Dérivabilité

Les fonctions qu'on étudie en analyse sont généralement définies sur des intervalles ou des réunions d'intervalles comme $\mathbb{R}^*$ ou $[0,1[\cup[2,3]$, voire $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[+\pi\mathbb{Z}$. Dans tout ce chapitre, les lettres $D, E\ldots$ qui nous serviront d'ensembles de définition désigneront cependant des parties quelconques de $\mathbb{R}$. On notera par ailleurs $\mathbb{K}$ l'un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et quand on emploiera les notations $[a,b]$ ou $]a,b[$, il sera sous-entendu que a et b sont deux réels et que $a<b$.

1 Définitions et premières propriétés

1.1 Définitions de la dérivabilité

Définition (Dérivabilité en un point ou sur une partie de $\mathbb{R}$, tangente) Soient $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction et $a \in D$.

- **Dérivabilité :** On dit que f est *dérivable en a* si la limite $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et est finie. Cette limite est alors appelée le *nombre dérivé de f en a* et notée $f'(a)$.

  L'ensemble des fonctions dérivables sur D et à valeurs dans $\mathbb{K}$, i.e. dérivables en tout point de D, est noté $\mathscr{D}(D,\mathbb{K})$. Pour tout $f \in \mathscr{D}(D,\mathbb{K})$, la fonction $x \longmapsto f'(x)$ sur D est appelée la *dérivée de f*.

- **Tangente :** Si f est dérivable en a, la droite d'équation $y = f(a)+f'(a)(x-a)$ est appelée la *tangente de f en a*. Et si $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \pm\infty$, la droite d'équation $x=a$ est appelée la *tangente de f en a*.

Si f est dérivable en a : $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \approx f'(a)$ pour $x \approx a$, donc $f(x) \approx f(a)+f'(a)(x-a)$. Ce n'est pas rigoureux, mais cela nous convainc que la tangente de f en a est la droite la plus proche du graphe de f au voisinage de a.

Exemple Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $x \longmapsto x^n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $x \longmapsto nx^{n-1}$.

Démonstration Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{a\}$: $\frac{x^n-a^n}{x-a} = \sum_{k=0}^{n-1} a^k x^{n-k-1} \underset{x\to a}{\longrightarrow} \sum_{k=0}^{n-1} a^k a^{n-k-1} = na^{n-1}$.

Exemple La fonction valeur absolue $|\cdot|$ n'est pas dérivable en 0.

Démonstration Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$: $\frac{|x|-|0|}{x-0} = \begin{cases} 1 & \text{si } x>0 \\ -1 & \text{si } x<0, \end{cases}$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{|x|-|0|}{x-0} = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{|x|-|0|}{x-0} = -1$. La fonction $x \longmapsto \frac{|x|-|0|}{x-0}$ n'a donc pas de limite en 0.

Théorème (Dérivabilité implique continuité) Soient $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction et $a \in D$. Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.

Attention ! La réciproque est totalement fausse, pensez à la fonction valeur absolue en 0. C'est contre-intuitif, mais il existe même des fonctions qui sont continues sur tout $\mathbb{R}$ mais dérivables en aucun point.

Démonstration Si f est dérivable en a : $f(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}\times(x-a)+f(a) \underset{x\to a}{\longrightarrow} f'(a)\times 0+f(a) = f(a)$, donc f est continue en a.

Le résultat suivant est la version dérivable d'un résultat analogue sur les limites du chapitre « Limites d'une fonction ».

Théorème (Caractérisation de la dérivabilité à partir des parties réelle et imaginaire) Soient $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction et $a \in D$.

f est dérivable en a si et seulement si $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ le sont.

De plus, dans ce cas : $f'(a) = \mathrm{Re}(f)'(a) + \mathrm{i}\,\mathrm{Im}(f)'(a)$.

Définition **(Dérivabilité à gauche/à droite en un point)** Soient $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction et $a \in D$.

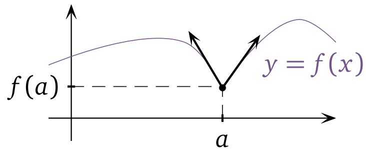
- **Dérivabilité à gauche :** On dit que f est *dérivable à gauche en a* si $f|_{D\cap]-\infty,a]}$ est dérivable en a, i.e. si la limite $\lim\limits_{x\to a^-} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et est finie. Cette limite est notée $f'_g(a)$.
- **Dérivabilité à droite :** On dit que f est *dérivable à droite en a* si $f|_{D\cap[a,+\infty[}$ est dérivable en a, i.e. si la limite $\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et est finie. Cette limite est notée $f'_d(a)$.

Parce qu'elle n'est qu'un cas particulier de la dérivabilité en général, la dérivabilité à gauche (resp. à droite) implique la continuité à gauche (resp. à droite).

Théorème **(Caractérisation de la dérivabilité à l'aide des dérivabilités à gauche/à droite)** Soient $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction et $a \in D$ un point au voisinage duquel f est définie à gauche et à droite.

f est dérivable en a si et seulement si f est dérivable à gauche et à droite en a avec de plus $f'_g(a) = f'_d(a)$.

Ci-contre, f est dérivable à gauche et à droite en a, mais pas en a car $f'_g(a) \neq f'_d(a)$.

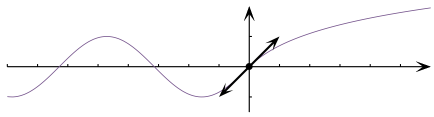


Démonstration

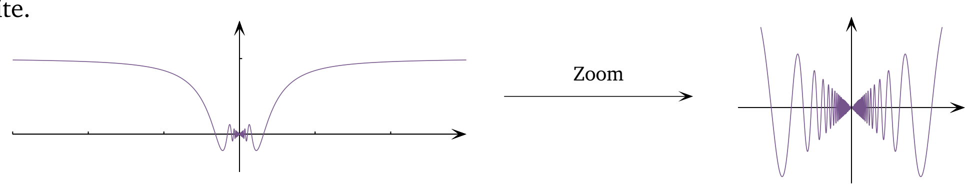
$$\begin{aligned}
f \text{ est dérivable en } a \quad &\iff \quad \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \text{ existe et est finie} \\
&\iff \quad \lim_{x\to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \text{ et } \lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \text{ existent, sont finies et égales} \\
&\iff \quad f \text{ est dérivable à gauche et à droite en } a \text{ et } f'_g(a) = f'_d(a).
\end{aligned}$$

Exemple La fonction $x \xmapsto{f} \begin{cases} \ln(1+x) & \text{si } x \geqslant 0 \\ \sin x & \text{si } x < 0 \end{cases}$ est dérivable en 0.

