Compléments sur les réels

De fait, vous savez presque tout sur les réels — mais pas tout. Alors que vous manipulez des inégalités depuis assez longtemps, il y a tout de même une propriété de la relation $\leqslant$ sur $\mathbb{R}$ que vous ne connaissez pas — dite *propriété de la borne supérieure* — et qui revêt pour les mathématiques du programme de MPSI une importance fondamentale. Ce chapitre vise principalement à motiver et vous présenter cette propriété.

Dans tout ce chapitre, $A, B \dots$ sont des parties de $\mathbb{R}$.

1 Majorants/minorants, plus grand/petit élément

1.1 Majorants/minorants d'une partie de $\mathbb{R}$

Définition (Majorants/minorants d'une partie de $\mathbb{R}$)

- On dit que A est *majorée* s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall a \in A, \quad a \leqslant M$.
  Un tel réel M est appelé UN *majorant de* A. On dit aussi que A est *majorée par* M ou encore que M *majore* A.
- On dit que A est *minorée* s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall a \in A, \quad m \leqslant a$.
  Un tel réel m est appelé UN *minorant de* A. On dit aussi que A est *minorée par* m ou encore que m *minore* A.
- On dit que A est *bornée* si elle est à la fois majorée et minorée, i.e. si : $\exists\, K \in \mathbb{R}_+ / \quad \forall a \in A, \quad |a| \leqslant K$.

✖ **Attention !** ✖ On ne parle jamais « du » majorant d'une partie majorée de $\mathbb{R}$ mais bien toujours d'UN majorant car une telle partie en possède toujours plein. Si par exemple M en est un majorant, tout réel supérieur en est aussi un majorant.

Exemple L'intervalle $]-\infty, 1]$ est majoré par 1, MAIS AUSSI par $\sqrt{2}$, 10, e^{100}... Il n'est pas minoré en revanche.

1.2 Plus grand/petit élément d'une partie de $\mathbb{R}$

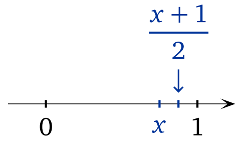
Définition (Plus grand/petit élément, maximum/minimum d'une partie de $\mathbb{R}$)

- On appelle *plus grand élément de* A ou *maximum de* A tout élément de A qui majore A.
- On appelle *plus petit élément de* A ou *minimum de* A tout élément de A qui minore A.

Définition-théorème (Unicité du plus grand/petit élément) SI A possède un plus grand (resp. petit) élément, celui-ci est unique. On peut donc l'appeler LE plus grand (resp. petit) élément de A et le noter $\max A$ (resp. $\min A$).

✖ **Attention !** ✖ Le plus grand/petit élément est unique... S'IL EXISTE !

Démonstration Soient $M, M' \in \mathbb{R}$. Si M et M' sont deux plus grands éléments de A, alors : $M' \leqslant M$ car M majore A et $M' \in A$, et de même : $M \leqslant M'$ car M' majore A et $M \in A$. Conclusion : $M = M'$. ■



Exemple L'intervalle $[0,1[$ admet 0 pour plus petit élément mais N'a PAS de plus grand élément.

Démonstration $0 \in [0,1[$ et 0 minore $[0,1[$, donc 0 est le plus petit élément de $[0,1[$.
Pour montrer que $[0,1[$ n'a pas de plus grand élément, il nous suffit de montrer qu'aucun élément de $[0,1[$ ne majore $[0,1[$. Or pour tout $x \in [0,1[$: $x < \frac{x+1}{2}$ et pourtant : $\frac{x+1}{2} \in [0,1[$.

Théorème (Deux propriétés de $\mathbb{N}$)

(i) Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ possède un plus petit élément.

(ii) Toute partie non vide majorée de $\mathbb{N}$ possède un plus grand élément.

