Calculs de primitives et d'intégrales

Ce chapitre vise à renforcer votre pratique du calcul intégral au moyen de révisions ciblées et grâce à deux nouveautés, l'intégration par parties et le changement de variable. Le point de vue adopté n'est pas théorique. Nous définirons proprement la notion d'intégrale et nous démontrerons le théorème fondamental du calcul intégral sur lequel ce chapitre repose au chapitre « Intégration sur un segment » en fin d'année.

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ est l'un des ensembles $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et I et J sont des intervalles.

1 Calculs simples de primitives

Définition (Primitive) Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction. On dit qu'une fonction $F : I \longrightarrow \mathbb{K}$ est UNE *primitive de f sur I* si F est dérivable sur I de dérivée f.

Exemple La fonction $x \longmapsto \dfrac{x^2}{2}$ est UNE primitive de $x \longmapsto x$ sur $\mathbb{R}$ et Arctan est UNE primitive de $x \longmapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ sur $\mathbb{R}$.

Théorème (« Unicité » des primitives à constante additive près) Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction. On suppose que f possède une primitive $F : I \longrightarrow \mathbb{K}$. Les primitives de f sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$ sont alors toutes les fonctions $F+\lambda$, λ décrivant $\mathbb{K}$.

✖ **Attention !** ✖ Il n'existe jamais une seule primitive, on ne dit jamais « la » primitive mais UNE primitive. Il peut ne pas en exister, mais s'il en existe, il en existe une infinité et elles sont toutes égales à constante additive près.

Démonstration Pour tout $\widetilde{F} \in \mathscr{D}(I,\mathbb{K})$: $\widetilde{F}$ est une primitive de $f \iff \widetilde{F}' = f \iff \widetilde{F}' = F'$

$$\iff \left(\widetilde{F}-F\right)' = 0 \iff \widetilde{F}-F \text{ est constante} \iff \exists\, \lambda \in \mathbb{K}/\quad \widetilde{F} = F+\lambda.$$ ■

✖ **Attention !** ✖ Les fonctions que l'on manipule couramment sont un empilement de fonctions usuelles liées entre elles par des additions, des multiplications, des passages à l'inverse et des compositions. Vous savez toutes les dériver car vous savez dériver les fonctions usuelles et disposez des formules de dérivation d'une somme, d'un produit, d'un inverse et d'une composée.

La primitivation des fonctions est autrement plus difficile :

— vous savez primitiver la fonction $x \longmapsto x$, mais pour primitiver son inverse $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$, il a fallu qu'on vous introduise une nouvelle fonction usuelle, la fonction logarithme,

— vous savez primitiver la fonction $x \longmapsto 1+x^2$, mais pour primitiver son inverse $x \longmapsto \dfrac{1}{1+x^2}$, il a fallu qu'on vous introduise une nouvelle fonction usuelle, la fonction arctangente.

On ne peut pas dire pourtant que les fonctions $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ et $x \longmapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ soient compliquées ! Le problème de la primitivation, c'est qu'on ne peut pas primitiver explicitement toutes les fonctions qu'on utilise couramment. On peut montrer — mais c'est difficile — que les primitives d'une fonction simple comme $x \longmapsto e^{-x^2}$ ne peuvent en aucune manière être écrites explicitement comme un empilement de fonctions usuelles — à moins bien sûr de considérer une telle primitive comme nouvelle fonction usuelle ! On retiendra notamment de ces remarques la mise en garde suivante :

En général, même quand on sait primitiver deux fonctions,
on NE sait PAS primitiver leur PRODUIT, leur QUOTIENT, leur COMPOSÉE.

✎ **En pratique** ✎ La mise en garde précédente ne signifie heureusement pas qu'on ne sait rien faire. En particulier, toute fonction de la forme $f' \times g' \circ f$ admet $g \circ f$ pour primitive et on attend de vous que vous sachiez repérer une telle forme. Mentionnons rapidement quelques cas très courants :

$u'e^u$ se primitive en e^u, $\frac{u'}{u}$ en $\ln|u|$, $u'u^\alpha$ ($\alpha \neq -1$) en $\frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$, $u' \cos u$ en $\sin u$, $\frac{u'}{1+u^2}$ en Arctan u, etc.