Démonstration $f'_g(0) = f'_d(0) = 1$, donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 1$.



Attention ! Une fonction peut n'être ni dérivable à gauche ni dérivable à droite en un point. C'est le cas de la fonction $x \xmapsto{f} x \sin \dfrac{1}{x}$ en 0 prolongée par continuité en 0 par $f(0) = 0$, car $x \longmapsto \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \sin \dfrac{1}{x}$ n'a pas de limite en 0, ni à gauche ni à droite.



1.2 Opérations sur la dérivabilité

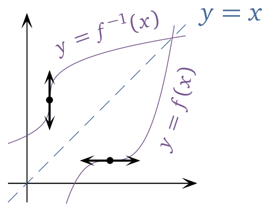
Théorème **(Opérations sur la dérivabilité)**

(i) **Combinaison linéaire, produit, quotient :** Pour toutes fonctions $f, g \in \mathscr{D}(D, \mathbb{C})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, les fonctions $\lambda f + \mu g$ et fg sont dérivables sur D, ainsi que $\dfrac{f}{g}$ si g ne s'annule pas. En outre :
$$(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g', \qquad (fg)' = f'g + fg' \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

(ii) **Composition :** Pour toutes fonctions $f \in \mathscr{D}(D, E)$ et $g \in \mathscr{D}(E, \mathbb{C})$, $g \circ f$ est dérivable sur D et :
$$(g \circ f)' = f' \times g' \circ f.$$

(iii) **Réciproque :** Soit I un intervalle. Pour toute fonction $f \in \mathscr{D}(I, \mathbb{R})$ bijective de I sur $J = f(I)$, SI f' NE S'ANNULE PAS SUR I, alors f^{-1} est dérivable sur J et : $\left(f^{-1}\right)' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}$.

On aurait pu énoncer ce résultat dans le cadre de la dérivabilité en un seul point. Dans le cas de la composition, le théorème énoncerait que si f est dérivable en $a \in D$ et si g est dérivable en $g(a) \in E$, alors $g \circ f$ est dérivable en a.



Attention ! L'hypothèse de non-annulation de f' est CRUCIALE ! Sur la figure ci-contre, f' s'annule en a, donc f possède une tangente HORIZONTALE en a. Il en découle que f^{-1} possède une tangente VERTICALE en $f(a)$, donc N'est PAS dérivable en $f(a)$.

Démonstration

(i) Fixons $a \in D$. La dérivabilité de g en a implique sa continuité, donc $\lim\limits_{x \to a} g(x) = g(a)$.

Tout d'abord : $\dfrac{(\lambda f + \mu g)(x) - (\lambda f + \mu g)(a)}{x-a} = \lambda \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} + \mu \dfrac{g(x)-g(a)}{x-a} \underset{x \to a}{\longrightarrow} \lambda f'(a) + \mu g'(a)$.

Ensuite : $\dfrac{(fg)(x)-(fg)(a)}{x-a} = \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \times g(x) + f(a) \times \dfrac{g(x)-g(a)}{x-a} \underset{x \to a}{\longrightarrow} f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.

Enfin, si $g(a) \neq 0$: $\dfrac{\dfrac{1}{g(x)} - \dfrac{1}{g(a)}}{x-a} = -\dfrac{1}{g(x)g(a)} \times \dfrac{g(x)-g(a)}{x-a} \underset{x \to a}{\longrightarrow} -\dfrac{g'(a)}{g(a)^2}$.

(ii) Fixons $a \in D$. Pour tout $y \in E$, posons $\tau(y) = \begin{cases} \dfrac{g(y) - g\big(f(a)\big)}{y - f(a)} & \text{si } y \neq f(a) \\ g'\big(f(a)\big) & \text{si } y = f(a). \end{cases}$ Par dérivabilité de g en $f(a)$: $\lim\limits_{y \to f(a)} \tau(y) = g'\big(f(a)\big)$, et pour tout $x \in E$: $\tau\big(f(x)\big)\big(f(x) - f(a)\big) = g \circ f(x) - g \circ f(a)$, y compris pour $x = a$, donc : $\dfrac{g \circ f(x) - g \circ f(a)}{x-a} = \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \times \tau\big(f(x)\big) \underset{x \to a}{\longrightarrow} f'(a)g'\big(f(a)\big)$.

(iii) Fixons $b \in J$. Parce que f est continue en $f^{-1}(b)$, f^{-1} l'est en b, donc $\lim\limits_{y \to b} f^{-1}(y) = f^{-1}(b)$ ♣.

Ensuite, f est dérivable en $f^{-1}(b)$: $\lim\limits_{x \to f^{-1}(b)} \dfrac{f(x) - f\big(f^{-1}(b)\big)}{x - f^{-1}(b)} = f'\big(f^{-1}(b)\big)$, donc comme f' ne s'annule pas en $f^{-1}(b)$: $\lim\limits_{x \to f^{-1}(b)} \dfrac{x - f^{-1}(b)}{f(x) - f\big(f^{-1}(b)\big)} = \dfrac{1}{f'\big(f^{-1}(b)\big)}$ ♠.

Composons enfin ♣ et ♠ : $\lim\limits_{y \to b} \dfrac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y-b} = \lim\limits_{y \to b} \dfrac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{f\big(f^{-1}(y)\big) - f\big(f^{-1}(b)\big)} = \dfrac{1}{f'\big(f^{-1}(b)\big)}$.

Exemple La fonction $x \longmapsto \sqrt{x^3 \operatorname{Arcsin} x}$ est dérivable sur $]-1,1[$.

