CONTINUITÉ

Les fonctions qu'on étudie en analyse sont généralement définies sur des intervalles ou des réunions d'intervalles comme $\mathbb{R}^*$ ou $[0,1[\cup[2,3]$, voire $\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[+\pi\mathbb{Z}$. Dans ce chapitre, les lettres $D, E\ldots$ qui nous serviront d'ensembles de définition désigneront cependant des parties **QUELCONQUES** de $\mathbb{R}$. On notera par ailleurs $\mathbb{K}$ l'un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 DÉFINITIONS ET PREMIÈRES PROPRIÉTÉS

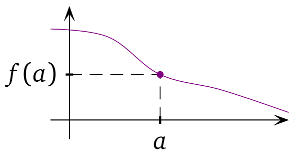
On traite dans cette partie le cas des fonctions complexes en même temps que celui des fonctions réelles, mais nos figures illustreront bien entendu seulement le cas réel.

1.1 DÉFINITIONS DE LA CONTINUITÉ

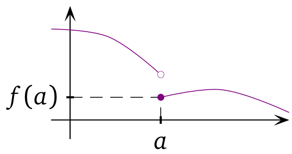
Définition (Continuité en un point ou sur une réunion raisonnable d'intervalles) Soient $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction.

- Soit $a \in D$. On dit que f est *continue en* a si $\lim_a f$ **EXISTE**. On sait dans ce cas, f étant définie en a, que : $\lim_a f = f(a)$. On peut donc dire que f est continue en a si :

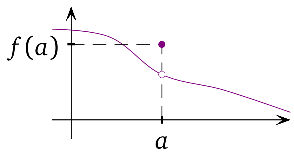
$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists\, \alpha > 0/ \quad \forall x \in D, \qquad |x-a| < \alpha \implies \big|f(x)-f(a)\big| < \varepsilon.$$



f est continue en a.



f n'est pas continue en a.



f n'est pas continue en a.

- On dit que f est *continue sur* D si f est continue en tout point de D.

  On note $\mathscr{C}(D,\mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions continues sur D à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Exemple La fonction valeur absolue $|\cdot|$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Démonstration Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrons que $|\cdot|$ est continue en a. Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\Big||x|-|a|\Big| \leqslant |x-a|$ d'après l'inégalité triangulaire généralisée, donc pour $\alpha = \varepsilon$: $\quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad |x-a| < \alpha \implies \Big||x|-|a|\Big| < \varepsilon$.

Le résultat suivant est la version continue d'un résultat analogue sur les limites du chapitre « Limites d'une fonction ».

Théorème (Caractérisation de la continuité à partir des parties réelle et imaginaire) Soient $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction et $a \in D$.

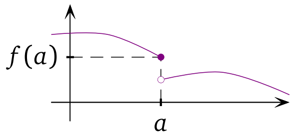
f est continue en a (resp. sur D) si et seulement si $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ le sont.

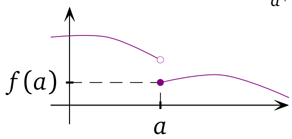
Exemple La fonction $t \longmapsto e^{it}$ est continue sur $\mathbb{R}$ car les fonctions sinus et cosinus le sont.

Définition (Continuité à gauche/à droite en un point) Soient $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction et $a \in D$ un point au voisinage duquel f est définie à gauche et à droite.

- On dit que f est *continue à gauche en* a si $f_{|D\cap]-\infty,a]}$ est continue en a, i.e. si : $\displaystyle\lim_{a^-} f = f(a)$.
- On dit que f est *continue à droite en* a si $f_{|D\cap[a,+\infty[}$ est continue en a, i.e. si : $\displaystyle\lim_{a^+} f = f(a)$.

f est continue en a à gauche, mais pas à droite.





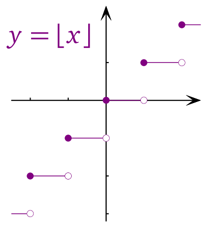
f est continue en a à droite, mais pas à gauche.

Le résultat suivant est la version continue d'un résultat analogue sur les limites du chapitre « Limites d'une fonction ».

Théorème (Caractérisation de la continuité à l'aide des continuités à gauche/à droite) Soient $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction et $a \in D$ un point au voisinage duquel f est définie à gauche et à droite.

f est continue en a si et seulement si f est continue à gauche et à droite en a.

Exemple La fonction partie entière $\lfloor\cdot\rfloor$ est continue en tout point non entier, mais seulement continue à droite en n pour tout $n \in \mathbb{Z}$.



