Dérivabilité

Les fonctions qu'on étudie en analyse sont souvent définies sur des intervalles, mais souvent aussi sur des réunions d'intervalles comme $\mathbb{R}^*$ ou $[0,1[\cup[2,3]$. Dans ce chapitre, pour simplifier, les lettres $D, E\ldots$ désigneront toujours des réunions finies d'intervalles — mais on pourrait généraliser à certaines réunions infinies d'intervalles comme $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[+\pi\mathbb{Z}$. On notera par ailleurs $\mathbb{K}$ l'un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et quand on emploiera les notations $[a,b]$ ou $]a,b[$, il sera sous-entendu que a et b sont deux réels et que : $\quad a<b$.

1 Définitions et premières propriétés

1.1 Définitions de la dérivabilité

Définition (Dérivabilité en un point ou sur une réunion raisonnable d'intervalles) Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction.

- Soit $a \in D$. On dit que f est *dérivable en a* si la limite : $\displaystyle \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ **existe et est finie**. Cette limite est alors appelée le *nombre dérivé de f en a* et notée $f'(a)$.
- On dit que f est *dérivable* sur D si f est dérivable en tout point de D. La fonction $x \longmapsto f'(x)$ est alors appelée la *dérivée de f*.

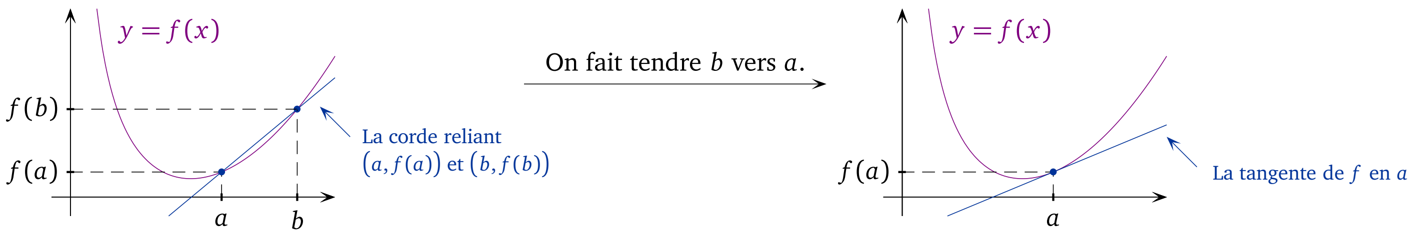
  On note $\mathscr{D}(D,\mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions dérivables sur D à valeurs dans $\mathbb{K}$.

✌ **Explication** ✌ Si on a choisi une fois pour toutes par convention de noter x la variable de f, le nombre dérivé de f en a peut être aussi noté $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a)$ — même chose avec n'importe quel symbole autre que x.

Définition (Tangente) Soient $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $a \in D$.

- Si f est dérivable en a, la droite d'équation : $\quad y=f(a)+f'(a)(x-a) \quad$ est appelée la *tangente de f en a*.
- Si : $\displaystyle \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\pm\infty$, la droite d'équation : $\quad x=a \quad$ est appelée la *tangente de f en a*.

✌ **Explication** ✌ Si f est dérivable en a, alors pour $x\approx a$: $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}\approx f'(a)$, donc : $f(x)\approx f(a)+f'(a)(x-a)$. Ce raisonnement sans rigueur justifie tout de même rapidement le fait que la tangente de f en a est **la droite la plus proche du graphe de f au voisinage de a**. Plus géométriquement, sachant que $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ est le coefficient directeur de la corde reliant les points de coordonnées $\big(a,f(a)\big)$ et $\big(b,f(b)\big)$, la limite : $\displaystyle f'(a)=\lim_{b\to a}\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ représente la « pente limite » des cordes précitées.



Exemple Pour tout $n\in\mathbb{N}$, la fonction $x\longmapsto x^n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $x\longmapsto nx^{n-1}$.

Démonstration Soit $a\in\mathbb{R}$. Pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\{a\}$: $\displaystyle \frac{x^n-a^n}{x-a}=\sum_{k=0}^{n-1}a^kx^{n-k-1}\underset{x\to a}{\longrightarrow}\sum_{k=0}^{n-1}a^ka^{n-k-1}=na^{n-1}$.

Exemple La fonction valeur absolue $|\cdot|$ n'est pas dérivable en 0.

Démonstration Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$: $\dfrac{|x|-|0|}{x-0} = \begin{cases} 1 & \text{si } x>0 \\ -1 & \text{si } x<0, \end{cases}$ donc : $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{|x|-|0|}{x-0} = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{|x|-|0|}{x-0} = -1$. Conclusion : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|x|-|0|}{x-0}$ n'existe pas, i.e. $|\cdot|$ n'est pas dérivable en 0.

Théorème (La dérivabilité implique la continuité) Soient $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $a \in D$. Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.

✖ **Attention !** ✖ La réciproque est totalement fausse, pensez à la fonction valeur absolue en 0. C'est contre-intuitif, mais il existe même des fonctions qui sont continues sur tout $\mathbb{R}$ mais dérivables en aucun point.

Démonstration Puisque f est dérivable en a, alors : $f(x) = \overbrace{\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}}^{\underset{x\to a}{\longrightarrow} f'(a)} \times \overbrace{(x-a)}^{\underset{x\to a}{\longrightarrow} 0} + f(a) \underset{x\to a}{\longrightarrow} f(a)$, donc en effet f est continue en a. ■

Le résultat suivant est la version dérivable d'un résultat analogue sur les limites du chapitre « Limites d'une fonction ».

Théorème (Caractérisation de la dérivabilité à partir des parties réelle et imaginaire) Soient $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction et $a \in D$.

f est dérivable en a si et seulement si $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ le sont.

De plus, dans ce cas : $f'(a) = \mathrm{Re}(f)'(a) + \mathrm{i}\,\mathrm{Im}(f)'(a)$.

Définition (Dérivabilité à gauche/à droite en un point, demi-tangente) Soient $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction et $a \in D$. On suppose f définie au voisinage de a à gauche et à droite.

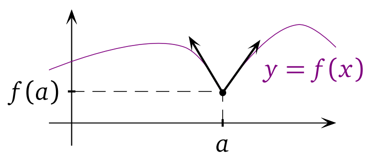
- On dit que f est *dérivable à gauche en* a si $f\big|_{D\cap]-\infty,a]}$ est dérivable en a, i.e. si la limite : $\lim\limits_{x\to a^-} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et est finie. Cette limite est alors appelée le *nombre dérivé à gauche de* f *en* a et notée $f'_g(a)$.
- On dit que f est *dérivable à droite en* a si $f\big|_{D\cap[a,+\infty[}$ est dérivable en a, i.e. si la limite : $\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et est finie. Cette limite est alors appelée le *nombre dérivé à droite de* f *en* a et notée $f'_d(a)$.

✌ **Explication** ✌ Parce qu'elle n'est qu'un cas particulier de la dérivabilité en général, la dérivabilité à gauche (resp. à droite) implique la continuité à gauche (resp. à droite).

Théorème (Caractérisation de la dérivabilité à l'aide des dérivabilités à gauche/à droite) Soient $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction et $a \in D$. On suppose f définie au voisinage de a à gauche et à droite.

f est dérivable en a si et seulement si f est dérivable à gauche et à droite en a avec de plus : $f'_g(a) = f'_d(a)$.