Démonstration

- La fonction $x \longmapsto x^3 \operatorname{Arcsin} x$ est dérivable sur $]-1,1[$ par produit. Positive sur $[-1,1]$ et nulle seulement en 0, cette fonction est donc dérivable sur $]-1,1[\setminus\{0\}$ À VALEURS DANS $\mathbb{R}_+^*$. La fonction racine carrée étant dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ SEULEMENT, $x \longmapsto \sqrt{x^3 \operatorname{Arcsin} x}$ est dérivable sur $]-1,1[\setminus\{0\}$ par composition.
- Ce raisonnement ne nous apprend rien sur la fonction $x \longmapsto \sqrt{x^3 \operatorname{Arcsin} x}$ en 0 car nos théorèmes d'opérations sur la dérivabilité nous parlent de dérivabilité mais pas de NON-dérivabilité. De fait, la fonction $x \longmapsto \sqrt{x^3 \operatorname{Arcsin} x}$ est quand même dérivable en 0 car :
$$\frac{\sqrt{x^3 \operatorname{Arcsin} x} - 0}{x - 0} = \frac{\sqrt{x^4}}{x} \times \sqrt{\frac{\operatorname{Arcsin} x}{x}} = x\sqrt{\frac{\operatorname{Arcsin} x - \operatorname{Arcsin} 0}{x - 0}} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0 \times \sqrt{\operatorname{Arcsin}'(0)} = 0.$$
On pourrait montrer en revanche que $x \longmapsto \sqrt{x^3 \operatorname{Arcsin} x}$ N'est PAS dérivable en -1 et 1.

1.3 DÉRIVÉES SUCCESSIVES

Définition (Dérivées successives et fonction de classe $\mathscr{C}^k$) Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction.

- **Dérivées successives :** On pose $f^{(0)} = f$. Ensuite, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, si on a réussi au cours des étapes précédentes à définir la fonction $f^{(k-1)}$ sur D et si elle est dérivable sur D, on dit que f est *k fois dérivable sur D* et on pose $f^{(k)} = \big(f^{(k-1)}\big)'$.
- **Classe $\mathscr{C}^k$:** Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on dit que f est *de classe $\mathscr{C}^k$ sur D* si f est k fois dérivable sur D et si $f^{(k)}$ est continue sur D.
On note $\mathscr{C}^k(D,\mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^k$ sur D à valeurs dans $\mathbb{K}$.
- **Classe $\mathscr{C}^\infty$:** On dit que f est *de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur D* si f est dérivable autant de fois qu'on le veut sur D.
On note $\mathscr{C}^\infty(D,\mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur D à valeurs dans $\mathbb{K}$.

✖ **Attention !** Être de classe $\mathscr{C}^1$, ce n'est pas être « dérivable et continue » — puisqu'on est toujours continu quand on est dérivable — mais être « dérivable à dérivée continue ».

Sur la figure ci-dessous, chaque flèche décrit une implication.

$$\boxed{\text{Classe } \mathscr{C}^\infty} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \boxed{\text{Classe } \mathscr{C}^2} \longrightarrow \boxed{\text{Dérivabilité deux fois}} \longrightarrow \boxed{\text{Classe } \mathscr{C}^1} \longrightarrow \boxed{\text{Dérivabilité}} \longrightarrow \boxed{\text{Continuité} = \text{Classe } \mathscr{C}^0}$$

Théorème (Opérations sur les dérivées successives) Soit $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

- **Combinaison linéaire, produit, quotient :** $\mathscr{C}^k(D,\mathbb{C})$ est stable par combinaison linéaire et produit, ainsi que par quotient tant que le dénominateur ne s'annule pas.
  En outre, pour toutes fonctions $f, g \in \mathscr{C}^k(D,\mathbb{C})$: $\quad (fg)^{(k)} = \displaystyle\sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} f^{(p)} g^{(k-p)} \quad$ (*formule de Leibniz*).
- **Composition :** Pour toutes fonctions $f \in \mathscr{C}^k(D,E)$ et $g \in \mathscr{C}^k(E,\mathbb{C})$, $g \circ f$ est de classe $\mathscr{C}^k$ sur D.
- **Réciproque :** Soit I un intervalle. Pour toute fonction $f \in \mathscr{C}^k(I,\mathbb{R})$ bijective de I sur $J = f(I)$, **SI f' NE S'ANNULE PAS SUR I**, alors f^{-1} est de classe $\mathscr{C}^k$ sur J.

On peut remplacer dans chacune de ces assertions la classe $\mathscr{C}^k$ par une hypothèse de dérivabilité k fois.

Pour montrer qu'une fonction est deux fois dérivable, on applique directement le théorème précédent, on ne s'amuse pas à montrer qu'elle est dérivable, à la dériver, puis à montrer que sa dérivée est de nouveau dérivable !

Démonstration On raisonne ensuite par récurrence sur k avec des initialisations toutes triviales car être de classe $\mathscr{C}^0$, c'est être continue. Le cas des combinaisons linéaires tombe sous le sens.

- **Produit (hérédité) :** Soit $k \in \mathbb{N}$. On suppose que $\mathscr{C}^k(D,\mathbb{C})$ est stable par produit et que la formule de Leibniz y est vraie pour les dérivées $k^{\text{èmes}}$. Soient $f, g \in \mathscr{C}^{k+1}(D,\mathbb{C})$. Les fonctions f et g sont dérivables car $k+1 \geqslant 1$, donc fg aussi et $(fg)' = f'g + fg'$. Or $f'g$ et fg' sont de classe $\mathscr{C}^k$ par hypothèse de récurrence, donc $(fg)'$ aussi par addition. Conclusion : fg est de classe $\mathscr{C}^{k+1}$. Ensuite :

$$(fg)^{(k+1)} = \big(f'g\big)^{(k)} + \big(fg'\big)^{(k)} \overset{\text{HDR}}{=} \sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} f^{(p+1)} g^{(k-p)} + \sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} f^{(p)} g^{(k-p+1)} = \sum_{p=1}^{k+1} \binom{k}{p-1} f^{(p)} g^{(k-p+1)} + \sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} f^{(p)} g^{(k-p+1)}$$
$$= \sum_{p=0}^{k+1} \binom{k}{p-1} f^{(p)} g^{(k-p+1)} + \sum_{p=0}^{k+1} \binom{k}{p} f^{(p)} g^{(k-p+1)} \underset{\text{de Pascal}}{\overset{\text{Formule}}{=}} \sum_{p=0}^{k+1} \binom{k+1}{p} f^{(p)} g^{(k+1-p)}.$$