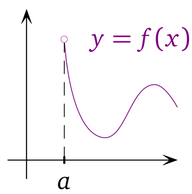
Démonstration Soit $n \in \mathbb{Z}$. Pour tout $x \in [n, n+1[$: $\lfloor x \rfloor = n$, donc : $\displaystyle\lim_{x\to n^+} \lfloor x \rfloor = n = \lfloor n \rfloor$, donc $\lfloor\cdot\rfloor$ est continue à droite en n. Au contraire, pour tout $x \in [n-1, n[$: $\lfloor x \rfloor = n-1$, donc : $\displaystyle\lim_{x\to n^-} \lfloor x \rfloor = n-1 \neq \lfloor n \rfloor = n$, donc f n'est pas continue à gauche en n.

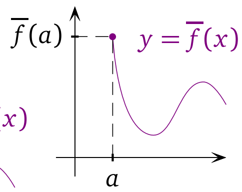
1.2 Prolongement par continuité en un point

Définition-théorème (Prolongement par continuité en un point) Soient $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ et $a \in \overline{D} \setminus D$ — autrement dit, f n'est pas définie en a, mais a est « au bord » de D.

On dit que f est *prolongeable par continuité en* a si $\displaystyle\lim_{a} f$ existe et est **finie**. Le prolongement $\overline{f}$ de f obtenu, défini sur $D \sqcup \{a\}$, en posant : $\displaystyle\overline{f}(a) = \lim_{a} f$ est alors continu en a.

Les fonctions f et $\overline{f}$ sont distinctes en toute rigueur car elles n'ont pas le même ensemble de définition, mais on choisit généralement de noter encore f le prolongement $\overline{f}$ par souci de simplicité.





Démonstration Nous devons montrer que $\overline{f}$ est continue en a, i.e. que : $\displaystyle\lim_{a} \overline{f} = \overline{f}(a)$. Par définition de $\overline{f}$, $\overline{f}$ et f coïncident sur D, donc l'égalité : $\displaystyle\lim_{a} f = \overline{f}(a)$ peut être écrite ainsi :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists\, \alpha > 0/ \quad \forall x \in D, \qquad |x-a| < \alpha \implies \left|\overline{f}(x) - \overline{f}(a)\right| < \varepsilon \qquad \bigstar.$$

C'est presque le résultat mais pas tout à fait car $\overline{f}$ est définie en a. Or on peut évidemment remplacer D par $D \sqcup \{a\}$ dans $\bigstar$: $\forall \varepsilon > 0, \quad \exists\, \alpha > 0/ \quad \forall x \in D \sqcup \{a\}, \qquad |x-a| < \alpha \implies \left|\overline{f}(x) - \overline{f}(a)\right| < \varepsilon$. ■

Exemple

- La fonction $x \longmapsto x \ln x$ n'est pas définie en 0 mais on peut la prolonger par continuité en ce point en lui donnant la valeur 0 en 0, car : $\displaystyle\lim_{x\to 0} x \ln x = 0$.
- La fonction $x \longmapsto \dfrac{\sin x}{x}$ n'est pas définie en 0, mais comme : $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, on peut la prolonger par continuité en ce point en lui donnant la valeur 1 en 0.
- Pour tout $\alpha > 0$: $x^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha \ln x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, donc en posant : $0^\alpha = 0$, on prolonge la fonction $x \longmapsto x^\alpha$, a priori définie sur $\mathbb{R}_+^*$, en une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$ tout entier.

1.3 Opérations sur la continuité

Que ce soit en un point ou sur un intervalle, la somme et le produit de deux fonctions continues sont continus. Même chose pour l'inverse d'une fonction qui ne s'annule pas ainsi que pour la composée de deux fonctions composables. Ces résultats découlent immédiatement des résultats analogues que nous avons prouvés sur les limites de fonctions.

Exemple La fonction $x \longmapsto \left(\ln\left(x^2+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right)\right)^2$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^*$.

Démonstration Attention, pour la composition, il faut bien préciser les domaines manipulés !

- La fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ (à valeurs dans $\boxed{\mathbb{R}}$) et la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^x$ l'est sur $\boxed{\mathbb{R}}$, donc par composition $x \longmapsto \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$.
- La fonction $x \longmapsto x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc sur $\mathbb{R}^*$. Par somme, $x \longmapsto x^2+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$.
- La fonction $x \longmapsto x^2+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ à valeurs dans $\boxed{\mathbb{R}_+^*}$ et $x \longmapsto \ln x$ est continue sur $\boxed{\mathbb{R}_+^*}$, donc par composition $x \longmapsto \ln\left(x^2+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right)$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ (à valeurs dans $\boxed{\mathbb{R}}$).
- Enfin, la fonction $x \longmapsto x^2$ est continue sur $\boxed{\mathbb{R}}$. Le résultat découle donc d'une dernière composition.

1.4 Caractérisation séquentielle de la continuité

Le résultat suivant est la version continue d'un résultat analogue sur les limites du chapitre « Limites d'une fonction ».