Si F est une primitive de f, alors pour tout $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$, $x \longmapsto \frac{F(ax+b)}{a}$ est une primitive de $x \longmapsto f(ax+b)$.

Exemple La fonction $x \longmapsto \frac{\sin x}{5 - 3\cos x}$ admet $x \longmapsto \frac{1}{3}\ln\big(5 - 3\cos x\big)$ pour primitive sur $\mathbb{R}$, la fonction $x \longmapsto \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$ admet $x \longmapsto 2\,e^{\sqrt{x}}$ pour primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ et la fonction $x \longmapsto \frac{1}{4x^2+1}$ admet $x \longmapsto \frac{1}{2}\,\mathrm{Arctan}(2x)$ pour primitive sur $\mathbb{R}$.

✎ **En pratique** ✎ Le programme exige que vous sachiez primitiver les fonctions de la forme $x \longmapsto \frac{1}{ax^2+bx+c}$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ et $b^2 - 4ac < 0$ — discriminant négatif, le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. C'est très simple, on écrit « ax^2+bx+c » sous **FORME CANONIQUE**, on fait apparaître la dérivée d'arctangente et enfin on primitive. Il est ici assez utile de savoir que :

Pour tout $a > 0$, $x \longmapsto \frac{1}{a}\,\mathrm{Arctan}\,\frac{x}{a}$ est une primitive de $x \longmapsto \frac{1}{x^2+a^2}$.

Exemple La fonction $x \longmapsto \frac{1}{3x^2-x+1}$ admet $x \longmapsto \frac{2}{\sqrt{11}}\,\mathrm{Arctan}\,\frac{6x-1}{\sqrt{11}}$ pour primitive sur $\mathbb{R}$.

Démonstration Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\frac{1}{3x^2-x+1} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{x^2 - \frac{x}{3} + \frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{\left(x - \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{11}{36}} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{\left(x - \frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{11}}{6}\right)^2}$,

donc $x \longmapsto \frac{1}{3x^2-x+1}$ admet pour primitive $x \longmapsto \frac{1}{3} \times \frac{6}{\sqrt{11}}\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{6}{\sqrt{11}}\left(x - \frac{1}{6}\right)\right) = \frac{2}{\sqrt{11}}\,\mathrm{Arctan}\,\frac{6x-1}{\sqrt{11}}$.

✎ **En pratique** ✎ On a souvent besoin de primitiver les fonctions de la forme $x \longmapsto e^{ax}\cos(bx)$ et $x \longmapsto e^{ax}\sin(bx)$ avec $a, b \in \mathbb{R}^*$. C'est très simple. Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $e^{ax}\cos(bx) = \mathrm{Re}\left(e^{(a+ib)x}\right)$. Or $x \longmapsto e^{(a+ib)x}$ admet $x \longmapsto \frac{e^{(a+ib)x}}{a+ib}$ pour primitive, donc $x \longmapsto e^{ax}\cos(bx)$ admet pour primitive :

$$x \longmapsto \mathrm{Re}\left(\frac{e^{(a+ib)x}}{a+ib}\right) = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\,\mathrm{Re}\Big(\big(\cos(bx) + i\sin(bx)\big) \times (a - ib)\Big) = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\big(a\cos(bx) + b\sin(bx)\big).$$

✎ **En pratique** ✎ Autre technique bien utile, la **LINÉARISATION**. Grâce à elle, nous savons calculer toutes les primitives de fonctions telles que $x \longmapsto \sin^2 x \cos^3(4x)$ — produits de sinus et de cosinus.

✎ **En pratique** ✎ Pour finir, on primitive les fractions rationnelles en primitivant leur **DÉCOMPOSITION EN ÉLÉMENTS SIMPLES**. Nous nous contenterons de calculs simples à ce stade, conformes à l'esprit du petit chapitre « Introduction à la décomposition en éléments simples ».

Exemple La fonction $x \longmapsto \frac{1}{x\left(x^2+1\right)}$ admet $x \longmapsto \ln\frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}}$ pour primitive sur $\mathbb{R}^*$.

