee B)$ ,  $\lambda$  décrivant  $\mathbb{K}^*$ .
- **Lien avec le PGCD** : Les polynômes  $AB$  et  $(A \wedge B)(A \vee B)$  sont associés.

 **En pratique**  Quand on connaît la factorisation irréductible de deux polynômes  $A$  et  $B$ , on peut déterminer  $A \vee B$  sans utiliser l'algorithme de Bézout. Le principe est le même que dans  $\mathbb{Z}$ .

**Exemple**  $(3X^2(X+1)) \vee (X^4(X+2)^2) = X^4(X+1)(X+2)^2$ .

### 3 FRACTIONS RATIONNELLES

Nous avons déjà parlé informellement des fractions rationnelles en début d'année au chapitre « Introduction à la décomposition en éléments simples », mais nous ne connaissions alors pas la notion de polynôme formel et tous nos résultats étaient admis. Nous sommes à présent en mesure de les fonder proprement.

#### 3.1 CONSTRUCTION DES FRACTIONS RATIONNELLES

**Définition (Ensemble  $\mathbb{K}(X)$ )** On construit dans la preuve ci-dessous un ensemble  $\mathbb{K}(X)$  satisfaisant les trois assertions suivantes :

- À tout couple  $(A, B) \in \mathbb{K}[X]^2$  pour lequel :  $B \neq 0$ , on peut associer un unique élément de  $\mathbb{K}(X)$  noté  $\frac{A}{B}$ .
- Tout élément de  $\mathbb{K}(X)$  peut être écrit sous la forme  $\frac{A}{B}$  pour certains  $A, B \in \mathbb{K}[X]$  avec :  $B \neq 0$ .
- Pour tous  $(A, B), (C, D) \in \mathbb{K}[X]^2$ , si :  $B \neq 0$  et  $D \neq 0$ , alors :  $\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \iff AD = BC$ .

Les éléments de  $\mathbb{K}(X)$  sont appelés les *fractions rationnelles à coefficients dans  $\mathbb{K}$* .

**Démonstration** Notons  $\mathcal{F}$  l'ensemble  $\mathbb{K}[X] \times (\mathbb{K}[X] \setminus \{0\})$ . On définit sur  $\mathcal{F}$  une relation binaire  $\sim$  de la manière suivante — pour tous  $(A, B), (C, D) \in \mathcal{F}$  :  $(A, B) \sim (C, D) \iff AD = BC$ . Il se trouve alors que cette relation  $\sim$  est une relation d'équivalence.

- **Réflexivité** : Pour tout  $(A, B) \in \mathcal{F}$  :  $AB = AB$  donc :  $(A, B) \sim (A, B)$ .
- **Transitivité** : Soient  $(A, B), (C, D), (E, F) \in \mathcal{F}$  pour lesquels :  $(A, B) \sim (C, D)$  et  $(C, D) \sim (E, F)$ . Aussitôt :  $AD = BC$  et  $CF = DE$ , donc :  $ADF = BCF = BDE$ . Or  $\mathbb{K}[X]$  est intègre et :  $D \neq 0$ , donc :  $AF = BE$ , i.e. :  $(A, B) \sim (E, F)$ .
- **Symétrie** : Pour tous  $(A, B), (C, D) \in \mathcal{F}$ , si :  $(A, B) \sim (C, D)$ , alors :  $AD = BC$ , donc aussi :  $CB = DA$ , i.e. :  $(C, D) \sim (A, B)$ .

Notons à présent  $\mathbb{K}(X)$  l'ensemble quotient de  $\mathcal{F}$  par  $\sim$  et, pour tout  $(A, B) \in \mathcal{F}$ ,  $\frac{A}{B}$  la classe d'équivalence de  $(A, B)$  associée. L'ensemble ainsi construit satisfait par définition toutes les propriétés désirées. Remarquez bien pour finir que la notation « fraction » n'est qu'une NOTATION pour désigner une classe d'équivalence ! — mais à vrai dire, c'est une remarque que vous pouvez oublier. ■

**Exemple** Dans  $\mathbb{R}(X)$ , les fractions  $\frac{1}{X}$  et  $\frac{X+1}{X(X+1)}$  sont égales car :  $1 \times X(X+1) = X \times (X+1)$ .

