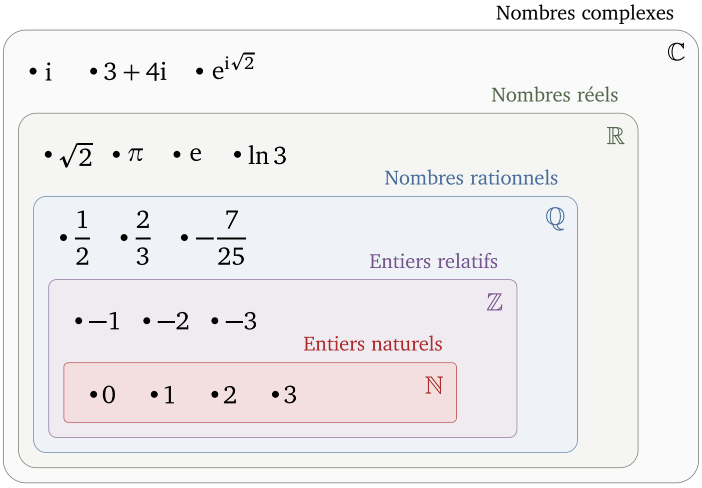
Ensembles de nombres, équations, inéquations



1 Ensembles de nombres

- **Ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$:** On rappelle que :
  — $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{R}^*$ et $\mathbb{C}^*$ désignent les ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ privés de 0,
  — $\mathbb{R}_+$ désigne l'ensemble des réels positifs ou nuls et $\mathbb{R}_-$ celui des réels négatifs ou nuls,
  — $\mathbb{R}_+^*$ désigne l'ensemble des réels strictement positifs et $\mathbb{R}_-^*$ celui des réels strictement négatifs.
- **Intervalles :** Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, on introduit différents ensembles de nombres appelés *intervalles* :
  — les *segments* : $[a,b] = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \quad a \leqslant x \leqslant b\right\}$,
  — les intervalles *ouverts*, par exemple : $]a,b[= \left\{x \in \mathbb{R} \mid \quad a < x < b\right\}$ et $]a,+\infty[= \left\{x \in \mathbb{R} \mid \quad x > a\right\}$,
  — les intervalles *semi-ouverts*, par exemple : $[a,b[= \left\{x \in \mathbb{R} \mid \quad a \leqslant x < b\right\}$ et $]-\infty,b] = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \quad x \leqslant b\right\}$.
- **Intervalles d'entiers :** Comme on l'a déjà vu, pour tous $a, b \in \mathbb{Z}$, on note $[\![a,b]\!]$ l'ensemble des ENTIERS compris entre a et b : $[\![a,b]\!] = \left\{n \in \mathbb{Z} \mid \quad a \leqslant n \leqslant b\right\}$, et si $a \leqslant b$: $\left|[\![a,b]\!]\right| = b - a \boxed{+1}$.

2 Factorisation première et forme irréductible d'un rationnel

Le contenu de ce paragraphe sera repris en détail et étoffé au chapitre « Arithmétique des entiers relatifs ».

Définition (Divisibilité, diviseur, multiple) Soient $a, b \in \mathbb{N}$. On dit que a *divise* b, ou que a est un *diviseur de* b, que b est *divisible par* a ou que b est un *multiple de* a si $b = ak$ pour un certain $k \in \mathbb{N}$.

Exemple Les diviseurs de 7 sont 1 et 7, les diviseurs de 6 sont 1, 2, 3 et 6, les diviseurs de 20 sont 1, 2, 4, 5, 10 et 20.

Définition (Nombre premier) Soit $p \in \mathbb{N}$. On dit que p est *premier* si $p \neq 1$ et si ses seuls diviseurs sont 1 et p.

Les nombres premiers sont l'analogue dans $\mathbb{N}$ des particules élémentaires en physique — des nombres qu'on ne peut pas casser en un produit de morceaux plus petits.

Il en existe une infinité : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43…

Théorème (Factorisation première) Tout entier naturel supérieur ou égal à 2 peut être écrit d'une et une seule manière, appelée sa *factorisation première*, sous la forme : $p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$ où $p_1, \dots, p_r$ sont des nombres premiers pour lesquels : $p_1 < \dots < p_r$ et où $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{N}^*$.

Démonstration L'existence se démontre aisément par récurrence FORTE. L'unicité attendra quelques mois.

Initialisation : 2 est premier !

Hérédité : Soit $n \geqslant 2$. Faisons l'hypothèse que tout entier compris entre 2 et n est un produit de nombres premiers — éventuellement constitué d'un seul nombre premier. Qu'en est-il de $n+1$? Si $n+1$ est premier, c'est terminé.

S'il ne l'est pas, il a des diviseurs positifs autres que 1 et n, disons a et b avec $n = ab$. Or a et b sont des produits de nombres premiers par hypothèse de récurrence, donc n aussi par produit.

Exemple $33 = 3 \times 11$, $60 = 2^2 \times 3 \times 5$, $98 = 2 \times 7^2$, $1000 = 2^3 \times 5^3$.

Théorème (Irrationalité de $\sqrt{2}$ et consorts) $\sqrt{p}$ est irrationnel pour tout nombre premier p.

