Continuité

Les fonctions qu'on étudie en analyse sont généralement définies sur des intervalles ou des réunions d'intervalles comme $\mathbb{R}^*$ ou $[0,1[\cup[2,3]$, voire $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[+\pi\mathbb{Z}$. Dans tout ce chapitre, les lettres $D, E\ldots$ qui nous serviront d'ensembles de définition désigneront cependant des parties quelconques de $\mathbb{R}$. On notera par ailleurs $\mathbb{K}$ l'un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

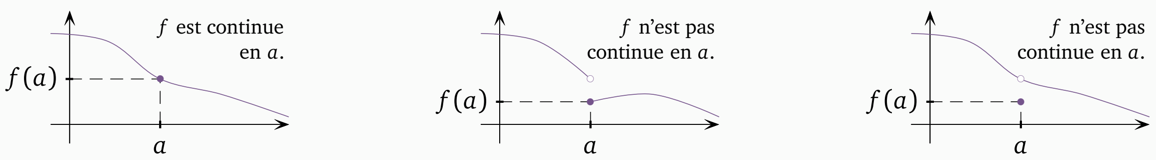
1 Définitions et premières propriétés

On traite dans cette partie le cas des fonctions complexes en même temps que celui des fonctions réelles, mais nos figures illustreront seulement le cas réel.

1.1 Définitions de la continuité

Définition (Continuité en un point ou sur une partie) Soient $f: D \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction et $a \in D$. On dit que f est *continue en a* si $\lim\limits_a f = f(a)$, i.e. si : $\quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists \alpha > 0, \quad \forall x \in D, \qquad |x-a| < \alpha \implies \big|f(x)-f(a)\big| < \varepsilon.$

Cela dit, f étant définie en a, cela revient en fait à exiger seulement que la limite $\lim\limits_a f$ **existe**.



L'ensemble des fonctions continues sur D et à valeurs dans $\mathbb{K}$, i.e. continues en tout point de D, est noté $\mathscr{C}(D,\mathbb{K})$.

Exemple La fonction valeur absolue $|\cdot|$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Démonstration Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrons que $|\cdot|$ est continue en a. Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\quad \big||x|-|a|\big| \leqslant |x-a|$ d'après l'inégalité triangulaire généralisée, donc pour $\alpha = \varepsilon$: $\quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad |x-a| < \alpha \implies \big||x|-|a|\big| < \varepsilon.$

Le résultat suivant est la version continue d'un résultat analogue sur les limites du chapitre « Limites d'une fonction ».

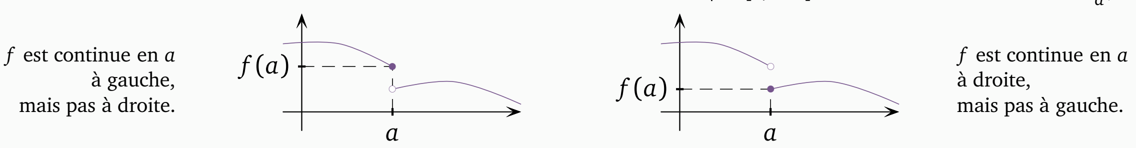
Théorème (Caractérisation de la continuité à partir des parties réelle et imaginaire) Soient $f: D \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction et $a \in D$.

f est continue en a (resp. sur D) si et seulement si $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ le sont.

Exemple La fonction $t \longmapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ est continue sur $\mathbb{R}$ car les fonctions cosinus et sinus le sont.

Définition (Continuité à gauche/à droite en un point) Soient $f: D \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction et $a \in D$.

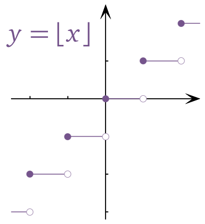
- **Continuité à gauche :** On dit que f est *continue à gauche en a* si $f|_{D\cap]-\infty,a]}$ est continue en a, i.e. si $\lim\limits_{a^-} f = f(a)$.
- **Continuité à droite :** On dit que f est *continue à droite en a* si $f|_{D\cap[a,+\infty[}$ est continue en a, i.e. si $\lim\limits_{a^+} f = f(a)$.



Le résultat suivant est la version continue d'un résultat analogue sur les limites du chapitre « Limites d'une fonction ».

Théorème (Caractérisation de la continuité à l'aide des continuités à gauche/à droite) Soient $f: D \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction et $a \in D$ un point au voisinage duquel f est définie à gauche et à droite.

f est continue en a si et seulement si f est continue à gauche et à droite en a.



