DÉTERMINANTS

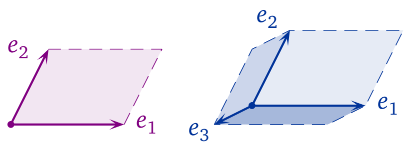
Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ est l'un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Les résultats présentés, sauf un ou deux, demeurent vrais dans un contexte plus général, mais nous ne nous en préoccuperons pas ici.

1 AIRES ET VOLUMES ORIENTÉS RELATIVEMENT À UNE BASE

Il est difficile de définir proprement les notions d'« aire » dans le plan et de « volume » dans l'espace. Nous n'y arriverons pas pour des surfaces ou des volumes quelconques, mais ce que nous allons faire n'est pas rien. Point de départ de nos investigations : la donnée d'une « unité d'aire orientée » dans le plan et d'une « unité de volume orienté » dans l'espace.

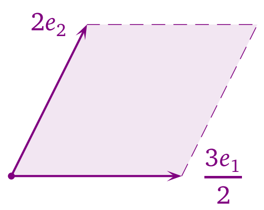
— Une unité d'aire orientée dans le plan, ce sera pour nous un parallélogramme orienté, i.e. une base $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$ du plan que nous décrétons directe.

— Une unité de volume orienté dans l'espace, ce sera pour nous un parallélépipède orienté, i.e. une base $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de l'espace que nous décrétons directe.

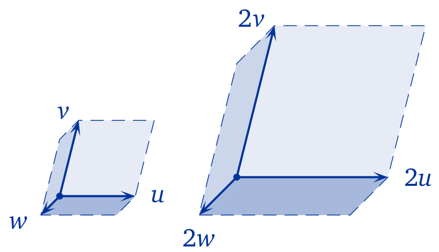


À partir de cette brique élémentaire, nous pouvons donner une aire (resp. un volume) à n'importe quel parallélogramme (resp. parallélépipède) du plan (resp. de l'espace). Nous noterons $\det_{\mathscr{B}}(x_1, x_2)$ l'aire orientée du parallélogramme engendré par une famille (x_1, x_2) de vecteurs dans le plan et $\det_{\mathscr{B}}(x_1, x_2, x_3)$ le volume orienté du parallélépipède engendré par une famille (x_1, x_2, x_3) de vecteurs de l'espace. L'indice « $\mathscr{B}$ » indique que ces aires/volumes orientés sont calculés relativement à l'unité d'aire/volume orienté que $\mathscr{B}$ représente en tant que brique élémentaire. En particulier : $\boxed{\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}) = 1.}$

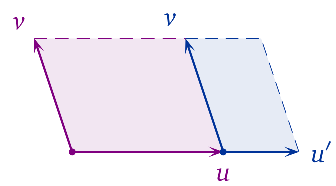
Quant à l'orientation d'une aire dans le plan, que signifie-t-elle ? Simplement qu'on comptera positivement l'aire d'un parallélogramme engendré par une base directe et négativement l'aire d'un parallélogramme engendré par une base indirecte. Même principe pour les volumes orientés. Par exemple, dans le plan : $\det_{\mathscr{B}}(e_2, e_1) = -\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}) = -1$ car la base (e_2, e_1) est indirecte.



$$\det_{\mathscr{B}}\left(2e_2, \frac{3e_1}{2}\right) = 2 \times \frac{3}{2} \det_{\mathscr{B}}(e_2, e_1) = -3\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}) = -3$$



$$\det_{\mathscr{B}}(2u, 2v, 2w) = 2^3 \det_{\mathscr{B}}(u, v, w)$$



$$\det_{\mathscr{B}}(u + u', v) = \det_{\mathscr{B}}(u, v) + \det_{\mathscr{B}}(u', v)$$

Ces figures nous permettent de comprendre quelques propriétés des aires et des volumes orientés. Plus précisément :

— **Caractérisation des bases :**

$$\boxed{\begin{array}{rcl} (u,v) \text{ est une base du plan} & \iff & \det_{\mathscr{B}}(u,v) \neq 0. \\ (u,v,w) \text{ est une base de l'espace} & \iff & \det_{\mathscr{B}}(u,v,w) \neq 0. \end{array}}$$

En d'autres termes, la colinéarité de deux vecteurs est caractérisée dans le plan par le caractère aplati du parallélogramme qu'ils engendrent. Même principe dans l'espace.

En particulier, dans le plan : $\det_{\mathscr{B}}(u, u) = 0$ et dans l'espace, dès que deux des trois vecteurs u, v et w sont égaux : $\det_{\mathscr{B}}(u, v, w) = 0$ — c'est ce qu'on appelle le caractère *alterné* de l'application $\det_{\mathscr{B}}$.

— **Antisymétrie :** $\boxed{\text{Le signe de } \det_{\mathscr{B}}(u,v) \text{ et } \det_{\mathscr{B}}(u,v,w) \text{ est changé chaque fois qu'on permute deux vecteurs.}}$

— **Multilinéarité :** $\boxed{\text{L'application } \det_{\mathscr{B}} \text{ est linéaire par rapport à chacune de ses variables.}}$

— **Caractérisation de l'orientation :**

$$\boxed{\begin{array}{rcl} (u,v) \text{ est une base directe du plan} & \iff & \det_{\mathscr{B}}(u,v) > 0. \\ (u,v,w) \text{ est une base directe de l'espace} & \iff & \det_{\mathscr{B}}(u,v,w) > 0. \end{array}}$$

2 Formes multilinéaires alternées

Nous allons dans ce paragraphe tâcher de prendre de la hauteur par rapport au précédent en abandonnant le strict point de vue d'une géométrie du plan et de l'espace. Par quoi les notions d'aire et volume orientés pourraient-elles bien être remplacées en dimension finie quelconque ?

Définition (Application multilinéaire) Soient $E_1, \ldots, E_n$ et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f : E_1 \times \ldots \times E_n \longrightarrow F$ une application. On dit que f est *n-linéaire* si :

$$\text{pour tout } k \in [\![1,n]\!] \text{ et pour tous } x_1 \in E_1, \ldots, x_{k-1} \in E_{k-1}, x_{k+1} \in E_{k+1}, \ldots, x_n \in E_n \text{ fixés,}$$

$$\text{l'application } x \longmapsto f(x_1, \ldots, x_{k-1}, x, x_{k+1}, \ldots, x_n) \text{ est linéaire de } E_k \text{ dans } F.$$

On dit que f est *bilinéaire* si : $n=2$, *trilinéaire* si : $n=3$, et si : $F = \mathbb{K}$, que f est une *forme n-linéaire*.

Explication

- En résumé, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, f est linéaire par rapport à sa $k^{\text{ème}}$ variable quand on fixe les $n-1$ variables restantes.
- Une application 1-linéaire n'est rien d'autre qu'une application linéaire.

Exemple

- Dans l'espace, le produit scalaire et le produit vectoriel sont bilinéaires.
- Pour tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, la multiplication par un scalaire $(\lambda, x) \longmapsto \lambda x$ est bilinéaire de $\mathbb{K} \times E$ dans E.
- Le produit matriciel $(A,B) \longmapsto AB$ est bilinéaire de $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K}) \times \mathscr{M}_{q,r}(\mathbb{K})$ dans $\mathscr{M}_{p,r}(\mathbb{K})$.
- Le produit fonctionnel $(f,g) \longmapsto fg$ est bilinéaire de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
- Pour tous $\mathbb{K}$-espaces vectoriels E, E' et E'', la composition $(f,g) \longmapsto g \circ f$ est bilinéaire de $\mathscr{L}(E,E') \times \mathscr{L}(E',E'')$ dans $\mathscr{L}(E,E'')$.

Définition (Forme multilinéaire alternée) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et f une forme n-linéaire de E^n. On dit que f est *alternée* si f est nulle sur toute famille de vecteurs dont au moins deux sont égaux.

Théorème (Propriétés des formes multilinéaires alternées) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et f une forme n-linéaire alternée de E^n.

(i) f est nulle sur toute famille liée.

(ii) On ne change pas la valeur de f quand on ajoute à l'une de ses variables une combinaison linéaire des autres.

(iii) f est *antisymétrique* — cela revient à dire que pour tous $x_1, \ldots, x_n \in E$ et $i, j \in [\![1,n]\!]$ avec $i < j$:

$$f(\ldots, x_j, \ldots, x_i, \ldots) = -f(\ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots).$$

Démonstration

(i) Soit $(x_1, \ldots, x_n)$ une famille liée de E, avec disons : $x_k = \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ i \neq k}} \lambda_i x_i$ pour un certain $k \in [\![1,n]\!]$ et pour certains $\lambda_1, \ldots, \lambda_{k-1}, \lambda_{k+1}, \ldots, \lambda \in \mathbb{K}$.

$$f(x_1, \ldots, x_n) = f\left(\ldots, x_{k-1}, \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ i \neq k}} \lambda_i x_i, x_{k+1}, \ldots\right) \underset{k^{\text{ème}} \text{ variable}}{\overset{\text{Linéarité}}{=}} \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ i \neq k}} \lambda_i \overbrace{f(\ldots, x_{k-1}, x_i, x_{k+1}, \ldots)}^{x_i \text{ apparaît deux fois}} = 0.$$

(ii) Soient $x_1, \ldots, x_n \in E$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_{k-1}, \lambda_{k+1}, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$. Seule la $k^{\text{ème}}$ variable est explicitée ci-après :

$$f\left(\ldots, x_k + \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ i \neq k}} \lambda_i x_i, \ldots\right) \underset{k^{\text{ème}} \text{ variable}}{\overset{\text{Linéarité}}{=}} f(\ldots, x_k, \ldots) + \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ i \neq k}} \lambda_i \underbrace{f(\ldots, x_i, \ldots)}_{\substack{x_i \text{ apparaît} \\ \text{deux fois}}} = f(\ldots, x_k, \ldots).$$

(iii) Seules les $i^{\text{ème}}$ et $j^{\text{ème}}$ variables sont explicitées ci-après. Par n-linéarité et caractère alternée de f :

$$\underbrace{f(\ldots,x_i+x_j,\ldots,x_i+x_j,\ldots)}_{=0}=\underbrace{f(\ldots,x_i,\ldots,x_i,\ldots)}_{=0}+f(\ldots,x_i,\ldots,x_j,\ldots)+f(\ldots,x_j,\ldots,x_i,\ldots)+\underbrace{f(\ldots,x_j,\ldots,x_j,\ldots)}_{=0},$$

donc en effet : $\quad f(\ldots,x_j,\ldots,x_i,\ldots)=-f(\ldots,x_i,\ldots,x_j,\ldots).$ ■

À présent, afin de généraliser les notions d'aire orientée dans le plan et de volume orienté dans l'espace, nous allons tâcher de déterminer toutes les formes $\boxed{n}$ -linéaires alternées d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie $\boxed{n}$.