Théorème **(Caractérisation séquentielle de la continuité en un point)** Soient $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction et $a \in D$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) f est continue en a.

(ii) Pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de limite a à valeurs dans D, la suite $\big(f(u_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite $f(a)$.

✌ **Explication** ✌ En résumé : Pour une fonction CONTINUE : $f\left(\lim\limits_{n\to+\infty} \ldots\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} f(\ldots)$.

✎ **En pratique** ✎ Ce théorème est le plus souvent utilisé dans le contexte des suites définies par une relation de récurrence « $u_{n+1} = f(u_n)$ ». **Si** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CONVERGE vers un réel ℓ et si f est définie et CONTINUE en ℓ, alors : $f(\ell) = \ell$.

Le résultat suivant est une application ultra-classique de la caractérisation séquentielle de la continuité et de la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.

Théorème **(Équation fonctionnelle des fonctions linéaires)** Les fonctions $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$: $f(x+y) = f(x)+f(y)$ sont exactement les fonctions $x \longmapsto \lambda x$, λ décrivant $\mathbb{R}$, i.e. les fonctions linéaires de $\mathbb{R}$.

Démonstration Les fonctions linéaires sont bien sûr solutions du problème étudié. Réciproquement, soit $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On suppose que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$: $f(x+y) = f(x)+f(y)$.

1) Montrons que f est impaire.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $0 = f(0) = f\big(x+(-x)\big) = f(x)+f(-x)$, donc en effet $f(-x) = -f(x)$.

2) Montrons que pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$: $f(nx) = nf(x)$. On fixe $x \in \mathbb{R}$.

Initialisation : $f(0.x) = f(0) = f(0+0) = f(0)+f(0) = 2f(0.x)$, donc : $f(0.x) = 0 = 0.f(x)$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que : $f(nx) = nf(x)$. Alors aussitôt :

$$f\big((n+1)x\big) = f(nx+x) = f(nx)+f(x) = nf(x)+f(x) = (n+1)f(x).$$

3) Montrons que pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$: $f(nx) = nf(x)$. D'après 2), il nous reste seulement à montrer le résultat pour $n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$: $f(nx) = f\big(-(-n)x\big) \overset{1)}{=} -f\big((-n)x\big) \underset{-n\in\mathbb{N}}{\overset{2)}{=}} -(-n)f(x) = nf(x)$.

4) On pose : $\lambda = f(1)$. Montrons que : $f|_{\mathbb{Q}} = \lambda \mathrm{Id}_{\mathbb{Q}}$. Soit $r = \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Alors : $qf(r) = f(qr) = f(p) = f(p.1) = pf(1) = \lambda p$ d'après 3), donc : $f(r) = \lambda\,\dfrac{p}{q} = \lambda r$.

5) Montrons que : $f = \lambda \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, nous pouvons nous donner une suite de rationnels $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de limite x. Par continuité de f en x et d'après la caractérisation séquentielle de la continuité : $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f(r_n) \overset{4)}{=} \lim\limits_{n\to+\infty} \lambda r_n = \lambda \lim\limits_{n\to+\infty} r_n = \lambda x$. ■

2 Trois théorèmes de continuité globale

✖ Attention ! ✖ Les théorèmes de ce paragraphe ne concernent que les fonctions **réelles**. La *continuité globale* désigne la continuité sur un intervalle — par opposition à la *continuité locale* en un point.

2.1 Retour sur la notion d'intervalle

Rappelons que, par définition, pour tous $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ — éventuellement $\pm\infty$: $[a, b] = \big\{x \in \overline{\mathbb{R}}/\quad a \leqslant x \leqslant b\big\}$,

$[a, b[= \big\{x \in \overline{\mathbb{R}}/\quad a \leqslant x < b\big\}$, et on définit de manière analogue $]a, b]$ et $]a, b[$.

Ces ensembles sont tous appelés des intervalles, mais du coup la notion d'intervalle ne semble pas avoir une définition unique, il faut distinguer des cas. Nous donnons ci-dessous une redéfinition « sans cas » de la notion d'intervalle, puis une caractérisation selon laquelle les intervalles nouveaux ainsi définis sont bien exactement ceux que nous connaissions.

Définition (Intervalle de $\overline{\mathbb{R}}$)
On appelle *intervalle de* $\overline{\mathbb{R}}$ toute partie I de $\overline{\mathbb{R}}$ telle que : $\forall x, y \in I, \quad x \leqslant y \implies [x, y] \subset I$.

✌ Explication ✌ Un intervalle de $\overline{\mathbb{R}}$ est ainsi une partie de $\overline{\mathbb{R}}$ qui contient toutes les « valeurs intermédiaires » des points qu'elle contient. On sent que le TVI approche...