Exemple La fonction partie entière $\lfloor \cdot \rfloor$ est continue en tout point non entier, mais seulement continue à droite en n pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Démonstration Soit $n \in \mathbb{Z}$. Pour tout $x \in [n, n+1[$: $\lfloor x \rfloor = n$, donc $\lim\limits_{x \to n^+} \lfloor x \rfloor = n = \lfloor n \rfloor$, donc $\lfloor \cdot \rfloor$ est continue à droite en n. Au contraire $\lfloor x \rfloor = n-1$ pour tout $x \in [n-1, n[$, donc $\lim\limits_{x \to n^-} \lfloor x \rfloor = n-1 \neq \lfloor n \rfloor = n$, donc f n'est pas continue à gauche en n.

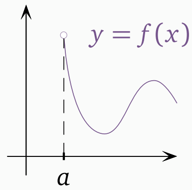
✖ **Attention !** Pour tout $x \in [0,1[$: $\lfloor x \rfloor = 0$ et la fonction $x \longmapsto 0$ est continue sur $[0,1[$, mais peut-on pour autant dire que la fonction $x \longmapsto \lfloor x \rfloor$ est continue sur $[0,1[$? Non ! Ces deux fonctions sont définies sur $\mathbb{R}$ tout entier et coïncident sur $[0,1[$, mais leur continuité en 0 dépend aussi de leur comportement au voisinage de 0 **À GAUCHE**, i.e. à l'extérieur de $[0,1[$. Alors que la restriction $\lfloor \cdot \rfloor_{|[0,1[}$ est bien continue sur $[0,1[$ tout entier, la fonction $\lfloor \cdot \rfloor$ ne l'est que sur $]0,1[$, elle **N'est PAS** continue en 0.

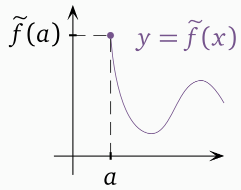
1.2 Prolongement par continuité en un point

Définition-théorème (Prolongement par continuité en un point) Soient $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ et $a \in \mathbb{R} \setminus D$ adhérent à D — f n'est donc pas définie en a.

On dit que f est *prolongeable par continuité en a* si $\lim\limits_{a} f$ existe et est **FINIE**. Le prolongement $\widetilde{f}$ de f à $D \sqcup \{a\}$ ainsi obtenu en posant $\widetilde{f}(a) = \lim\limits_{a} f$ est alors continu en a.

Les fonctions f et $\widetilde{f}$ sont distinctes en toute rigueur car elles n'ont pas le même ensemble de définition, mais on choisit généralement de noter encore f le prolongement $\widetilde{f}$ par souci de simplicité.





Démonstration Nous devons montrer que $\widetilde{f}$ est continue en a, i.e. que $\lim\limits_{a} \widetilde{f} = \widetilde{f}(a)$, ou encore que $\lim\limits_{a} f = \widetilde{f}(a)$ puisque $\widetilde{f}$ et f coïncident sur D. Ce résultat s'écrit ainsi :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \alpha > 0, \quad \forall x \in D, \qquad |x - a| < \alpha \implies \left|\widetilde{f}(x) - \widetilde{f}(a)\right| < \varepsilon \qquad \bigstar.$$

C'est presque le résultat mais pas tout à fait car $\widetilde{f}$ est définie en a. Or on peut évidemment remplacer D par $D \sqcup \{a\}$ dans $\bigstar$: $\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \alpha > 0, \quad \forall x \in D \sqcup \{a\}, \qquad |x - a| < \alpha \implies \left|\widetilde{f}(x) - \widetilde{f}(a)\right| < \varepsilon.$ ■

Exemple

- La fonction $x \longmapsto x \ln x$ n'est pas définie en 0 mais on peut la prolonger par continuité en ce point en lui donnant la valeur 0 en 0, car $\lim\limits_{x \to 0} x \ln x = 0$.
- La fonction $x \longmapsto \dfrac{\sin x}{x}$ n'est pas définie en 0, mais comme $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$, on peut la prolonger par continuité en ce point en lui donnant la valeur 1 en 0.
- Pour tout $\alpha > 0$: $x^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha \ln x} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$, donc en posant $0^\alpha = 0$, on prolonge la fonction $x \longmapsto x^\alpha$, a priori définie sur $\mathbb{R}_+^*$, en une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$ tout entier.

1.3 Opérations sur la continuité

Que ce soit en un point ou sur un intervalle, la somme et le produit de deux fonctions continues sont continus. Même chose pour l'inverse d'une fonction qui ne s'annule pas ainsi que pour la composée de deux fonctions composables. Ces résultats découlent immédiatement des résultats analogues que nous avons prouvés sur les limites de fonctions.

Exemple La fonction $x \longmapsto \left(\ln\left(x^2 + \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right)\right)^2$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^*$.

Démonstration Attention, pour la composition, il faut bien préciser les domaines manipulés !