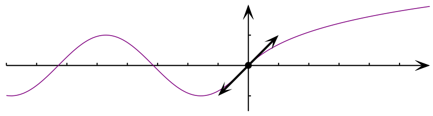
✌ **Explication** ✌ Ci-contre, f est dérivable à gauche et à droite en a, mais pas en a car : $f'_g(a) \neq f'_d(a)$.



Démonstration

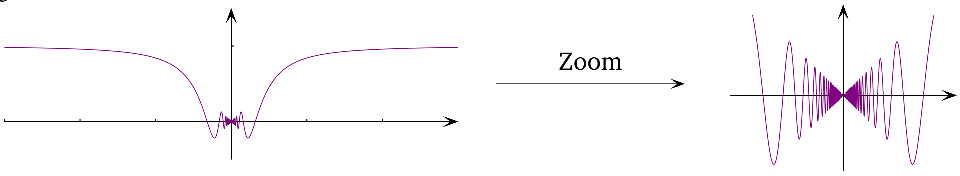
$$\begin{aligned} f \text{ est dérivable en } a \quad &\Longleftrightarrow \quad \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \text{ existe et est finie} \\ &\Longleftrightarrow \quad \lim_{x\to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \text{ et } \lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \text{ existent, sont finies et égales} \\ &\Longleftrightarrow \quad f \text{ est dérivable à gauche et à droite en } a \text{ et : } f'_g(a) = f'_d(a). \end{aligned}$$ ■

Exemple La fonction $x \overset{f}{\longmapsto} \begin{cases} \ln(1+x) & \text{si } x \geqslant 0 \\ \sin x & \text{si } x < 0 \end{cases}$ est dérivable en 0.



Démonstration $f'_g(0) = f'_d(0) = 1$, donc f est dérivable en 0 et : $f'(0) = 1$.

✖ **Attention !** ✖ Une fonction peut n'être ni dérivable à gauche ni dérivable à droite en un point. C'est le cas de la fonction $x \overset{f}{\longmapsto} x \sin \dfrac{1}{x}$ en 0 prolongée par continuité en 0 par : $f(0) = 0$, car $x \longmapsto \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \sin \dfrac{1}{x}$ n'a pas de limite en 0, ni à gauche ni à droite.



1.2 Opérations sur la dérivabilité

Théorème (Opérations sur la dérivabilité) Soient $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ et $g : D \longrightarrow \mathbb{C}$ deux fonctions et $a \in D$. On suppose f et g dérivables en a.

(i) **Combinaison linéaire :** Pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, $\lambda f + \mu g$ est dérivable en a et : $(\lambda f + \mu g)'(a) = \lambda f'(a) + \mu g'(a)$.

(ii) **Produit :** fg est dérivable en a et : $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.

(iii) **Quotient :** Si : $g(a) \neq 0$, $\dfrac{f}{g}$ est dérivable en a et : $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(a) = \dfrac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}$.

Soient $f : D \longrightarrow E$ et $g : E \longrightarrow \mathbb{C}$ deux fonctions et $a \in D$. On suppose f dérivable en a et g dérivable en $f(a)$.

(iv) **Composition :** $g \circ f$ est dérivable en a et : $(g \circ f)'(a) = f'(a)\, g'\big(f(a)\big)$.

Démonstration Pour les assertions (ii) et (iii), remarquons que : $\lim\limits_{x \to a} g(x) = g(a)$ car la dérivabilité de g en a implique sa continuité, et de même : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ pour l'assertion (iv).

(i) La fonction $\lambda f + \mu g$ est dérivable en a avec : $(\lambda f + \mu g)'(a) = \lambda f'(a) + \mu g'(a)$ car :

$$\frac{(\lambda f + \mu g)(x) - (\lambda f + \mu g)(a)}{x - a} = \lambda \frac{f(x) - f(a)}{x - a} + \mu \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \underset{x \to a}{\longrightarrow} \lambda f'(a) + \mu g'(a).$$

(ii) La fonction fg est dérivable en a avec : $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$ car par produit :

$$\frac{(fg)(x) - (fg)(a)}{x - a} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}\, g(x) + f(a)\, \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \underset{x \to a}{\longrightarrow} f'(a)g(a) + f(a)g'(a).$$

(iii) Supposons : $g(a) \neq 0$. La fonction $\dfrac{1}{g}$ est alors dérivable en a avec : $\left(\dfrac{1}{g}\right)'(a) = -\dfrac{g'(a)}{g(a)^2}$ car :

$$\frac{\dfrac{1}{g}(x) - \dfrac{1}{g}(a)}{x - a} = -\frac{1}{g(x)g(a)} \times \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \underset{x \to a}{\longrightarrow} -\frac{g'(a)}{g(a)^2}.$$

(iv) Pour tout $y \in E$, posons : $\tau(y) = \begin{cases} \dfrac{g(y) - g\big(f(a)\big)}{y - f(a)} & \text{si } y \neq f(a) \\ g'\big(f(a)\big) & \text{si } y = f(a). \end{cases}$ Par dérivabilité de g en $f(a)$: $\lim\limits_{y \to f(a)} \tau(y) = g'\big(f(a)\big)$, et pour tout $x \in E$: $\tau\big(f(x)\big)\big(f(x) - f(a)\big) = g \circ f(x) - g \circ f(a)$ — y compris pour $x = a$ — donc : $\dfrac{g \circ f(x) - g \circ f(a)}{x - a} = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}\, \tau\big(f(x)\big) \underset{x \to a}{\longrightarrow} f'(a)\, g'\big(f(a)\big)$. ■

Exemple La fonction $x \longmapsto \sqrt{x^3 \operatorname{Arcsin} x}$ est dérivable sur $]-1, 1[$.

Démonstration

- La fonction $x \longmapsto x^3 \operatorname{Arcsin} x$ est dérivable sur $]-1, 1[$ par produit. Positive sur $[-1, 1]$ et nulle seulement en 0, cette fonction est donc dérivable sur $]-1, 1[\setminus \{0\}$ **à valeurs dans** $\mathbb{R}_+^*$. La fonction racine carrée étant dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ **seulement**, $x \longmapsto \sqrt{x^3 \operatorname{Arcsin} x}$ est dérivable sur $]-1, 1[\setminus \{0\}$ par composition.

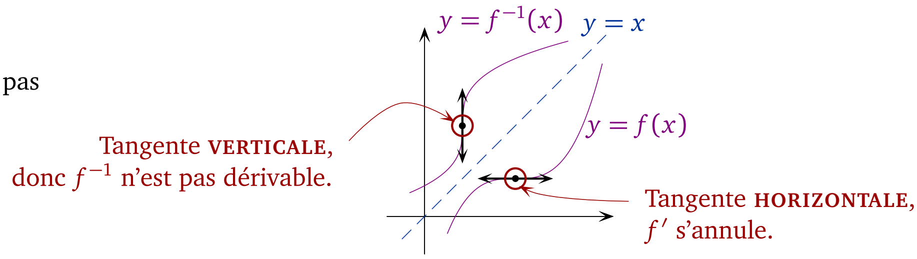
- Ce raisonnement ne nous apprend rien sur la fonction $x \longmapsto \sqrt{x^3 \text{Arcsin}\, x}$ en 0 car nos théorèmes d'opérations sur la dérivabilité nous parlent de dérivabilité mais pas de **NON**-dérivabilité. De fait, la fonction $x \longmapsto \sqrt{x^3 \text{Arcsin}\, x}$ est quand même dérivable en 0 car :
$$\frac{\sqrt{x^3 \text{Arcsin}\, x} - 0}{x - 0} = \frac{\sqrt{x^4}}{x} \times \sqrt{\frac{\text{Arcsin}\, x}{x}} = x\sqrt{\frac{\text{Arcsin}\, x - \text{Arcsin}\, 0}{x - 0}} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0 \times \sqrt{\text{Arcsin}'(0)} = 0.$$
On pourrait montrer en revanche que $x \longmapsto \sqrt{x^3 \text{Arcsin}\, x}$ **N'est PAS** dérivable en -1 et 1.