**Définition (Structure de corps sur  $\mathbb{K}(X)$ )** On munit  $\mathbb{K}(X)$  de deux lois internes  $+$  et  $\times$  qui en font un corps en posant, pour tous  $(A, B), (C, D) \in \mathbb{K}[X]^2$ , si :  $B \neq 0$  et  $D \neq 0$ , alors :

$$\frac{A}{B} + \frac{C}{D} = \frac{AD + BC}{BD} \quad \text{et} \quad \frac{A}{B} \times \frac{C}{D} = \frac{AC}{BD},$$

définitions possibles car les fractions  $\frac{AD + BC}{BD}$  et  $\frac{AC}{BD}$  dépendent de  $\frac{A}{B}$  et  $\frac{C}{D}$  sans dépendre du choix de  $(A, B)$  et  $(C, D)$ .

**Démonstration** Soient  $A, B, C, D, E, F \in \mathbb{K}[X]$ , si :  $B \neq 0$ ,  $D \neq 0$  et  $F \neq 0$ , alors :

- **Bonne définition de  $+$  et  $\times$**  : Pourquoi d'abord y a-t-il un problème de définition ? Les fractions  $\frac{A}{B}$  et  $\frac{C}{D}$  sont définies à l'aide de quatre polynômes précis  $A, B, C, D$ , mais une fraction a plein d'écritures possibles, disons :  $\frac{A}{B} = \frac{\tilde{A}}{\tilde{B}}$  et  $\frac{C}{D} = \frac{\tilde{C}}{\tilde{D}}$  avec  $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D} \in \mathbb{K}[X]$  et :  $\tilde{B} \neq 0$  et  $\tilde{D} \neq 0$ . Si nous voulons

que les définitions de  $+$  et  $\times$  aient un sens, nous devons nous assurer que les deux égalités suivantes sont vraies :  $\frac{AD+BC}{BD} = \frac{\tilde{A}\tilde{D} + \tilde{B}\tilde{C}}{\tilde{B}\tilde{D}}$  et  $\frac{AC}{BD} = \frac{\tilde{A}\tilde{C}}{\tilde{B}\tilde{D}}$ . Or par définition de  $\sim$  :

$$AC \times \tilde{B}\tilde{D} = \tilde{A}\tilde{B} \times \tilde{C}\tilde{D} = \tilde{B}\tilde{A} \times \tilde{D}\tilde{C} = BD \times \tilde{A}\tilde{C}$$

et :  $(AD+BC) \times \tilde{B}\tilde{D} = \tilde{A}\tilde{B} \times \tilde{D}\tilde{D} + \tilde{B}\tilde{B} \times \tilde{C}\tilde{D} = \tilde{B}\tilde{A} \times \tilde{D}\tilde{D} + \tilde{B}\tilde{B} \times \tilde{D}\tilde{C} = BD \times (\tilde{A}\tilde{D} + \tilde{B}\tilde{C})$ .

- **Commutativité de  $+$**  :  $\frac{A}{B} + \frac{C}{D} = \frac{AD+BC}{BD} = \frac{CB+DA}{DB} = \frac{C}{D} + \frac{A}{B}$ .
- **Associativité de  $+$**  :  $\left(\frac{A}{B} + \frac{C}{D}\right) + \frac{E}{F} = \frac{AD+BC}{BD} + \frac{E}{F} = \frac{(AD+BC)F + (BD)E}{(BD)F}$   
 $= \frac{A(DF) + B(CF + DE)}{B(DF)} = \frac{A}{B} + \frac{CF + DE}{DF} = \frac{A}{B} + \left(\frac{C}{D} + \frac{E}{F}\right)$ .
- **Neutralité de  $\frac{0}{1}$  pour  $+$**  :  $\frac{A}{B} + \frac{0}{1} = \frac{A \times 1 + B \times 0}{B \times 1} = \frac{A}{B}$  et de même  $\frac{0}{1} + \frac{A}{B} = \frac{A}{B}$ .
- **Inverses pour  $+$**  :  $\frac{A}{B} + \frac{-A}{B} = \frac{AB + B(-A)}{B^2} = \frac{0}{B^2} = \frac{0}{1}$  et de même  $\frac{-A}{B} + \frac{A}{B} = \frac{0}{1}$ .
- À ce stade,  $(\mathbb{K}(X), +)$  est un groupe commutatif d'élément neutre  $\frac{0}{1}$ . Pour montrer que  $(\mathbb{K}(X), +, \times)$  est un anneau, on peut montrer de même que  $(\mathbb{K}(X), \times)$  est un magma associatif d'élément neutre  $\frac{1}{1}$  et que  $\times$  est distributive sur  $+$ . Enfin, pour montrer que  $(\mathbb{K}(X), +, \times)$  est un corps, on peut montrer que  $\times$  est commutative et que toute fraction non nulle  $\frac{A}{B}$  admet un inverse, en l'occurrence  $\frac{B}{A}$ . ■

**Théorème (Les polynômes sont des fractions rationnelles)** On identifie tout polynôme  $P \in \mathbb{K}[X]$  à la fraction rationnelle  $\frac{P}{1}$ . Cette identification fait de  $\mathbb{K}[X]$  un sous-anneau de  $\mathbb{K}(X)$ .