Exemple Pour tous $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ avec : $a \leqslant b$, les ensembles $[a, b]$, $[a, b[$, $]a, b]$ et $]a, b[$ sont des intervalles au sens de la définition « sans cas » précédente.

Démonstration Pour $[a, b[$, soient $x, y \in [a, b[$ avec : $x \leqslant y$. Nous devons montrer que : $[x, y] \subset [a, b[$. Or pour tout $t \in [x, y]$: $a \leqslant x \leqslant t \leqslant y < b$, donc en effet : $t \in [a, b[$.

Le théorème suivant énonce que la réciproque de l'exemple précédent est vraie.

Théorème (Caractérisation des intervalles de $\overline{\mathbb{R}}$) Les intervalles de $\overline{\mathbb{R}}$ sont exactement les ensembles $[a, b]$, $[a, b[$, $]a, b]$ et $]a, b[$, a et b décrivant $\overline{\mathbb{R}}$ avec : $a \leqslant b$.

Démonstration Soit I un intervalle non vide de $\overline{\mathbb{R}}$. La propriété de la borne inférieure/supérieure **dans** $\overline{\mathbb{R}}$ montre que I possède une borne inférieure a et une borne supérieure b. Distinguons plusieurs cas.

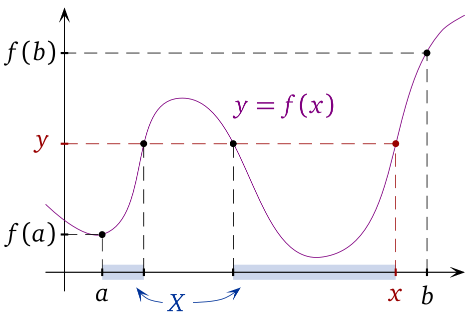
- **Cas où $a \in I$ et $b \in I$:** Montrons que : $I = [a, b]$.
  - Montrons que : $[a, b] \subset I$. Or I est un intervalle et contient a et b, donc oui : $[a, b] \subset I$.
  - Montrons que : $I \subset [a, b]$. Or pour tout $x \in I$, comme a minore I et b majore I, : $a \leqslant x \leqslant b$, i.e. : $x \in [a, b]$.

- **Cas où $a \in I$ et $b \notin I$:** Montrons que : $I = [a, b[$.
  - — Montrons que : $[a, b[\subset I$. Soit $x \in [a, b[$. Comme : $x < b$ et $b = \sup I$, x ne majore pas I, donc : $x < b'$ pour un certain $b' \in I$. Alors : $a \leqslant x \leqslant b'$ avec $a \in I$ et $b' \in I$, donc comme I est un intervalle : $x \in I$.
  - — Montrons que : $I \subset [a, b[$. Soit $x \in I$. Comme a minore I et b majore I : $a \leqslant x \leqslant b$. Mais : $x \in I$ alors que : $b \notin I$, donc : $a \leqslant x < b$, i.e. : $x \in [a, b[$.
- **Cas où $a \notin I$ et $b \in I$:** Dans ce cas : $I =]a, b]$. Adapter la preuve du cas précédent.
- **Cas où $a \notin I$ et $b \notin I$:** Montrons que : $I =]a, b[$.
  - — Montrons que : $]a, b[\subset I$. Soit $x \in]a, b[$. Comme : $a < x$ et $a = \inf I$, x ne minore pas I, donc : $a' < x$ pour un certain $a' \in I$. Comme : $x < b$ et $b = \sup I$, x ne majore pas I, donc : $x < b'$ pour un certain $b' \in I$. Alors : $a' \leqslant x \leqslant b'$ avec $a' \in I$ et $b' \in I$, donc comme I est un intervalle : $x \in I$.
  - — Montrons que : $I \subset]a, b[$. Soit $x \in I$. Comme a minore I et b majore I : $a \leqslant x \leqslant b$. Mais : $x \in I$ alors que : $a \notin I$ et $b \notin I$, donc : $a < x < b$, i.e. : $x \in]a, b[$. ■

2.2 Le théorème des valeurs intermédiaires

Théorème (Théorème des valeurs intermédiaires, version « existence d'un antécédent ») Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec : $a \leqslant b$ et $f \in \mathscr{C}\big([a, b], \mathbb{R}\big)$. Tout réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$ possède **au moins** un antécédent par f dans $[a, b]$.

Démonstration (n°1) On suppose pour simplifier que : $f(a) \leqslant y \leqslant f(b)$ — raisonnement analogue dans l'autre cas — et on pose : $X = \big\{t \in [a, b] /\ \ f(t) \leqslant y\big\}$.