Démonstration

- **Forme de la décomposition en éléments simples :** La fraction $\frac{1}{X\left(X^2+1\right)}$ a une partie entière nulle, donc pour certains $a, b, c \in \mathbb{R}$: $\bigstar$ $\frac{1}{X\left(X^2+1\right)} = \frac{a}{X} + \frac{bX+c}{X^2+1}$.
- **Calcul de a :** On multiplie $\bigstar$ par X puis on évalue en 0 : $a = 1$.
- **Calcul de b :** On multiplie $\bigstar$ par X, puis on évalue en un réel x qu'on fait tendre vers $+\infty$: $0 = a + b$, donc : $b = -1$.
- **Calcul de c :** On évalue $\bigstar$ en 1 : $\frac{1}{2} = a + \frac{b+c}{2}$, donc : $c = 0$.

- **Primitivation :** Nous venons d'établir que : $\dfrac{1}{X\left(X^2+1\right)}=\dfrac{1}{X}-\dfrac{X}{X^2+1}$. La fonction $x\longmapsto\dfrac{1}{x\left(x^2+1\right)}$ admet ainsi comme voulu $x\longmapsto \ln|x|-\dfrac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)=\ln\dfrac{|x|}{\sqrt{x^2+1}}$ pour primitive sur $\mathbb{R}^*$.

2 Lien entre les notions de primitive et d'intégrale

Définition (Fonction complexe continue) Soit $f:I\longrightarrow\mathbb{C}$ une fonction. On dit que f est *continue sur I* si $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ le sont.

L'ensemble des fonctions complexes continues sur I est noté $\mathscr{C}(I,\mathbb{C})$.

L'intégrale d'une fonction continue vous a été définie en Terminale comme une aire **ALGÉBRIQUE** sous la courbe — ce qui veut dire que les portions de la courbe situées **SOUS** l'axe des abscisses contribuent négativement au calcul de l'aire. Cette définition est totalement bancale car nous sommes au fond bien incapables de définir la notion d'aire, mais nous nous contenterons de cette approche pour le moment. L'intégrale sera définie proprement plus tard au chapitre « Intégration sur un segment ».

Définition (Intégrale sur un segment d'une fonction complexe continue) Soient $f\in\mathscr{C}(I,\mathbb{C})$ et $a,b\in I$. On appelle *intégrale de f de a à b* le nombre complexe $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t=\int_a^b \mathrm{Re}(f)(t)\,\mathrm{d}t+\mathrm{i}\int_a^b \mathrm{Im}(f)(t)\,\mathrm{d}t$.

✖ **Attention !** ✖ Une intégrale de fonction complexe ne peut pas être interprétée comme une aire algébrique, c'est un nombre complexe !

Théorème (Propriétés de l'intégrale d'une fonction continue) Soient $f,g\in\mathscr{C}(I,\mathbb{C})$ et $a,b,c\in I$.

- **Linéarité :** Pour tous $\lambda,\mu\in\mathbb{C}$: $\displaystyle\int_a^b\big(\lambda f(t)+\mu g(t)\big)\,\mathrm{d}t=\lambda\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t+\mu\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.
- **Relation de Chasles :** $\displaystyle\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t=\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t+\int_b^c f(t)\,\mathrm{d}t$.
- **Inégalité triangulaire :** Si $a\leqslant b$: $\displaystyle\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right|\leqslant\int_a^b \big|f(t)\big|\,\mathrm{d}t$.

Les trois propriétés qui suivent, parce qu'elles cachent l'utilisation d'inégalités, n'ont de sens que pour des fonctions **RÉELLES**.

Théorème (Propriétés de l'intégrale d'une fonction réelle continue) Soient $f,g\in\mathscr{C}(I,\mathbb{R})$ et $a,b\in I$.

- **Positivité :** Si $f\geqslant 0$ et si $a\leqslant b$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\geqslant 0$.
- **Positivité stricte :** Si f est strictement positive sauf éventuellement en un nombre fini de points et si $a<b$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t>0$.
- **Croissance :** Si $f\leqslant g$ et $a\leqslant b$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\leqslant\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.