Soient donc $E\neq\{0_E\}$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, f une forme n-linéaire alternée de E^n, $\mathscr{B}=(e_1,\ldots,e_n)$ une base de E et $(x_1,\ldots,x_n)$ une famille de n vecteurs de E de matrice A dans $\mathscr{B}$. Par n-linéarité de f :

$$f(x_1,\ldots,x_n)=f\left(\sum_{k_1=1}^{n}a_{k_1 1}e_{k_1},\ldots,\sum_{k_n=1}^{n}a_{k_n n}e_{k_n}\right)=\sum_{(k_1,\ldots,k_n)\in[\![1,n]\!]^n}a_{k_1 1}\ldots a_{k_n n}\,f\big(e_{k_1},\ldots,e_{k_n}\big).$$

Dans cette somme : $\quad f\big(e_{k_1},\ldots,e_{k_n}\big)=0\quad$ dès que deux des vecteurs e_{k_i} sont égaux, donc nous pouvons n'y conserver que les n-listes $(k_1,\ldots,k_n)$ d'éléments **DISTINCTS**, i.e. les n-arrangements de $[\![1,n]\!]$. Par ailleurs, nous savons bien que la donnée d'un n-arrangement $(k_1,\ldots,k_n)$ de $[\![1,n]\!]$ est équivalente à la donnée d'une permutation σ de $[\![1,n]\!]$, avec pour tout $i\in[\![1,n]\!]$: $\quad\sigma(i)=k_i$. $\quad$ Finalement, si nous notons S_n le groupe symétrique de $[\![1,n]\!]$, dit *groupe symétrique de degré n* :

$$f(x_1,\ldots,x_n)=\sum_{\sigma\in S_n}\left(\prod_{i=1}^{n}a_{\sigma(i)i}\right)f\big(e_{\sigma(1)},\ldots,e_{\sigma(n)}\big).$$

Pour aller plus loin, nous allons devoir étudier davantage les quantités $f\big(e_{\sigma(1)},\ldots,e_{\sigma(n)}\big)$ qui viennent d'apparaître. Donnons-en deux exemples dans le cas : $\quad n=4$. $\quad$ L'outil majeur des calculs qui suivent, c'est l'**ANTISYMÉTRIE** de f.

— Si σ est définie par les relations : $\quad\sigma(1)=3,\quad\sigma(2)=4,\quad\sigma(3)=1\quad$ et $\quad\sigma(4)=2,\quad$ alors :

$$f\big(e_{\sigma(1)},e_{\sigma(2)},e_{\sigma(3)},e_{\sigma(4)}\big)=f(e_3,e_4,e_1,e_2)\overset{e_1\leftrightarrow e_3}{=}-f(e_1,e_4,e_3,e_2)\overset{e_2\leftrightarrow e_4}{=}\boxed{+}\,f(e_1,e_2,e_3,e_4).$$

— Si σ est définie par les relations : $\quad\sigma(1)=2,\quad\sigma(2)=4,\quad\sigma(3)=1\quad$ et $\quad\sigma(4)=3,\quad$ alors :

$$f\big(e_{\sigma(1)},e_{\sigma(2)},e_{\sigma(3)},e_{\sigma(4)}\big)=f(e_2,e_4,e_1,e_3)\overset{e_1\leftrightarrow e_2}{=}-f(e_1,e_4,e_2,e_3)\overset{e_2\leftrightarrow e_4}{=}f(e_1,e_2,e_4,e_3)\overset{e_3\leftrightarrow e_4}{=}\boxed{-}\,f(e_1,e_2,e_3,e_4).$$

Deux questions s'imposent après ces exemples. Peut-on « défaire » **TOUTE** permutation par des échanges successifs de deux valeurs ? Que dire de général sur ces signes « + » et « − » qui en résultent en facteur ?

3 GROUPES SYMÉTRIQUES

On peut représenter de plusieurs façons une permutation σ de $[\![1,n]\!]$. La première consiste à écrire σ sous la forme d'une matrice $\begin{pmatrix}1&2&\cdots&n\\\sigma(1)&\sigma(2)&\cdots&\sigma(n)\end{pmatrix}$. Par exemple, la permutation σ de $[\![1,4]\!]$ définie par les égalités : $\quad\sigma(1)=2,$ $\sigma(2)=4,\quad\sigma(3)=1\quad$ et $\quad\sigma(4)=3\quad$ peut être représentée par la matrice $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&1&3\end{pmatrix}$.

Le produit de deux permutations est facile à effectuer à partir de cette représentation. Par exemple, dans S_5 :

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&4&2&5&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&1&4&5&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\4&1&5&3&2\end{pmatrix}.$$

L'inverse d'une permutation est tout aussi facile à calculer. Par exemple, l'inverse de $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&2&1\end{pmatrix}$ dans S_4 est $\sigma^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&1&2\end{pmatrix}$ — lisez simplement la matrice de σ du bas vers le haut au lieu de la lire du haut vers le bas.

Définition-théorème (Support d'une permutation, permutations disjointes)

- Soit $\sigma\in S_n$. On appelle *support de σ* l'ensemble : $\quad\mathrm{supp}(\sigma)=\big\{x\in[\![1,n]\!]/\quad\sigma(x)\neq x\big\}\quad$ des éléments de $[\![1,n]\!]$ qui **NE** sont **PAS** fixés par σ.
- Deux permutations de $[\![1,n]\!]$ sont dites *disjointes* si leurs supports sont disjoints.

  Propriété remarquable : Deux permutations disjointes commutent.

Démonstration Soient $\sigma, \sigma' \in S_n$ disjointes et $x \in [\![1,n]\!]$. Montrons que σ et σ' commutent.

— Si : $x \notin \text{supp}(\sigma)$ et $x \notin \text{supp}(\sigma')$, : $\sigma\sigma'(x) = \sigma(x) = x = \sigma'(x) = \sigma'\sigma(x)$.

— Supposons maintenant que : $x \in \text{supp}(\sigma)$ — on traiterait de même le cas où : $x \in \text{supp}(\sigma')$. Comme σ et σ' sont disjointes : $x \notin \text{supp}(\sigma')$, donc : $\sigma'(x) = x$, et enfin : $\sigma\sigma'(x) = \sigma(x)$. Ensuite : $\sigma(x) \neq x$ et σ est injective, donc : $\sigma\big(\sigma(x)\big) \neq \sigma(x)$, i.e. : $\sigma(x) \in \text{supp}(\sigma)$. Or σ et σ' sont disjointes, donc : $\sigma'\sigma(x) = \sigma(x)$, et finalement : $\sigma\sigma'(x) = \sigma(x) = \sigma'\sigma(x)$.

Dans tous les cas : $\sigma\sigma'(x) = \sigma'\sigma(x)$, donc comme c'est vrai pour tout $x \in [\![1,n]\!]$: $\sigma\sigma' = \sigma'\sigma$. ■

Exemple La permutation $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ admet $\{1,2,4\}$ pour support.

Définition **(Cycle, transposition)**

- Soit $p \in [\![2,n]\!]$. On appelle *p-cycle de $[\![1,n]\!]$* ou *cycle de longueur p de $[\![1,n]\!]$* toute permutation σ de $[\![1,n]\!]$ pour laquelle il existe des éléments distincts $x_1, \dots, x_p$ de $[\![1,n]\!]$ tels que :

$$\sigma(x_1) = x_2, \qquad \sigma(x_2) = x_3, \qquad \dots \qquad \sigma(x_{p-1}) = x_p \qquad \text{et} \qquad \sigma(x_p) = x_1$$

$$\text{et} \qquad \sigma(x) = x \qquad \text{si } x \text{ n'est aucun des éléments } x_1, \dots, x_p.$$

  Un tel p-cycle est alors noté $(x_1\ x_2\ \dots\ x_p)$, ou $(x_2\ x_3\ \dots\ x_p\ x_1)$, ou $(x_3\ x_4\ \dots\ x_p\ x_1\ x_2)$, etc.

- Un 2-cycle de $[\![1,n]\!]$ est aussi appelé une *transposition de* $[\![1,n]\!]$.

Exemple On peut bien sûr composer des cycles pour obtenir de nouvelles permutations.

Dans S_4 : $(2\ 3)(4\ 3\ 1)(4\ 2\ 3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Démonstration $\big((2\ 3) \circ (4\ 3\ 1) \circ (4\ 2\ 3)\big)(1) = \big((2\ 3) \circ (4\ 3\ 1)\big)(1) = \big((2\ 3)\big)(4) = 4$

et : $\big((2\ 3) \circ (4\ 3\ 1) \circ (4\ 2\ 3)\big)(2) = \big((2\ 3) \circ (4\ 3\ 1)\big)(3) = \big((2\ 3)\big)(1) = 1$, etc.

Théorème **(Décomposition d'une permutation en produit de cycles disjoints)** Toute permutation de $[\![1,n]\!]$ peut être décomposée d'une et une seule manière — à l'ordre des facteurs près — comme un produit de cycles disjoints.

✌ **Explication** ✌ Les cycles du théorème étant disjoints, ils commutent comme on l'a vu plus haut, donc l'ordre dans lequel on les écrit est sans importance.

Démonstration Nous prouverons seulement l'existence d'une telle décomposition. Soit $\sigma \in S_n$. On définit une relation $\sim$ sur $[\![1,n]\!]$ de la manière suivante — pour tous $x, y \in [\![1,n]\!]$: $x \sim y \iff \exists\, k \in \mathbb{Z}/ \quad y = \sigma^k(x)$.