- La fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ (à valeurs dans $\boxed{\mathbb{R}}$) et la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^x$ l'est sur $\boxed{\mathbb{R}}$, donc par composition $x \longmapsto \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$.
- La fonction $x \longmapsto x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc sur $\mathbb{R}^*$. Par somme, $x \longmapsto x^2 + \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$.

- La fonction $x \longmapsto x^2 + \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ à valeurs dans $\boxed{\mathbb{R}_+^*}$ et $x \longmapsto \ln x$ est continue sur $\boxed{\mathbb{R}_+^*}$, donc par composition $x \longmapsto \ln\left(x^2 + \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right)$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ (à valeurs dans $\boxed{\mathbb{R}}$).
- Enfin, la fonction $x \longmapsto x^2$ est continue sur $\boxed{\mathbb{R}}$. Le résultat découle donc d'une dernière composition.

1.4 Caractérisation séquentielle de la continuité

Le résultat suivant est la version continue d'un résultat analogue sur les limites du chapitre « Limites d'une fonction ».

Théorème (Caractérisation séquentielle de la continuité en un point) Soient $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction et $a \in D$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) f est continue en a.

(ii) Pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de limite a à valeurs dans D, la suite $\big(f(u_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite $f(a)$.

En résumé : Pour une fonction **continue** : $f\Big(\underbrace{\lim_{n\to+\infty} \ldots}_{\ldots\text{ si la limite existe.}}\Big) = \lim_{n\to+\infty} f(\ldots)$.

Ce théorème a déjà souvent été utilisé dans le contexte des suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$. **Si** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge** vers un réel ℓ et si f est **continue** en ℓ, alors $f(\ell) = \ell$.

Le résultat suivant est une application ultra-classique de la caractérisation séquentielle de la continuité et de la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.

Théorème (Endomorphismes continus du groupe $\mathbb{R}$) Les endomorphismes continus du groupe additif $\mathbb{R}$, i.e. les fonctions $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ pour lesquelles pour $f(x+y) = f(x)+f(y)$ tous $x, y \in \mathbb{R}$, sont exactement les fonctions linéaires $x \longmapsto \lambda x$, λ décrivant $\mathbb{R}$.

Démonstration Les fonctions linéaires répondent bien sûr au problème. Réciproquement, soit f un endomorphisme continu de $\mathbb{R}$. Alors pour tous $n \in \mathbb{Z}$ et $x \in \mathbb{R}$: $\quad f(nx) = nf(x) \quad \bigstar$.

- Posons $\lambda = f(1)$ et montrons que $f_{|\mathbb{Q}} = \lambda\,\mathrm{Id}_{\mathbb{Q}}$. Or pour tout $r = \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$:
$$qf(r) \overset{\bigstar}{=} f(qr) = f(p) \overset{\bigstar}{=} pf(1) = \lambda p, \qquad \text{donc } f(r) = \lambda\,\frac{p}{q} = \lambda r.$$
- Montrons que $f = \lambda\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, nous pouvons nous donner une suite de rationnels $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de limite x. Par continuité de f en x et d'après la caractérisation séquentielle de la continuité : $\quad f(x) = f\Big(\lim_{n\to+\infty} r_n\Big) = \lim_{n\to+\infty} f(r_n) = \lim_{n\to+\infty} \lambda r_n = \lambda \lim_{n\to+\infty} r_n = \lambda x.$ ■

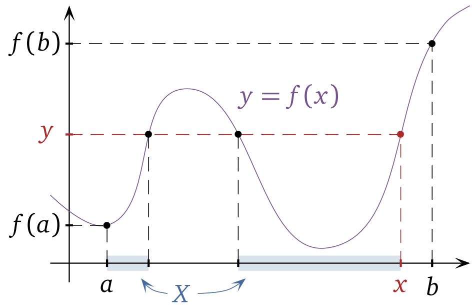
2 Trois théorèmes de continuité globale

Attention ! Les théorèmes de ce paragraphe ne concernent que les fonctions **réelles**. La *continuité globale* désigne la continuité sur un intervalle — par opposition à la *continuité locale* en un point.

2.1 Le théorème des valeurs intermédiaires

Théorème (Théorème des valeurs intermédiaires, version « existence d'un antécédent ») Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a \leqslant b$ et $f \in \mathscr{C}\big([a,b],\mathbb{R}\big)$. Tout réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$ possède **au moins** un antécédent par f dans $[a,b]$.

Démonstration **(n°1)** Quitte à remplacer f par $-f$, on peut supposer que $f(a) \leqslant y \leqslant f(b)$ sans perte de généralité et poser $X = \Big\{ t \in [a,b] \mid \ f(t) \leqslant y \Big\}$.