Nous avons admis le théorème suivant au chapitre « Rappels et compléments sur les fonctions ». Grâce à lui, nous avons pu justifier la dérivabilité des fonctions arcsinus, arccosinus et arctangente et calculer leurs dérivées.

Théorème (Dérivabilité d'une réciproque) Soient I un intervalle et $f \in \mathscr{D}(I, \mathbb{R})$ bijective de I sur $J = f(I)$. Si f' **NE S'ANNULE PAS SUR** I, alors f^{-1} est dérivable sur J et : $\left(f^{-1}\right)' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}$.

✖ ATTENTION ! ✖

L'hypothèse selon laquelle f' ne s'annule pas est essentielle !



Démonstration Soit $b \in J$.

- Comme f est continue et bijective, f^{-1} est continue en b : $\displaystyle\lim_{y \to b} f^{-1}(y) = f^{-1}(b)$ ♣.
- Or f est dérivable en $f^{-1}(b)$: $\displaystyle\lim_{x \to f^{-1}(b)} \frac{f(x) - f\big(f^{-1}(b)\big)}{x - f^{-1}(b)} = f'\big(f^{-1}(b)\big)$, donc après passage à l'inverse — par hypothèse f' ne s'annule pas : $\displaystyle\lim_{x \to f^{-1}(b)} \frac{x - f^{-1}(b)}{f(x) - f\big(f^{-1}(b)\big)} = \frac{1}{f'\big(f^{-1}(b)\big)}$ ♠.
- Composons enfin ♣ et ♠ : $\displaystyle\lim_{y \to b} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \lim_{y \to b} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{f\big(f^{-1}(y)\big) - f\big(f^{-1}(b)\big)} = \frac{1}{f'\big(f^{-1}(b)\big)}$. ∎

1.3 DÉRIVÉES SUCCESSIVES

Définition (Dérivées successives) Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction.

On commence par poser : $f^{(0)} = f$. Ensuite, pour tout $k \in \mathbb{N}$, **SI** on a réussi à définir $f^{(k)}$ sur D au cours des étapes précédentes, et **SI** $f^{(k)}$ est dérivable sur D, on pose $f^{(k+1)} = \left(f^{(k)}\right)'$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, si la fonction $f^{(k)}$ est bien définie, dite *dérivée $k^{\text{ème}}$ de f*, on dit que f est *k fois dérivable sur D*. On note généralement f, f', f'' et f''' plutôt que $f^{(0)}$, $f^{(1)}$, $f^{(2)}$ et $f^{(3)}$ respectivement.

✌ **Explication** ✌ Si on a choisi une fois pour toutes par convention de noter x la variable de f, la dérivée $k^{\text{ème}}$ de f peut être aussi notée $\dfrac{\mathrm{d}^k f}{\mathrm{d}x^k}$ — même chose avec n'importe quel symbole autre que x.

Définition (Fonction de classe $\mathscr{C}^k$) Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction.

- Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on dit que f est *de classe $\mathscr{C}^k$ sur D* si f est k fois dérivable sur D et si $f^{(k)}$ est continue sur D.
  On note $\mathscr{C}^k(D, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^k$ sur D à valeurs dans $\mathbb{K}$.
- On dit que f est *de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur D* si f est dérivable autant de fois qu'on le veut sur D.
  On note $\mathscr{C}^\infty(D, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur D à valeurs dans $\mathbb{K}$.

✖ **Attention !** ✖ Être de classe $\mathscr{C}^1$, ce n'est pas être « dérivable et continue » — puisqu'on est toujours continu quand on est dérivable — mais être « dérivable à dérivée continue ».

Explication Sur la figure ci-dessous, chaque flèche décrit une implication.

$$\boxed{\text{Classe } \mathscr{C}^\infty} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \boxed{\text{Classe } \mathscr{C}^2} \longrightarrow \boxed{\text{Dérivabilité deux fois}} \longrightarrow \boxed{\text{Classe } \mathscr{C}^1} \longrightarrow \boxed{\text{Dérivabilité}} \longrightarrow \boxed{\text{Continuité} = \text{Classe } \mathscr{C}^0}$$

Théorème (Opérations sur les dérivées successives) Soit $k \in \mathbb{N}$.

(i) **Combinaison linéaire :** $\mathscr{C}^k(D,\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^D$.
Plus précisément, pour tous $f,g \in \mathscr{C}^k(D,\mathbb{C})$ et $\lambda,\mu \in \mathbb{C}$, $\lambda f + \mu g \in \mathscr{C}^k(D,\mathbb{C})$ et : $(\lambda f+\mu g)^{(k)} = \lambda f^{(k)} + \mu g^{(k)}$.

(ii) **Produit :** Pour toutes $f,g \in \mathscr{C}^k(D,\mathbb{C})$, $fg \in \mathscr{C}^k(D,\mathbb{C})$ et : $\displaystyle (fg)^{(k)} = \sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} f^{(p)} g^{(k-p)}$ (*formule de Leibniz*).

(iii) **Quotient :** Pour toutes $f,g \in \mathscr{C}^k(D,\mathbb{C})$, si g ne s'annule pas sur D, alors : $\dfrac{f}{g} \in \mathscr{C}^k(D,\mathbb{C})$.

(iv) **Composition :** Pour toutes $f \in \mathscr{C}^k(D,\mathbb{R})$ et $g \in \mathscr{C}^k(E,\mathbb{C})$ avec $f(D) \subset E$: $g \circ f \in \mathscr{C}^k(D,\mathbb{C})$.

(v) **Réciproque :** Soit I un intervalle. Pour toute $f \in \mathscr{C}^k(I,\mathbb{R})$ bijective de I sur $J = f(I)$, SI f' NE S'ANNULE PAS SUR I, alors : $f^{-1} \in \mathscr{C}^k(J,\mathbb{R})$.

On peut remplacer dans chacune de ces assertions « de classe $\mathscr{C}^k$ » par « k fois dérivable » et « de classe $\mathscr{C}^\infty$ ».

En pratique Pour montrer qu'une fonction est deux fois dérivable, on applique directement le théorème précédent, on ne s'amuse pas à montrer qu'elle est dérivable, à la dériver, puis à montrer que sa dérivée est de nouveau dérivable !

Démonstration Pour commencer, le théorème « Opérations sur la dérivabilité » se généralise en un instant aux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$. Au-delà, on raisonne par récurrence sur k. **Initialisation :** Rien à montrer.

(ii) Au rang k : « $\displaystyle \forall f,g \in \mathscr{C}^k(D,\mathbb{C}), \quad fg \in \mathscr{C}^k(I,\mathbb{C}) \quad \text{et} \quad (fg)^{(k)} = \sum_{p=0}^{k}\binom{k}{p} f^{(p)}g^{(k-p)}$ ».