- La relation $\sim$ ainsi définie est une relation d'équivalence. En effet, soient $x, y, z \in [\![1,n]\!]$.
  — **Réflexivité :** $x = \text{Id}(x)$ avec $\text{Id} \in S_n$, donc : $x \sim x$.
  — **Symétrie :** Si $x \sim y$, disons : $y = \sigma^k(x)$ pour un certain $k \in \mathbb{Z}$, alors : $x = \sigma^{-k}(x)$, donc $y \sim x$.
  — **Transitivité :** Si $x \sim y$ et $y \sim z$, disons : $y = \sigma^k(x)$ et $z = \sigma^l(y)$ pour certains $k, l \in \mathbb{Z}$, alors : $z = \sigma^{k+l}(x)$, donc $x \sim z$.

  Notons alors $X_1, \dots, X_r$ les classes d'équivalence de $[\![1,n]\!]$ pour $\sim$ et choisissons x_1 dans X_1, …, x_r dans X_r. Par définition, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$: $X_i = \big\{\sigma^k(x_i)\big\}_{k \in \mathbb{Z}}$.

- Soit $i \in [\![1,r]\!]$. Comme X_i est un ensemble fini : $\sigma^k(x_i) = \sigma^l(x_i)$ pour certains $k, l \in \mathbb{N}$ avec $k < l$, et donc : $\sigma^{l-k}(x_i) = x_i$. Nous pouvons dès lors noter p_i le plus entier naturel non nul pour lequel : $\sigma^{p_i}(x_i) = x_i$. Il n'est alors pas trop dur de se convaincre — petite division euclidienne par p_i — que : $X_i = \big\{x_i, \sigma(x_i), \dots, \sigma^{p_i - 1}(x_i)\big\}$ avec : $|X_i| = p_i$.

- Pour tout $i \in [\![1,r]\!]$, notons finalement σ_i le p_i-cycle $\big(x_i\ \sigma(x_i)\ \dots\ \sigma^{p_i-1}(x_i)\big)$ de support X_i. Ce sont là r cycles disjoints et pour tout $i \in [\![1,r]\!]$: $\sigma_i|_{X_i} = \sigma|_{X_i}$ et $\sigma_i|_{\overline{X_i}} = \text{Id}_{\overline{X_i}}$. Il en découle que : $\sigma = \sigma_1 \dots \sigma_r$ et c'est bien une telle décomposition qu'on cherchait. ■

Exemple $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 6 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ admet $(1\ 5\ 4)(3\ 6) = (3\ 6)(1\ 5\ 4)$ pour décomposition en produit de cycles disjoints.

Démonstration La forme de gauche agit circulairement sur certains paquets d'éléments : elle envoie 1 sur 5, 5 sur 4 et 4 sur 1 ; elle fixe 2 ; et elle envoie 3 sur 6 et 6 sur 3. C'est exactement ce que fait aussi la permutation $(1\ 5\ 4)(3\ 6) = (3\ 6)(1\ 5\ 4)$ — d'où l'égalité.

Exemple Quelques exemples sur lesquels vous pouvez vous entraîner : $(1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6)(1\ 2\ 4\ 6)(1\ 3\ 5) = (1\ 4)(2\ 5\ 3\ 6)$, $(1\ 2\ 4\ 6)(2\ 5)(3\ 4\ 1) = (1\ 3\ 6)(2\ 5\ 4)$, $(1\ 3)(3\ 2\ 1\ 4)(3\ 1\ 4)(2\ 1\ 4) = (1\ 2)(3\ 4)$, $(4\ 5\ 1\ 2)(3\ 4\ 1\ 6)(5\ 4\ 1\ 6)(4\ 2) = (1\ 3\ 5\ 2\ 6)$.

Théorème **(Le groupe symétrique est engendré par ses transpositions)** Toute permutation de $[\![1,n]\!]$ peut être décomposée comme un produit de transpositions.

✌ **Explication** ✌ En d'autres termes, quand on doit permuter n objets — quelle que soit la complexité apparente de la permutation — on peut TOUJOURS le faire progressivement par des échanges de deux objets.

✖ **ATTENTION !** ✖ Une telle décomposition n'est en aucun cas unique. Par exemple : $(1\ 2\ 3) = (1\ 2)(2\ 3) = (1\ 3)(1\ 2)$.

Démonstration Grâce au théorème précédent, il nous suffit d'établir le résultat dans le seul cas des cycles. Or tout simplement, pour tous $x_1, \dots, x_p \in [\![1,n]\!]$ distincts : $(x_1\ \dots\ x_p) = (x_1\ x_2)(x_2\ x_3)\dots(x_{p-1}\ x_p)$, donc en effet tout cycle est un produit de transpositions. ■

L'intégralité de ce chapitre repose sur le théorème suivant.

Définition-théorème **(Signature)**

- Il existe une et une seule application $\varepsilon : S_n \longrightarrow \{-1,1\}$, appelée *signature*, qui donne à toute transposition la valeur -1 et telle que pour tous $\sigma, \sigma' \in S_n$: $\varepsilon(\sigma\sigma') = \varepsilon(\sigma)\,\varepsilon(\sigma')$.
- Pour tout $\sigma \in S_n$, on dit que σ est *paire* si : $\varepsilon(\sigma) = 1$ et *impaire* si : $\varepsilon(\sigma) = -1$.

✌ **Explication** ✌ Sans nous garantir d'unicité, l'existence de la signature nous garantit une certaine ressemblance des différentes décompositions possibles d'une même permutation comme produit de transpositions. Deux décompositions ne font pas forcément intervenir les mêmes nombres p et p' de transpositions, mais en tout cas p et p' ont la même parité.

Démonstration

- Notons $\mathscr{P}$ l'ensemble des paires $\{i,j\}$ d'entiers $i,j \in [\![1,n]\!]$ distincts, et pour toute permutation $\sigma \in S_n$, μ_σ l'application $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{P} & \longrightarrow & \mathscr{P} \\ \{i,j\} & \longmapsto & \{\sigma(i),\sigma(j)\}. \end{array} \right.$ Il est facile de vérifier que μ_σ est bijective de réciproque $\mu_{\sigma^{-1}}$. Du coup : $\displaystyle\prod_{\{i,j\}\in\mathscr{P}} \big|\sigma(j)-\sigma(i)\big| = \prod_{\{u,v\}\in\mathscr{P}} |v-u| = \prod_{\{i,j\}\in\mathscr{P}} |j-i|$ après le changement d'indice : $\{u,v\} = \mu_\sigma\big(\{i,j\}\big)$. Ce calcul prouve que le produit $\displaystyle\prod_{\{i,j\}\in\mathscr{P}} \frac{\sigma(j)-\sigma(i)}{j-i}$ vaut ± 1. Notons-le $\varepsilon(\sigma)$.
- Pour tous $\sigma, \sigma' \in S_n$: $\displaystyle\varepsilon(\sigma\sigma') = \prod_{\{i,j\}\in\mathscr{P}} \frac{\sigma\sigma'(j)-\sigma\sigma'(i)}{j-i} = \prod_{\{i,j\}\in\mathscr{P}} \frac{\sigma\sigma'(j)-\sigma\sigma'(i)}{\sigma'(j)-\sigma'(i)} \times \prod_{\{i,j\}\in\mathscr{P}} \frac{\sigma'(j)-\sigma'(i)}{j-i}$
$$= \prod_{\{u,v\}\in\mathscr{P}} \frac{\sigma(v)-\sigma(u)}{v-u} \times \prod_{\{i,j\}\in\mathscr{P}} \frac{\sigma'(j)-\sigma'(i)}{j-i} = \varepsilon(\sigma)\,\varepsilon(\sigma')$$ après le changement d'indice $\{u,v\} = \mu_{\sigma'}\big(\{i,j\}\big)$.
- Soit $\tau = (a\ b) \in S_n$ une transposition avec : $a < b$. Nous voulons montrer que : $\varepsilon(\tau) = -1$. Nous allons simplement passer en revue les termes du produit : $\displaystyle\varepsilon(\tau) = \prod_{\{i,j\}\in\mathscr{P}} \frac{\tau(j)-\tau(i)}{j-i}$.

— Si $\{i,j\} \in \mathscr{P}$ ne contient ni a ni b, alors : $\dfrac{\tau(j)-\tau(i)}{j-i} = \dfrac{j-i}{j-i} = 1$.

— Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$ distinct de a et b, regroupons les termes d'indices $\{i,a\}$ et $\{i,b\}$. Leur contribution au produit vaut : $\dfrac{\tau(a)-\tau(i)}{a-i} \times \dfrac{\tau(b)-\tau(i)}{b-i} = \dfrac{b-i}{a-i} \times \dfrac{a-i}{b-i} = 1$.

— Pour finir, le terme d'indice $\{a,b\}$ vaut -1 car : $\dfrac{\tau(b)-\tau(a)}{b-a} = \dfrac{a-b}{b-a} = -1$.

Conclusion : $\varepsilon(\tau) = -1$ par produit.

- Montrons enfin l'unicité de la signature sur S_n. Donnons-nous pour cela deux applications η et η' de S_n dans $\{-1,1\}$ qui satisfont la conclusion du théorème et montrons qu'alors : $\eta = \eta'$. Soit $\sigma \in S_n$. Nous avons vu que σ est un produit de transpositions $\tau_1, \ldots, \tau_p$: $\sigma = \tau_1 \ldots \tau_p$. Comme voulu :

$$\eta(\sigma) = \eta(\tau_1 \ldots \tau_p) = \eta(\tau_1) \ldots \eta(\tau_p) = (-1)^p = \eta'(\tau_1) \ldots \eta'(\tau_p) = \eta'(\tau_1 \ldots \tau_p) = \eta'(\sigma).$$ ■

Théorème (Signature d'un cycle) Soit $p \in [\![2,n]\!]$. La signature d'un p-cycle de $[\![1,n]\!]$ est $(-1)^{p-1}$.