Théorème **(Théorème fondamental du calcul intégral)** Soient $f \in \mathscr{C}(I,\mathbb{C})$ et $a,b \in I$.

(i) La fonction $x \longmapsto \int_a^x f(t)\,dt$ est une primitive de f sur I.

Pour tout $A \in \mathbb{C}$, il existe une et une seule primitive de f sur I de valeur A en a, la fonction $x \longmapsto A + \int_a^x f(t)\,dt$.

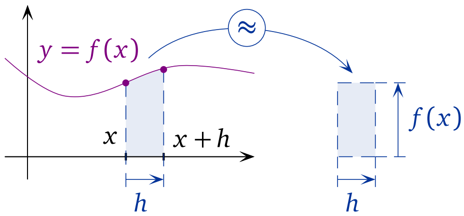
(ii) Pour toute primitive F de f : $\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$. On note $[F]_a^b$ ou $\big[F(x)\big]_{x=a}^{x=b}$ cette quantité $F(b)-F(a)$.

Démonstration L'assertion (ii) découle de l'assertion (i). La fonction F est une primitive de f qui vaut $F(a)$ en a et c'est la seule, donc d'après (i), $F(x) = F(a) + \int_a^x f$ pour tout $x \in I$. Il reste à évaluer en b. ■

Explication

- L'assertion (i) est un théorème d'**EXISTENCE** de primitives pour les fonctions **CONTINUES**.
- Fondamental, ce théorème l'est parce qu'il établit un lien entre des notions apparemment totalement étrangères — la notion d'aire/intégrale et la notion de primitive, liée à la dérivation. Quelle intuition cela exprime-t-il ?

  Supposons f réelle et notons F la fonction $x \longmapsto \int_a^x f(t)\,dt$. Ci-contre, l'aire algébrique colorée à gauche vaut : $\int_x^{x+h} f(t)\,dt = F(x+h) - F(x)$. Or si h est tout petit, sachant que f est **CONTINUE** en x, on peut considérer que f est approximativement égale à $f(x)$ sur tout le segment $[x, x+h]$, et donc on peut approximer l'aire colorée à gauche par l'aire colorée à droite, qui vaut $hf(x)$ selon le principe « base × hauteur ».



  Conclusion : $F(x+h) - F(x) \approx hf(x)$ pour h tout petit, ou encore : $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(x)$. Par définition du nombre dérivé, on comprend mieux ainsi pourquoi F est dérivable de dérivée f.

Exemple $\int_0^{2\pi} \sin t\,dt = \big[-\cos\big]_0^{2\pi} = 0$ et $\int_0^{2\pi} |\sin t|\,dt = \int_0^{\pi} \sin t\,dt - \int_{\pi}^{2\pi} \sin t\,dt = \big[-\cos\big]_0^{\pi} - \big[-\cos\big]_{\pi}^{2\pi} = 4$.

Exemple Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+$: $\int_0^1 x^\alpha\,dx = \left[\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]_{x=0}^{x=1} = \dfrac{1}{\alpha+1}$. Intégrale très courante, à connaître **PAR CŒUR** !

✖ **ATTENTION !** ✖ On rencontre parfois dans les livres de mystérieuses intégrales sans bornes — par exemple :

$$\int \big(t^2+2t\big)\,dt = \frac{t^3}{3} + t^2, \qquad \int \frac{dx}{x} = \ln x, \qquad \int \sin\theta\,d\theta = -\cos\theta \qquad \text{ou} \qquad \int 2u\cos\big(u^2\big)\,du = \sin\big(u^2\big).$$

Cette notation sans bornes est utilisée pour son efficacité calculatoire comme nous allons le voir, mais elle n'a **AUCUN SENS À PROPREMENT PARLER** puisqu'on primitive toujours à constante additive près. Je répète et j'insiste, cette notation est bien commode mais **NE DÉSIGNE AUCUN OBJET MATHÉMATIQUE**.

Exemple La fonction $x \longmapsto e^{-x}\sin x$ admet $x \longmapsto -\dfrac{e^{-x}}{2}\big(\sin x + \cos x\big)$ pour primitive sur $\mathbb{R}$.