Comme $f(a) \leqslant y$: $a \in X$, donc X est une partie non vide de $\mathbb{R}$, par ailleurs majorée par b. La propriété de la borne supérieure nous garantit ainsi l'existence de $\sup X$, que nous notons x. Nous allons prouver l'égalité : $y = f(x)$ en prouvant successivement que : $f(x) \leqslant y$ et $f(x) \geqslant y$. La figure ci-contre illustre le bien-fondé de cette démarche.

Comme : $x = \sup X$, x est la limite d'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de X, et comme : $f(x_n) \leqslant y$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, la caractérisation séquentielle de la continuité montre que : $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) \leqslant y$.

Si $x = b$: $f(x) = f(b) \geqslant y$ par hypothèse. Supposons donc $x < b$.
Pour n assez grand, on peut alors dire que : $x + \dfrac{1}{n} \in [a, b]$, mais par ailleurs : $x + \dfrac{1}{n} \notin X$. Pour de tels n : $f\left(x + \dfrac{1}{n}\right) > y$ donc après passage à la limite et utilisation de la continuité de f en x : $f(x) \geqslant y$. ■

Démonstration (n°2, par dichotomie) Ici aussi, on suppose pour simplifier que : $f(a) \leqslant f(b)$ et on pose : $a_0 = a$ et $b_0 = b$. À partir de l'intervalle $[a_0, b_0] = [a, b]$, il s'agit de construire par récurrence de nouveaux intervalles intéressants plus petits $[a_1, b_1], [a_2, b_2], \ldots$ Plus précisément, soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons qu'on ait déjà construit des réels $a_0, \ldots, a_n, b_0, \ldots, b_n$ pour lesquels :

(i) $a = a_0 \leqslant \ldots \leqslant a_n$, $\quad b_n \leqslant \ldots \leqslant b_0 = b \quad$ et pour tout $k \in [\![0, n]\!]$: $b_k - a_k = \dfrac{b-a}{2^k}$,

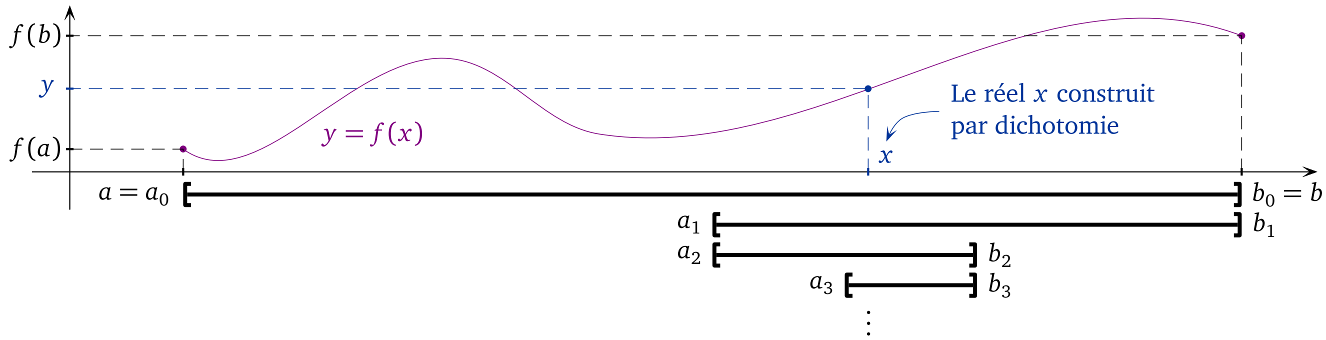
(ii) pour tout $k \in [\![0, n]\!]$: $f(a_k) \leqslant y \leqslant f(b_k)$.

On définit alors au rang $n+1$ les réels a_{n+1} et b_{n+1} de la manière suivante :

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n & \text{et} \quad b_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2} \quad \text{si } f\left(\dfrac{a_n + b_n}{2}\right) \geqslant y \\[2ex] a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2} & \text{et} \quad b_{n+1} = b_n \quad \text{si } f\left(\dfrac{a_n + b_n}{2}\right) < y. \end{cases}$$

Je vous laisse démontrer que ces réels a_{n+1} et b_{n+1} satisfont les assertions (i) et (ii) au rang $n+1$ — faites-le !

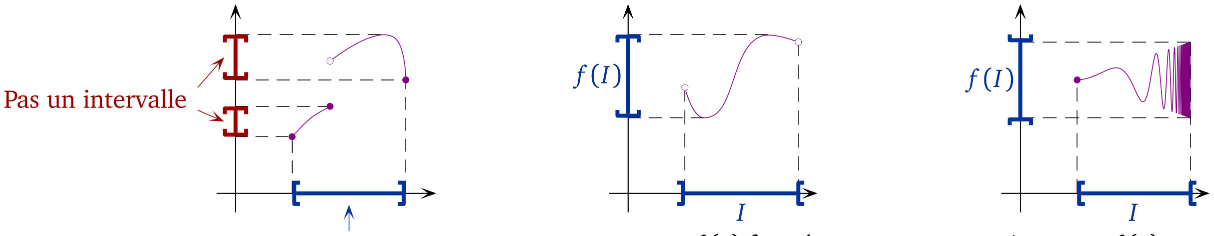
Les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi construites sont finalement adjacentes d'après (i), donc possèdent une limite finie commune $x \in [a, b]$. Or si nous passons à la limite dans (ii), la caractérisation séquentielle de la continuité montre que : $f(x) \leqslant y \leqslant f(x)$, i.e. que : $y = f(x)$. ■



La version du TVI énoncée ci-dessous est une nouveauté pour vous mais pourtant aussi importante que la précédente.