### Démonstration

- **Pseudo-inclusion** : L'application  $P \mapsto \frac{P}{1}$  est injective de  $\mathbb{K}[X]$  dans  $\mathbb{K}(X)$  car pour tous  $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ , si :  $\frac{P}{1} = \frac{Q}{1}$ , alors :  $P = P \times 1 = 1 \times Q = Q$ . On peut donc voir  $\mathbb{K}[X]$  comme une partie de  $\mathbb{K}(X)$ .
- **Cohérence des notations  $+$  et  $\times$**  : Soient  $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ . C'est bien beau de vouloir voir  $P$  et  $Q$  comme des fractions, le problème c'est que  $P+Q$  et  $P \times Q$  désignent alors à la fois des objets dans  $\mathbb{K}[X]$  et des objets dans  $\mathbb{K}(X)$  — peut-être différents. Tout se passe pour le mieux heureusement, car :

$$\frac{P}{1} + \frac{Q}{1} = \frac{P \times 1 + 1 \times Q}{1 \times 1} = \frac{P+Q}{1} \quad \text{et} \quad \frac{P}{1} \times \frac{Q}{1} = \frac{PQ}{1 \times 1} = \frac{P \times Q}{1}$$

- **Sous-anneau** : Avec notre identification :  $\mathbb{K}[X] = \left\{ \frac{P}{1} \right\}_{P \in \mathbb{K}[X]}$ . En particulier :  $\frac{1}{1} = 1 \in \mathbb{K}[X]$ . Ensuite,  $\mathbb{K}[X]$  est stable par différence et produit car pour tous  $P, Q \in \mathbb{K}[X]$  :  $\frac{P}{1} - \frac{Q}{1} = \frac{P-Q}{1} \in \mathbb{K}[X]$  et  $\frac{P}{1} \times \frac{Q}{1} = \frac{PQ}{1} \in \mathbb{K}[X]$ . ■

**Théorème (Structure d'espace vectoriel de  $\mathbb{K}(X)$ )** Parce que tout élément de  $\mathbb{K}$  peut être identifié à un polynôme et donc à une fraction rationnelle, on sait multiplier toute fraction rationnelle de  $\mathbb{K}(X)$  par un scalaire. Cette identification fait de  $\mathbb{K}(X)$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

Dans tout ce qui suit, quand nous écrirons sans préciser :  $R = \frac{A}{B}$ , il sera sous-entendu que :  $(A, B) \in \mathbb{K}[X]^2$  et  $B \neq 0$ . Les résultats qui suivent seront admis par souci d'efficacité.



**Définition (Forme irréductible d'une fraction rationnelle)** Soit  $R \in \mathbb{K}(X)$ . On appelle *forme irréductible de R* toute écriture de  $R$  de la forme :  $R = \frac{A}{B}$  avec  $A$  et  $B$  premiers entre eux. Une telle écriture est toujours possible, et unique à multiplication près par des scalaires non nuls.

**Exemple** La fraction  $\frac{(X^2 + 1)(X + 1)^2}{X(X + 1)}$  n'est pas irréductible, mais la fraction  $\frac{(X^2 + 1)(X + 1)}{X}$  l'est.

**Définition (Dérivée d'une fraction rationnelle)**

- Soit  $R = \frac{A}{B} \in \mathbb{K}(X)$ . La fraction rationnelle  $\frac{A'B - AB'}{B^2}$  dépend de  $R$  sans dépendre du choix de  $(A, B)$ . On l'appelle la *dérivée de R* et on la note  $R'$ .
- Pour tous  $R, S \in \mathbb{K}(X)$  :  $(R + S)' = R' + S'$ ,  $(RS)' = R'S + RS'$  et si  $S \neq 0$  :  $\left(\frac{R}{S}\right)' = \frac{R'S - RS'}{S^2}$ .  
En outre, la dérivée d'un polynôme coïncide avec sa dérivée comme fraction rationnelle.