Démonstration
$$\int e^{-x}\sin x\,dx = \int \mathrm{Im}\Big(e^{(-1+i)x}\Big)\,dx = \mathrm{Im}\left(\int e^{(-1+i)x}\,dx\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{e^{(-1+i)x}}{-1+i}\right) = -\frac{e^{-x}}{2}\,\mathrm{Im}\Big((1+i)e^{ix}\Big)$$
$$= -\frac{e^{-x}}{2}\big(\sin x + \cos x\big).$$

Exemple La fonction $x \overset{\varphi}{\longmapsto} \int_x^{x^2} e^{-t^2}\,dt$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $x \longmapsto 2xe^{-x^4} - e^{-x^2}$.

Démonstration La fonction $t \longmapsto e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc $x \overset{F}{\longmapsto} \int_0^x e^{-t^2}\,dt$ en est une primitive. Or pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\varphi(x) = F(x^2) - F(x)$, donc φ est dérivable de dérivée $x \longmapsto 2xF'(x^2) - F'(x) = 2xe^{-x^4} - e^{-x^2}$.

3 Intégration par parties

Définition (Fonction de classe $\mathscr{C}^1$) Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction. On dit que f est *de classe $\mathscr{C}^1$ sur I* si f est dérivable sur I et si f' est continue sur I.

L'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathscr{C}^1(I,\mathbb{K})$.

✖ **Attention !** ✖ Ne confondez pas « dérivable à dérivée continue », i.e. « de classe $\mathscr{C}^1$ », et « dérivable ET continue ». Comme la dérivabilité implique la continuité, « dérivable ET continue » est une maladresse que vous me ferez le plaisir d'éviter !

Exemple Toute primitive d'une fonction continue est de classe $\mathscr{C}^1$ puisque sa dérivée, justement, est continue.

Théorème (Intégration par parties) Soient $u, v \in \mathscr{C}^1(I,\mathbb{C})$ et $a, b \in I$.

$$\int_a^b u'(t)v(t)\,dt = \big[uv\big]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\,dt.$$

Démonstration Comme u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$, les fonctions $(uv)'$, $u'v$ et uv' sont continues, donc d'après le théorème fondamental du calcul intégral et par linéarité de l'intégrale :

$$\big[uv\big]_a^b = \int_a^b (uv)'(t)\,dt = \int_a^b \Big(u'(t)v(t) + u(t)v'(t)\Big)\,dt = \int_a^b u'(t)v(t)\,dt + \int_a^b u(t)v'(t)\,dt. \qquad \blacksquare$$

Exemple $$\int_0^\pi t\cos t\,dt = \int_0^\pi \overbrace{\cos t}^{u'(t)} \times \overbrace{t}^{v(t)}\,dt \overset{\text{IPP}}{=} \big[t\sin t\big]_{t=0}^{t=\pi} - \int_0^\pi \sin t\,dt = -\int_0^\pi \sin t\,dt = -\big[-\cos t\big]_{t=0}^{t=\pi} = -2.$$

Exemple $$\int_0^1 t^3e^{t^2}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^1 \overbrace{2te^{t^2}}^{u'(t)} \times \overbrace{t^2}^{v(t)}\,dt \overset{\text{IPP}}{=} \frac{1}{2}\left[t^2e^{t^2}\right]_{t=0}^{t=1} - \frac{1}{2}\int_0^1 2te^{t^2}\,dt = \frac{e}{2} - \frac{1}{2}\left[e^{t^2}\right]_{t=0}^{t=1} = \frac{1}{2}.$$

✎ **En pratique** ✎ On peut aussi pratiquer des intégrations par parties sur des intégrales sans bornes pour calculer des primitives. La formule prend ici la forme suivante : $\int u'(t)v(t)\,dt = u(t)v(t) - \int u(t)v'(t)\,dt.$

Exemple La fonction logarithme admet $x \longmapsto x\ln x - x$ pour primitive sur $\mathbb{R}_+^*$.