Théorème (Théorème des valeurs intermédiaires, version « image d'un intervalle ») L'image d'un INTERVALLE par une fonction continue est un INTERVALLE.

✖ **ATTENTION !** ✖ Si I est un INTERVALLE et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, cette version nouvelle du TVI affirme que $f(I)$ est également un INTERVALLE, mais pas que I et $f(I)$ sont de même nature. Il se peut que I soit ouvert et $f(I)$ un segment, ou bien que I soit semi-ouvert et $f(I)$ ouvert, etc.



Un intervalle — I ouvert, $f(I)$ fermé. — I semi-ouvert, $f(I)$ ouvert.

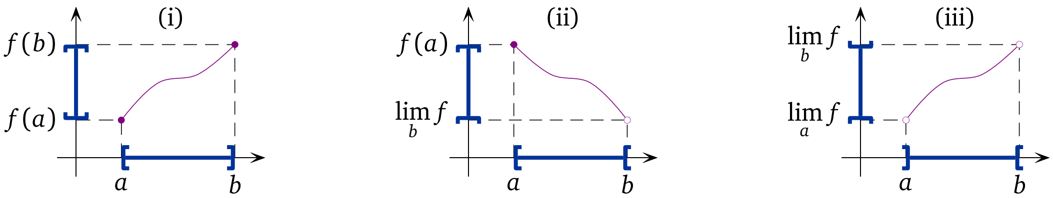
Démonstration Soient I un INTERVALLE et $f \in \mathscr{C}(I, \mathbb{R})$. Pour montrer que $f(I)$ est un intervalle, donnons-nous $u, v \in f(I)$ avec : $u \leqslant v$ et $y \in [u, v]$, et montrons que : $y \in f(I)$. Ce qui est sûr, c'est que : $u = f(a)$ et $v = f(b)$ pour certains $a, b \in I$, la version précédente du TVI montre donc que pour un certain x compris entre a et b : $y = f(x)$. En particulier : $x \in I$ car I est un intervalle, et enfin : $y = f(x) \in f(I)$. ■

Théorème (TVI strictement monotone) Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec : $a < b$. Nous nous contenterons de quelques versions du théorème.

(i) Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction CONTINUE et STRICTEMENT CROISSANTE.
Alors f est bijective de $[a, b]$ sur $\big[f(a), f(b)\big]$.

(ii) Soit $f : [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction CONTINUE et STRICTEMENT DÉCROISSANTE.
Alors f est bijective de $[a, b[$ sur $\big]\lim\limits_b f, f(a)\big]$.

(iii) Soit $f :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction CONTINUE et STRICTEMENT CROISSANTE.
Alors f est bijective de $]a, b[$ sur $\big]\lim\limits_a f, \lim\limits_b f\big[$.



Démonstration Dans le cas où f est strictement croissante sur $[a, b[$, f est bijective de $[a, b[$ sur son image $f\big([a, b[\big)$ mais a-t-on bien : $f\big([a, b[\big) = \big[f(a), \lim\limits_{b^-} f\big[$? En tout cas, d'après le TVI, $f\big([a, b[\big)$ est un intervalle.

Comme : $f(a) \in f\big([a, b[\big)$ et comme $f(a)$ minore $f\big([a, b[\big)$ par croissance de f : $f(a) = \min f\big([a, b[\big)$. Ensuite, d'après le théorème de la limite monotone : $\lim\limits_{b^-} f = \sup f\big([a, b[\big)$, donc $f\big([a, b[\big)$ est l'un des intervalles $\big[f(a), \lim\limits_{b^-} f\big]$ ou $\big[f(a), \lim\limits_{b^-} f\big[$. Peut-on avoir : $\lim\limits_{b^-} f \in f\big([a, b[\big)$? Il existerait dans ce cas un réel $x \in [a, b[$ pour lequel : $f(x) = \lim\limits_{b^-} f$, et aussitôt f serait constante égale à $\lim\limits_{b^-} f$ sur $[x, b[$, ce qui contredirait la STRICTE croissance de f. Conclusion : $\lim\limits_{b^-} f \notin f\big([a, b[\big)$, et enfin : $f\big([a, b[\big) = \big[f(a), \lim\limits_{b^-} f\big[$. ■

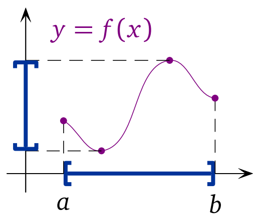
2.3 LE THÉORÈME DES BORNES ATTEINTES

Théorème (Théorème des bornes atteintes)

Toute fonction continue sur un **SEGMENT** y est bornée et atteint ses bornes.