**Exemple**  $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k}{7^k} = \frac{7}{36}$ .

**Démonstration** Dérivons pour tout  $n \in \mathbb{N}$  la relation :  $\sum_{k=0}^n X^k = \frac{1 - X^{n+1}}{1 - X}$  dans  $\mathbb{K}(X)$ .

Cela donne :  $\sum_{k=0}^n kX^{k-1} = \frac{-(n+1)X^n(1-X) + (1-X^{n+1})}{(1-X)^2} = \frac{1 + nX^{n+1} - (n+1)X^n}{(1-X)^2}$ , puis multiplions par

$X$  :  $\sum_{k=0}^n kX^k = \frac{X}{(1-X)^2} (1 + nX^{n+1} - (n+1)X^n)$ . Évaluons enfin en  $\frac{1}{7}$  :  $\sum_{k=0}^n \frac{k}{7^k} = \frac{7}{36} \left(1 + \frac{n}{7^{n+1}} - \frac{n+1}{7^n}\right)$ .

Il ne reste plus qu'à passer à la limite.

**Définition (Degré d'une fraction rationnelle)**

- Soit  $R = \frac{A}{B} \in \mathbb{K}(X)$ . La quantité  $\deg(A) - \deg(B)$  dépend de  $R$  sans dépendre du choix de  $(A, B)$ . On l'appelle le *degré de R* et on la note  $\deg(R)$ . Le degré d'une fraction rationnelle est ainsi soit un entier RELATIF, soit  $-\infty$ .
- Pour tous  $R, S \in \mathbb{K}(X)$  :  $\deg(R + S) \leq \max\{\deg(R), \deg(S)\}$  et  $\deg(RS) = \deg(R) + \deg(S)$ , et si  $\deg(R) \neq 0$  :  $\deg(R') = \deg(R) - 1$ . En outre, le degré d'un polynôme coïncide avec son degré comme fraction rationnelle.

**✗ ATTENTION ! ✗** Seule la fraction rationnelle 0 est de degré  $-\infty$ , mais une fraction rationnelle peut être de degré positif sans être un polynôme. Par exemple, la fraction rationnelle  $\frac{X^4 + X^3 + 1}{X^2 + 3}$  est de degré  $4 - 2 = 2$  sans être un polynôme.

**Définition (Fonction rationnelle)** Soit  $R = \frac{A}{B} \in \mathbb{K}(X)$  IRRÉDUCTIBLE. La fonction  $x \mapsto \frac{A(x)}{B(x)}$  définie sur  $\mathbb{K}$  privé des racines de  $B$  est appelée la *fonction rationnelle associée à R* et encore notée  $R$  — définition possible car cette fonction dépend de  $R$  sans dépendre du choix de  $(A, B)$ .

**📌 Explication 📌** On impose ici à l'écriture :  $R = \frac{A}{B}$  d'être irréductible pour que le dénominateur de  $R$  ait le moins de racines possible, et donc pour que  $R$ , comme fonction, soit définie sur le plus grand ensemble possible. Par exemple, la fonction  $x \mapsto \frac{x^3 + x + 1}{x - 1}$  est définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$  mais la fonction  $x \mapsto \frac{x(x^3 + x + 1)}{x(x - 1)}$  l'est seulement sur  $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ .

**Définition (Zéro et pôle d'une fraction rationnelle, multiplicité)** Soit  $R = \frac{A}{B} \in \mathbb{K}(X)$  IRRÉDUCTIBLE.

- Soit  $\lambda \in \mathbb{K}$ . On dit que  $\lambda$  est un zéro de  $R$  si  $\lambda$  est une racine de  $A$ . La multiplicité de  $\lambda$  dans  $A$  est alors appelée la multiplicité de  $\lambda$  dans  $R$ .
- Soit  $\mu \in \mathbb{K}$ . On dit que  $\mu$  est un pôle de  $R$  si  $\mu$  est une racine de  $B$ . La multiplicité de  $\mu$  dans  $B$  est alors appelée la multiplicité de  $\mu$  dans  $R$ . Un pôle de multiplicité 1 (resp. 2) est aussi appelé un pôle simple (resp. double).

🦋 **Explication** 🦋 On impose ici à l'écriture :  $R = \frac{A}{B}$  d'être irréductible pour qu'il ne soit pas possible de confondre les zéros et les pôles de  $R$ . Quand  $A$  et  $B$  sont premiers entre eux, il est certain en effet qu'ils n'ont pas de racine commune.