Démonstration $$\int \ln x\,dx = \int \overbrace{1}^{u'(x)} \times \overbrace{\ln x}^{v(x)}\,dx \overset{\text{IPP}}{=} x\ln x - \int x \times \frac{1}{x}\,dx = x\ln x - \int dx = x\ln x - x.$$

Exemple La fonction $x \longmapsto \dfrac{\operatorname{Arctan} x}{x^2}$ admet $x \longmapsto \ln \dfrac{|x|}{\sqrt{x^2+1}} - \dfrac{\operatorname{Arctan} x}{x}$ pour primitive sur $\mathbb{R}^*$.

Démonstration
$$\int \frac{\operatorname{Arctan} x}{x^2}\,\mathrm{d}x = \int \overbrace{\frac{1}{x^2}}^{u'(x)} \times \overbrace{\operatorname{Arctan} x}^{v(x)}\,\mathrm{d}x \overset{\text{IPP}}{=} -\frac{\operatorname{Arctan} x}{x} - \int \left(-\frac{1}{x}\right) \times \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$$
$$= -\frac{\operatorname{Arctan} x}{x} + \int \frac{\mathrm{d}x}{x\left(x^2+1\right)} \underset{\text{précédent}}{\overset{\text{Un exemple}}{=}} \ln \frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{\operatorname{Arctan} x}{x}.$$

4 Changement de variable

Théorème (Changement de variable) Soient $\varphi \in \mathscr{C}^1(I,\mathbb{R})$, $f \in \mathscr{C}(J,\mathbb{C})$ et $a,b \in I$. On suppose φ à valeurs dans J.
$$\int_a^b f\big(\varphi(t)\big)\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Démonstration Continue, f possède une primitive F de classe $\mathscr{C}^1$, et comme φ est de classe $\mathscr{C}^1$, la fonction $(F \circ \varphi)' = f \circ \varphi \times \varphi'$ est continue. Du coup, d'après le théorème fondamental du calcul intégral :
$$\int_a^b f\big(\varphi(t)\big)\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \big[F \circ \varphi\big]_a^b = F\big(\varphi(b)\big) - F\big(\varphi(a)\big) = \big[F\big]_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x. \quad \blacksquare$$

✎ **En pratique** ✎ Pour retrouver vite la formule, mais sans rigueur :

— on part de $x = \varphi(t)$,
— ensuite on « dérive » : $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \varphi'(t)$, et donc $\mathrm{d}x = \varphi'(t)\,\mathrm{d}t$,
— ensuite on multiplie par $f(x) = f\big(\varphi(t)\big)$: $f(x)\,\mathrm{d}x = f\big(\varphi(t)\big)\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$,
— enfin on intègre — pendant que t varie de a à b, $x = \varphi(t)$ varie de $\varphi(a)$ à $\varphi(b)$.

Exemple Afin de comprendre la technique du changement de variable, nous allons effectuer successivement trois changements de variables dans l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^t}{1+t}\,\mathrm{d}t$. Ces changements de variables ne nous aideront pas à calculer ladite intégrale, mais nous n'arriverons pas à la calculer de toute façon.

Démonstration

- **Changement de variable $t = \ln u$:** On « dérive » : $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u} = \dfrac{1}{u}$, donc : $\mathrm{d}t = \dfrac{\mathrm{d}u}{u}$.

  Ensuite : $\dfrac{\mathrm{e}^t}{1+t}\,\mathrm{d}t = \dfrac{\mathrm{e}^{\ln u}}{1+\ln u} \times \dfrac{\mathrm{d}u}{u} = \dfrac{\mathrm{d}u}{1+\ln u}$.

  Enfin : $u = 1$ quand $t = 0$ et : $u = \mathrm{e}$ quand $t = 1$, donc : $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^t}{1+t}\,\mathrm{d}t = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}u}{1+\ln u}$.

- **Changement de variable $u = \dfrac{x}{\mathrm{e}}$:** On « dérive » : $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$, donc : $\mathrm{d}u = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}}$.

  Ensuite : $\dfrac{\mathrm{d}u}{1+\ln u} = \dfrac{\mathrm{d}u}{\ln(\mathrm{e}u)} = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}\ln x}$.