- **Quotient (hérédité) :** Soit $k \in \mathbb{N}$. On suppose que $\mathscr{C}^k(D,\mathbb{C})$ est stable par quotient tant que le dénominateur ne s'annule pas. Soient $f, g \in \mathscr{C}^{k+1}(D,\mathbb{C})$. On suppose que g ne s'annule pas sur D. Les fonctions f et g sont dérivables car $k+1 \geqslant 1$, donc $\dfrac{f}{g}$ aussi et $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$. Or $f'g - fg'$ et g^2 sont de classe $\mathscr{C}^k$ par produit et différence, donc $\left(\dfrac{f}{g}\right)'$ aussi par hypothèse de récurrence. Conclusion : $\dfrac{f}{g}$ est de classe $\mathscr{C}^{k+1}$.
- **Composition (hérédité) :** Soit $k \in \mathbb{N}$. On suppose que $g \circ f \in \mathscr{C}^k(D,\mathbb{C})$ pour toutes fonctions $f \in \mathscr{C}^k(D,E)$ et $g \in \mathscr{C}^k(E,\mathbb{C})$. Soient $f \in \mathscr{C}^{k+1}(D,E)$ et $g \in \mathscr{C}^{k+1}(E,\mathbb{C})$. Les fonctions f et g sont dérivables car $k+1 \geqslant 1$, donc $g \circ f$ aussi et $\big(g \circ f\big)' = f' \times g' \circ f$. Or $g' \circ f$ est de classe $\mathscr{C}^k$ par hypothèse de récurrence, donc $\big(g \circ f\big)'$ aussi par produit. Conclusion : $g \circ f$ est de classe $\mathscr{C}^{k+1}$.
- **Réciproque :** Imiter les preuves précédentes.

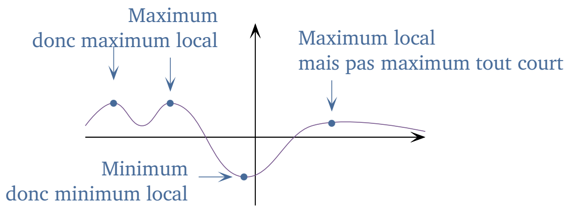
2 QUELLES INFORMATIONS PEUT-ON TIRER D'UNE DÉRIVÉE ?

2.1 EXTREMA LOCAUX ET POINTS CRITIQUES

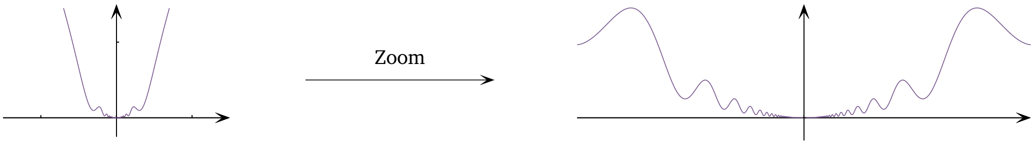
Définition **(Extremum local, point critique)** Soient $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $a \in D$.

- **Extremum local :** On dit que f possède un *maximum* (resp. *minimum*) *local en* a si f est majorée (resp. minorée) par $f(a)$ au voisinage de a.
- **Point critique :** On dit que a est un *point critique de* f si f est dérivable en a avec $f'(a) = 0$.

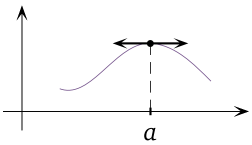
Un maximum local n'est pas forcément un maximum de la fonction sur tout son domaine de définition.



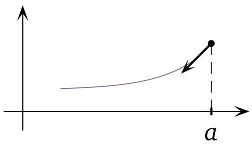
Attention ! On peut avoir un minimum local en a sans que f soit décroissante à gauche et croissante à droite au voisinage de a. C'est le cas de la fonction $x \longmapsto x^2 + 2x^2 \sin^2 \dfrac{1}{x}$ prolongée par 0 en 0, représentée ci-dessous.



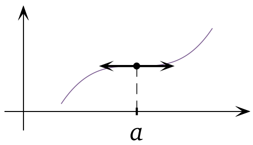
Théorème **(Condition nécessaire d'existence d'un extremum local en un point intérieur)** Soient $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $a \in D$ un point intérieur. Si f est dérivable en a et possède un extremum local en a, a est un point critique de f.



Situation standard du théorème (cas d'un maximum local).



Il est important que a soit un point INTÉRIEUR.



Réciproque fausse : Tout point critique n'est pas forcément le signe d'un extremum local.

Démonstration Étudions le cas d'un maximum local en a. Comme a est un point intérieur à D, D contient un voisinage $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$ de a pour un certain $\varepsilon > 0$, et comme f possède un maximum local en a : $f(x) \leqslant f(a)$ pour tout $x \in]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$ — avec le même ε quitte à le diminuer. Par conséquent :

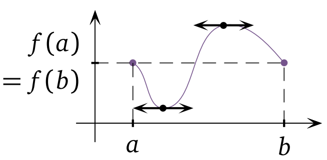
$$\forall x \in]a-\varepsilon, a[, \quad \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geqslant 0 \qquad \text{et} \qquad \forall x \in]a, a+\varepsilon[, \quad \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leqslant 0.$$

Or f est dérivable en a, donc si nous faisons tendre x vers a à gauche dans l'inégalité de gauche : $f'(a) \geqslant 0$, et si nous le faisons tendre à droite dans celle de droite : $f'(a) \leqslant 0$. Conclusion : $f'(a) = 0$.

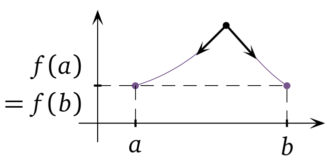
2.2 THÉORÈMES DE ROLLE ET DES ACCROISSEMENTS FINIS

Théorème **(Théorème de Rolle)** Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ pour laquelle $f(a) = f(b)$. Il existe un réel $c \in]a, b[$ pour lequel $f'(c) = 0$.

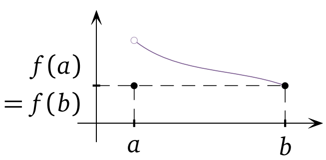
Chaque hypothèse du théorème a son importance.



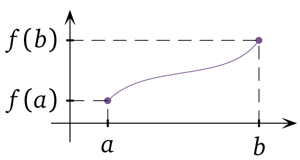
Situation standard du théorème de Rolle.



Si on enlève la dérivabilité même en un point, rien ne va plus.



Si on enlève la continuité, même sur les bords, ce n'est pas mieux.



Si $f(a) \neq f(b)$, c'est toujours la cata.

Démonstration Continue sur le SEGMENT $[a,b]$, f y est bornée et possède un minimum m et un maximum M d'après le théorème des bornes atteintes.