L'ensemble X est majoré par b et contient a car $f(a) \leqslant y$, donc nous pouvons noter x sa borne supérieure d'après la propriété de la borne supérieure. Nous allons prouver l'égalité $y = f(x)$ en prouvant successivement que $f(x) \leqslant y$ et $f(x) \geqslant y$. La figure ci-contre illustre le bien-fondé de cette démarche.

Comme $x = \sup X$, x est la limite d'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de X, or $f(x_n) \leqslant y$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc d'après la caractérisation séquentielle de la continuité : $\quad f(x) = f\Big(\lim\limits_{n\to+\infty} x_n\Big) = \lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) \leqslant y$.

Si $x = b$, alors $f(x) = f(b) \geqslant y$ par hypothèse. Supposons $x < b$. Pour n assez grand, $x + \dfrac{1}{n}$ appartient à $[a,b]$, mais bien sûr pas à X, donc $f\left(x + \dfrac{1}{n}\right) > y$, donc après passage à la limite et utilisation de la continuité de f en x : $\quad f(x) \geqslant y$. ∎

Démonstration **(n°2, par dichotomie)** Ici aussi, on suppose pour simplifier que $f(a) \leqslant f(b)$ et on pose $a_0 = a$ et $b_0 = b$. À partir de l'intervalle $[a_0, b_0] = [a,b]$, il s'agit de construire par récurrence de nouveaux intervalles intéressants plus petits $[a_1, b_1], [a_2, b_2], \ldots$ Plus précisément, soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons qu'on ait déjà construit des réels $a_0, \ldots, a_n, b_0, \ldots, b_n$ pour lesquels :

(i) $\quad a = a_0 \leqslant \ldots \leqslant a_n, \qquad b_n \leqslant \ldots \leqslant b_0 = b \qquad$ et pour tout $k \in [\![0,n]\!]$: $\quad b_k - a_k = \dfrac{b-a}{2^k}$,

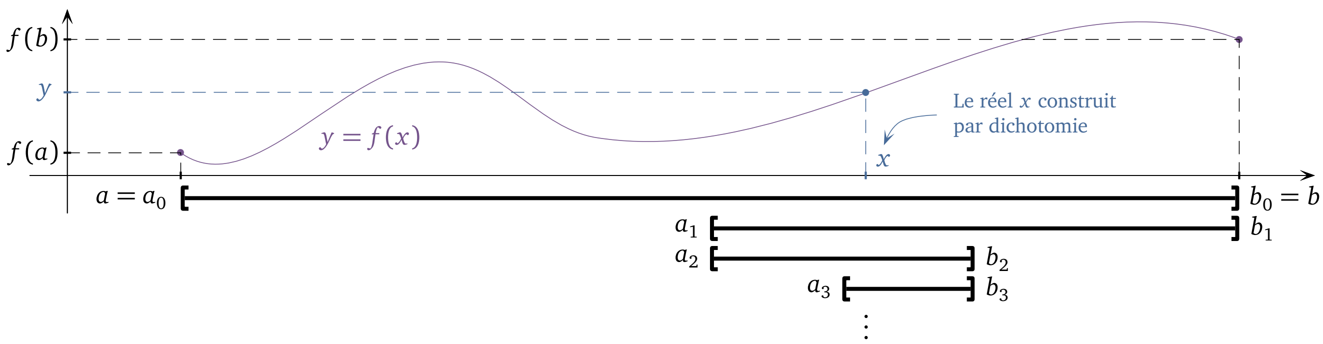
(ii) $\quad$ pour tout $k \in [\![0,n]\!]$: $\quad f(a_k) \leqslant y \leqslant f(b_k)$.

On définit alors au rang $n+1$ les réels a_{n+1} et b_{n+1} de la manière suivante :

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n & \text{et} \quad b_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2} & \text{si } f\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right) \geqslant y \\[2ex] a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2} & \text{et} \quad b_{n+1} = b_n & \text{si } f\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right) < y. \end{cases}$$

Je vous laisse démontrer que ces réels a_{n+1} et b_{n+1} satisfont les assertions (i) et (ii) au rang $n+1$ — faites-le !

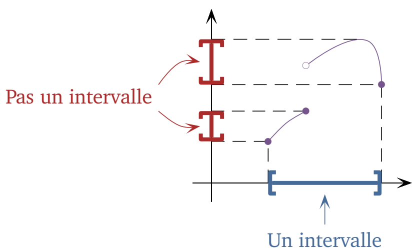
Les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi construites sont finalement adjacentes d'après (i), donc possèdent une limite finie commune $x \in [a,b]$. Or si nous passons à la limite dans (ii), la caractérisation séquentielle de la continuité montre que $f(x) \leqslant y \leqslant f(x)$, i.e. que $y = f(x)$. ∎

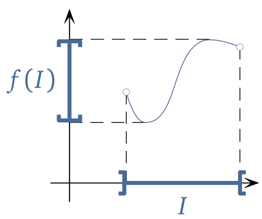


La version du TVI énoncée ci-dessous est nouvelle pour vous mais conceptuellement aussi importante que la précédente.