Hérédité : On suppose le résultat vrai au rang k. Soient $f,g \in \mathscr{C}^{k+1}(D,\mathbb{C})$. Aussitôt : $f,g \in \mathscr{C}^1(D,\mathbb{C})$, donc : $fg \in \mathscr{C}^1(D,\mathbb{C})$ et : $(fg)' = f'g + fg'$. Or : $f'g, fg' \in \mathscr{C}^k(D,\mathbb{R})$ par hypothèse de récurrence, donc : $(fg)' \in \mathscr{C}^k(D,\mathbb{R})$, i.e. : $fg \in \mathscr{C}^{k+1}(D,\mathbb{C})$. Ensuite :

$$(fg)^{(k+1)} = \big((fg)'\big)^{(k)} = \big(f'g\big)^{(k)} + \big(fg'\big)^{(k)} \overset{\text{HDR}}{=} \sum_{p=0}^{k}\binom{k}{p}(f')^{(p)}g^{(k-p)} + \sum_{p=0}^{k}\binom{k}{p}f^{(p)}(g')^{(k-p)} = \sum_{p=0}^{k}\binom{k}{p}f^{(p+1)}g^{(k-p)} + \sum_{p=0}^{k}\binom{k}{p}f^{(p)}g^{(k-p+1)}$$

$$= \sum_{p=1}^{k+1}\binom{k}{p-1}f^{(p)}g^{(k-p+1)} + \sum_{p=0}^{k}\binom{k}{p}f^{(p)}g^{(k-p+1)} \underset{\text{de Pascal}}{\overset{\text{Formule}}{=}} \underbrace{fg^{(k+1)}}_{p=0} + \sum_{p=1}^{k}\binom{k+1}{p}f^{(p)}g^{(k+1-p)} + \underbrace{f^{(k+1)}g}_{p=k+1} = \sum_{p=0}^{k+1}\binom{k+1}{p}f^{(p)}g^{(k+1-p)}.$$

(iii) Au rang k : « Pour toutes $f,g \in \mathscr{C}^k(D,\mathbb{C})$, si g ne s'annule pas sur D, alors : $\dfrac{f}{g} \in \mathscr{C}^k(D,\mathbb{C})$. »

Hérédité : On suppose le résultat vrai au rang k. Soient $f,g \in \mathscr{C}^{k+1}(D,\mathbb{C})$, g ne s'annulant pas sur D. Alors : $f,g \in \mathscr{C}^1(D,\mathbb{C})$, donc : $\dfrac{f}{g} \in \mathscr{C}^1(D,\mathbb{C})$ et : $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$. Or : $f'g - fg', g^2 \in \mathscr{C}^k(D,\mathbb{C})$ d'après (ii), donc : $\left(\dfrac{f}{g}\right)' \in \mathscr{C}^k(D,\mathbb{R})$ par hypothèse de récurrence, i.e. : $\dfrac{f}{g} \in \mathscr{C}^{k+1}(D,\mathbb{C})$.

(iv) Au rang k : « $\forall f \in \mathscr{C}^k(D,\mathbb{R}), \quad \forall g \in \mathscr{C}^k(E,\mathbb{C}), \quad f(D) \subset E \implies g \circ f \in \mathscr{C}^k(D,\mathbb{C})$ ».

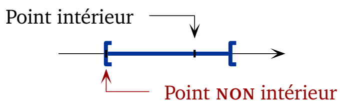
Hérédité : On suppose le résultat vrai au rang k. Soient $f \in \mathscr{C}^{k+1}(D,\mathbb{R})$ et $g \in \mathscr{C}^{k+1}(E,\mathbb{C})$ avec : $f(D) \subset E$. Alors : $f \in \mathscr{C}^1(D,\mathbb{R})$ et $g \in \mathscr{C}^1(E,\mathbb{C})$, donc : $g \circ f \in \mathscr{C}^1(D,\mathbb{C})$ et : $\big(g\circ f\big)' = f' \times g' \circ f$. Or : $g' \circ f \in \mathscr{C}^k(D,\mathbb{C})$ par hypothèse de récurrence, donc : $\big(g\circ f\big)' \in \mathscr{C}^k(D,\mathbb{C})$ d'après (ii), et enfin : $g \circ f \in \mathscr{C}^{k+1}(D,\mathbb{C})$.

(v) Imiter les preuves précédentes. ■

2 Quelles informations peut-on tirer d'une dérivée ?

2.1 Extrema locaux et points critiques

Définition (Extremum local, point critique, point intérieur) Soit $a \in D$.

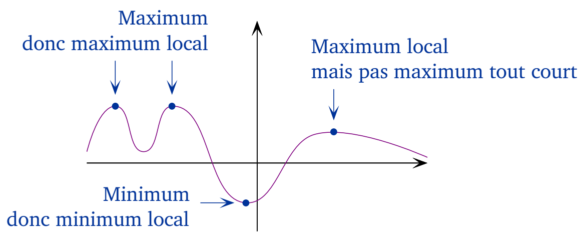


- On dit que a est *intérieur à D* s'il existe $\varepsilon > 0$ pour lequel : $\quad]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\subset D$.

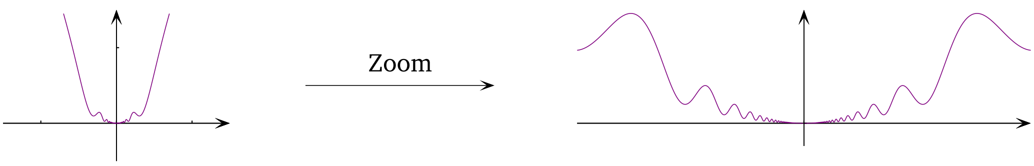
Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

- On dit que f possède un *maximum local en a* si f est majorée par $f(a)$ au voisinage de a.
- On dit que f possède un *minimum local en a* si f est minorée par $f(a)$ au voisinage de a.
- On dit que a est un *point critique de f* si f est dérivable en a avec : $\quad f'(a) = 0$.

Explication Un maximum local n'est pas forcément un maximum de la fonction sur tout son domaine de définition.

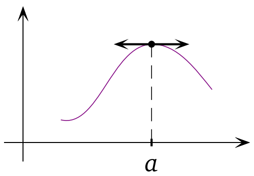


Attention ! On peut avoir un minimum local en a sans que f soit décroissante à gauche et croissante à droite au voisinage de a. C'est le cas de la fonction $x \longmapsto x^2 + 2x^2 \sin^2 \dfrac{1}{x}$ prolongée par 0 en 0, représentée ci-dessous.

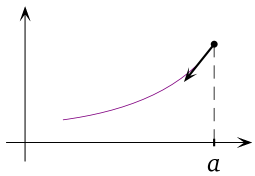


Théorème (Condition nécessaire pour un extremum local en un point intérieur) Soient $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $a \in D$ un point intérieur. Si f est dérivable en a et possède un extremum local en a, alors a est un point critique de f.

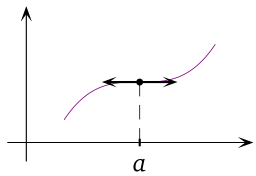
Attention !



Situation standard du théorème (cas d'un maximum local).



Il est important que a soit un point INTÉRIEUR.



Réciproque fausse : tout point critique n'est pas forcément le signe d'un extremum local.