Démonstration

(i) Soit A une partie non vide de $\mathbb{N}$. Supposons par l'absurde que A ne possède pas de plus petit élément. Nous allons montrer par récurrence que A est minorée par n pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pourtant, parce qu'elle est non vide, A contient au moins un élément a_0. Ainsi, A sera minorée par a_0+1. Nous pourrons donc affirmer en particulier que : $a_0 \geqslant a_0+1$ — contradiction.

Initialisation : A est minorée par 0 car toute partie de $\mathbb{N}$ l'est.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons A minorée par n. Comme par hypothèse A ne possède pas de plus petit élément, forcément : $n \notin A$, et du coup : $a > n$ pour tout $a \in A$. Mais ceci revient à dire, parce que nous travaillons avec des ENTIERS, que : $a \geqslant n+1$ pour tout $a \in A$. En d'autres termes, A est minorée par $n+1$.

(ii) Soit A une partie non vide majorée de $\mathbb{N}$. Par hypothèse, l'ensemble $\mathscr{M}$ des majorants ENTIERS de A est non vide, donc possède un plus petit élément m d'après (i).

- Supposons d'abord que $m = 0$. Alors : $a \leqslant m = 0$ pour tout $a \in A$, et comme $a \in \mathbb{N}$: $a = 0$. Puisque A est non vide, cela montre que : $A = \{0\}$, et donc A admet 0 pour plus grand élément.
- À présent, si $m \neq 0$, alors : $m-1 \in \mathbb{N}$. Comme $m = \min \mathscr{M}$, $m-1$ ne majore pas A, donc : $m-1 < a$ pour un certain $a \in A$. Or l'INÉGALITÉ D'ENTIERS : $m-1 < a \leqslant m$ est en fait une ÉGALITÉ : $m = a$, donc : $m \in A$. Ainsi m est un élément de A qui majore A, i.e. le plus grand élément de A. ■

2 Borne supérieure/inférieure d'une partie de $\mathbb{R}$

2.1 Définition

Nous avons vu que $[0,1[$ n'a pas de plus grand élément, pourtant sa borne 1 est quelque chose de cet ordre — mais quoi exactement ? Comment saisir conceptuellement ce 1 qui à la fois n'est pas dans $[0,1[$ et pourtant n'est pas n'importe qui ? Ce qui rend 1 si particulier pour $[0,1[$, c'est que 1 en est non seulement un majorant, mais surtout le meilleur, l'optimum, le plus petit possible. La définition suivante paraît du coup très naturelle.

Définition (Borne supérieure/inférieure d'une partie de $\mathbb{R}$)

- **S'IL EXISTE**, le plus petit majorant de A est appelé LA *borne supérieure de A* et noté $\sup A$.
- **S'IL EXISTE**, le plus grand minorant de A est appelé LA *borne inférieure de A* et noté $\inf A$.

Explication

- La différence essentielle entre plus grand élément et borne supérieure, c'est que la borne supérieure, quand elle existe, n'appartient pas forcément à l'ensemble considéré.
- La borne supérieure n'existe pas toujours, mais quand elle existe, elle est unique en tant que plus petit élément — raison pour laquelle on peut parler de LA borne supérieure.

Théorème (Lien entre les notions de plus grand/petit élément et borne supérieure/inférieure) Si A possède un plus grand (resp. petit) élément, alors A possède une borne supérieure (resp. inférieure) et :

$$\sup A = \max A \qquad (\text{resp. } \inf A = \min A).$$

Démonstration Nous devons montrer que l'ensemble $\mathcal{M}$ des majorants de A possède un plus petit élément — alors A possédera une borne supérieure — et qu'en fait ce plus petit élément est $\max A$ — on aura donc : $\sup A = \max A$. Deux choses à vérifier :

— que : $\max A \in \mathcal{M}$, or par définition, $\max A$ majore A,

— que $\max A$ minore $\mathcal{M}$, or par définition : $\max A \in A$. ■

Exemple Non majoré, l'intervalle $\mathbb{R}_+$ ne possède pas de borne supérieure. En revanche, parce que 0 en est le plus petit élément, 0 en est aussi la borne inférieure.