  Enfin : $x = \mathrm{e}$ quand $u = 1$ et : $x = \mathrm{e}^2$ quand $u = \mathrm{e}$, donc : $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}u}{1+\ln u} = \int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}\ln x}$.

- **Changement de variable $x = s^2$:** On « dérive » : $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = 2s$, donc : $\mathrm{d}x = 2s\,\mathrm{d}s$.

  Ensuite : $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}\ln x} = \dfrac{2s\,\mathrm{d}s}{\mathrm{e}\ln\left(s^2\right)} = \dfrac{s\,\mathrm{d}s}{\mathrm{e}\ln s}$.

  Enfin : $s = \sqrt{\mathrm{e}}$ quand $x = \mathrm{e}$ et : $s = \mathrm{e}$ quand $x = \mathrm{e}^2$, donc : $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}\ln x} = \int_{\sqrt{\mathrm{e}}}^{\mathrm{e}} \frac{s\,\mathrm{d}s}{\mathrm{e}\ln s}$.

Exemple $\displaystyle\int_1^3 \frac{\sqrt{x}}{x+1}\,\mathrm{d}x = 2\sqrt{3}-\frac{\pi}{6}-2.$

Démonstration Aucune formule de primitivation simple ne saute ici aux yeux et aucune intégration par parties naturelle ne paraît simplifier l'intégrale étudiée. Le changement de variable : $x=u^2$ paraît naturel à cause du numérateur « $\sqrt{x}$ ». On choisira par exemple u positif.

On part de : $x=u^2$, puis on « dérive » : $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u}=2u$, donc : $\mathrm{d}x = 2u\,\mathrm{d}u$.

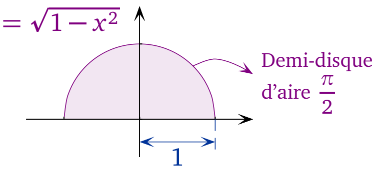
Ensuite : $\dfrac{\sqrt{x}}{x+1}\,\mathrm{d}x = \dfrac{\sqrt{u^2}}{u^2+1}\times 2u\,\mathrm{d}u = \dfrac{|u|}{u^2+1}\times 2u\,\mathrm{d}u \overset{u\geqslant 0}{=} \dfrac{2u^2}{u^2+1}\,\mathrm{d}u.$

Enfin : $u=1$ quand $x=1$ et : $u=\sqrt{3}$ quand $x=3$, donc : $\displaystyle\int_1^3 \frac{\sqrt{x}}{x+1}\,\mathrm{d}x = 2\int_1^{\sqrt{3}} \frac{u^2}{u^2+1}\,\mathrm{d}u.$

Cette nouvelle intégrale, par chance, est facile à calculer, c'est une intégrale de fraction rationnelle.

$$\int_1^3 \frac{\sqrt{x}}{x+1}\,\mathrm{d}x = 2\int_1^{\sqrt{3}}\left(1-\frac{1}{u^2+1}\right)\mathrm{d}u = 2\Big[u-\mathrm{Arctan}\,u\Big]_{u=1}^{u=\sqrt{3}} = 2\left(\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}\right)-2\left(1-\frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{3}-\frac{\pi}{6}-2.$$

Exemple $\displaystyle\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$



Démonstration On va ici effectuer le changement de variable : $x=\sin\theta$. On choisira par exemple θ dans $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ — intervalle sur lequel x décrit tout $[-1,1]$.

On « dérive » : $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}=\cos\theta$, donc : $\mathrm{d}x=\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$. Ensuite :

$$\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{1-\sin^2\theta}\times\cos\theta\,\mathrm{d}\theta = \sqrt{\cos^2\theta}\,\cos\theta\,\mathrm{d}\theta = |\cos\theta|\times\cos\theta\,\mathrm{d}\theta \overset{\theta\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]}{=} \cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta.$$

Enfin : $\theta=-\dfrac{\pi}{2}$ quand $x=-1$ et : $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ quand $x=1$, donc :

$$\int_{-1}^1\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1+\cos(2\theta)}{2}\right)\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{2}+\left[\frac{\sin(2\theta)}{4}\right]_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\theta=\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}.$$

✎ **En pratique** ✎ On peut aussi pratiquer des changements de variables sur des intégrales sans bornes pour calculer des primitives. **N'OUBLIEZ PAS DANS CE CAS DE REVENIR À LA VARIABLE DE DÉPART !**

Exemple La fonction $\theta\longmapsto\dfrac{1}{\sin\theta}$ admet $\theta\longmapsto\ln\left|\tan\dfrac{\theta}{2}\right|$ pour primitive sur $\mathbb{R}\setminus\pi\mathbb{Z}$.