Démonstration On a vu que pour tous $x_1, \ldots, x_p \in [\![1,n]\!]$ distincts : $(x_1 \ \ldots \ x_p) = (x_1 \ x_2)(x_2 \ x_3) \ldots (x_{p-1} \ x_p)$. Cette décomposition fait intervenir $p-1$ transpositions, donc en effet : $\varepsilon\big((x_1 \ \ldots \ x_p)\big) = (-1)^{p-1}$. ■

Exemple $(1\ 5\ 3)(2\ 4\ 6\ 1)(3\ 4)$ est une permutation paire.

Démonstration $\varepsilon\big((1\ 5\ 3)(2\ 4\ 6\ 1)(3\ 4)\big) = \varepsilon\big((1\ 5\ 3)\big)\varepsilon\big((2\ 4\ 6\ 1)\big)\varepsilon\big((3\ 4)\big) = (-1)^{3-1}(-1)^{4-1}(-1)^{2-1} = 1$.

Théorème (Caractérisation des formes multilinéaires alternées par la signature) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et f une forme n-linéaire de E^n. Alors f est alternée si et seulement si pour tous $x_1, \ldots, x_n \in E$ et $\sigma \in S_n$:

$$f\big(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}\big) = \varepsilon(\sigma)\, f(x_1, \ldots, x_n).$$

✌ **Explication** ✌ Ce résultat nous permet de conclure le calcul savant que nous avons amorcé plus haut. Si $E \neq \{0_E\}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, f une forme n-linéaire alternée de E^n, $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et enfin $(x_1, \ldots, x_n)$ une famille de n vecteurs de E de matrice A dans $\mathscr{B}$, alors :

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \left(\prod_{i=1}^n a_{\sigma(i)i} \right) f\big(e_{\sigma(1)}, \ldots, e_{\sigma(n)}\big) = \left(\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{\sigma(i)i} \right) f(e_1, \ldots, e_n).$$

Démonstration

- Faisons l'hypothèse que pour tous $x_1, \ldots, x_n \in E$ et $\sigma \in S_n$: $f\big(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}\big) = \varepsilon(\sigma)\, f(x_1, \ldots, x_n)$. Soit alors $x_1, \ldots, x_n \in E$. On suppose que : $x_i = x_j$ pour certains $i,j \in [\![1,n]\!]$ avec : $i < j$ et on note τ la transposition $(i \ j)$. Dans ces conditions :

$$f(x_1, \ldots, x_n) \overset{x_i = x_j}{=} f(\ldots, x_{i-1}, x_j, x_{i+1}, \ldots, x_{j-1}, x_i, x_{j+1}, \ldots) = f\big(x_{\tau(1)}, \ldots, x_{\tau(n)}\big) = \varepsilon(\tau)\, f(x_1, \ldots, x_n) = -f(x_1, \ldots, x_n).$$

Conclusion : $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$, et donc f est alternée.

- Réciproquement, supposons f alternée. Comme S_n est engendré par ses transpositions et comme la signature d'un produit de p transpositions vaut $(-1)^p$, il nous suffit d'établir le résultat dans le seul cas où σ est une transposition. Or nous l'avons déjà fait, c'est la propriété d'antisymétrie de f. ■

4 Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base

Définition-théorème (Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base) Soient $E \neq \{0_E\}$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $\mathscr{B}$ une base de E.

- Pour toute famille $\mathscr{X}$ de n vecteurs de E de matrice A dans $\mathscr{B}$, on appelle *déterminant de $\mathscr{X}$ dans $\mathscr{B}$* le scalaire :

$$\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{X}) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i)i}.$$

- L'application $\det_{\mathscr{B}}$ ainsi définie sur E^n est une forme n-linéaire alternée de E^n et : $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}) = 1$.

✖ **Attention !** ✖ Seul le déterminant d'une famille de $\boxed{n}$ vecteurs dans un espace vectoriel de dimension $\boxed{n}$ se trouve ainsi défini.

Démonstration

- **Multilinéarité :** Vous la démontrerez seuls si vous voulez vous en convaincre.
- **Caractère alterné :** Soient $x_1, \ldots, x_n \in E$ et $\varphi \in S_n$. Dans le calcul suivant, on effectue le changement d'indice : $j = \varphi(i)$ associé à la bijection φ, puis le changement d'indice : $\theta = \sigma\varphi^{-1}$ associé à la bijection $\sigma \longmapsto \sigma\varphi^{-1}$ de S_n sur lui-même.

$$\det_{\mathscr{B}}\left(x_{\varphi(1)}, \ldots, x_{\varphi(n)}\right) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i)\varphi(i)} \overset{j=\varphi(i)}{=} \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} a_{\sigma\varphi^{-1}(j)j} \overset{\theta=\sigma\varphi^{-1}}{=} \sum_{\theta \in S_n} \varepsilon(\theta\varphi) \prod_{j=1}^{n} a_{\theta(j)j}$$

$$= \sum_{\theta \in S_n} \varepsilon(\theta)\varepsilon(\varphi) \prod_{i=1}^{n} a_{\theta(i)i} = \varepsilon(\varphi) \sum_{\theta \in S_n} \varepsilon(\theta) \prod_{i=1}^{n} a_{\theta(i)i} = \varepsilon(\varphi) \det_{\mathscr{B}}(x_1, \ldots, x_n).$$

- **Calcul de $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B})$:** La matrice B de $\mathscr{B}$ dans $\mathscr{B}$ est I_n, donc : $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} b_{\sigma(i)i} = 0$ pour toute permutation $\sigma \in S_n$ distincte de l'identité. Conclusion : $\displaystyle\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} b_{\sigma(i)i} = \varepsilon(\mathrm{Id}) \prod_{i=1}^{n} b_{\mathrm{Id}(i)i} = 1.$ ■

Théorème (Toute forme multilinéaire alternée est un multiple du déterminant dans une base donnée) Soient $E \neq \{0_E\}$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, $\mathscr{B}$ une base de E et f une forme n-alternée de E^n.

Alors : $f = f(\mathscr{B}) \det_{\mathscr{B}}$.

Démonstration Résultat déjà prouvé : $\displaystyle f(x_1, \ldots, x_n) = \left(\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i)i} \right) f(e_1, \ldots, e_n).$ ■

Théorème (Déterminants en dimensions 2 et 3)

(i) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 2 de base $\mathscr{B}$ et $x, y \in E$ de coordonnées respectives (x_1, x_2) et (y_1, y_2) dans $\mathscr{B}$. Alors :

$$\det_{\mathscr{B}}(x, y) = x_1 y_2 - x_2 y_1, \quad \text{quantité que l'on note aussi : } \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$$

(ii) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3 de base $\mathscr{B}$ et $x, y, z \in E$ de coordonnées respectives (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) et (z_1, z_2, z_3) dans $\mathscr{B}$. Alors :

$$\det_{\mathscr{B}}(x, y, z) = x_1 y_2 z_3 + x_2 y_3 z_1 + x_3 y_1 z_2 - x_3 y_2 z_1 - x_2 y_1 z_3 - x_1 y_3 z_2 \qquad (\textit{règle de Sarrus}),$$

quantité que l'on note aussi : $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$.

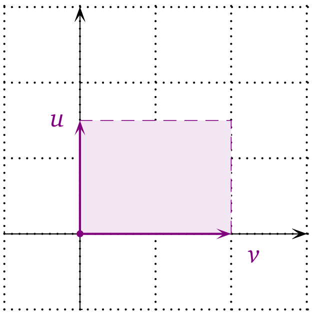
Démonstration

(i) $\det_{\mathscr{B}}(x,y) = \sum_{\sigma \in S_2} \varepsilon(\sigma) x_{\sigma(1)} y_{\sigma(2)}$, donc comme $S_2 = \big\{\mathrm{Id}, (1\ 2)\big\}$: $\det_{\mathscr{B}}(x,y) = \underbrace{x_1 y_2}_{\mathrm{Id}} - \underbrace{x_2 y_1}_{(1\ 2)}$.

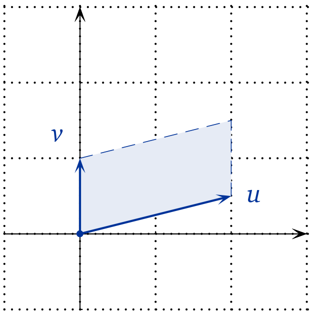
(ii) $\det_{\mathscr{B}}(x,y,z) = \sum_{\sigma \in S_3} \varepsilon(\sigma) x_{\sigma(1)} y_{\sigma(2)} z_{\sigma(3)}$, donc comme $S_3 = \big\{\mathrm{Id}, (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2), (1\ 3), (1\ 2), (2\ 3)\big\}$:

$$\det_{\mathscr{B}}(x,y,z) = \underbrace{x_1 y_2 z_3}_{\mathrm{Id}} + \underbrace{x_2 y_3 z_1}_{(1\ 2\ 3)} + \underbrace{x_3 y_1 z_2}_{(1\ 3\ 2)} - \underbrace{x_3 y_2 z_1}_{(1\ 3)} - \underbrace{x_2 y_1 z_3}_{(1\ 2)} - \underbrace{x_1 y_3 z_2}_{(2\ 3)}.$$ ■

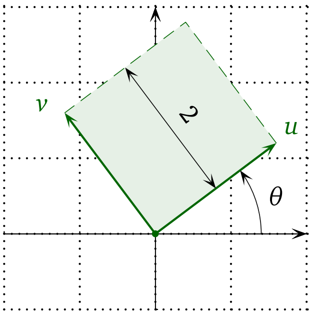
Explication Nous avons motivé l'introduction des déterminants par les notions d'aire orientée en dimension 2 et de volume orienté en dimension 3. La notion abstraite de déterminant que nous venons d'introduire est-elle a posteriori satisfaisante ? Notons $\mathscr{B}_2$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Le petit carré élémentaire que $\mathscr{B}_2$ engendre est à nos yeux, dans le monde physique, d'aire orientée 1. Nous nous attendons donc à ce que l'application $\det_{\mathscr{B}_2}$ soit une mesure de l'aire orientée des parallélogrammes au sens le plus intuitif du terme. Les figures ci-dessous sont particulièrement convaincantes. Rappelons au passage que l'aire d'un parallélogramme peut être calculée selon le principe « base × hauteur » — et au pire, vous pouvez toujours utiliser les petits carreaux du grillage !