**Exemple** Dans  $\mathbb{R}(X)$ , la fraction  $\frac{(X^2 + 1)(X - 2)^3(X + 1)X}{(X - 1)^2(X^2 + X + 1)}$  a pour zéros les réels  $-1, 0$  et  $2$  et pour pôle le seul réel  $1$ . La multiplicité de  $2$  est égale à  $3$ , celle de  $1$  est  $2$ , etc.

**Théorème (Partie entière)** Soit  $R = \frac{A}{B} \in \mathbb{K}(X)$ . Il existe un unique polynôme  $E \in \mathbb{K}[X]$  et une unique fraction rationnelle  $Q \in \mathbb{K}(X)$  pour lesquels :  $R = E + Q$  et  $\deg(Q) < 0$ . Le polynôme  $E$  est appelé la partie entière de  $R$  et n'est autre que le quotient de la division euclidienne de  $A$  par  $B$ .

🦋 **Explication** 🦋 En particulier, la partie entière de  $R$  est nulle si :  $\deg(R) < 0$ .

**Démonstration**

- **Existence** : Notons  $E$  le quotient de la division euclidienne de  $A$  par  $B$  et  $F$  son reste, et posons :  $Q = \frac{F}{B}$ . Alors d'une part :  $\deg(Q) = \deg(F) - \deg(B) < 0$ , mais d'autre part :  $R = \frac{A}{B} = \frac{EB + F}{B} = E + Q$ .
- **Unicité** : Soient :  $R = E + Q$  et  $R = \tilde{E} + \tilde{Q}$  deux décompositions de  $R$ . Le POLYNÔME  $E - \tilde{E}$  est de degré :  $\deg(\tilde{Q} - Q) \leq \max\{\deg(\tilde{Q}), \deg(Q)\} < 0$ , donc est nul, donc :  $E = \tilde{E}$ , puis :  $Q = \tilde{Q}$ . ■

**Exemple** La partie entière de la fraction  $\frac{X^4 - 3X^3 + 5X^2 - 1}{X^2 - 3X + 1}$  est  $X^2 + 4$ .

**Démonstration** Simple division euclidienne :  $X^4 - 3X^3 + 5X^2 - 1 = (X^2 - 3X + 1)(X^2 + 4) + 12X - 5$ .

### 3.2 DÉCOMPOSITION EN ÉLÉMENTS SIMPLES SUR $\mathbb{R}$ OU $\mathbb{C}$

**Théorème (Décomposition en éléments simples sur  $\mathbb{C}$ )** Soit  $R \in \mathbb{C}(X)$  de partie entière  $E$  et de pôles distincts  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  de multiplicités respectives  $m_1, \dots, m_r$ . Il existe une et une seule famille  $(a_{ik})_{\substack{1 \leq i \leq r \\ 1 \leq k \leq m_i}}$  de nombres complexes telle que :

On n'oublie pas la partie entière ! 
$$R = E + \underbrace{\sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^{m_i} \frac{a_{ik}}{(X - \lambda_i)^k}}_{\substack{\text{Partie polaire} \\ \text{associée au pôle } \lambda_i}}$$

Cette décomposition de  $R$  est appelée sa décomposition en éléments simples sur  $\mathbb{C}$ .

**Démonstration** Démonstration hors programme, mais il n'est pas inintéressant de comprendre l'EXISTENCE de la décomposition. Écrivons pour cela :  $R = \frac{A}{B}$  avec  $A \in \mathbb{C}[X]$  et :  $B = (X - \lambda_1)^{m_1} \dots (X - \lambda_r)^{m_r}$ .

- Les polynômes  $\frac{B}{(X - \lambda_1)^{m_1}}, \dots, \frac{B}{(X - \lambda_r)^{m_r}}$  sont premiers entre eux dans leur ensemble, donc pour certains  $U_1, \dots, U_r \in \mathbb{C}[X]$  :  $1 = \sum_{i=1}^r \frac{BU_i}{(X - \lambda_i)^{m_i}}$  — relation de Bézout.