- Si $f(a)=f(b)\neq M$, alors comme f atteint ses bornes : $f(c)=M$ pour un certain $c\in\,]a,b[$. Par hypothèse, c n'est alors pas une borne de $[a,b]$, donc $f'(c)=0$ d'après le théorème précédent.
- Si $f(a)=f(b)\neq m$, même raisonnement.
- Dernier cas enfin : $f(a)=f(b)=m=M$. Dans ce cas, f est constante de valeur $M=m$ sur tout $[a,b]$ par définition de m et M, donc f' est nulle sur tout $[a,b]$!

Exemple Pour tous $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$, le polynôme $P=4\alpha X^3+3\beta X^2+2\gamma X-(\alpha+\beta+\gamma)$ possède une racine dans $]0,1[$.

Démonstration Fixons $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$.

- On a bien sûr d'abord envie d'utiliser le TVI. Hélas : $P(0)=-(\alpha+\beta+\gamma)$ et $P(1)=3\alpha+2\beta+\gamma$ et le signe de ces deux nombres n'est pas du tout clair.
- Changeons de point de vue. Le polynôme $Q=\alpha X^4+\beta X^3+\gamma X^2-(\alpha+\beta+\gamma)X$ est une primitive de P et $Q(0)=Q(1)=0$, donc d'après le théorème de Rolle, $P=Q'$ s'annule au moins une fois entre 0 et 1.

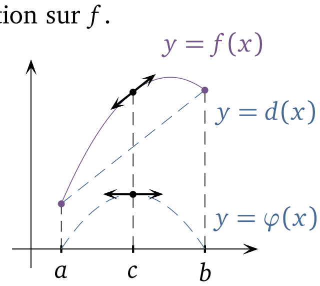
Attention ! Le théorème de Rolle est faux pour les fonctions complexes. Par exemple, la fonction $t\longmapsto e^{it}$ est continue sur $[0,2\pi]$, dérivable sur $]0,2\pi[$, et $e^{i0}=e^{2i\pi}=1$, mais pourtant sa dérivée $t\longmapsto ie^{it}$ ne s'annule pas.

Théorème (Théorème des accroissements finis) Soit $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Il existe un réel $c\in\,]a,b[$ pour lequel $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$, ou encore $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$.

Le théorème des accroissements finis généralise le théorème de Rolle. La morale de l'histoire ?

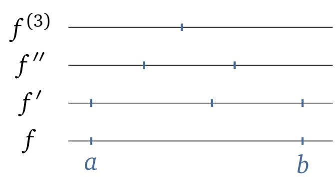
SI J'AI DES INFORMATIONS SUR f', J'EN AI AUSSI SUR f.

Typiquement, toute majoration/minoration de f' peut être convertie en une majoration/minoration sur f.



Démonstration Notons d la fonction affine $x\longmapsto\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)$ et φ la fonction $f-d$. Cette fonction φ est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et $\varphi(a)=\varphi(b)=0$. Le théorème de Rolle affirme donc que $\varphi'(c)=0$ pour un certain $c\in\,]a,b[$, ou encore $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$.

Exemple Soit $f\in\mathscr{C}^3([a,b],\mathbb{R})$. On suppose que $f(a)=f'(a)=f(b)=f'(b)=0$. Alors pour un certain $c\in\,]a,b[$: $f^{(3)}(c)=0$.

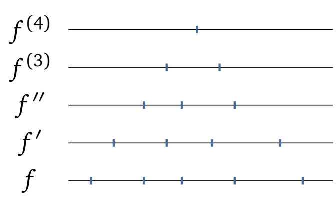


Démonstration Comme f est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ avec $f(a)=f(b)=0$, le théorème de Rolle montre que $f'(u)=0$ pour un certain $u\in\,]a,b[$.

Ensuite, f' étant continue sur $[a,u]$ et $[u,b]$ et dérivable sur $]a,u[$ et $]u,b[$ avec $f'(a)=f'(u)=f'(b)=0$, le théorème de Rolle montre que $f''(v)=f''(w)=0$ pour certains $v\in\,]a,u[$ et $w\in\,]u,b[$.

Enfin, comme f'' est continue sur $[v,w]$ et dérivable sur $]v,w[$ avec $f''(v)=f''(w)$, le théorème de Rolle montre que $f^{(3)}(c)=0$ pour un certain $c\in\,]v,w[\,\subset\,]a,b[$.

Exemple Soient I un intervalle et $f\in\mathscr{C}^k(I,\mathbb{R})$. Si f s'annule en au moins $k+1$ points distincts, alors $f^{(k)}$ s'annule en au moins un point. Ce résultat est un grand classique, étudiez-le bien !



Démonstration La figure ci-contre illustre l'idée de la preuve pour $k=4$. On part de 5 zéros (au moins) pour f. En appliquant le théorème de Rolle entre ces zéros on parvient à exhiber 4 zéros (au moins) de f', puis 3 (au moins) pour f''... et enfin (au moins) un zéro de $f^{(4)}$.

Nous allons montrer proprement par récurrence que pour tout $i\in[\![0,k]\!]$, $f^{(i)}$ s'annule en au moins $k-i+1$ points distincts. Pour $i=k$, on a tout simplement le résultat.

Initialisation : L'assertion pour $i=0$ n'est autre que l'hypothèse du théorème.

Hérédité : Soit $i \in [\![0, k-1]\!]$. On suppose que $f^{(i)}$ s'annule en au moins $k-i+1$ points distincts $x_1, \ldots, x_{k-i+1}$ rangés dans l'ordre $x_1 < \ldots < x_{k-i+1}$. Pour tout $j \in [\![1, k-i]\!]$, $f^{(i)}$ est continue sur $[x_j, x_{j+1}]$, dérivable sur $]x_j, x_{j+1}[$ et $f^{(i)}(x_j) = f^{(i)}(x_{j+1}) = 0$. Le théorème de Rolle affirme donc l'existence d'un zéro x'_j de $f^{(i+1)}$ compris strictement entre x_j et x_{j+1}. Nous voilà donc à la tête de $k-i = k-(i+1)+1$ zéros de $f^{(i+1)}$, lesquels sont bien deux à deux distincts car $x'_1 < x_2 < x'_2 < x_3 < \ldots < x'_{k-i} < x_{k-i+1}$.

2.3 Constance, monotonie et dérivabilité

Les constantes de primitivation et de résolution des équations différentielles linéaires sont toutes issues du théorème qui suit, il était temps que nous le démontrions !