Autre version :

L'image d'un **SEGMENT** par une fonction continue est un **SEGMENT**.



✌ **Explication** ✌ Nous avons vu que la continuité ne préserve pas la forme des intervalles en général, mais en tout cas une chose est sûre, un segment est toujours transformé en un segment.

✖ **ATTENTION !** ✖ Sur un intervalle borné qui n'est pas un segment, une fonction continue n'a aucune raison d'être bornée en général. Pensez à la fonction tangente sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$.

Démonstration Soient $a,b\in\mathbb{R}$ avec : $a\leqslant b$ et $f\in\mathscr{C}\big([a,b],\mathbb{R}\big)$. D'après le TVI, $f\big([a,b]\big)$ est un intervalle. Nous montrerons seulement que f possède un maximum — pour un minimum, remplacer f par $-f$. La propriété de la borne supérieure **DANS** $\overline{\mathbb{R}}$ nous autorise à poser : $s=\sup f\big([a,b]\big)$ — avec peut-être $s=+\infty$. Nous savons que s est la limite d'une suite d'éléments de $f\big([a,b]\big)$. Nous pouvons donc nous donner une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $[a,b]$ pour laquelle : $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)=s$.

Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ était convergente, disons de limite $x\in[a,b]$, on pourrait aussitôt affirmer que : $f(x)=s$ par continuité, ce qui montrerait que $s\in\mathbb{R}$ — et donc que f est majorée — mais même mieux, que : $s=\max f\big([a,b]\big)$. Le problème, c'est que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a aucune raison d'être convergente. Si jamais f atteint un maximum en deux points u et v distincts, on peut très bien imaginer que les x_n sont tantôt autour de u, tantôt autour de v. Il faudrait pouvoir forcer les x_n à s'accumuler tous autour de u ou tous autour de v — mais comment faire ?

Bolzano-Weierstrass évidemment ! La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant bornée, elle possède une suite extraite $\big(x_{\varphi(n)}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente, disons de limite $x\in[a,b]$. Or par continuité de f et extraction : $f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty} f\big(x_{\varphi(n)}\big)=s$, donc d'une part : $s\in\mathbb{R}$ — ce qui montre que f est majorée — mais d'autre part : $s=\max f\big([a,b]\big)$. ■

Exemple La fonction $x\overset{f}{\longmapsto} x\ln x$ possède un minimum sur $]0,1]$.

Démonstration On pourrait bien sûr étudier les variations de f, mais le théorème des bornes atteintes permet de l'éviter. Prolongée par continuité en 0 par la valeur 0, f est continue donc possède un minimum sur le **SEGMENT** $[0,1]$. Ce minimum est en fait atteint sur $]0,1]$ car f y est strictement négative et : $f(0)=0$.

Exemple Toute fonction continue périodique définie sur $\mathbb{R}$ tout entier est bornée.

Démonstration Soient $T>0$ et $f\in\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ T-périodique. La fonction f est bornée sur $[0,T]$ d'après le théorème des bornes atteintes, donc il existe $K\geqslant 0$ tel que pour tout $x\in[0,T]$: $\big|f(x)\big|\leqslant K$. Ainisi, pour tout $x\in\mathbb{R}$, puisque : $\frac{x}{T}-1<\left\lfloor\frac{x}{T}\right\rfloor\leqslant\frac{x}{T}$, alors : $0\leqslant x-\left\lfloor\frac{x}{T}\right\rfloor T<T$, donc : $\big|f(x)\big|=\left|f\left(x-\left\lfloor\frac{x}{T}\right\rfloor T\right)\right|\leqslant K$. Cela montre bien que f est bornée sur tout $\mathbb{R}$.

2.4 CONTINUITÉ D'UNE RÉCIPROQUE

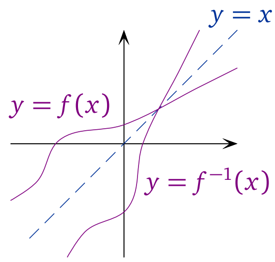
Nous avons déjà rencontré ce théorème au chapitre « Rappels et compléments sur les fonctions » en version light. Nous en donnons à présent la version intégrale avec démonstration.

Théorème (Continuité d'une réciproque) Soient I un **INTERVALLE** et $f\in\mathscr{C}(I,\mathbb{R})$. On note J l'intervalle $f(I)$.