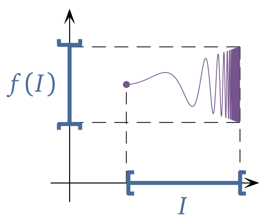
Théorème **(Théorème des valeurs intermédiaires, version « image d'un intervalle »)** L'image d'un INTERVALLE par une fonction continue est un INTERVALLE.

Attention ! Si I est un INTERVALLE et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, cette version nouvelle du TVI affirme que $f(I)$ est également un INTERVALLE, mais pas que I et $f(I)$ sont de même nature. Il se peut que I soit ouvert et $f(I)$ un segment, ou bien que I soit semi-ouvert et $f(I)$ ouvert, etc.





I ouvert, $f(I)$ fermé.



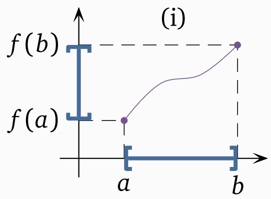
I semi-ouvert, $f(I)$ ouvert.

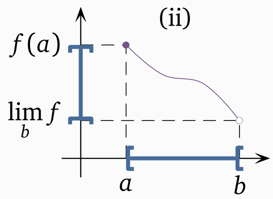
Démonstration Soient I un intervalle et $f \in \mathscr{C}(I,\mathbb{R})$. Pour montrer que $f(I)$ est un intervalle, donnons-nous deux réels $u, v \in f(I)$ pour lesquels $u \leqslant v$, puis $y \in [u,v]$, et montrons que $y \in f(I)$. Par hypothèse, $u = f(a)$ et $v = f(b)$ pour certains $a, b \in I$ et f est définie sur tout le segment d'extrémités a et b car I est un intervalle. La version précédente du TVI montre donc que $y = f(x)$ pour un certain $x \in I$. Comme voulu, $y = f(x) \in f(I)$. ■

Théorème (TVI strictement monotone) Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. Nous nous contenterons de deux versions du théorème, mais vous pouvez en inventer d'autres !

(i) Toute fonction **CONTINUE** et **STRICTEMENT CROISSANTE** $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est bijective de $[a,b]$ sur $\big[f(a), f(b)\big]$.

(ii) Toute fonction **CONTINUE** et **STRICTEMENT DÉCROISSANTE** $f : [a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ est bijective de $[a,b[$ sur $\big]\lim\limits_{b} f, f(a)\big]$.





Démonstration Dans le cas où f est strictement croissante sur $[a,b[$, f est bijective de $[a,b[$ sur son image $f\big([a,b[\big)$ mais a-t-on bien $f\big([a,b[\big) = \big[f(a), \lim\limits_{b^-} f\big[$? En tout cas, d'après le TVI, $f\big([a,b[\big)$ est un intervalle.

Comme $f(a) \in f\big([a,b[\big)$ et comme $f(a)$ minore $f\big([a,b[\big)$ par croissance de f : $\quad f(a) = \min f\big([a,b[\big)$.
Ensuite, d'après le théorème de la limite monotone : $\quad \lim\limits_{b^-} f = \sup f\big([a,b[\big)$, $\quad$ donc $f\big([a,b[\big)$ est l'un des intervalles $\big[f(a), \lim\limits_{b^-} f\big]$ ou $\big[f(a), \lim\limits_{b^-} f\big[$. Peut-on avoir $\lim\limits_{b^-} f \in f\big([a,b[\big)$? Il existerait dans ce cas un réel $x \in [a,b[$ pour lequel $f(x) = \lim\limits_{b^-} f$, et aussitôt f serait constante égale à $\lim\limits_{b^-} f$ sur $[x,b[$, ce qui contredirait la **STRICTE** croissance de f. Conclusion : $\quad \lim\limits_{b^-} f \notin f\big([a,b[\big)$, $\quad$ et enfin $f\big([a,b[\big) = \big[f(a), \lim\limits_{b^-} f\big[$. ■

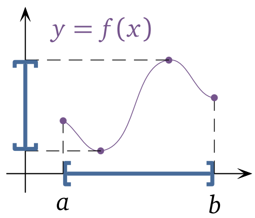
2.2 Le théorème des bornes atteintes

Théorème (Théorème des bornes atteintes) Deux versions équivalentes.

(i) Toute fonction continue sur un **SEGMENT** y est bornée et atteint ses bornes.

(ii) L'image d'un **SEGMENT** par une fonction continue est un **SEGMENT**.

Nous avons vu que la continuité ne préserve pas la forme des intervalles en général, mais en tout cas une chose est sûre, un segment est toujours transformé en un segment.