Exemple Nous avons vu que $[0,1[$ n'avait pas de plus grand élément, mais cela dit $[0,1[$ admet 1 pour borne supérieure.

Démonstration Nous savons que 1 majore $[0,1[$. Il reste à montrer qu'aucun réel strictement inférieur à 1 ne majore $[0,1[$. Soit $x<1$ un tel réel.

— Si $x<0$, alors comme $0\in[0,1[$, x ne majore pas $[0,1[$.

— Si $x\in[0,1[$, alors : $x<\dfrac{x+1}{2}$ et pourtant : $\dfrac{x+1}{2}\in[0,1[$, donc x ne majore pas $[0,1[$.

Dans les deux cas, x ne majore pas $[0,1[$.

Théorème (Opérations sur les bornes supérieures) On suppose que A et B possèdent chacune une borne supérieure.

(i) Si $A\subset B$, alors : $\sup A \leqslant \sup B$.

(ii) L'ensemble $A\cup B$ possède une borne supérieure et de plus : $\sup(A\cup B)=\max\big\{\sup A,\sup B\big\}$.

(iii) L'ensemble $A+B=\big\{a+b\big\}_{a\in A,b\in B}$ possède une borne supérieure et de plus : $\sup(A+B)=\sup A+\sup B$.

(iv) Pour tout $\lambda>0$, l'ensemble $\lambda A=\big\{\lambda a\big\}_{a\in A}$ possède une borne supérieure et de plus : $\sup(\lambda A)=\lambda\sup A$.

On dispose d'un résultat analogue pour les bornes inférieures.

Démonstration

(i) Pour tout $x\in A$: $x\in B$ donc : $x\leqslant\sup B$, donc $\sup B$ majore A, donc : $\sup A\leqslant\sup B$.

(ii) Pour tout $x\in A\cup B$, si $x\in A$ alors : $x\leqslant\sup A\leqslant\max\big\{\sup A,\sup B\big\}$, et de même, si $x\in B$ alors : $x\leqslant\sup B\leqslant\max\big\{\sup A,\sup B\big\}$, donc $\max\big\{\sup A,\sup B\big\}$ majore $A\cup B$.
Soit $s<\max\big\{\sup A,\sup B\big\}$. Alors : $s<\sup A$ ou $s<\sup B$, donc s ne majore pas A ou s ne majore pas B, donc il existe $x\in A\cup B$ tel que : $s<x$, ce qui prouve que s ne majore pas $A\cup B$.
Conclusion : $\max\big\{\sup A,\sup B\big\}$ est le plus petit majorant de $A\cup B$ — d'où le résultat.

(iii) Pour tout $x\in A+B$, disons : $x=a+b$ pour certains $a\in A$ et $b\in B$: $x=a+b\leqslant\sup A+\sup B$, donc $\sup A+\sup B$ majore $A+B$.
Soit $s<\sup A+\sup B$. Alors : $s-\sup B<\sup A$ donc $s-\sup B$ ne majore pas A, donc il existe $a\in A$ tel que : $s-\sup B<a$. Mais du coup : $s-a<\sup B$, donc $s-a$ ne majore pas B, donc il existe $b\in B$ tel que : $s-a<b$. Finalement : $s<a+b$ avec $a+b\in A+B$, donc s ne majore pas $A+B$.
Conclusion : $\sup A+\sup B$ est le plus petit majorant de $A+B$ — d'où le résultat.