- Multiplions par  $R$  :  $R = \frac{A}{B} = \sum_{i=1}^r \frac{AU_i}{(X - \lambda_i)^{m_i}}$ .
- Pour tout  $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$ , la division euclidienne de  $AU_i$  par  $(X - \lambda_i)^{m_i}$  s'écrit :  $AU_i = (X - \lambda_i)^{m_i} E_i + R_i$  pour certains  $E_i \in \mathbb{C}[X]$  et  $R_i \in \mathbb{C}_{m_i-1}[X]$ .
- Pour tout  $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$ , décomposons  $R_i$  dans la base  $\left( (X - \lambda_i)^{m_i-k} \right)_{1 \leq k \leq m_i}$  de  $\mathbb{C}_{m_i-1}[X]$ . Il existe des scalaires  $a_{i1}, \dots, a_{im_i} \in \mathbb{C}$  pour lesquels :  $R_i = \sum_{k=1}^{m_i} a_{ik} (X - \lambda_i)^{m_i-k}$ . Il nous reste à conclure :

$$R = \frac{A}{B} = \sum_{i=1}^r \frac{AU_i}{(X - \lambda_i)^{m_i}} = \sum_{i=1}^r \frac{(X - \lambda_i)^{m_i} E_i + R_i}{(X - \lambda_i)^{m_i}} = \underbrace{\sum_{i=1}^r E_i}_{\text{Polynôme}} + \underbrace{\sum_{i=1}^r \frac{R_i}{(X - \lambda_i)^{m_i}}}_{\text{Fraction de degré strictement négatif}} = E + \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^{m_i} \frac{a_{ik}}{(X - \lambda_i)^k} \quad \blacksquare$$

**Exemple** Dans les exemples suivants, on a pris soin de faire apparaître la partie entière même quand elle est nulle. Les fractions proposées étant en outre à coefficients RÉELS, elles sont égales à leur conjuguée, raison pour laquelle certains coefficients sont égaux à conjugaison près.

- Pour un certain  $a \in \mathbb{C}$  :  $\frac{X^3 + 4}{X^2 + 1} = X + \frac{a}{X - i} + \frac{\bar{a}}{X + i}$ .
- Pour certains  $a, b, c, d, e \in \mathbb{C}$  :  $\frac{X^4 + X + 1}{X(X - 5)^3(X^2 + 4)} = 0 + \frac{a}{X} + \frac{b}{(X - 5)^3} + \frac{c}{(X - 5)^2} + \frac{d}{X - 5} + \frac{e}{X - 2i} + \frac{\bar{e}}{X + 2i}$ .
- Pour certains  $a, b, c \in \mathbb{C}$  :  $\frac{1}{X(X^2 + X + 1)^2} = 0 + \frac{a}{X} + \frac{b}{(X - j)^2} + \frac{c}{X - j} + \frac{\bar{b}}{(X - \bar{j})^2} + \frac{\bar{c}}{X - \bar{j}}$ .

**Théorème (Décomposition en éléments simples sur  $\mathbb{R}$ )** Soit  $R = \frac{A}{B} \in \mathbb{R}(X)$  IRRÉDUCTIBLE de partie entière  $E$ . On introduit la factorisation irréductible de  $B$  :  $B = \beta \prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)^{m_i} \prod_{j=1}^s (X^2 + b_j X + c_j)^{n_j}$  (notations évidentes).

Il existe des familles uniques  $(a_{ik})_{\substack{1 \leq i \leq r \\ 1 \leq k \leq m_i}}$ ,  $(u_{jk})_{\substack{1 \leq j \leq s \\ 1 \leq k \leq n_j}}$  et  $(v_{jk})_{\substack{1 \leq j \leq s \\ 1 \leq k \leq n_j}}$  de réels telles que :

$$R = E + \underbrace{\sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^{m_i} \frac{a_{ik}}{(X - \lambda_i)^k}}_{\substack{\text{Partie polaire} \\ \text{associée au pôle } \lambda_i}} + \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^{n_j} \frac{u_{jk} X + v_{jk}}{(X^2 + b_j X + c_j)^k}.$$

On n'oublie pas la partie entière! ↗ Cette décomposition de  $R$  est appelée sa décomposition en éléments simples sur  $\mathbb{R}$ .

**Démonstration** Hors programme. ■

**Exemple** On reprend ci-dessous les exemples précédents, comparez !

- Pour certains  $a', b' \in \mathbb{R}$  :  $\frac{X^3 + 4}{X^2 + 1} = X + \frac{a'X + b'}{X^2 + 1}$ .
- Pour certains  $a', b', c', d', e', f' \in \mathbb{R}$  :  $\frac{X^4 + X + 1}{X(X - 5)^3(X^2 + 4)} = 0 + \frac{a'}{X} + \frac{b'}{(X - 5)^3} + \frac{c'}{(X - 5)^2} + \frac{d'}{X - 5} + \frac{e'X + f'}{X^2 + 4}$ .
- Pour certains  $a', b', c', d', e' \in \mathbb{R}$  :  $\frac{1}{X(X^2 + X + 1)^2} = 0 + \frac{a'}{X} + \frac{b'X + c'}{(X^2 + X + 1)^2} + \frac{d'X + e'}{X^2 + X + 1}$ .