Démonstration On va ici effectuer le changement de variable : $x=\cos\theta$ dans l'intégrale sans borne $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}\theta}{\sin\theta}$. Cette intégrale admet θ pour variable mais je vous conseille de privilégier la relation : $x=\cos\theta$ à la relation : $\theta=\mathrm{Arccos}\,x$, les calculs s'en trouveront facilités.

On part de : $x=\cos\theta$, puis on « dérive » : $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}=-\sin\theta$, donc : $\mathrm{d}x=-\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$.

Ensuite : $\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\sin\theta}=\dfrac{\sin\theta\,\mathrm{d}\theta}{\sin^2\theta}=\dfrac{\sin\theta\,\mathrm{d}\theta}{1-\cos^2\theta}=\dfrac{-\mathrm{d}x}{1-x^2}$, d'où l'égalité : $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}\theta}{\sin\theta}=\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2-1}.$

Or après décomposition en éléments simples : $\dfrac{1}{X^2-1}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{X-1}-\dfrac{1}{X+1}\right)$, donc :

$$\int\frac{\mathrm{d}\theta}{\sin\theta}=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{x-1}-\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{x+1}=\frac{\ln|x-1|}{2}-\frac{\ln|x+1|}{2}\underset{\text{donc } x\in[-1,1]}{\overset{x=\cos\theta}{=}}\frac{1}{2}\ln\frac{1-x}{1+x}\underset{\text{à }\theta}{\overset{\text{Retour}}{=}}\frac{1}{2}\ln\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$$

$$=\frac{1}{2}\ln\frac{2\sin^2\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}}=\ln\sqrt{\tan^2\frac{\theta}{2}}=\ln\left|\tan\frac{\theta}{2}\right|.$$

Exemple La fonction $x \longmapsto \cos(2\ln x)$ admet $x \longmapsto \frac{x}{5}\Big(2\sin(2\ln x)+\cos(2\ln x)\Big)$ pour primitive sur $\mathbb{R}_+^*$.

Démonstration On effectue ici le changement de variable : $x = e^t$ dans l'intégrale sans borne $\int \cos(2\ln x)\,dx$.

On « dérive » : $\frac{dx}{dt} = e^t$, donc : $dx = e^t\,dt$. Finalement :

$$\int \cos(2\ln x)\,dx = \int e^t\cos(2t)\,dt = \int \mathrm{Re}\left(e^{(1+2i)t}\right)dt = \mathrm{Re}\left(\int e^{(1+2i)t}\,dt\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{e^{(1+2i)t}}{1+2i}\right)$$

$$= \frac{e^t}{5}\,\mathrm{Re}\left(e^{2it}(1-2i)\right) = \frac{e^t}{5}\Big(2\sin(2t)+\cos(2t)\Big) \underset{\text{à } x}{\overset{\text{Retour}}{=}} \frac{x}{5}\Big(2\sin(2\ln x)+\cos(2\ln x)\Big).$$

5 Tableau récapitulatif des primitives usuelles

Fonction	Primitive
e^x	e^x
$\ln x$	$x\ln x - x$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$
$x^\alpha \quad (\alpha \neq -1)$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$

Fonction	Primitive
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$
$\tan x$	$-\ln\lvert\cos x\rvert$

Fonction	Primitive
$\mathrm{sh}\ x$	$\mathrm{ch}\ x$
$\mathrm{ch}\ x$	$\mathrm{sh}\ x$
$\mathrm{th}\ x$	$\ln \mathrm{ch}\ x$

Fonction	Primitive
$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathrm{Arctan}\ x$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\mathrm{Arcsin}\ x$