Théorème (Caractérisation des fonctions constantes dérivables) Soient I un **intervalle** et $f \in \mathscr{D}(I, \mathbb{C})$.

f est constante sur I si et seulement si f' est nulle sur I.

Démonstration Une preuve du cas réel suffit via la caractérisation de la dérivabilité à partir des parties réelle et imaginaire. Soit donc $f \in \mathscr{D}(I, \mathbb{R})$.

- Si f est constante sur I, alors pour tout $a \in I$: $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = 0 \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0$, donc $f'(a) = 0$.
- Réciproquement, supposons f' nulle sur I et donnons-nous $x, y \in I$ avec $x < y$. Comme f est continue sur $[x, y]$ et dérivable sur $]x, y[$: $\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} = f'(c) = 0$ pour un certain $c \in]x, y[$ d'après le théorème des accroissements finis. Aussitôt $f(x) = f(y)$, donc f est constante.

Théorème (Caractérisation des fonctions monotones dérivables) Soient I un **intervalle** et $f \in \mathscr{D}(I, \mathbb{R})$.

(i) f est croissante sur I si et seulement si f' est positive ou nulle sur I.

(ii) f est strictement croissante sur I si et seulement si f' est positive ou nulle sur I et n'est identiquement nulle sur aucun intervalle $[a, b]$ avec $a < b$.

En particulier, si f' est strictement positive sur I, alors f est strictement croissante sur I.

On dispose bien sûr d'un résultat analogue sur les fonctions décroissantes.

Démonstration

(i) Reprenez simplement la preuve du théorème précédent avec des inégalités à la place des égalités.

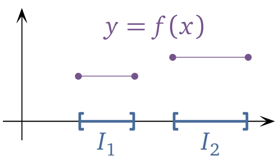
(ii) Supposons d'abord f strictement croissante sur I. D'après (i), f' est positive ou nulle sur I. Ensuite, si f' est identiquement nulle sur un intervalle $[a, b]$ avec $a \leqslant b$, alors f y est constante donc $f(a) = f(b)$, donc $a = b$ par stricte monotonie.

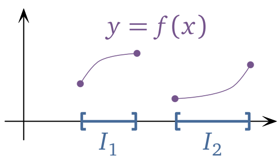
Réciproquement, supposons que f' est positive ou nulle sur I et n'est identiquement nulle sur aucun intervalle $[a, b]$ avec $a < b$. D'après (i), f est croissante. Soient $x, y \in I$ avec $x < y$. Par croissance : $f(x) \leqslant f(y)$. Si $f(x) = f(y)$, la croissance de f montre que f est constante sur $[x, y]$, donc que f' est identiquement nulle sur $[x, y]$ — ce qui est faux. Forcément $f(x) < f(y)$.

Attention !

- Mine de rien, l'hypothèse selon laquelle I est un **intervalle** est indispensable. Le théorème est faux si I est une réunion d'intervalles non vides disjoints.

f est constante sur I_1 et sur I_2, donc $f' = 0$ sur I_1 et sur I_2, mais f n'est pas constante sur $I_1 \cup I_2$.

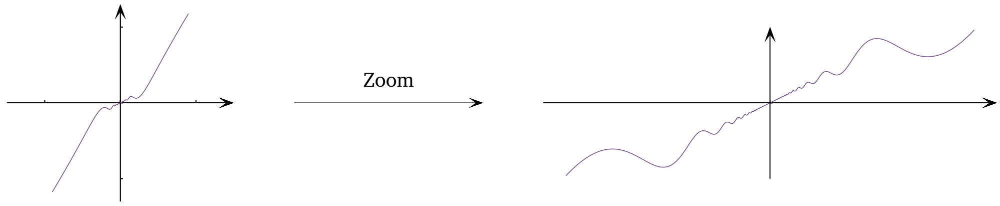




f est croissante sur I_1 et sur I_2, donc $f' \geqslant 0$ sur I_1 et sur I_2, mais f n'est pas croissante sur $I_1 \cup I_2$.

- On peut avoir $f'(a) > 0$ en un point a sans que f soit strictement croissante au voisinage de a. C'est le cas de la fonction $x \overset{f}{\longmapsto} x^2 \sin \dfrac{1}{x} + \dfrac{x}{2}$ prolongée par 0 en 0. Bien sûr, f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et en revenant au taux d'accroissement de f, on montre aisément que $f'(0) = \dfrac{1}{2} > 0$. Pourtant : $f'(x) = 2x \sin \dfrac{1}{x} - \cos \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, donc f' change de signe régulièrement au voisinage de 0, donc f change de sens de variation régulièrement au voisinage de

0. En deux mots, le $x \sin \frac{1}{x}$ est petit au voisinage de 0 alors que le $\cos \frac{1}{x}$ prend régulièrement les valeurs 1 et -1. Comme on ajoute $\frac{1}{2}$, f' prend régulièrement au voisinage de 0 des valeurs proches de $-\frac{1}{2}$ et $\frac{3}{2}$.

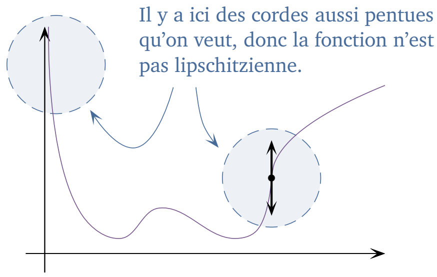


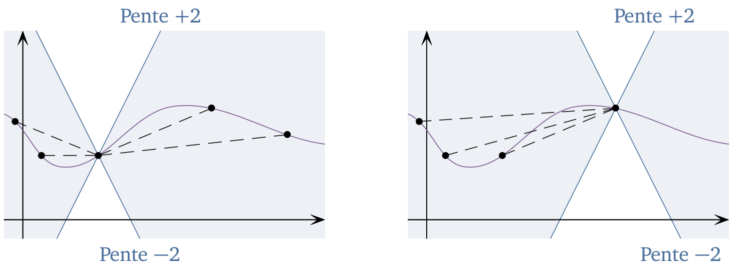
2.4 L'inégalité des accroissements finis

Définition (Lipschitzianité) Soient $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction et $K \geqslant 0$. On dit que f est *K-lipschitzienne sur D* si :

$$\forall x, y \in D, \quad \left|f(x) - f(y)\right| \leqslant K\,|x-y|.$$

La fonction f est K-lipschitzienne sur D si $\left|\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| \leqslant K$ pour tous $x, y \in D$ distincts, i.e. si les pentes des cordes de son graphe sont majorées par K en valeur absolue. Plus généralement, dire que f est lipschitzienne revient à dire que les pentes des cordes de son graphe sont bornées.