Démonstration Étudions le cas d'un maximum local en a. Comme a est un point intérieur à D, D contient un voisinage $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$ de a pour un certain $\varepsilon > 0$, et comme f possède un maximum local en a : $\quad f(x) \leqslant f(a)$ pour tout $x \in]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$ — avec le même ε quitte à le diminuer. Par conséquent :

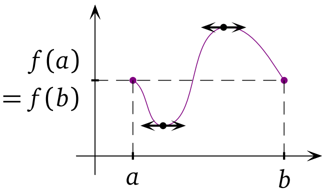
$$\forall x \in]a-\varepsilon, a[, \quad \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geqslant 0 \qquad \text{et} \qquad \forall x \in]a, a+\varepsilon[, \quad \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leqslant 0.$$

Or f est dérivable en a, donc si nous faisons tendre x vers a à gauche dans l'inégalité de gauche : $\quad f'(a) \geqslant 0$, et si nous le faisons tendre à droite dans celle de droite : $\quad f'(a) \leqslant 0$. $\quad$ Conclusion : $\quad f'(a) = 0$. ■

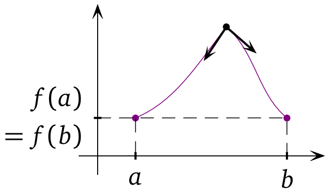
2.2 Le théorème de Rolle et le théorème des accroissements finis

Théorème (Théorème de Rolle) Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ telle que : $f(a) = f(b)$.
Il existe un réel $c \in]a,b[$ pour lequel : $f'(c) = 0$.

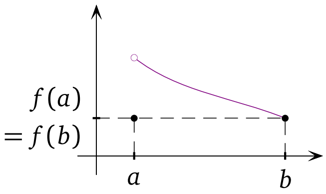
✌ **Explication** ✌ Chaque hypothèse du théorème a son importance.



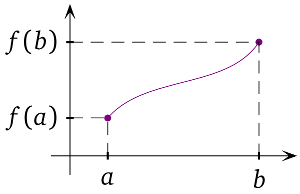
Situation standard du théorème de Rolle.



Si on enlève la dérivabilité même en un point, rien ne va plus.



Si on enlève la continuité, même sur les bords, c'est encore pire.



Si : $f(a) \neq f(b)$, c'est toujours la cata.

Démonstration Continue sur le SEGMENT $[a,b]$, f y est bornée et atteint un minimum m et un maximum M d'après le théorème des bornes atteintes.

- Si : $f(a) = f(b) \neq M$, alors comme f atteint ses bornes : $f(c) = M$ pour un certain $c \in]a,b[$. Par hypothèse, c n'est alors pas une borne de $[a,b]$, donc : $f'(c) = 0$ d'après le théorème précédent.
- Si : $f(a) = f(b) \neq m$, même raisonnement.
- Dernier cas enfin : $f(a) = f(b) = m = M$. Dans ce cas, f est constante de valeur $M = m$ sur tout $[a,b]$ par définition de m et M, donc f' est nulle sur tout $[a,b]$! ■

Exemple Pour tous $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, le polynôme $P = 4\alpha X^3 + 3\beta X^2 + 2\gamma X - (\alpha+\beta+\gamma)$ possède une racine dans $]0,1[$.

Démonstration Fixons $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

- On a bien sûr d'abord envie d'utiliser le TVI. Hélas : $P(0) = -(\alpha+\beta+\gamma)$ et $P(1) = 3\alpha + 2\beta + \gamma$ et le signe de ces deux nombres n'est pas du tout clair.
- Changeons donc de point de vue et posons : $Q = \alpha X^4 + \beta X^3 + \gamma X^2 - (\alpha+\beta+\gamma)X$. Ce polynôme Q est une primitive de P et clairement : $Q(0) = Q(1) = 0$. D'après le théorème de Rolle, $P = Q'$ s'annule donc au moins une fois entre 0 et 1.

✖ **Attention !** ✖ Le théorème de Rolle est faux pour les fonctions complexes. Par exemple, la fonction $t \longmapsto e^{it}$ est continue sur $[0, 2\pi]$, dérivable sur $]0, 2\pi[$, et : $e^{i0} = e^{2i\pi} = 1$, mais pourtant sa dérivée $t \longmapsto ie^{it}$ ne s'annule pas.

Théorème (Théorème des accroissements finis) Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$.

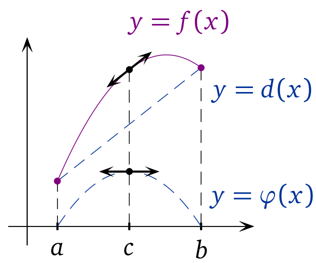
Il existe un réel $c \in]a,b[$ pour lequel : $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

✌ **Explication** ✌ Le théorème des accroissements finis généralise le théorème de Rolle. La morale de l'histoire ?

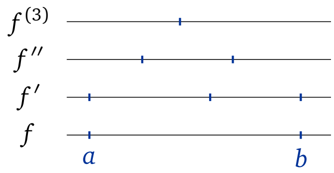
SI J'AI DES INFORMATIONS SUR f', J'EN AI AUSSI SUR f.

Typiquement, toute majoration/minoration de f' peut être convertie en une majoration/minoration sur f.

Démonstration Notons d la fonction affine $x \longmapsto \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a)$ et φ la fonction $f - d$. Cette fonction φ est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et : $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. Le théorème de Rolle affirme donc que $\varphi'(c) = 0$ pour un certain $c \in]a,b[$, ou encore : $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$. ■



Exemple Soit $f \in \mathscr{C}^3([a,b], \mathbb{R})$. On suppose que : $f(a) = f'(a) = f(b) = f'(b) = 0$.
Alors pour un certain $c \in]a,b[$: $f^{(3)}(c) = 0$.

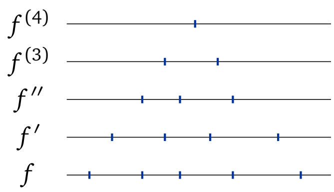


Démonstration Comme f est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$, et comme : $f(a)=f(b)=0$, le théorème de Rolle montre que : $f'(u)=0$ pour un certain $u\in]a,b[$.

Ensuite, comme f' est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$ avec : $f'(a)=f'(u)=f'(b)=0$, le théorème de Rolle montre que : $f''(v)=f''(w)=0$ pour certains $v\in]a,u[$ et $w\in]u,b[$.

Enfin, comme f'' est continue sur $[v,w]$ et dérivable sur $]v,w[$ avec : $f''(v)=f''(w)$, le théorème de Rolle montre que : $f^{(3)}(c)=0$ pour un certain $c\in]v,w[\subset]a,b[$.

Exemple Soient I un intervalle et $f\in\mathscr{C}^k(I,\mathbb{R})$. Si f s'annule en au moins $k+1$ points distincts, alors $f^{(k)}$ s'annule en au moins un point. Ce résultat est un grand classique, étudiez-le bien !



Démonstration La figure ci-contre illustre l'idée de la preuve pour $k=4$. On part de 5 zéros (au moins) pour f. En appliquant le théorème de Rolle entre ces zéros on parvient à exhiber 4 zéros (au moins) de f', puis 3 (au moins) pour f''… et enfin (au moins) un zéro de $f^{(4)}$.

Nous allons montrer proprement par récurrence que pour tout $i\in[\![0,k]\!]$, $f^{(i)}$ s'annule en au moins $k-i+1$ points distincts. Pour $i=k$, on a tout simplement le résultat.

Initialisation : L'assertion pour $i=0$ n'est autre que l'hypothèse du théorème.