 **En pratique**  À présent, pour le calcul des coefficients, nous avons quatre techniques en début d'année :

- multiplier par  $(X - \lambda)^m$  puis évaluer en  $\lambda$ ,
- multiplier par  $X$  puis passer à la limite en  $+\infty$ ,
- évaluer en un point,
- mettre au même dénominateur et identifier.

**Exemple**  $\frac{X^2 + 3X + 1}{(X-1)^2(X-2)} = -\frac{5}{(X-1)^2} - \frac{10}{X-1} + \frac{11}{X-2}.$

**Démonstration**

- **Forme de la décomposition en éléments simples sur  $\mathbb{R}$**  : La partie entière est nulle, donc pour certains  $a, b, c \in \mathbb{R}$  : 
$$\star \frac{X^2 + 3X + 1}{(X-1)^2(X-2)} = \frac{a}{(X-1)^2} + \frac{b}{X-1} + \frac{c}{X-2}.$$
- **Calcul de  $a$**  : On multiplie  $\star$  par  $(X-1)^2$  puis on évalue en 1 :  $a = -5.$
- **Calcul de  $c$**  : On multiplie  $\star$  par  $X-2$  puis on évalue en 2 :  $c = 11.$
- **Calcul de  $b$**  : On multiplie  $\star$  par  $X$  puis on passe à la limite en  $+\infty$  :  $b + c = 1,$  donc  $b = -10.$

Le théorème qui suit est spécifique aux **PÔLES SIMPLES** et souvent pratique quand on connaît la forme développée du dénominateur.

**Théorème (Partie polaire associée à un pôle simple)** Soient  $R = \frac{A}{B} \in \mathbb{C}(X)$  **IRRÉDUCTIBLE** et  $\lambda \in \mathbb{C}.$



Si  $\lambda$  est un **PÔLE SIMPLE** de  $R$  de partie polaire associée  $\frac{a}{X-\lambda}$  avec  $a \in \mathbb{C},$  alors :  $a = \frac{A(\lambda)}{B'(\lambda)}.$

**Démonstration** Comme  $\lambda$  est pôle simple de  $R$  :  $B = (X-\lambda)C$  pour un certain  $C \in \mathbb{K}[X]$  avec :  $C(\lambda) \neq 0$  et la décomposition en éléments simples de  $R$  sur  $\mathbb{C}$  s'écrit :  $R = \frac{a}{X-\lambda} + Q$  pour une certaine fraction  $Q \in \mathbb{C}(X)$  n'admettant pas  $\lambda$  pour pôle. Aussitôt :  $\frac{A}{C} = (X-\lambda)R = a + (X-\lambda)Q,$  donc en  $\lambda$  :  $a = \frac{A(\lambda)}{C(\lambda)},$  mais par ailleurs :  $B' = C + (X-\lambda)C'$  donc :  $B'(\lambda) = C(\lambda),$  donc en effet :  $a = \frac{A(\lambda)}{C(\lambda)} = \frac{A(\lambda)}{B'(\lambda)}. \blacksquare$

**Exemple** Pour tout  $n \in \mathbb{N}^* :$   $\frac{1}{X^n - 1} = \frac{1}{n} \sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \frac{\omega}{X - \omega}.$

**Démonstration** Les pôles de  $\frac{1}{X^n - 1}$  sont les racines  $n^{\text{èmes}}$  de l'unité et sont tous simples. La partie entière étant par ailleurs nulle :  $\frac{1}{X^n - 1} = \sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \frac{a_\omega}{X - \omega}$  pour une certaine famille  $(a_\omega)_{\omega \in \mathbb{U}_n} \in \mathbb{C}^n.$

Soit  $\omega \in \mathbb{U}_n$  fixé. La technique de multiplication/évaluation serait ici pénible à mettre en œuvre — essayez pour comprendre — nous allons nous en sortir grâce au théorème précédent. Comme :  $\frac{1}{X^n - 1} = \frac{A}{B}$  avec :  $A = 1$  et  $B = X^n - 1$  et comme  $\omega$  est **PÔLE SIMPLE** :  $a_\omega = \frac{A(\omega)}{B'(\omega)} = \frac{1}{n\omega^{n-1}} \stackrel{\omega^n=1}{=} \frac{1}{n\omega^{-1}} = \frac{\omega}{n}.$

 **En pratique**  Quand les pôles **NON RÉELS** d'une fraction **RÉELLE** sont **SIMPLES,** on peut obtenir la décomposition en éléments simples sur  $\mathbb{R}$  facilement à partir de la décomposition en éléments simples sur  $\mathbb{C}$  par simple regroupement des parties polaires conjuguées.