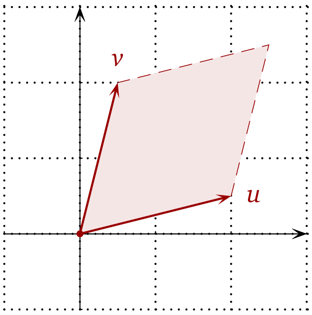
$$\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ \frac{3}{2} & 0 \end{vmatrix} = -3$$



$$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} = 2$$



$$\begin{vmatrix} 2\cos\theta & -2\sin\theta \\ 2\sin\theta & 2\cos\theta \end{vmatrix} = 4$$



$$\begin{vmatrix} 2 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 2 \end{vmatrix} = \frac{15}{4}$$

Théorème (Propriétés du déterminant d'une famille de vecteurs dans une base) Soient $E \neq \big\{0_E\big\}$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E et $\mathscr{X}$ une famille de n vecteurs de E.

(i) **Formule de changement de base :** $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{X}) = \det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') \det_{\mathscr{B}'}(\mathscr{X})$.

(ii) **Caractérisation des bases :** $\mathscr{X}$ est une base de E si et seulement si : $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{X}) \neq 0$.

Dans ce cas : $\det_{\mathscr{X}}(\mathscr{B}) = \dfrac{1}{\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{X})}$.

Démonstration

(i) L'application $\det_{\mathscr{B}}$ est n-linéaire alternée, donc de la forme : $\det_{\mathscr{B}} = \det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') \det_{\mathscr{B}'}$ d'après un théorème précédent. Pour conclure, évaluer en $\mathscr{X}$.

(ii) Si $\mathscr{X}$ est une base de E, alors d'après (i) : $1 = \det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}) = \det_{\mathscr{B}}(\mathscr{X}) \det_{\mathscr{X}}(\mathscr{B})$, donc $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{X})$ est non nul d'inverse $\det_{\mathscr{X}}(\mathscr{B})$.

Réciproquement, par contraposition, si $\mathscr{X}$ n'est pas une base de E, alors $\mathscr{X}$ est liée — car de cardinal n en dimension n. Or $\det_{\mathscr{B}}$ est n-linéaire alternée, donc : $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{X}) = 0$. ■

✖ **Attention !** ✖ Dans la définition suivante, on travaille seulement avec le corps $\mathbb{K}=\mathbb{R}$.

Définition-théorème (Orientation d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel réel de dimension finie) Soit $E \neq \{0_E\}$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. On définit sur l'ensemble des bases de E une relation « *avoir la même orientation que* » de la façon suivante — pour toutes bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ de E :

$$\mathscr{B}' \text{ a la même orientation que } \mathscr{B} \text{ si et seulement si :} \quad \det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')>0.$$

La relation ainsi définie est une relation d'équivalence. Il existe exactement deux orientations possibles : si $\mathscr{B}$ n'a pas la même orientation que $\mathscr{B}'$ et $\mathscr{B}''$, alors $\mathscr{B}'$ et $\mathscr{B}''$ ont la même orientation.

Orienter E, c'est par définition décréter arbitrairement qu'une certaine base fixée $\mathscr{B}$ de E est *directe*. Toutes les bases de E de même orientation que $\mathscr{B}$ sont alors aussi qualifiées de *directes* et les autres d'*indirectes*.

✌ **Explication** ✌ Jusqu'ici, personne n'a pu vous définir proprement le concept d'orientation — et pour cause, c'est compliqué. À présent, l'orientation d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel repose sur l'idée que ses bases sont de deux sortes et que le choix d'une orientation est totalement arbitraire — certaines sont dites « directes » et les autres « indirectes ». Cet arbitraire n'est pas vraiment surprenant cela dit, vous n'appréciez pas l'orientation d'un plan de la même façon selon que vous vous placez au-dessus ou au-dessous de lui — les bases qui paraissent directes d'un côté paraissent indirectes de l'autre. La notion d'orientation ne s'en trouve pas ruinée car l'essentiel c'est ceci — deux bases qui ont la même orientation quand on regarde le plan d'en haut ont aussi la même orientation quand on le regarde d'en bas.

Démonstration Soient $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}'$ et $\mathscr{B}''$ trois bases de E.

- **Réflexivité :** $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B})=1>0$.
- **Symétrie :** Si $\mathscr{B}'$ a la même orientation que $\mathscr{B}$: $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')>0$ donc : $\det_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B})=\dfrac{1}{\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')}>0$, et ainsi $\mathscr{B}$ a bien la même orientation que $\mathscr{B}'$.
- **Transitivité :** Si $\mathscr{B}'$ a la même orientation que $\mathscr{B}$ et si $\mathscr{B}''$ a la même orientation que $\mathscr{B}'$, alors : $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')>0$ et $\det_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B}'')>0$, donc : $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}'')=\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')\det_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B}'')>0$, et ainsi $\mathscr{B}''$ a la même orientation que $\mathscr{B}$.
- **Exactement deux orientations :** Il s'agit de montrer que si $\mathscr{B}$ n'a pas la même orientation que $\mathscr{B}'$ et $\mathscr{B}''$, alors $\mathscr{B}'$ et $\mathscr{B}''$ ont la même. Dans ce contexte : $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')<0$ et $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}'')<0$, donc : $\det_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B}'')=\det_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B})\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}'')=\dfrac{\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}'')}{\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')}>0$, et ainsi $\mathscr{B}'$ et $\mathscr{B}''$ ont la même orientation. ■

5 Déterminant d'une matrice carrée

5.1 Définition et premières propriétés

Définition (Déterminant d'une matrice carrée) Soit $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle *déterminant de A* le déterminant de la famille des colonnes de A dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$, noté : $\det(A)$ ou $\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$ ou $\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}_{[n]}$.

Par définition, donc : $\det(A)=\displaystyle\sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)\prod_{i=1}^{n}a_{\sigma(i)i}$.

✖ **Attention !** ✖ Seul le déterminant d'une matrice **carrée** est ainsi défini.

Exemple $\det(I_n)=\det_{\mathscr{B}_n}(\mathscr{B}_n)=1$ si on note $\mathscr{B}_n$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

Théorème (Lien entre le déterminant d'une matrice carrée et le déterminant d'une famille de vecteurs dans une base) Soient $E \neq \{0_E\}$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, $\mathscr{B}$ une base de E et $\mathscr{X}$ une famille de n vecteurs de E. Alors : $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{X}) = \det\big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{X})\big)$.

Démonstration Évident, les colonnes de $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{X})$ sont exactement les coordonnées des vecteurs de $\mathscr{X}$ dans $\mathscr{B}$ et les déterminants sont définis par la même formule. ■

Théorème (Premières propriétés du déterminant d'une matrice carrée) Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

(i) **Multilinéarité par rapport aux colonnes :** L'application $A \longmapsto \det(A)$ sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est n-linéaire par rapport aux colonnes de A.

ATTENTION !

En particulier, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$: $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.

(ii) **Déterminant d'un produit :** $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

(iii) **Caractérisation de l'inversibilité :** A est inversible si et seulement si : $\det(A) \neq 0$.
En outre, dans ce cas : $\det\big(A^{-1}\big) = \dfrac{1}{\det(A)}$.

(iv) **Invariance par similitude :** Deux matrices semblables de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ ont même déterminant.

(v) **Invariance par transposition :** $\det\big({}^{t}A\big) = \det(A)$.

A fortiori, l'application $A \longmapsto \det(A)$ sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est également n-linéaire par rapport aux lignes de A.

✌ **Explication** ✌ L'invariance du déterminant par transposition signifie que dans l'expression : $\displaystyle\sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma)\prod_{i=1}^n a_{\sigma(i)i}$, on peut si on le souhaite remplacer $a_{\sigma(i)i}$ par $a_{i\sigma(i)}$, c'est indolore.

✖ ATTENTION ! ✖ Le déterminant n'est pas linéaire. En général, si $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$: $\det(\lambda A + \mu B) \neq \lambda\det(A) + \mu\det(B)$.

Démonstration

(i) Tout simplement, si on note $\mathscr{B}_n$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$, l'application $\det_{\mathscr{B}_n}$ est n-linéaire.

(ii) Notons $A_1, \ldots, A_n$ les colonnes de A, $B_1, \ldots, B_n$ celles de B, $\mathscr{B}_n$ désigne la base canonique de $\mathbb{K}^n$ et φ l'application $(C_1, \ldots, C_n) \longmapsto \det_{\mathscr{B}_n}\big(AC_1, \ldots, AC_n\big)$ de $\big(\mathbb{K}^n\big)^n$ dans $\mathbb{K}$.

- **Multilinéarité :** Pour tous $k \in [\![1,n]\!]$, $C_k, C'_k \in \mathbb{K}^n$ et $\lambda, \lambda' \in \mathbb{K}$ — les autres variables étant fixées :

$$\begin{aligned}\varphi\big(\ldots, \lambda C_k + \lambda' C'_k, \ldots\big) &= \det_{\mathscr{B}_n}\big(\ldots, A(\lambda C_k + \lambda' C'_k), \ldots\big) = \det_{\mathscr{B}_n}\big(\ldots, \lambda AC_k + \lambda' AC'_k, \ldots\big)\\ &= \lambda\det_{\mathscr{B}_n}\big(\ldots, AC_k, \ldots\big) + \lambda'\det_{\mathscr{B}_n}\big(\ldots, AC'_k, \ldots\big) = \lambda\varphi\big(\ldots, C_k, \ldots\big) + \lambda'\varphi\big(\ldots, C'_k, \ldots\big).\end{aligned}$$

- **Caractère alterné :** Si deux des colonnes $C_1, \ldots, C_n$ au moins sont égales : $\varphi(C_1, \ldots, C_n) = 0$ puisque $\det_{\mathscr{B}_n}$ est alterné.

Conclusion : $\varphi = \varphi\big(\mathscr{B}_n\big)\det_{\mathscr{B}_n} = \det_{\mathscr{B}_n}(A_1, \ldots, A_n)\det_{\mathscr{B}_n} = \det(A)\det_{\mathscr{B}_n}$, donc :

$$\det(AB) = \det_{\mathscr{B}_n}\big(AB_1, \ldots, AB_n\big) = \varphi(B_1, \ldots, B_n) = \det(A)\det_{\mathscr{B}_n}(B_1, \ldots, B_n) = \det(A)\det(B).$$

(iii) Pour les familles de vecteurs, le résultat a été démontré dans les paragraphes précédents, or la matrice A est inversible si et seulement si la famille de ses colonnes est une base de $\mathbb{K}^n$.