Hérédité : Soit $i\in[\![0,k-1]\!]$. On suppose que $f^{(i)}$ s'annule en au moins $k-i+1$ points distincts $x_1,\ldots,x_{k-i+1}$ rangés dans l'ordre : $x_1<\ldots<x_{k-i+1}$. Pour tout $j\in[\![1,k-i]\!]$, $f^{(i)}$ est continue sur $[x_j,x_{j+1}]$, dérivable sur $]x_j,x_{j+1}[$ et : $f^{(i)}(x_j)=f^{(i)}(x_{j+1})=0$. Le théorème de Rolle affirme donc l'existence d'un zéro x'_j de $f^{(i+1)}$ compris strictement entre x_j et x_{j+1}. Nous voilà donc à la tête de $k-i=k-(i+1)+1$ zéros de $f^{(i+1)}$, lesquels sont bien deux à deux distincts car : $x'_1<x_2<x'_2<x_3<\ldots<x'_{k-i}<x_{k-i}$.

2.3 Constance, monotonie et dérivabilité

Les constantes de primitivation et de résolution des équations différentielles linéaires sont toutes issues du théorème qui suit, il était temps que nous le démontrions !

Théorème (Caractérisation des fonctions constantes dérivables) Soient I un **INTERVALLE** et $f\in\mathscr{D}(I,\mathbb{C})$.

f est constante sur I si et seulement si f' est nulle sur I.

Démonstration Une preuve du cas réel suffit via la caractérisation de la dérivabilité à partir des parties réelle et imaginaire. Soit donc $f\in\mathscr{D}(I,\mathbb{R})$.

- Si f est constante sur I, alors pour tout $a\in I$: $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=0\underset{x\to a}{\longrightarrow}0$, donc : $f'(a)=0$.
- Réciproquement, supposons f' nulle sur I et donnons-nous $x,y\in I$ avec : $x<y$. Comme f est continue sur $[x,y]$ et dérivable sur $]x,y[$: $\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}=f'(c)=0$ pour un certain $c\in]x,y[$ d'après le théorème des accroissements finis. Aussitôt : $f(x)=f(y)$, donc comme voulu f est constante. ■

Théorème (Caractérisation des fonctions constantes et monotones dérivables) Soient I un **INTERVALLE** et $f\in\mathscr{D}(I,\mathbb{R})$.

(i) f est croissante sur I si et seulement si f' est positive ou nulle sur I.

(ii) f est strictement croissante sur I si et seulement si f' est positive ou nulle sur I et n'est identiquement nulle sur aucun intervalle $[a,b]$ avec : $a<b$.
En particulier, si f' est strictement positive sur I, alors f est strictement croissante sur I.

On dispose bien sûr d'un résultat analogue sur les fonctions décroissantes.

Démonstration

(i) Reprenez simplement la preuve du théorème précédent avec des inégalités à la place des égalités.

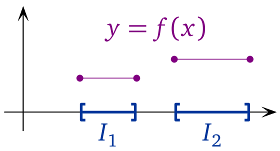
(ii) Supposons d'abord f strictement croissante sur I. D'après (i), f' est positive ou nulle sur I. Ensuite, si f' est identiquement nulle sur un intervalle $[a,b]$ avec : $a \leqslant b$, alors f y est constante donc : $f(a)=f(b)$, donc enfin : $a=b$ par stricte monotonie.

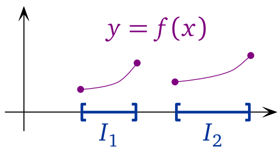
Réciproquement, supposons que f' est positive ou nulle sur I et n'est identiquement nulle sur aucun intervalle $[a,b]$ avec : $a<b$. D'après (i), f est croissante. Soient $x,y\in I$ avec : $x<y$. Par croissance : $f(x)\leqslant f(y)$. Si : $f(x)=f(y)$, la croissance de f montre que f est constante sur $[x,y]$, donc que f' est identiquement nulle sur $[x,y]$ — ce qui est faux. Forcément : $f(x)<f(y)$. ■

✖ **Attention !** ✖

- Mine de rien, dans les deux théorèmes précédents, l'hypothèse selon laquelle I est un **INTERVALLE** est indispensable. Le théorème est faux si I est une réunion d'intervalles disjoints.

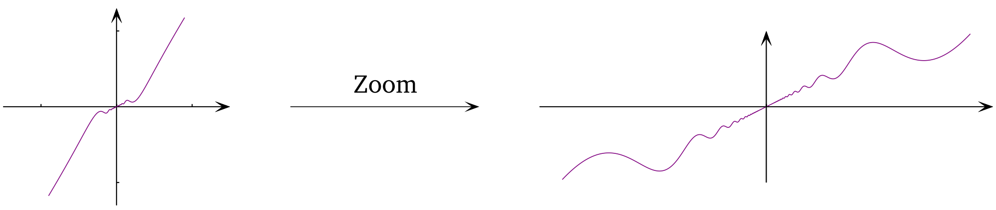
f est constante sur I_1 et sur I_2, mais pas sur $I_1\cup I_2$. Pourtant : $f'=0$ sur $I_1\cup I_2$.





f est croissante sur I_1 et sur I_2, mais pas sur $I_1\cup I_2$. Pourtant : $f'\geqslant 0$ sur $I_1\cup I_2$.

- On peut avoir : $f'(a)>0$ en un point a sans que f soit strictement croissante au voisinage de a. C'est le cas de la fonction $x \overset{f}{\longmapsto} x^2\sin\dfrac{1}{x}+\dfrac{x}{2}$ prolongée par 0 en 0. Bien sûr, f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et en revenant au taux d'accroissement de f, on montre aisément que : $f'(0)=\dfrac{1}{2}>0$. Pourtant : $f'(x)=2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2}$ pour tout $x\in\mathbb{R}^*$, donc f' change de signe régulièrement au voisinage de 0, donc f change de sens de variation régulièrement au voisinage de 0. En deux mots, le $x\sin\dfrac{1}{x}$ est petit au voisinage de 0 alors que le $\cos\dfrac{1}{x}$ prend une infinité de fois les valeurs 1 et -1. Comme on ajoute $\dfrac{1}{2}$, f' prend une infinité de fois au voisinage de 0 des valeurs proches de $-\dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{3}{2}$.

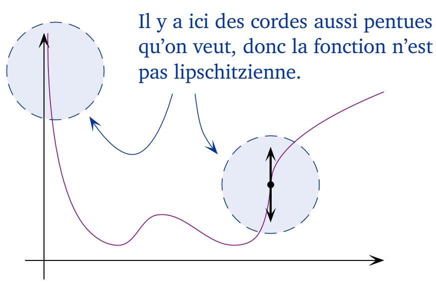


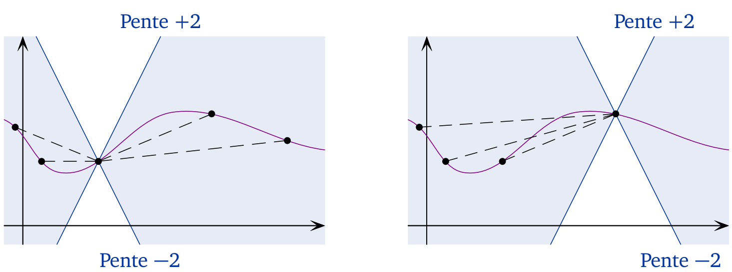
2.4 L'inégalité des accroissements finis

Définition (Lipschitzianité) Soient $f:D\longrightarrow\mathbb{C}$ une fonction et $K\geqslant 0$. On dit que f est *K-lipschitzienne sur D* si :

$$\forall x,y\in D,\quad \big|f(x)-f(y)\big|\leqslant K|x-y|.$$

Explication La fonction f est K-lipschitzienne sur D si : $\left|\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}\right|\leqslant K$ pour tous $x,y\in D$ distincts, i.e. si les pentes des cordes de son graphe sont majorées par K en valeur absolue. Plus généralement, dire que f est lipschitzienne revient à dire que les pentes des cordes de son graphe sont bornées.