✖ **Attention !** Sur un intervalle borné qui n'est pas un segment, une fonction continue n'a aucune raison d'être bornée en général. Pensez à la fonction tangente sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

Démonstration Montrons (i). Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a \leqslant b$ et $f \in \mathscr{C}\big([a,b],\mathbb{R}\big)$. D'après le TVI, $f\big([a,b]\big)$ est un intervalle. Nous prouverons seulement que f possède un maximum — pour un minimum, remplacer f par $-f$. La propriété de la borne supérieure **DANS** $\overline{\mathbb{R}}$ nous autorise à poser $s = \sup f\big([a,b]\big) \in \mathbb{R} \cup \big\{+\infty\big\}$. Nous savons que s est la limite d'une suite d'éléments de $f\big([a,b]\big)$. Nous pouvons donc nous donner une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $[a,b]$ pour laquelle $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = s$.

Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ était convergente de limite $x \in [a,b]$, on pourrait aussitôt affirmer que $f(x) = s$ par continuité, ce qui montrerait que $s \in \mathbb{R}$ — et donc que f est majorée — mais même mieux, que $s = \max f\big([a,b]\big)$. Le problème, c'est que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a aucune raison d'être convergente. Si jamais f atteint un maximum en deux points u et v distincts, on peut très bien imaginer que les x_n sont tantôt autour de u, tantôt autour de v. Il faudrait pouvoir forcer les x_n à s'accumuler tous autour de u ou tous autour de v — mais comment faire ?

Bolzano-Weierstrass, bien sûr ! Bornée, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède une suite extraite $\big(x_{\varphi(n)}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente, disons de limite $x \in [a,b]$. Or par continuité de f et extraction : $\quad f(x) = f\Big(\lim\limits_{n\to+\infty} x_{\varphi(n)}\Big) = \lim\limits_{n\to+\infty} f\big(x_{\varphi(n)}\big) = s, \quad$ donc d'une part $s \in \mathbb{R}$ — ce qui montre que f est majorée — mais d'autre part $s = \max f\big([a,b]\big)$. ■

Exemple La fonction $x \overset{f}{\longmapsto} \dfrac{x \ln x}{x^2 + \mathrm{e}^x}$ possède un minimum sur $]0,1]$.

Démonstration On pourrait sans doute étudier les variations de f, mais les calculs à mener seraient délicats et le théorème des bornes atteintes permet de les éviter. Prolongée par continuité en 0 par la valeur 0, f est continue donc possède un minimum sur le **SEGMENT** $[0,1]$. Ce minimum est en fait atteint sur $]0,1]$ car f est strictement négative sur $]0,1[$ et $f(0)=0$.

Exemple Toute fonction continue périodique définie sur $\mathbb{R}$ tout entier est bornée.

Démonstration Soient $T>0$ et $f\in\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ T-périodique. D'après le théorème des bornes atteintes, f est bornée sur le **SEGMENT** $[0,T]$, donc il existe un réel $K\geqslant 0$ pour lequel $\left|f(x)\right|\leqslant K$ pour tout $x\in[0,T]$. Ainsi, pour tout $x\in\mathbb{R}$: $\dfrac{x}{T}-1<\left\lfloor\dfrac{x}{T}\right\rfloor\leqslant\dfrac{x}{T}$, i.e. $0\leqslant x-\left\lfloor\dfrac{x}{T}\right\rfloor T<T$, donc $\left|f(x)\right|=\left|f\left(x-\left\lfloor\dfrac{x}{T}\right\rfloor T\right)\right|\leqslant K$.

Il existe tout plein de normes en mathématiques, pas seulement celle que vous connaissez dans le plan ou l'espace.

Définition-théorème (Norme infinie d'une fonction bornée) Soit D une partie non vide de $\mathbb{R}$. Pour toute fonction **BORNÉE** $f:D\longrightarrow\mathbb{C}$, on appelle *norme infinie de f sur D* et on note $\|f\|_\infty$, ou $\|f\|_{\infty,D}$ en cas d'ambiguïté, le réel :

$$\|f\|_\infty=\sup_{x\in D}\left|f(x)\right|.$$

Pour toutes fonctions $f:D\longrightarrow\mathbb{C}$ et $g:D\longrightarrow\mathbb{C}$ bornées et pour tout $\lambda\in\mathbb{C}$: $\|f\|_\infty=0 \iff f=0$,

$$\|\lambda f\|_\infty=|\lambda|\times\|f\|_\infty \qquad\text{et}\qquad \|f+g\|_\infty\leqslant\|f\|_\infty+\|g\|_\infty \quad \text{(\textit{inégalité triangulaire})}.$$

La bonne définition de la norme infinie d'une fonction **BORNÉE** découle bien sûr de la propriété de la borne supérieure. Le théorème des bornes atteintes montre quant à lui que toute fonction continue sur un **SEGMENT** y est bornée, donc possède une norme infinie.