(iv) Pour tout $x\in\lambda A$, disons : $x=\lambda a$ avec $a\in A$: $x=\lambda a\overset{\lambda>0}{\leqslant}\lambda\sup A$, donc $\lambda\sup A$ majore λA.
Soit $s<\lambda\sup A$. Alors : $\dfrac{s}{\lambda}<\sup A$ donc $\dfrac{s}{\lambda}$ ne majore pas A, donc il existe $a\in A$ tel que : $\dfrac{s}{\lambda}<a$, i.e. : $s<\lambda a$ avec $\lambda a\in\lambda A$, donc s ne majore pas λA.
Conclusion : $\lambda\sup A$ est le plus petit majorant de λA — d'où le résultat. ■

✎ **En pratique** ✎ Nous établirons au prochain chapitre « Limite d'une suite » une caractérisation de la borne supérieure/inférieure très simple d'utilisation en termes de suites.

2.2 Propriété de la borne supérieure/inférieure

- Le résultat qui suit est **une propriété essentielle de l'ensemble des réels**. Sa démonstration dépend de la façon dont on construit $\mathbb{R}$ à partir de $\mathbb{Q}$, donc ne nous intéresse pas car nous admettons l'existence des nombres réels. En un sens en tout cas, **toute l'analyse est dans ce théorème**. Directement ou non, c'est de lui que nous allons déduire tous les grands théorèmes d'analyse au programme : théorème de la limite monotone, théorème des suites adjacentes, théorème de Bolzano-Weiertstrass, théorème des valeurs intermédiaires, théorème des bornes atteintes, théorème de Heine, théorème de Rolle, théorème des accroissements finis et construction de l'intégrale.
- Le problème posé est simple : déterminer quelles parties de $\mathbb{R}$ possèdent une borne supérieure.

  Le cas de l'ensemble vide se traite à part : $\varnothing$ admet tout réel pour majorant, donc comme $\mathbb{R}$ n'est pas minoré, $\varnothing$ ne possède pas de borne supérieure.

  Ensuite, évidemment, si une partie non vide de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure, cette partie est aussi majorée — et réciproquement ? Toute partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ possède-t-elle une borne supérieure ? La réponse est **oui**, ce qui veut dire que le résultat suivant est **le meilleur qu'on pouvait espérer**.

Théorème (Propriété de la borne supérieure/inférieure)

- Toute partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure.
- Toute partie non vide minorée de $\mathbb{R}$ possède une borne inférieure.

✖ **Attention !** ✖ Généralement, en mathématiques, le mot « propriété » renvoie à **une** propriété parmi d'autres d'un objet. Quand nous parlerons de **la** propriété de la borne supérieure, il s'agira toujours du théorème fondamental qui précède.

✎ **En pratique** ✎ La propriété de la borne supérieure est un résultat d'**existence** mais ne donne aucun renseignement explicite sur la **valeur** de la borne en question. Pour cette raison, elle n'est utilisée que dans des contextes théoriques dans lesquels on ne peut pas connaître cette valeur à l'avance. Pour montrer par exemple que l'intervalle $[0,1[$ admet 1 pour borne supérieure, nous n'avons pas eu besoin d'invoquer la propriété de la borne supérieure car nous avions une intuition explicite.

2.3 Droite achevée $\overline{\mathbb{R}}$

La propriété de la borne supérieure, pourtant si puissante, présente tout de même un réel inconvénient. On aurait préféré l'énoncé suivant : « **Toute** partie de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure. » Que manque-t-il à $\mathbb{R}$ pour que ce résultat soit vrai ? Pourquoi $\mathbb{R}$ lui-même, par exemple, n'a-t-il pas de borne supérieure ? Réponse : parce qu'il n'a pas de majorant. Eh bien rajoutons-en !

Définition (Droite achevée $\overline{\mathbb{R}}$) On appelle *droite achevée* $\overline{\mathbb{R}}$ l'ensemble $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ dans lequel les symboles nouveaux $-\infty$ et $+\infty$ sont distincts et régis par les lois suivantes :