Les figures de gauche illustrent la 2-lipschitzianité de la fonction représentée. Les cordes issues de chaque point ont toutes un coefficient directeur compris entre -2 et 2.

Exemple La fonction $x\longmapsto |x|$ est 1-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$ d'après l'inégalité triangulaire « $\big||x|-|y|\big|\leqslant|x-y|$ ».

Exemple La fonction $x \longmapsto \frac{1}{x}$ est 1-lipschitzienne sur $[1,+\infty[$ mais pas sur $\mathbb{R}_+^*$.

Démonstration Pour tous $x, y \in [1,+\infty[$: $\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right| = \left|\frac{x-y}{xy}\right| = \frac{|x-y|}{|x|.|y|} \leqslant |x-y|$.

En revanche : $\dfrac{\frac{1}{2x}-\frac{1}{x}}{2x-x} = -\dfrac{1}{2x^2} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -\infty$, donc l'ensemble des réels $\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}$, x et y décrivant $\mathbb{R}_+^*$ avec : $x \neq y$, n'est pas borné, donc $x \longmapsto \frac{1}{x}$ n'est pas lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+^*$.

Théorème (La lipschitzianité implique la continuité) Toute fonction lipschitzienne est continue.

Démonstration Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction K-lipschitzienne pour un certain $K \geqslant 0$. Pour tous $a, x \in D$: $\big|f(x)-f(a)\big| \leqslant K|x-a|$, donc : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ par encadrement, i.e. f est continue en a. ■

Théorème (Inégalité des accroissements finis) Soient I un intervalle et $f \in \mathscr{D}(I,\mathbb{C})$. Si $|f'|$ est majorée par un certain K sur I, alors f est K-lipschitzienne sur I.

✌ **Explication** ✌ Alors que le théorème de Rolle et le théorème des accroissements finis sont faux pour les fonctions complexes, l'inégalité des accroissements finis constitue quant à elle un résultat robuste encore valable dans le cas complexe.

Démonstration Soient $x, y \in I$ avec : $x < y$.

- **Cas où f est réelle :** Comme f est continue sur $[x,y]$ et dérivable sur $]x,y[$: $\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} = f'(c)$ pour un certain $c \in]x,y[$ d'après le théorème des accroissements finis.
Comme voulu : $\big|f(x)-f(y)\big| = \big|f'(c)\big| \times |x-y| \leqslant K|x-y|$.
- **Cas général :** Donnons-nous un réel θ pour lequel $e^{-i\theta}\big(f(x)-f(y)\big)$ est un RÉEL et notons φ la fonction RÉELLE $\mathrm{Re}\big(e^{-i\theta}f\big)$. Cette fonction est dérivable sur I et : $|\varphi'| = \left|\mathrm{Re}\big(e^{-i\theta}f'\big)\right| \leqslant \left|e^{-i\theta}f'\right| = |f'| \leqslant K$. D'après le cas précédent réel, φ est K-lipschitzienne sur I, donc :
$$\big|f(x)-f(y)\big| = \left|e^{-i\theta}\big(f(x)-f(y)\big)\right| = \left|\mathrm{Re}\Big(\underbrace{e^{-i\theta}\big(f(x)-f(y)\big)}_{\in\mathbb{R}}\Big)\right| = \big|\varphi(x)-\varphi(y)\big| \leqslant K|x-y|. \qquad ■$$

Exemple Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $|\sin x| \leqslant |x|$.

Démonstration La fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et : $|\sin'| = |\cos| \leqslant 1$, donc sinus est 1-lipschitzienne d'après l'inégalité des accroissements finis, donc pour tout $x \in \mathbb{R}$: $|\sin x| = |\sin x - \sin 0| \leqslant |x-0| = |x|$.

✌ **Explication** ✌ Sur la figure ci-dessous, chaque flèche décrit une implication.
L'implication ★ est valable sous réserve que la dérivée de la fonction considérée soit BORNÉE — inégalité des accroissements finis.

$$\begin{tikzcd}
 & & & & & \text{Lipschitzianité} \arrow[dr] & \\
\text{Classe } \mathscr{C}^\infty \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & \text{Classe } \mathscr{C}^2 \arrow[r] & \text{Dérivabilité deux fois} \arrow[r] & \text{Classe } \mathscr{C}^1 \arrow[r] & \text{Dérivabilité} \arrow[u, dashed, "\bigstar"] \arrow[r] & \text{Continuité} = \text{Classe } \mathscr{C}^0
\end{tikzcd}$$

2.5 Inégalité des accroissements finis et suites récurrentes

Nous avons jusqu'ici étudié les suites définies par une relation de récurrence : $u_{n+1} = f(u_n)$ essentiellement grâce au théorème de la limite monotone. En cas de convergence vers un réel ℓ et sous l'hypothèse que f est continue en ℓ, nous avons déjà vu que ℓ est un point fixe de f. Ce que le théorème de la limite monotone ne nous précise pas en revanche, c'est la vitesse avec laquelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'approche de ℓ, ce qu'on appelle sa *vitesse de convergence*. Pour obtenir une approximation de ℓ à 10^{-3} près, pouvons-nous nous contenter de calculer u_{10} ou bien devons-nous pousser jusqu'à u_{1000}, voire $u_{10^{10^{10}}}$? En d'autres termes, l'écart $|u_n - \ell|$ converge-t-il vers 0 plutôt vite — par exemple s'il vaut $\dfrac{1}{2^n}$ — ou plutôt lentement — par exemple s'il vaut $\dfrac{1}{\ln n}$? Nous allons voir que sous certaines conditions raisonnables, l'inégalité des accroissements finis peut nous garantir une convergence rapide de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

En pratique La technique décrite ici est vraiment importante. On part d'un intervalle I, d'une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ qui stabilise I et d'un certain $u_0 \in I$. Nous savons qu'il existe alors une unique suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $u_{n+1} = f(u_n)$. On suppose par ailleurs que :

— f possède un unique point fixe ℓ sur I,

— f est K-lipschitizienne pour un certain $K \in [0,1[$ — attention, « 1 » **EXCLUS !** Typiquement, c'est l'inégalité des accroissements finis qui fournit un tel résultat.

Ces hypothèses permettent de montrer successivement :

— que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\big|f(u_n) - f(\ell)\big| \leqslant K|u_n - \ell|$, ou encore : $|u_{n+1} - \ell| \leqslant K|u_n - \ell|$,

— puis par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $|u_n - \ell| \leqslant K^n |u_0 - \ell|$.

— Il en découle par encadrement que : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ car : $0 \leqslant K < 1$.

Conclusion : nous avons atteint la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sans rien connaître de sa monotonie. Nous avons même obtenu mieux, l'inégalité : $|u_n - \ell| \leqslant K^n|u_0 - \ell|$ montre en effet que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge **VITE** vers ℓ, au moins aussi vite que la suite géométrique $(K^n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.

Exemple Le polynôme $X^3 + 3X - 1$ possède une unique racine réelle, égale à 0,32218 à 10^{-5} près.