(iv) Pour tous $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, d'après (ii) et (iii) : $\det\big(P^{-1}AP\big) = \det(P)^{-1}\det(A)\det(P) = \det(A)$.

(v) Nous devons montrer l'égalité : $\displaystyle\sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)\prod_{i=1}^n a_{\sigma(i)i} = \sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)\prod_{i=1}^n a_{i\sigma(i)}$. Dans le calcul qui suit, on effectue le changement d'indice : $j = \sigma(i)$ associé à la bijection σ, puis le changement d'indice : $\varphi = \sigma^{-1}$ associé à la bijection $\sigma \longmapsto \sigma^{-1}$ de S_n sur S_n (de réciproque elle-même). Remarquons par ailleurs que pour tout $\varphi \in S_n$: $\varepsilon(\varphi) = \pm 1$ donc : $\varepsilon\big(\varphi^{-1}\big) = \varepsilon(\varphi)^{-1} = \varepsilon(\varphi)$.

$$\sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)\prod_{i=1}^n a_{\sigma(i)i} \overset{j=\sigma(i)}{=} \sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)\prod_{j=1}^n a_{j\sigma^{-1}(j)} \overset{\varphi=\sigma^{-1}}{=} \sum_{\varphi\in S_n}\varepsilon\big(\varphi^{-1}\big)\prod_{j=1}^n a_{j\varphi(j)} = \sum_{\varphi\in S_n}\varepsilon(\varphi)\prod_{j=1}^n a_{j\varphi(j)} = \sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)\prod_{i=1}^n a_{i\sigma(i)}.$$ ■

La notion de *polynôme caractéristique* n'est pas au programme de MPSI mais je tiens à ce que vous la connaissiez déjà, et vous l'étudierez de toute façon en deuxième année.

Théorème (Polynôme caractéristique d'une matrice carrée) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

(i) Pour tout $x \in \mathbb{C}$, on pose : $\chi_A(x) = \det(xI_n - A)$. La fonction $x \longmapsto \chi_A(x)$ est alors polynomiale unitaire de degré n et le polynôme associé, noté aussi χ_A, est appelé le *polynôme caractéristique de A*.

(ii) Les valeurs propres (complexes) de A sont exactement les racines (complexes) de χ_A.

Démonstration

(i) Pour tout $x \in \mathbb{C}$: $\chi_A(x) = \displaystyle\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} \big(x\delta_{i\sigma(i)} - a_{i\sigma(i)}\big)$, donc χ_A est polynomiale. Ensuite, pour tout $\sigma \in S_n$, la quantité : $\varepsilon(\sigma) \displaystyle\prod_{i=1}^{n} \big(x\delta_{i\sigma(i)} - a_{i\sigma(i)}\big)$ est de degré inférieur ou égal à n puisque chaque terme du produit est de degré au plus 1. Son degré peut-il être n ? Oui, mais seulement si : $\sigma(i) = i$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, i.e. si : $\sigma = \mathrm{Id}$, et dans ce cas : $\varepsilon(\sigma) \displaystyle\prod_{i=1}^{n} \big(x\delta_{i\sigma(i)} - a_{i\sigma(i)}\big) = \prod_{i=1}^{n} (x - a_{ii})$. Conclusion : χ_A est une fonction polynomiale unitaire de degré n.

(ii) Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$: λ est valeur propre de A $\iff$ $\mathrm{Ker}\,(A - \lambda I_n) \neq \{0\}$ $\iff$ $A - \lambda I_n$ est NON inversible

$$\iff \quad \det(\lambda I_n - A) = 0 \quad \iff \quad \chi_A(\lambda) = 0 \quad \iff \quad \lambda \text{ est racine de } \chi_A.$$ ■

5.2 Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs

Théorème (Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs) Soient $A_1 \in \mathcal{M}_{p_1}(\mathbb{K}), \ldots, A_r \in \mathcal{M}_{p_r}(\mathbb{K})$.

Alors :
$$\begin{vmatrix} A_1 & \times & \times \\ & \ddots & \times \\ & & A_p \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 & & \\ \times & \ddots & \\ \times & \times & A_r \end{vmatrix} = \det(A_1)\ldots\det(A_r).$$

✌ **Explication** ✌ En particulier, le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit de ses coefficients diagonaux.

Démonstration L'invariance par transposition permet de ne travailler qu'avec des matrices triangulaires supérieures par blocs.

- **Cas d'une matrice « vraiment » triangulaire :** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ triangulaire supérieure. Dans la relation : $\det(A) = \displaystyle\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i)i}$, si le terme associé à une permutation σ est non nul, alors : $a_{\sigma(i)i} \neq 0$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, donc : $\sigma(i) \leqslant i$, mais nous allons montrer qu'en fait : $\sigma(i) = i$ par récurrence forte.

  Initialisation : $\sigma(1) \leqslant 1$ et $\sigma(1) \in [\![1,n]\!]$, donc : $\sigma(1) = 1$.

  Hérédité : Soit $i \in [\![1,n-1]\!]$. On suppose que : $\sigma(j) = j$ pour tous $j \in [\![1,i]\!]$. Que vaut $\sigma(i+1)$? Par hypothèse de récurrence et injectivité de σ : $\sigma(i+1) \leqslant i+1$, mais nous savons par hypothèse de récurrence et injectivité que : $\sigma(i+1) \notin [\![1,i]\!]$ — d'où l'égalité comme voulu.

  Conclusion : si le terme associé à une permutation σ est non nul dans la définition de $\det(A)$, forcément : $\sigma = \mathrm{Id}$. En retour, finalement : $\det(A) = \varepsilon(\mathrm{Id}) \displaystyle\prod_{i=1}^{n} a_{\mathrm{Id}(i)i} = a_1 \ldots a_n$.

- **Cas d'une matrice triangulaire par blocs :** Nous prouverons seulement le résultat pour : $r=2$, le cas général s'obtient ensuite aisément par récurrence. Fixons $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$, $B \in \mathscr{M}_q(\mathbb{K})$ et $X \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, et notons $\mathscr{B}_p$ (resp. $\mathscr{B}_q$) la base canonique de $\mathbb{K}^p$ (resp. $\mathbb{K}^q$). Objectif : $\begin{vmatrix} A & X \\ 0 & B \end{vmatrix} = \det(A)\det(B)$.

  Il n'est pas trop dur de vérifier que l'application $(M_1,\ldots,M_p) \overset{\varphi}{\longmapsto} \begin{vmatrix} M & X \\ 0 & B \end{vmatrix}$ de $\left(\mathbb{K}^p\right)^p$ dans $\mathbb{K}$ — où M est la matrice de colonnes $M_1,\ldots,M_p$ — est linéaire alternée, donc : $\varphi = \varphi\big(\mathscr{B}_p\big)\det_{\mathscr{B}_p}$. A fortiori, si nous notons $C_1,\ldots,C_p$ les colonnes de A :

$$\begin{vmatrix} A & X \\ 0 & B \end{vmatrix} = \varphi(C_1,\ldots,C_p) = \det_{\mathscr{B}_p}(C_1,\ldots,C_p)\,\varphi\big(\mathscr{B}_p\big) = \det(A)\begin{vmatrix} I_p & X \\ 0 & B \end{vmatrix}.$$

  De la même manière, il n'est pas trop dur de vérifier que l'application $(N_1,\ldots,N_q) \overset{\psi}{\longmapsto} \begin{vmatrix} I_p & X \\ 0 & N \end{vmatrix}$ de $\left(\mathbb{K}^q\right)^q$ dans $\mathbb{K}$ — où N est la matrice de lignes $N_1,\ldots,N_q$ — est linéaire alternée, donc : $\psi = \psi\big(\mathscr{B}_q\big)\det_{\mathscr{B}_q}$, et si nous notons $L_1,\ldots,L_q$ les lignes de B :

$$\begin{vmatrix} A & X \\ 0 & B \end{vmatrix} = \det(A)\begin{vmatrix} I_p & X \\ 0 & B \end{vmatrix} = \det(A)\,\psi(L_1,\ldots,L_q) = \det(A)\det_{\mathscr{B}_q}(L_1,\ldots,L_q)\,\psi\big(\mathscr{B}_q\big) = \det(A)\det(B)\begin{vmatrix} I_p & X \\ 0 & I_q \end{vmatrix},$$

  et donc comme la matrice $\begin{pmatrix} I_p & X \\ 0 & I_q \end{pmatrix}$ est « vraiment » triangulaire : $\begin{vmatrix} A & X \\ 0 & B \end{vmatrix} = \det(A)\det(B)$. ■

Exemple $\begin{vmatrix} 2 & 4 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = (-14)\times(-1) = 14$ et $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 2\times 1\times(-1) = -2.$

5.3 Calcul de déterminants par la méthode du pivot

Théorème (Déterminant d'une matrice et opérations élémentaires) Soient $i,j \in [\![1,n]\!]$ avec $i \neq j$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

(i) Les opérations élémentaires de la forme $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ et $C_j \leftarrow C_j + \lambda C_i$ ne modifient pas les déterminants.

(ii) Les opérations élémentaires $L_i \leftarrow \lambda L_i$ et $C_j \leftarrow \lambda C_j$ multiplient les déterminants par λ.

(iii) Les opérations élémentaires $L_i \longleftrightarrow L_j$ et $C_j \longleftrightarrow C_i$ multiplient les déterminants par -1.

Démonstration Montrons le résultat sur les colonnes, cela suffira car le déterminant est invariant par transposition. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ de colonnes $C_1,\ldots,C_n$. Notons $\mathscr{B}_n$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

(i) Par linéarité par rapport à la $j^{\text{ème}}$ variable et caractère alterné :

$$\det_{\mathscr{B}_n}(\ldots,C_j+\lambda C_i,\ldots) = \det_{\mathscr{B}_n}(C_1,\ldots,C_n) + \lambda\det_{\mathscr{B}_n}(\ldots,C_i,\ldots) = \det(A)+0 = \det(A).$$

(ii) Par linéarité par rapport à la $j^{\text{ème}}$ variable : $\det_{\mathscr{B}_n}(\ldots,\lambda C_j,\ldots) = \lambda\det_{\mathscr{B}_n}(C_1,\ldots,C_n) = \lambda\det(A)$.