Les figures de gauche illustrent la 2-lipschitzianité de la fonction représentée. Les cordes issues de chaque point ont toutes un coefficient directeur compris entre -2 et 2.

Exemple La fonction $x \longmapsto |x|$ est 1-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$ d'après l'inégalité triangulaire généralisée $\big||x|-|y|\big| \leqslant |x-y|$.

Exemple La fonction $x \overset{f}{\longmapsto} \dfrac{1}{x}$ est 1-lipschitzienne sur $[1, +\infty[$ mais pas sur $\mathbb{R}_+^*$.

Démonstration Pour tous $x, y \geqslant 1$: $\quad \left|f(x)-f(y)\right| = \left|\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y}\right| = \dfrac{|x-y|}{xy} \leqslant |x-y|$.
En revanche : $\dfrac{f(2x)-f(x)}{2x-x} = -\dfrac{1}{2x^2} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} -\infty$, donc l'ensemble des réels $\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}$ n'est pas borné, x et y décrivant $\mathbb{R}_+^*$ avec $x \neq y$, donc f n'est pas lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+^*$.

Théorème (La lipschitzianité implique la continuité) Toute fonction lipschitzienne est continue.

Démonstration Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction K-lipschitzienne pour un certain $K \geqslant 0$. Pour tous $a, x \in D$: $\left|f(x)-f(a)\right| \leqslant K\,|x-a|$, donc $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ par encadrement, i.e. f est continue en a.

Théorème (Inégalité des accroissements finis) Soient I un intervalle et $f \in \mathscr{D}(I, \mathbb{C})$. Si f' est bornée sur I, alors f est $\|f'\|_\infty$-lipschitzienne sur I, où l'on rappelle que $\|f'\|_\infty = \sup\limits_{x \in I} \left|f'(x)\right|$.

Le fait que f' soit bornée garantit la bonne définition de sa norme infinie d'après la propriété de la borne supérieure.

Alors que le théorème de Rolle et le théorème des accroissements finis sont faux pour les fonctions complexes, l'inégalité des accroissements finis constitue quant à elle un résultat robuste encore valable dans le cas complexe.

Démonstration Soient $x,y\in I$ avec $x<y$.

- **Cas où f est réelle :** Comme f est continue sur $[x,y]$ et dérivable sur $]x,y[$: $\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}=f'(c)$ pour un certain $c\in\,]x,y[$ d'après le théorème des accroissements finis. Ainsi :
$$\big|f(x)-f(y)\big|=\big|f'(c)\big|\times|x-y|\leqslant\|f'\|_\infty|x-y|.$$
- **Cas général :** Pour majorer le nombre complexe $f(x)-f(y)$ en module, nous allons nous ramener au cas précédent. En notant θ un réel pour lequel $e^{-i\theta}\big(f(x)-f(y)\big)$ est **RÉEL** et φ la fonction $\mathrm{Re}\big(e^{-i\theta}f\big)$:
$$\big|f(x)-f(y)\big|=\Big|e^{-i\theta}\big(f(x)-f(y)\big)\Big|=\Big|\mathrm{Re}\Big(e^{-i\theta}\big(f(x)-f(y)\big)\Big)\Big|=\big|\varphi(x)-\varphi(y)\big|.$$
Or φ est dérivable sur I et : $|\varphi'|=\big|\mathrm{Re}\big(e^{-i\theta}f'\big)\big|\leqslant\big|e^{-i\theta}f'\big|=|f'|\leqslant\|f'\|_\infty$, donc d'après le cas réel : $\big|f(x)-f(y)\big|\leqslant\|f'\|_\infty|x-y|$. ■

Exemple Pour tout $x\in\mathbb{R}$: $|\sin x|\leqslant|x|$.

Démonstration La fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $|\sin'|=|\cos|\leqslant1$, donc sinus est 1-lipschitzienne d'après l'inégalité des accroissements finis, donc pour tout $x\in\mathbb{R}$: $|\sin x|=|\sin x-\sin 0|\leqslant|x-0|=|x|$.

Sur la figure ci-dessous, chaque flèche décrit une implication.

L'implication ★ est valable sous réserve que la dérivée de la fonction considérée soit **BORNÉE** — inégalité des accroissements finis.

$$\begin{tikzcd}
 & & & & & \text{Lipschitzianité} \arrow[dr] & \\
\text{Classe } \mathscr{C}^\infty \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & \text{Classe } \mathscr{C}^2 \arrow[r] & \text{Dérivabilité deux fois} \arrow[r] & \text{Classe } \mathscr{C}^1 \arrow[r] & \text{Dérivabilité} \arrow[r] \arrow[u, dashed, "\bigstar"] & \text{Continuité} = \text{Classe } \mathscr{C}^0
\end{tikzcd}$$

2.5 Inégalité des accroissements finis et suites récurrentes

Nous avons jusqu'ici étudié les suites récurrentes $u_{n+1}=f(u_n)$ essentiellement grâce au théorème de la limite monotone. En cas de convergence vers un réel ℓ et sous l'hypothèse que f est continue en ℓ, nous avons vu que ℓ est un point fixe de f. Ce que le théorème de la limite monotone ne précise pas en revanche, c'est la vitesse avec laquelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'approche de ℓ, i.e. sa *vitesse de convergence*. Pour obtenir une approximation de ℓ à 10^{-3} près, pouvons-nous nous contenter de calculer u_{10} ou bien devons-nous pousser jusqu'à u_{1000}, voire $u_{10^{10^{10}}}$? En d'autres termes, l'écart $|u_n-\ell|$ converge-t-il vers 0 plutôt vite — par exemple si $|u_n-\ell|\approx\dfrac{1}{2^n}$ — ou plutôt lentement — par exemple si $|u_n-\ell|\approx\dfrac{1}{\ln n}$? Nous allons voir que sous certaines conditions raisonnables, l'inégalité des accroissements finis nous garantit une convergence rapide de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers ℓ.