- Les assertions suivantes sont équivalentes :

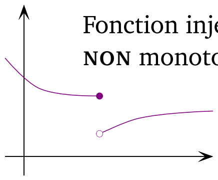
  (i) f est strictement monotone sur I. (ii) f injective sur I — donc bijective de I sur J.

- Dans ces conditions, f^{-1} est continue et strictement monotone de même sens de variation que f sur J.



Explication Les graphes de f et f^{-1} sont symétriques l'un de l'autre par rapport à la droite d'équation $y = x$. Si le graphe de f peut être tracé sans qu'on ait à lever le crayon, comment le graphe de f^{-1} ne le serait-il pas ?

Attention ! Le moindre point de discontinuité ruine la validité de l'implication « Injective $\implies$ Strictement monotone ».



Fonction injective,
NON monotone NON continue.

Démonstration

- Pour l'équivalence des assertions (i) et (ii), nous savons déjà que (i) implique (ii) sans hypothèse de continuité. Pour la réciproque, raisonnons par contraposition en supposant que f n'est pas strictement monotone. La fonction f n'est alors ni croissante ni décroissante, donc pour certains $x, y, x', y' \in I$: $x < y$ et $f(x) > f(y)$ d'une part, et : $x' < y'$ et $f(x') < f(y')$ d'autre part.

  Remarquons ensuite que pour tout $\lambda \in [0,1]$, le réel $(1-\lambda)x+\lambda x'$ est compris entre x et x', donc appartient à I PUISQUE I EST UN INTERVALLE, et il en va de même du réel $(1-\lambda)y+\lambda y'$.

  Nous pouvons ainsi noter φ la fonction continue $\lambda \longmapsto f\big((1-\lambda)x+\lambda x'\big) - f\big((1-\lambda)y+\lambda y'\big)$ de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Comme : $\varphi(0) = f(x) - f(y) > 0$ et $\varphi(1) = f(x') - f(y') < 0$, $\varphi(\lambda_0) = 0$ pour un certain $\lambda_0 \in]0,1[$ d'après le TVI, i.e. : $f\big((1-\lambda_0)x+\lambda_0 x'\big) = f\big((1-\lambda_0)y+\lambda_0 y'\big)$. Cette égalité montre comme voulu que f n'est pas injective car par ailleurs : $(1-\lambda_0)x+\lambda_0 x' \neq (1-\lambda_0)y+\lambda_0 y'$ — dans le cas contraire, on aurait : $\underbrace{(1-\lambda_0)(x-y)}_{<0} = \underbrace{\lambda_0(y'-x')}_{>0}$.

- Supposons à présent f strictement monotone sur I — par exemple strictement croissante. Alors f réalise une bijection de I sur son image J — un intervalle d'après le TVI — et $f^{-1} : J \longrightarrow I$ est croissante sur J.

  Soit $b \in J$. Sous l'hypothèse que f^{-1} est définie au voisinage de b à gauche, nous montrerons seulement que f^{-1} est continue à gauche en b — même travail à droite. D'après le théorème de la limite monotone, la limite $\lim\limits_{y \to b^-} f^{-1}(y)$ existe, notons-la ℓ. Comme : $\lim\limits_{x \to \ell} f(x) = f(\ell)$ par continuité de f en ℓ, alors : $\lim\limits_{y \to b^-} f\big(f^{-1}(y)\big) = f(\ell)$ par composition, i.e. : $f(\ell) = b$, et enfin : $\lim\limits_{b^-} f^{-1} = \ell = f^{-1}(b)$. ■

Exemple En début d'année, l'existence des fonctions arcsinus, arccosinus et arctangente a découlé du TVI strictement monotone et leur continuité du théorème de continuité d'une réciproque.

La preuve de continuité de f^{-1} peut être adaptée à la recherche des limites aux bornes d'une réciproque. Voyons cela sur un exemple. Ingrédient majeur — le théorème de la limite monotone.

Exemple Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$. On suppose que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et que : $\lim\limits_{+\infty} f = \ell \in \mathbb{R}$. Alors f est bijective de $\mathbb{R}_+$ sur $[0, \ell[$ et : $\lim\limits_{\ell} f^{-1} = +\infty$.

Démonstration Le TVI strictement monotone garantit la bijectivité de f de $\mathbb{R}_+$ sur $[0, \ell[$. Ensuite, f^{-1} étant croissante, le théorème de la limite monotone nous assure l'existence de la limite $\lim\limits_{y \to \ell} f^{-1}(y)$, notons-la L. Que vaut L ? Par composition : $f^{-1}\big(f(x)\big) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} L$, mais par ailleurs : $f^{-1}\big(f(x)\big) = x \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc : $L = +\infty$.