(iii) Par caractère alterné — on fait agir la transposition $(i\ j)$ avec $i<j$:

$$\det_{\mathscr{B}_n}(\ldots,C_j,\ldots,C_i,\ldots) = -\det_{\mathscr{B}_n}(\ldots,C_i,\ldots,C_j,\ldots) = -\det(A).$$ ■

Exemple

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 & -1 \\ 4 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 9 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 & -1 \\ 0 & -16 & 2 & 5 \\ 0 & -6 & 4 & 3 \\ 0 & -10 & 1 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1 \end{matrix} = 1\times\begin{vmatrix} -16 & 2 & 5 \\ -6 & 4 & 3 \\ -10 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^2\times\begin{vmatrix} 1 & -10 & 3 \\ 4 & -6 & 3 \\ 2 & -16 & 5 \end{vmatrix} \begin{matrix} C_1 \longleftrightarrow C_2 \\ L_1 \longleftrightarrow L_3 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & -10 & 3 \\ 0 & 34 & -9 \\ 0 & 4 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{matrix}$$

$$= 1\times\begin{vmatrix} 34 & -9 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = 2.$$

Exemple Pour tous $a, b \in \mathbb{C}$: $\begin{vmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & b \\ b-a & a-b & 0 \\ b-a & 0 & a-b \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{matrix} = (b-a)^2 \begin{vmatrix} a & b & b \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$

$$= (b-a)^2 \begin{vmatrix} a+2b & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \quad L_1 \leftarrow L_1 + bL_2 + bL_3 \quad = (b-a)^2(a+2b).$$

5.4 Développement par rapport à une ligne ou une colonne et formule d'inversion

On développe à présent une nouvelle stratégie de calcul des déterminants matriciels. Si nous notons $\mathscr{B}_n = (E_1, \dots, E_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$, alors pour tous $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $j \in [\![1, n]\!]$:

$$\det(A) = \det_{\mathscr{B}_n}(C_1, \dots C_n) = \det_{\mathscr{B}_n}\left(\dots, C_{j-1}, \sum_{i=1}^n a_{ij}E_i, C_{j+1}, \dots\right) \overset{n\text{-linéarité}}{=} \sum_{i=1}^n a_{ij} \det_{\mathscr{B}_n}(\dots, C_{j-1}, E_i, C_{j+1}, \dots)$$

$$= \sum_{i=1}^n a_{ij} \begin{vmatrix} & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \cdots & a_{i-1,j-1} & 0 & a_{i-1,j+1} & \cdots \\ \cdots & a_{i,j-1} & 1 & a_{i,j+1} & \cdots \\ \cdots & a_{i+1,j-1} & 0 & a_{i+1,j+1} & \cdots \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \end{vmatrix}_{[n]} = \underbrace{\sum_{i=1}^n (-1)^{j-1} a_{ij} \begin{vmatrix} \vdots & & \vdots & \vdots & \\ 0 & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots \\ 1 & \cdots & a_{i,j-1} & a_{i,j+1} & \cdots \\ 0 & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \end{vmatrix}_{[n]}}$$

On échange la $j^{\text{ème}}$ colonne avec la $(j-1)^{\text{ème}}$,
puis la $(j-1)^{\text{ème}}$ avec la $(j-2)^{\text{ème}}$, etc.
Au total, $j-1$ échanges de colonnes, d'où le $(-1)^{j-1}$.

$$= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1}(-1)^{j-1} a_{ij} \begin{vmatrix} 1 & \cdots & a_{i,j-1} & a_{i,j+1} & \cdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \\ 0 & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots \\ 0 & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \end{vmatrix}_{[n]} = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \begin{vmatrix} & \vdots & \vdots & \\ \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots \\ \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots \\ & \vdots & \vdots & \end{vmatrix}_{[n-1]}.$$

Même chose sur les lignes.
La matrice obtenue est triangulaire par blocs.

Morale de l'histoire, un déterminant de taille n peut être calculé comme une combinaison linéaire de déterminants de taille $n-1$. Plus précisément, les déterminants de taille $n-1$ auxquels nous avons permis d'apparaître ne sont jamais que des déterminants de la matrice A à laquelle on a supprimé une ligne et une colonne.

Définition (Mineurs, cofacteurs, comatrice) Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $i, j \in [\![1, n]\!]$.

- On appelle *mineur de A de position (i, j)* le déterminant de la matrice extraite de A par suppression de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne. Nous le noterons $\Delta_{ij}(A)$ dans ce cours mais la notation n'est pas universelle.
- On appelle *cofacteur de A de position (i, j)* le scalaire : $(-1)^{i+j}\Delta_{ij}(A)$.
- On appelle *comatrice de A*, notée $\mathrm{com}(A)$, la matrice des cofacteurs de A : $\mathrm{com}(A) = \Big((-1)^{i+j}\Delta_{ij}(A)\Big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

✌ **Explication** ✌ Le cofacteur de position (i, j) est égal, au signe près, au mineur de même position — mais comment ces signes sont-ils distribués ? La matrice ci-contre schématise leur distribution.

$$\begin{pmatrix} + & - & + & \cdots \\ - & + & - & \cdots \\ + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Exemple La comatrice de $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ est la matrice $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Vérifiez de tête !

Finalement, nous avons démontré en introduction de ce paragraphe le théorème suivant.

Théorème **(Développement par rapport à une ligne ou une colonne)** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

(i) **Développement par rapport à une ligne :** Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$: $\quad \det(A) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \Delta_{ij}(A).$

(ii) **Développement par rapport à une colonne :** Pour tout $j \in [\![1,n]\!]$: $\quad \det(A) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \Delta_{ij}(A).$

Explication Ces formules se comprennent sur des exemples simples. En voici un, où l'on développe par rapport à la première colonne :

$$\begin{vmatrix} \boxed{1} & 4 & 7 \\ \boxed{2} & 5 & 8 \\ \boxed{3} & 6 & 9 \end{vmatrix} = \overbrace{+1 \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix}}^{\text{Ceci ne doit pas figurer sur vos copies, c'est juste pour vous expliquer.}} = \begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = 0.$$

Ici, la nullité du déterminant montre que la matrice 3×3 considérée n'est pas inversible.

En pratique Le développement par rapport à une ligne/colonne est souvent utile, mais dans la mesure du possible, il faut choisir de développer par rapport à une ligne/colonne contenant beaucoup de zéros. En règle générale, je vous conseille de privilégier la méthode du pivot, qui fournit davantage des résultats sous forme factorisée — car après tout, ce que l'on veut savoir d'un déterminant, c'est souvent s'il est nul ou non.

Exemple
$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \underbrace{(-1) \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}}_{(3^{\text{ème}}\text{ colonne})} = \underbrace{(-1)\left((-1) \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \right)}_{(1^{\text{ère}}\text{ colonne})} + \underbrace{\left(-(-1) \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \right)}_{(1^{\text{ère}}\text{ colonne})} = 4.$$

Exemple Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 3 & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 2 \\ 0 & 0 & & 1 & 3 \end{vmatrix}_{[n]} = 2^{n+1} - 1.$$

Démonstration Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons D_n le déterminant de taille n étudié. Un développement par rapport à la première colonne fournit aisément la relation de récurrence suivante, vraie pour $n \geqslant 3$: $\quad D_n = 3D_{n-1} - 2D_{n-2}$ — il faut l'écrire soi-même pour s'en convaincre. La suite $(D_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est donc récurrente linéaire d'ordre 2 de polynôme caractéristique : $\quad X^2 - 3X + 2 = (X-1)(X-2)$, $\quad$ polynôme dont les racines sont 1 et 2, distinctes. Il existe ainsi $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\quad D_n = \lambda 2^n + \mu 1^n$. $\quad$ Or : $\quad D_1 = 3 \quad$ et $\quad D_2 = 7$, $\quad$ donc : $\lambda = 2 \quad$ et $\quad \mu = -1$, $\quad$ et finalement : $\quad D_n = 2^{n+1} - 1$.

Théorème **(Formule d'inversion)** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors : $\qquad A\,{}^t\mathrm{com}(A) = {}^t\mathrm{com}(A)\,A = \det(A)\,I_n.$

En particulier, si A est inversible : $\quad A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)}\,{}^t\mathrm{com}(A).$

Démonstration Nous montrerons seulement que : $\quad A\,{}^t\mathrm{com}(A) = \det(A)\,I_n$, $\quad$ i.e. que pour tous $i, j \in [\![1,n]\!]$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{ik} (-1)^{j+k} \Delta_{jk}(A) = \det(A)\delta_{ij}$. $\quad$ Soient $i, j \in [\![1,n]\!]$.

- Pour : $\quad i = j$, $\quad$ le résultat n'est qu'un développement par rapport à la $i^{\text{ème}}$ ligne.
- Et pour : $\quad i \neq j$? Remplaçons dans A la $j^{\text{ème}}$ ligne par la $i^{\text{ème}}$ et notons B la matrice obtenue. Les $i^{\text{ème}}$ et $j^{\text{ème}}$ lignes de B étant égales : $\quad \det(B) = 0$. $\quad$ Développons par ailleurs $\det(B)$ par rapport à sa $j^{\text{ème}}$ ligne. Les mineurs $\Delta_{jk}(A)$ de A et $\Delta_{jk}(B)$ de B associés à cette ligne étant égaux :
$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} (-1)^{j+k} \Delta_{jk}(A) = \sum_{k=1}^{n} b_{jk} (-1)^{j+k} \Delta_{jk}(B) = \det(B) = 0. \qquad \blacksquare$$

Exemple Pour tout $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$: $\quad A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)}\, {}^t\mathrm{com}(A) = \dfrac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$ si : $\quad \det(A) = ad - bc \neq 0$.
Résultat bien connu !