- **Prolongement de l'ordre :** Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $-\infty < x < +\infty$.
- **Prolongement de l'addition :** $x + (+\infty) = (+\infty) + x = +\infty$ et $x + (-\infty) = (-\infty) + x = -\infty$,

  et pour tout $x \in \mathbb{R}$: $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$ et $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$.
- **Prolongement de la multiplication :** $\dfrac{1}{+\infty} = \dfrac{1}{-\infty} = 0$ et pour tout $x \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{0\}$:

$$x \times (+\infty) = (+\infty) \times x = \begin{cases} +\infty & \text{si } x > 0 \\ -\infty & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad x \times (-\infty) = (-\infty) \times x = \begin{cases} -\infty & \text{si } x > 0 \\ +\infty & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

✖ **Attention !** ✖ Cette définition ne donne aucun sens aux expressions :

$$(+\infty) - (+\infty), \qquad (-\infty) - (-\infty), \qquad 0 \times (\pm\infty), \qquad (\pm\infty) \times 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}.$$

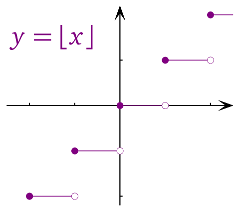
✌ **Explication** ✌ La remarque qui suit est hors programme, mais tout de même éclairante.

- Dans le nouveau monde $\overline{\mathbb{R}}$, rien ne nous empêche de définir comme nous l'avons fait dans $\mathbb{R}$ les notions de majorant/minorant, plus grand/petit élément et borne supérieure/inférieure. Il n'est pas trop dur de vérifier que tous les majorants/plus grands éléments/bornes supérieures que nous trouvions **DANS** $\mathbb{R}$ sont encore des majorants/plus grands éléments/bornes supérieures **DANS** $\overline{\mathbb{R}}$, mais certaines parties qui **N'**avaient **PAS** de majorant/plus grand élément/borne supérieure se trouvent maintenant en avoir. Par exemple :
  — L'intervalle $\mathbb{R}_+$ est majoré par $+\infty$ **DANS** $\overline{\mathbb{R}}$ et y admet même $+\infty$ pour borne supérieure — alors qu'il n'était pas majoré **DANS** $\mathbb{R}$.
  — L'ensemble vide admet tout élément de $\overline{\mathbb{R}}$ pour majorant **DANS** $\overline{\mathbb{R}}$, or $\overline{\mathbb{R}}$ admet $-\infty$ pour plus petit élément **DANS** $\overline{\mathbb{R}}$, donc $\varnothing$ admet $-\infty$ pour borne supérieure !
- Plus généralement, dans le nouveau monde $\overline{\mathbb{R}}$ — merci $\overline{\mathbb{R}}$! — la propriété de la borne supérieure s'énonce avec plus de pureté, elle a trouvé son chez-soi :

> **TOUTE** partie de $\overline{\mathbb{R}}$ possède une borne supérieure **DANS** $\overline{\mathbb{R}}$ — éventuellement $\pm\infty$, donc — qui coïncide avec sa borne supérieure **DANS** $\mathbb{R}$ lorsqu'il en existe une.

3 PARTIE ENTIÈRE

Définition-théorème (Partie entière)
Soit $x \in \mathbb{R}$. Il existe un unique **ENTIER** $n \in \mathbb{Z}$ pour lequel : $n \leqslant x < n+1$, appelé la *partie entière de* x et noté $\lfloor x \rfloor$. Cet entier $\lfloor x \rfloor$ est donc le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x.



L'ESSENTIEL EN RÉSUMÉ : $\boxed{x-1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1.}$

Exemple $\lfloor 11 \rfloor = 11$, $\lfloor 5{,}2 \rfloor = 5$, $\lfloor -4 \rfloor = -4$, **MAIS ATTENTION :** $\lfloor -7{,}3 \rfloor = -8$ (et non pas -7).

Démonstration L'existence de la partie entière paraît évidente mais elle découle en réalité de la propriété de la borne supérieure — ce que nous admettrons. ■

Exemple Nous aurons bientôt régulièrement recours aux raisonnements qui suivent, il faut donc bien les comprendre. Soient $\varepsilon > 0$ et $A > 0$ fixés. Le mot « rang » désigne ci-dessous uniquement des entiers naturels.