Le principe qui suit est vraiment important et se généralise à de nombreux contextes. Dans notre cas très simple, nous partons d'un intervalle I, d'une fonction $f:I\longrightarrow\mathbb{R}$ qui stabilise I et d'un certain $u_0\in I$, et nous notons $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'unique suite définie pour tout $n\in\mathbb{N}$ par la relation $u_{n+1}=f(u_n)$. On suppose par ailleurs que :

- f possède un point fixe ℓ sur I,
- f est K-lipschitizienne pour un certain $K\in[0,1[$ — attention, 1 exclu ! Typiquement, c'est l'inégalité des accroissements finis qui fournit un tel résultat.

Ces hypothèses permettent de montrer successivement :

- que pour tout $n\in\mathbb{N}$: $\big|f(u_n)-f(\ell)\big|\leqslant K\,|u_n-\ell|$, ou encore $|u_{n+1}-\ell|\leqslant K\,|u_n-\ell|$,
- puis par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$: $|u_n-\ell|\leqslant K^n\,|u_0-\ell|$,
- et enfin par encadrement que $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\ell$ car $0\leqslant K<1$.

Conclusion : nous avons atteint la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sans rien connaître de sa monotonie. Nous avons même obtenu mieux, l'inégalité $|u_n-\ell|\leqslant K^n\,|u_0-\ell|$ montre en effet que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge **VITE** vers ℓ, au moins aussi vite que la suite géométrique $(K^n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.

Exemple Le polynôme X^3+3X-1 possède une unique racine réelle, égale à 0,32218 à 10^{-5} près.

Démonstration

- Le TVI strictement monotone montre assez vite que la fonction $x\longmapsto x^3+3x-1$ est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, donc que le polynôme X^3+3X-1 possède une et une seule racine réelle. Précisément $\rho\in[0,1]$ car : $0^3+0-1=-1<0$ et $1^3+3-1=3>0$, et comme : $\rho^3+3\rho-1=0\iff\dfrac{1}{\rho^2+3}=\rho$, le réel ρ est aussi **LE** seul point fixe de $x\overset{f}{\longmapsto}\dfrac{1}{x^2+3}$ sur $[0,1]$. En outre, $[0,1]$ est stable par f.

- On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n) = \dfrac{1}{u_n^2+3}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On s'attend, si tout se passe bien, à ce que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ρ.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = -\dfrac{2x}{\left(x^2+3\right)^2}$. Nous allons majorer $|f'|$ pour pouvoir utiliser l'inégalité des accroissements finis. Pour cela, re-dérivons. Pour tout $x \in [0,1]$: $f''(x) = \dfrac{6\left(x^2-1\right)}{\left(x^2+3\right)^3} \leqslant 0$, donc f' est décroissante sur $[0,1]$, donc pour tout $x \in [0,1]$: $-\dfrac{1}{8} = f'(1) \leqslant f'(x) \leqslant f'(0) = 0$. Conclusion : f est contractante sur $[0,1]$, précisément $\dfrac{1}{8}$-lipschitzienne.
- Aussitôt, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $|u_{n+1}-\rho| = \big|f(u_n)-f(\rho)\big| \leqslant \dfrac{1}{8}|u_n-\rho|$, donc $|u_n-\rho| \leqslant \dfrac{|u_0-\rho|}{8^n} \leqslant \dfrac{1}{8^n}$ après une petite récurrence. Enfin $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \rho$ par encadrement car $0 \leqslant \dfrac{1}{8} < 1$.
- Nous pouvons maintenant utiliser $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour calculer une valeur approchée de ρ à 10^{-5} près, mais combien de termes devons-nous calculer ? Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\dfrac{1}{8^n} \leqslant 10^{-5} \iff 8^n \geqslant 100\,000$, et cette inégalité est vraie à partir de $n = 6$. On obtient donc une valeur approchée de ρ à 10^{-5} près en calculant u_6 : $u_6 \approx 0,32218$. En réalité, on constate que les cinq premières décimales de u_4 sont déjà correctes, mais ce qui compte, ce n'est pas ce qu'on CONSTATE, mais ce qu'on DÉMONTRE. Nos calculs n'ont peut-être pas eu la plus grande finesse possible, mais au moins c'est sûr, ils sont corrects.

2.6 Limite de la dérivée

Attention ! Les limites $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ et $\lim\limits_{x\to a} f'(x)$ sont conceptuellement très différentes. La première est liée à la dérivabilité de f en a et la deuxième à la continuité de f' en a. Rien à voir !

Théorème (Théorème de la limite de la dérivée) Soient I un intervalle, $a \in I$, $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $I \setminus \{a\}$ et CONTINUE EN a. Si $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x\neq a}} f'(x) = \ell$, alors $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = \ell$.

La notation $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x\neq a}} f'(x)$ signifie qu'on s'intéresse ici à la limite en a de la RESTRICTION $f'_{|I\setminus\{a\}}$.

Démonstration Pour tout $x \in I \cap]a,+\infty[$, f est continue sur $[a,x]$ et dérivable sur $]a,x[$, donc d'après le théorème des accroissements finis : $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(c_x)$ pour un certain $c_x \in]a,x[$ — même chose si $x \in I \cap]-\infty,a[$. Nous héritons ainsi d'une fonction $c : I \setminus \{a\} \longrightarrow I \setminus \{a\}$ pour laquelle $|c_x - a| < |x-a|$ pour tout $x \in I \setminus \{a\}$. Par encadrement $\lim\limits_{x\to a} c_x = a$, donc par composition : $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(c_x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$. ■

Théorème (Version $\mathscr{C}^1$ du théorème de la limite de la dérivée) Soient I un intervalle, $a \in I$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $I \setminus \{a\}$ et CONTINUE EN a. Si la limite $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x\neq a}} f'(x)$ existe et est finie, alors f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I tout entier.

Démonstration Notons ℓ la limite finie de l'hypothèse. D'après le théorème de la limite de la dérivée : $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = \ell$, donc f est dérivable en a et $f'(a) = \ell$. En retour $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x\neq a}} f'(x) = \ell = f'(a)$, donc f' est continue en a. ■

Exemple Pour tout $\alpha > 2$, la fonction $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(0) = 0$ et pour tout $x > 0$: $f(x) = x^\alpha \sin\dfrac{1}{x}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ tout entier.

Démonstration Bien sûr, f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0 = f(0)$ car la fonction $x \longmapsto \sin\dfrac{1}{x}$ est bornée, donc f est continue sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Ensuite : $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}\sin\dfrac{1}{x} - x^{\alpha-2}\cos\dfrac{1}{x} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0$ car $\alpha > 2$, donc d'après le théorème de la limite de la dérivée, f est dérivable en 0 et f' y est continue.