**Exemple**  $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t^5 dt}{t^4 - 1} = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} \ln \frac{3}{5}.$

**Démonstration**

- **Décomposition en éléments simples sur  $\mathbb{C}$**  : La partie entière est nulle, donc pour certains  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$  :

$$\star \frac{X^5}{X^4 - 1} = \frac{X^5}{(X-1)(X+1)(X-i)(X+i)} = X + \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X+1} + \frac{c}{X-i} + \frac{\bar{c}}{X+i},$$

mais les pôles 1, -1 et  $i$  étant **SIMPLES** :

$$a = \frac{X^5}{(X^4 - 1)'(1)} = \frac{1}{4}, \quad b = \frac{X^5}{(X^4 - 1)'(-1)} = \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad c = \frac{X^5}{(X^4 - 1)'(i)} = -\frac{1}{4}.$$

- **Décomposition en éléments simples sur  $\mathbb{R}$**  : On regroupe !

$$\frac{X^5}{X^4-1} = X + \frac{1}{4} \left( \frac{1}{X-1} + \frac{1}{X+1} - \frac{1}{X-i} - \frac{1}{X+i} \right) = X + \frac{1}{4} \left( \frac{1}{X-1} + \frac{1}{X+1} - \frac{2X}{X^2+1} \right).$$

- **Calcul de l'intégrale** :

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t^5 dt}{t^4-1} = \left[ \frac{t^2}{2} + \frac{1}{4} (\ln(1-t) + \ln(t+1) - \ln(t^2+1)) \right]_{t=0}^{t=\frac{1}{2}} = \left[ \frac{t^2}{2} + \frac{1}{4} \ln \frac{1-t^2}{1+t^2} \right]_{t=0}^{t=\frac{1}{2}} = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} \ln \frac{3}{5}.$$

**Exemple** Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\frac{1}{X^{2n}-1}$  a pour décomposition en éléments simples sur  $\mathbb{R}$  :

$$\frac{1}{X^{2n}-1} = \frac{1}{2n(X-1)} - \frac{1}{2n(X+1)} + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{X \cos \frac{k\pi}{n} - 1}{X^2 - 2X \cos \frac{k\pi}{n} + 1}.$$

**Démonstration** Nous avons déjà calculé la décomposition en éléments simples sur  $\mathbb{C}$ , elle admet  $-1$  et  $1$  pour seuls pôles réels, les autres peuvent être regroupés par paires de conjugués.

$$\begin{aligned} \frac{1}{X^{2n}-1} &= \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{e^{\frac{2ik\pi}{2n}}}{X - e^{\frac{2ik\pi}{2n}}} = \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{e^{\frac{ik\pi}{n}}}{X - e^{\frac{ik\pi}{n}}} = \frac{1}{2n} \left( \frac{1}{X-1} - \frac{1}{X+1} + \sum_{k=1}^{n-1} \left( \frac{e^{\frac{ik\pi}{n}}}{X - e^{\frac{ik\pi}{n}}} + \frac{e^{-\frac{ik\pi}{n}}}{X - e^{-\frac{ik\pi}{n}}} \right) \right) \\ &= \frac{1}{2n(X-1)} - \frac{1}{2n(X+1)} + \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{e^{\frac{ik\pi}{n}} (X - e^{-\frac{ik\pi}{n}}) + e^{-\frac{ik\pi}{n}} (X - e^{\frac{ik\pi}{n}})}{(X - e^{\frac{ik\pi}{n}})(X - e^{-\frac{ik\pi}{n}})} \\ &= \frac{1}{2n(X-1)} - \frac{1}{2n(X+1)} + \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2X \cos \frac{k\pi}{n} - 2}{X^2 - 2X \cos \frac{k\pi}{n} + 1} = \frac{1}{2n(X-1)} - \frac{1}{2n(X+1)} + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{X \cos \frac{k\pi}{n} - 1}{X^2 - 2X \cos \frac{k\pi}{n} + 1}. \end{aligned}$$