- À partir de quel rang est-il vrai que : $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$? Cette inégalité est vraie si et seulement si : $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$. Comme $\left\lfloor \dfrac{1}{\varepsilon} \right\rfloor$ est le plus grand entier inférieur ou égal à $\dfrac{1}{\varepsilon}$, l'inégalité : $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$ est vraie à partir du rang $\left\lfloor \dfrac{1}{\varepsilon} \right\rfloor \boxed{+1}$.
- À partir de quel rang est-il vrai que : $n^2 > A$? Cette inégalité est vraie si et seulement si : $n > \sqrt{A}$, donc à partir du rang $\left\lfloor \sqrt{A} \right\rfloor \boxed{+1}$.
- À partir de quel rang est-il vrai que : $\dfrac{1}{2^n} < \varepsilon$? Cette inégalité est vraie si et seulement si : $2^n > \dfrac{1}{\varepsilon}$, ou encore : $n > -\dfrac{\ln \varepsilon}{\ln 2}$, donc à partir du rang $\max\left\{0, \left\lfloor -\dfrac{\ln \varepsilon}{\ln 2} \right\rfloor \boxed{+1}\right\}$. Pourquoi ce « max » ? Parce que nous cherchons un entier naturel.

4 DENSITÉ D'UNE PARTIE DE $\mathbb{R}$

Définition (Partie dense dans $\mathbb{R}$) On dit que A est *dense dans* $\mathbb{R}$ si tout intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ contient un élément de A.

✌ **Explication** ✌ En clair, A est dense dans $\mathbb{R}$ si, entre deux réels distincts, on peut toujours trouver un élément de A. Intuitivement, une partie dense dans $\mathbb{R}$ est donc **UNE PARTIE QUI EST « PARTOUT » SANS ÊTRE FORCÉMENT TOUT.**

Théorème (Densité des rationnels et des irrationnels) $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.

✌ **Explication** ✌ En particulier, il y a toujours un rationnel entre deux irrationnels distincts et un irrationnel entre deux rationnels distincts. Les ensembles $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont enlacés l'un à l'autre de façon tout à fait fusionnelle, comme deux peignes imbriqués l'un dans l'autre.

Démonstration Soient $a, b \in \mathbb{R}$ pour lesquels : $a < b$. Nous voulons montrer que l'intervalle $]a, b[$ contient à la fois un rationnel et un irrationnel.

- **Rationnels :** On cherche $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ pour lesquels : $a < \frac{p}{q} < b$. Si l'on veut être sûr que l'intervalle $]a, b[$ contient un tel rationnel $\frac{p}{q}$, il est naturel d'exiger que sa longueur $b-a$ soit strictement supérieure à l'écart $\frac{1}{q}$ entre deux tels nombres. En d'autres termes, il est raisonnable d'exiger l'inégalité : $q > \frac{1}{b-a}$. Choisissons donc de poser : $q = \left\lfloor \frac{1}{b-a} \right\rfloor + 1$, de telle sorte que : $q \in \mathbb{N}^*$ et $1 < q(b-a)$. Posons ensuite : $p = \lfloor qa \rfloor + 1$. Aussitôt : $p \in \mathbb{Z}$ et $qa < p \leqslant qa + 1 < qa + q(b-a) = qb$, donc comme voulu : $a < \frac{p}{q} < b$.
- **Irrationnels :** D'après le point précédent, l'intervalle $\left]\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}\right[$ contient au moins un rationnel r et l'intervalle $\left]\frac{a}{\sqrt{2}}, r\right[$ en contient lui-même un r'. L'un au moins de ces deux rationnels est non nul, par exemple r. Aussitôt : $r\sqrt{2} \in]a, b[$. Or $r\sqrt{2}$ est irrationnel car s'il était rationnel, $\sqrt{2} = \frac{1}{r} \times r\sqrt{2}$ le serait aussi par produit — ce qui est faux. ■