Démonstration

- Le TVI strictement monotone montre assez vite que la fonction $x \longmapsto x^3 + 3x - 1$ est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, donc que le polynôme $X^3 + 3X - 1$ possède une et une seule racine réelle. Précisément : $\rho \in [0,1]$ car : $0^3 + 0 - 1 = -1 < 0$ et $1^3 + 3 - 1 = 3 > 0$, et comme : $\rho^3 + 3\rho - 1 = 0 \iff \dfrac{1}{\rho^2+3} = \rho$, ρ est aussi **LE** seul point fixe de $x \overset{f}{\longmapsto} \dfrac{1}{x^2+3}$ sur $[0,1]$.
- On définit la suite $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $\rho_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\rho_{n+1} = f(\rho_n) = \dfrac{1}{\rho_n^2 + 3}$. On s'attend, si tout se passe bien, à ce que $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ρ.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = -\dfrac{2x}{\left(x^2+3\right)^2}$. Nous allons majorer $|f'|$ pour pouvoir utiliser l'inégalité des accroissements finis. Pour cela, re-dérivons. Pour tout $x \in [0,1]$: $f''(x) = \dfrac{6\left(x^2-1\right)}{\left(x^2+3\right)^3} \leqslant 0$, donc f' est décroissante sur $[0,1]$, donc pour tout $x \in [0,1]$: $-\dfrac{1}{8} = f'(1) \leqslant f'(x) \leqslant f'(0) = 0$. Conclusion : f est contractante sur $[0,1]$, précisément $\dfrac{1}{8}$-lipschitzienne.
- Aussitôt, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $|\rho_{n+1} - \rho| = \big|f(\rho_n) - f(\rho)\big| \leqslant \dfrac{1}{8}|\rho_n - \rho|$, donc : $|\rho_n - \rho| \leqslant \dfrac{|\rho_0 - \rho|}{8^n} \leqslant \dfrac{1}{8^n}$ après une petite récurrence. Comme enfin : $0 \leqslant \dfrac{1}{8} < 1$, alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} \rho_n = \rho$ par encadrement.
- Nous pouvons maintenant utiliser $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour calculer une valeur approchée de ρ à 10^{-5} près, mais combien de termes devons-nous calculer ? Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\dfrac{1}{8^n} \leqslant 10^{-5} \iff 8^n \geqslant 100\,000$, et cette inégalité est vraie à partir de : $n = 6$. On obtient donc une valeur approchée de ρ à 10^{-5} près en calculant u_6 : $u_6 \approx 0,32218$. En réalité, on constate que les cinq premières décimales de u_4 sont déjà correctes, mais ce qui compte, ce n'est pas ce qu'on **CONSTATE**, mais ce qu'on **DÉMONTRE**. Nos calculs n'ont peut-être pas eu la plus grande finesse possible, mais en tout cas ils sont corrects.

2.6 Limite de la dérivée et prolongement de classe $\mathscr{C}^k$

✖ **Attention !** ✖ Rien ne permet a priori d'affirmer que les limites : $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ et $\displaystyle\lim_{x\to a} f'(x)$ sont égales. Conceptuellement, ces limites sont très différentes.

Les trois théorèmes qui suivent sont énoncés au voisinage d'un point a à droite, mais on aurait pu les énoncer à gauche.

Théorème (Théorème de la limite de la dérivée) Soit $f : [a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On suppose que f est dérivable sur $]a,b[$ et continue en a et que $\displaystyle\lim_{x\to a^+} f'(x)$ existe.

La limite : $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe alors aussi et elle vaut : $\displaystyle\lim_{x\to a^+} f'(x)$.

Démonstration Pour tout $x \in\ ]a,b[$, comme f est continue sur $[a,x]$ et dérivable sur $]a,x[$, le théorème des accroissements finis montre que : $\displaystyle\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(c_x)$ pour un certain $c_x \in\ ]a,x[$. Nous héritons ainsi d'une fonction $c :]a,b[\longrightarrow\ ]a,b[$ pour laquelle pour tout $x \in\ ]a,b[$: $|c_x - a| < |x-a|$. En particulier, par encadrement : $\displaystyle\lim_{x\to a} c_x = a$. Or $\displaystyle\lim_{x\to a^+} f'(x)$ existe et vaut disons ℓ par hypothèse, donc par composition, comme voulu : $\displaystyle\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(c_x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$. ■

Théorème (Théorème du prolongement de classe $\mathscr{C}^1$) Soient $f \in \mathscr{C}^1\big(]a,b[,\mathbb{R}\big)$. Si $\displaystyle\lim_a f$ et $\displaystyle\lim_{a^+} f'$ existent et sont finies, le prolongement par continuité de f à $[a,b[$ est de classe $\mathscr{C}^1$.

Démonstration Par hypothèse, nous pouvons poser : $\displaystyle\ell = \lim_{a^+} f$ et $\displaystyle\ell' = \lim_{a^+} f'$ où ℓ et ℓ' sont des réels. En particulier, f est prolongeable par continuité en a avec : $f(a) = \ell$, et le prolongement ainsi obtenu satisfait les hypothèses du théorème de la limite de la dérivée, donc : $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \ell'$. Il en découle que f est dérivable en a avec : $f'(a) = \ell'$, mais du coup, en retour : $\displaystyle\lim_{a^+} f' = \ell' = f'(a)$, autrement dit f' est continue en a. De classe $\mathscr{C}^1$ sur $]a,b[$ par hypothèse, f est comme voulu de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b[$. ■

Exemple Pour tout $\alpha > 2$, la fonction $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par : $f(0) = 0$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$: $\displaystyle f(x) = x^\alpha \sin\frac{1}{x}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ tout entier.

Démonstration Pour commencer, f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Ensuite : $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0 = f(0)$ car la fonction $\displaystyle x \longmapsto \sin\frac{1}{x}$ est bornée. Enfin, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$: $\displaystyle f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}\sin\frac{1}{x} - x^{\alpha-2}\cos\frac{1}{x} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0$ car : $\alpha > 2$ d'une part, et car les fonctions $\displaystyle x \longmapsto \sin\frac{1}{x}$ et $\displaystyle x \longmapsto \cos\frac{1}{x}$ sont bornées d'autre part. Comme voulu, d'après le théorème du prolongement de classe $\mathscr{C}^1$, f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ tout entier. Sans ce théorème, nous aurions dû étudier à part la dérivabilité de f en 0 en revenant à la définition avec taux d'accroissement.

Théorème (Théorème du prolongement de classe $\mathscr{C}^k$) Soient $k \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathscr{C}^k\big(]a,b[,\mathbb{R}\big)$. Si $\displaystyle\lim_{a^+} f^{(i)}$ existe et est finie pour tout $i \in [\![0,k]\!]$, le prolongement par continuité de f à $[a,b[$ est de classe $\mathscr{C}^k$.

Démonstration Par récurrence sur k. **Initialisation :** Définition du prolongement par continuité !

Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$. On suppose le théorème vrai au rang k. Soit $f \in \mathscr{C}^{k+1}\big(]a,b[,\mathbb{R}\big)$. On suppose que $\displaystyle\lim_{a^+} f^{(i)}$ existe et est finie pour tout $i \in [\![0,k+1]\!]$. D'après le théorème du prolongement de classe $\mathscr{C}^1$, f est prolongeable par continuité à $[a,b[$ et son prolongement, encore noté f, est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b[$. Il nous reste à montrer que f' est de classe $\mathscr{C}^k$ sur $[a,b[$. Or f' est de classe $\mathscr{C}^k$ sur $]a,b[$ et $\displaystyle\lim_{a^+} \big(f'\big)^{(i)}$ existe et est finie pour tout $i \in [\![0,k]\!]$, donc par hypothèse de récurrence, f' est de classe $\mathscr{C}^k$ sur $[a,b[$. ■