Démonstration Soient $f:D\longrightarrow\mathbb{C}$ et $g:D\longrightarrow\mathbb{C}$ deux fonctions bornées et $\lambda\in\mathbb{C}$.

- Pour commencer : $$\|f\|_\infty=0 \iff \forall x\in[a,b],\ \left|f(x)\right|=0 \iff \forall x\in[a,b],\ f(x)=0 \iff f=0.$$
- Ensuite, pour tout $x\in D$: $\left|f(x)+g(x)\right|\leqslant\left|f(x)\right|+\left|g(x)\right|\leqslant\|f\|_\infty+\|g\|_\infty$ d'après l'inégalité triangulaire sur $\mathbb{R}$. L'ensemble $\left\{\left|f(x)+g(x)\right| \mid x\in D\right\}$ est ainsi majoré par $\|f\|_\infty+\|g\|_\infty$, donc par définition de la borne supérieure : $\|f+g\|_\infty\leqslant\|f\|_\infty+\|g\|_\infty$.
- De même, pour tout $x\in D$: $\left|\lambda f(x)\right|=|\lambda|\times\left|f(x)\right|\leqslant|\lambda|\times\|f\|_\infty$, donc $\|\lambda f\|_\infty\leqslant|\lambda|\times\|f\|_\infty$ par définition de la borne supérieure avec égalité si $\lambda=0$. Inversement, si $\lambda\neq 0$, alors pour tout $x\in D$: $\left|f(x)\right|=\dfrac{1}{|\lambda|}\left|\lambda f(x)\right|\leqslant\dfrac{1}{|\lambda|}\|\lambda f\|_\infty$, donc $\|f\|_\infty\leqslant\dfrac{1}{|\lambda|}\|\lambda f\|_\infty$, et enfin $\|\lambda f\|_\infty=|\lambda|\times\|f\|_\infty$.

On anticipe dans l'exemple qui suit certains développements majeurs du chapitre « Dérivabilité ».

Exemple Soient $a,b\in\mathbb{R}$ deux réels pour lesquels $a<b$ et $f\in\mathscr{C}^1\big([a,b],\mathbb{C}\big)$. Continue sur le **SEGMENT** $[a,b]$, $|f'|$ y est bornée, donc possède une norme infinie $\|f'\|_\infty$. Ainsi, d'après le théorème fondamental du calcul intégral, l'inégalité triangulaire et la croissance de l'intégrale :

$$\left|f(b)-f(a)\right|=\left|\int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t\right|\leqslant\int_a^b\left|f'(t)\right|\mathrm{d}t\leqslant\int_a^b\|f'\|_\infty\,\mathrm{d}t=\|f'\|_\infty(b-a),\qquad\text{ou encore}\quad\left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|\leqslant\|f'\|_\infty.$$

Cette inégalité s'appelle l'*inégalité des accroissements finis*. Le calcul précédent n'est pour le moment valable que pour des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ et repose sur la notion d'intégrale, mais nous verrons bientôt que l'inégalité des accroissements finis est en fait vraie pour toute fonction seulement dérivable et ne requiert pas la notion d'intégrale.

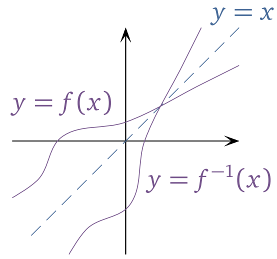
2.3 Continuité d'une réciproque

Nous avons déjà rencontré ce théorème au chapitre « Rappels et compléments sur les fonctions » en version light. Nous en donnons à présent la version intégrale avec démonstration.

Théorème (Continuité d'une réciproque) Soient I un **INTERVALLE** et $f\in\mathscr{C}(I,\mathbb{R})$. On note J l'intervalle $f(I)$.

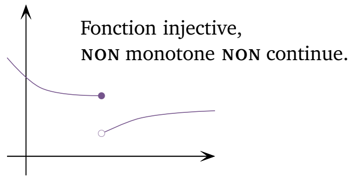
- Les assertions suivantes sont équivalentes :
  (i) f est strictement monotone sur I. (ii) f injective sur I — donc bijective de I sur J.
- Dans ces conditions, f^{-1} est continue et strictement monotone de même sens de variation que f sur J.

Les graphes de f et f^{-1} sont symétriques l'un de l'autre par rapport à la droite d'équation $y=x$. Si le graphe de f peut être tracé sans qu'on ait à lever le crayon, comment le graphe de f^{-1} ne le serait-il pas ?