✖ **Attention !** ✖ La formule d'inversion est fondamentale mais seulement dans des contextes théoriques, il ne faut pas s'en servir a priori pour inverser une matrice concrète ! Elle ramène en effet le calcul de A^{-1} au calcul de $\det(A)$ et $\mathrm{com}(A)$, c'est-à-dire au calcul d'un déterminant de taille n et de n^2 déterminants de taille $n-1$ — ce qui est fort coûteux.

Exemple Soient $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{C}$. Nous savons déjà que la matrice de Vandermonde $\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$ de $x_1, \ldots, x_n$ est inversible si et seulement si $x_1, \ldots, x_n$ sont distincts.
Nous allons retrouver ce résultat en calculant son déterminant : $\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \displaystyle\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i)$.

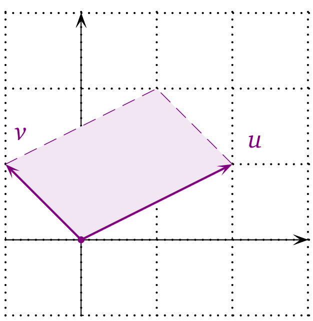
Soyons honnêtes cependant, s'il s'agit seulement d'établir la condition nécessaire et suffisante d'inversibilité des matrices de Vandermonde, la preuve qui suit est inutilement compliquée. Elle n'en demeure pas moins un grand classique et un modèle de calcul de certains autres déterminants.

Démonstration Pour tous $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{C}$, notons $V_n(x_1, \ldots, x_n)$ le déterminant de Vandermonde de $x_1, \ldots, x_n$.

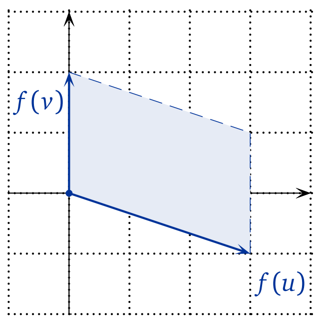
- Fixons $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{C}$ **distincts** et notons P la fonction $x \longmapsto V_{n+1}(x_1, \ldots, x_n, x)$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.
  — Pour tout $x \in \mathbb{C}$, après développement par rapport à la $(n+1)^{\text{ème}}$ ligne : $\quad P(x) = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} a_j x^j \quad$ pour certains $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ dépendant de $x_1, \ldots, x_n$ **mais pas de** x. La fonction P est ainsi polynomiale de degré au plus n. De plus : $\quad a_n = V_n(x_1, \ldots, x_n)$.
  — Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$: $\quad P(x_i) = 0 \quad$ — mêmes lignes $i^{\text{ème}}$ et $(n+1)^{\text{ème}}$ — donc P admet $x_1, \ldots, x_n$ pour racines **distinctes**. Du coup, d'après le point précédent, pour tout $x \in \mathbb{C}$:
  $$P(x) = V_n(x_1, \ldots, x_n) \prod_{i=1}^{n} (x - x_i), \qquad \text{i.e. } V_{n+1}(x_1, \ldots, x_n, x) = V_n(x_1, \ldots, x_n) \prod_{i=1}^{n} (x - x_i).$$
  Cette égalité est encore vraie si l'on ne suppose pas $x_1, \ldots, x_n$ distincts car elle s'écrit alors : $\quad 0 = 0$.
- Il n'est finalement pas très dur de montrer par récurrence que pour tous $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{C}$:
  $$V_n(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i).$$
  Comme voulu, $V_n(x_1, \ldots, x_n)$ est donc nul si et seulement si deux des x_i au moins sont égaux.

6 Déterminant d'un endomorphisme

Nous sommes maintenant au point sur la notion généralisée de volume orienté, mais une question subsiste — comment les applications linéaires se comportent-elles vis-à-vis d'un volume orienté ? Sur la figure suivante, on a noté $\mathscr{B}_2$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.



$$\xrightarrow[\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_2}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}]{f(x,y) = (x+y,\, y-x)}$$



$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_2}(u, v) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_2}\big(f(u), f(v)\big) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

L'égalité : $\quad \text{Mat}_{\mathscr{B}_2}\big(f(u),f(v)\big) = \text{Mat}_{\mathscr{B}_2}(f) \times \text{Mat}_{\mathscr{B}_2}(u,v) \quad$ donne en termes de déterminants :

$$\underbrace{\det_{\mathscr{B}_2}\big(f(u),f(v)\big)}_{=6} = \det\Big(\text{Mat}_{\mathscr{B}_2}(f)\Big) \times \underbrace{\det_{\mathscr{B}_2}(u,v)}_{=3},$$

ce qui montre que l'application f agit sur les volumes orientés en les multipliant par : $\quad \det\Big(\text{Mat}_{\mathscr{B}_2}(f)\Big) = 2$. C'est ce facteur 2 que nous appelons ci-après le *déterminant de f*.

Définition-théorème (Déterminant d'un endomorphisme) Soient $E \neq \{0_E\}$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$. Le scalaire $\det_{\mathscr{B}}\big(f(\mathscr{B})\big) = \det\Big(\text{Mat}_{\mathscr{B}}(f)\Big)$ ne dépend pas de la base $\mathscr{B}$ choisie. On l'appelle *déterminant de f* et on le note $\det(f)$.

✖ **Attention !** ✖ Pour commencer, seul le déterminant d'un **ENDO**morphisme est ainsi défini. Ensuite, le déterminant d'une famille de vecteurs était relatif à une base, mais ce n'est plus le cas pour celui d'un endomorphisme.

Démonstration Pour toutes bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ de E :

$$\det\Big(\text{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)\Big) = \det\Big(\big(P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}\big)^{-1}\text{Mat}_{\mathscr{B}}(f)P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}\Big) = \det\big(P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}\big)^{-1}\det\Big(\text{Mat}_{\mathscr{B}}(f)\Big)\det\big(P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}\big) = \det\Big(\text{Mat}_{\mathscr{B}}(f)\Big). \quad \blacksquare$$

Exemple Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On a défini le déterminant de A comme le déterminant de la famille de ses colonnes dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$. Il coïncide aussi avec le déterminant de l'endomorphisme canoniquement associé à A.

Démonstration Notons $\widehat{A}$ l'endomorphisme canoniquement associé à A, $C_1,\ldots,C_n$ les colonnes de A ainsi que $\mathscr{B}_n = (E_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$. Comme voulu :

$$\det(A) = \det_{\mathscr{B}_n}(C_1,\ldots,C_n) = \det_{\mathscr{B}_n}(AE_1,\ldots,AE_n) = \det_{\mathscr{B}_n}\Big(\widehat{A}(E_1),\ldots,\widehat{A}(E_n)\Big) = \det_{\mathscr{B}_n}\Big(\widehat{A}(\mathscr{B}_n)\Big) = \det\big(\widehat{A}\big).$$

Théorème (Propriétés du déterminant d'un endomorphisme) Soient $E \neq \{0_E\}$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $f,g \in \mathscr{L}(E)$.

(i) **Effet d'un endomorphisme sur un déterminant de famille de vecteurs :** Pour toute base $\mathscr{B}$ de E et pour toute famille $\mathscr{X}$ de n vecteurs de E : $\quad \det_{\mathscr{B}}\big(f(\mathscr{X})\big) = \det(f)\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{X})$.

(ii) **Déterminant d'une composée :** $\quad \det(g \circ f) = \det(g)\det(f)$.

Attention !

En particulier, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$: $\quad \det(\lambda f) = \lambda^n \det(f)$.

(iii) **Caractérisation des automorphismes :** f est un automorphisme de E si et seulement si : $\quad \det(f) \neq 0$.

Dans ce cas : $\quad \det\big(f^{-1}\big) = \dfrac{1}{\det(f)}$.

✖ **Attention !** ✖ Le déterminant n'est pas linéaire. En général, si $\lambda,\mu \in \mathbb{K}$: $\quad \det(\lambda f + \mu g) \cancel{=} \lambda\det(f) + \mu\det(g)$.

Démonstration Fixons $\mathscr{B}$ une base de E.

(i) $$\det_{\mathscr{B}}\big(f(\mathscr{X})\big) = \det\Big(\text{Mat}_{\mathscr{B}}\big(f(\mathscr{X})\big)\Big) = \det\Big(\text{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \times \text{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{X})\Big) = \det\Big(\text{Mat}_{\mathscr{B}}(f)\Big)\det\Big(\text{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{X})\Big) = \det(f)\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{X}).$$

(iii) $$\det(g \circ f) = \det\Big(\text{Mat}_{\mathscr{B}}(g \circ f)\Big) = \det\Big(\text{Mat}_{\mathscr{B}}(g) \times \text{Mat}_{\mathscr{B}}(f)\Big) = \det\Big(\text{Mat}_{\mathscr{B}}(g)\Big)\det\Big(\text{Mat}_{\mathscr{B}}(f)\Big) = \det(g)\det(f).$$

(ii) f est un automorphisme de E si et seulement si $f(\mathscr{B})$ est une base de E, autrement dit si et seulement si : $\det_{\mathscr{B}}\big(f(\mathscr{B})\big) \neq 0$, $\quad$ ou encore : $\quad \det(f) \neq 0$. $\blacksquare$

✖ **Attention !** ✖ Dans le theorème suivant, on travaille seulement avec le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Théorème (Signe du déterminant d'un endomorphisme) Soient $E \neq \{0_E\}$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel orienté de dimension finie et $f \in \mathrm{GL}(E)$.

- Si : $\det(f) > 0$, alors l'image de toute base directe (resp. indirecte) de E est une base directe (resp. indirecte) de E. On dit que f *préserve l'orientation de* E.
- Si : $\det(f) < 0$, alors l'image de toute base directe (resp. indirecte) de E est une base indirecte (resp. directe) de E. On dit que f *renverse l'orientation de* E.

✌ **Explication** ✌ Le point frappant dans ce résultat, c'est qu'un endomorphisme se comporte de la même manière vis-à-vis de **TOUTE** base — soit il préserve l'orientation de **TOUTES**, soit il la renverse pour **TOUTES**.

Démonstration Simplement, pour toutes bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ de E : $\det_{\mathscr{B}}\big(f(\mathscr{B}')\big) = \det(f)\,\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')$. ■