Attention ! Le moindre point de discontinuité ruine la validité de l'implication :

Injective $\implies$ Strictement monotone.



Démonstration

- Pour l'équivalence des assertions (i) et (ii), nous savons déjà que (i) implique (ii) sans hypothèse de continuité. Pour la réciproque, fixons deux points $a,b \in I$ quelconques pour lesquels $a<b$. Par injectivité : $f(a)\neq f(b)$, donc quitte à remplacer f par $-f$, qui est tout autant continue et injective que f, nous pouvons supposer $f(a)<f(b)$ sans perte de généralité. Montrons que f est strictement croissante.

  Soient $x,y\in I$ avec $x<y$. Par injectivité de f : $f(x)\neq f(y)$, mais rien ne garantit a priori que $f(x)<f(y)$. En d'autres termes, rien ne garantit que f ordonne $f(x)$ et $f(y)$ de la même manière qu'elle ordonne $f(a)$ et $f(b)$. À charge pour nous de comprendre en quoi la continuité et l'injectivité de f obligent f à adopter la même attitude dans les deux cas.

  Lorsque λ croît de 0 à 1, le réel $(1-\lambda)a+\lambda x$ varie de a à x le long du segment qui joint ces deux points tandis que $(1-\lambda)b+\lambda y$ varie de b et y. En outre, I étant un **INTERVALLE**, les réels ainsi obtenus sont tous des éléments de I, ensemble de définition de f. Cette observation justifie la bonne définition de la fonction $\lambda \overset{\varphi}{\longmapsto} f\big((1-\lambda)b+\lambda y\big)-f\big((1-\lambda)a+\lambda x\big)$ de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Pourquoi cette fonction nous intéresse-t-elle ?

  — Pour commencer $\varphi(0)=f(b)-f(a)>0$ et nous cherchons le signe de $\varphi(1)=f(y)-f(x)$.

  — Ensuite, φ est continue sur $[0,1]$ car f l'est.

  — Montrons que φ ne s'annule pas sur $[0,1]$. Pour tout $\lambda\in[0,1]$, si $\varphi(\lambda)=0$, alors par injectivité de f : $(1-\lambda)a+\lambda x=(1-\lambda)b+\lambda y$, donc $\underbrace{(1-\lambda)}_{\geqslant 0}\underbrace{(b-a)}_{>0}+\underbrace{\lambda}_{\geqslant 0}\underbrace{(y-x)}_{>0}=0$, ce qui implique que $1-\lambda=\lambda=0$ — contradiction.

  N'est-il pas clair à présent, d'après le TVI, que φ est strictement positive sur $[0,1]$ tout entier ? En particulier $\varphi(1)=f(y)-f(x)>0$.

- Supposons à présent f strictement monotone sur I — par exemple strictement croissante. Alors f réalise une bijection de I sur son image J — un intervalle d'après le TVI — et $f^{-1}:J\longrightarrow I$ est croissante sur J.

  Soit $b\in J$. Sous l'hypothèse que f^{-1} est définie au voisinage de b à gauche, montrons seulement que f^{-1} est continue à gauche en b — idem à droite. D'après le théorème de la limite monotone, la limite $\lim\limits_{y\to b^-} f^{-1}(y)$ existe, notons-la ℓ. Comme $\lim\limits_{x\to\ell} f(x)=f(\ell)$ par continuité de f en ℓ, alors $\lim\limits_{y\to b^-} f\big(f^{-1}(y)\big)=f(\ell)$ par composition, i.e. $f(\ell)=b$, et enfin $\lim\limits_{y\to b^-} f^{-1}(y)=\ell=f^{-1}(b)$. ■

Exemple En début d'année, l'existence des fonctions arcsinus, arccosinus et arctangente a découlé du TVI strictement monotone et leur continuité du théorème de continuité d'une réciproque.

La preuve de continuité de f^{-1} peut être adaptée à la recherche des limites aux bornes d'une réciproque. Voyons cela sur un exemple. Ingrédient majeur — le théorème de la limite monotone.

Exemple Soit $f\in\mathscr{C}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$. On suppose que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et que $\lim\limits_{+\infty} f=\ell\in\mathbb{R}$. Alors f est bijective de $\mathbb{R}_+$ sur $[0,\ell[$ et $\lim\limits_{\ell} f^{-1}=+\infty$.

Démonstration Le TVI strictement monotone montre que f est bijective de $\mathbb{R}_+$ sur $[0,\ell[$. Ensuite, f^{-1} étant croissante, la limite $\lim\limits_{y\to\ell} f^{-1}(y)$ existe d'après le théorème de la limite monotone, notons-la L. Par composition : $f^{-1}\big(f(x)\big)\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} L$, mais par ailleurs : $f^{-1}\big(f(x)\big)=x\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty$, donc $L=+\infty$.