Démonstration Soit p un nombre premier. Supposons par l'absurde $\sqrt{p}$ rationnel, disons : $\sqrt{p} = \frac{a}{b}$ pour certains $a, b \in \mathbb{N}^*$. Notons α (resp. β) l'exposant de p dans la factorisation première de a (resp. b). Quel est alors l'exposant de p à gauche et à droite dans la relation $a^2 = pb^2$? Par unicité de la factorisation première : $2\alpha = 2\beta + 1$, ce qui nous met en présence d'un entier à la fois pair et impair — contradiction.

Définition (Nombres premiers entre eux) Soient $a, b \in \mathbb{N}$. On dit que a et b sont *premiers entre eux* si leur seul diviseur commun est 1, i.e. si leurs factorisations premières n'ont aucun facteur premier commun.

Exemple D'après les factorisations premières de l'exemple précédent, 33 et 98 sont premiers entre eux.

Théorème (Forme irréductible d'un rationnel) Tout rationnel peut être écrit d'une et une seule manière, appelée sa *forme irréductible*, sous la forme $\frac{p}{q}$ où $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ avec $|p|$ et q premiers entre eux.

On fait porter le signe de la fraction sur p et on impose à q d'être positif pour garantir l'unicité de la forme irréductible.

Et maintenant, deux petites mises au point pratiques.

- **Mise sous forme irréductible :** Pour écrire un rationnel $\frac{a}{b}$ avec $a, b \in \mathbb{N}^*$ sous forme irréductible, on remplace a et b par leurs factorisations premières et on simplifie. Par exemple : $\frac{495}{60} = \frac{3^2 \times 5 \times 11}{2^2 \times 3 \times 5} = \frac{3 \times 11}{2^2} = \frac{33}{4}$.
- **Réduction au même dénominateur :** Comment réduit-on $\frac{13}{28} + \frac{5}{42}$ au même dénominateur ? En tout cas, pas brutalement en calculant le produit des dénominateurs : $\frac{13}{28} + \frac{5}{42} = \frac{13 \times 42 + 5 \times 28}{28 \times 42} = \frac{686}{1176}$. Trop de calculs !
  - — On calcule d'abord le plus petit multiple commun ou PPCM des dénominateurs 28 et 42. Il vaut ici $84 = 2^2 \times 3 \times 7$ car : $28 = 2^2 \times 7$ et $42 = 2 \times 3 \times 7$. On a conservé la plus grande puissance de chaque nombre premier.
  - — On utilise ensuite ce PPCM comme dénominateur commun et on n'oublie pas de présenter le résultat sous forme irréductible : $\frac{13}{28} + \frac{5}{42} = \frac{13 \times 3}{28 \times 3} + \frac{5 \times 2}{42 \times 2} = \frac{49}{2^2 \times 3 \times 7} = \frac{7^2}{2^2 \times 3 \times 7} = \frac{7}{12}$.

3 Inégalités dans $\mathbb{R}$, équations, inéquations

Attention ! La confusion des inégalités STRICTES et des inégalités LARGES est proscrite ! Nous allons manipuler des inégalités toute l'année, alors de grâce, faites l'effort de choisir chaque fois scrupuleusement le symbole que vous utilisez.

Théorème (Rappels sur les inégalités) Soient $a, b, c, d, \lambda \in \mathbb{R}$.

- **Lien strict/large :** Si $a < b$: $a \leqslant b$, MAIS LA RÉCIPROQUE EST FAUSSE !

Dans les règles qui suivent, on peut remplacer les inégalités larges par des inégalités strictes.

- **Somme :** Si $a \leqslant b$ et $c \leqslant d$: $a + c \leqslant b + d$.
- **Produit :**
  - — **par un réel positif :** Si $a \leqslant b$ et $\lambda \geqslant 0$: $\lambda a \leqslant \lambda b$.
  - — **par un réel négatif :** Si $a \leqslant b$ et $\lambda \leqslant 0$: $\lambda a \geqslant \lambda b$. Bref, on renverse !
  - — **d'inégalités positives :** Si $0 \leqslant a \leqslant b$ et $0 \leqslant c \leqslant d$: $0 \leqslant ac \leqslant bd$.
- **Passage à l'inverse :** Si $a \leqslant b$ et si a et b sont DE MÊME SIGNE : $\frac{1}{b} \leqslant \frac{1}{a}$.

Majorer une fraction de réels positifs, c'est majorer son numérateur et **minorer** son dénominateur.

Minorer une fraction de réels positifs, c'est minorer son numérateur et **majorer** son dénominateur.

Exemple Soit $x \in [1,2]$. On souhaite encadrer rapidement et grossièrement le réel $\dfrac{2x+1}{3x^2+4}$.

Démonstration Par hypothèse : $1 \leqslant x \leqslant 2$, donc : $3 \leqslant 2x+1 \leqslant 5$. De même : $1 \leqslant x^2 \leqslant 4$, puis : $7 \leqslant 3x^2+4 \leqslant 16$. Par quotient enfin : $\dfrac{3}{16} \leqslant \dfrac{2x+1}{3x^2+4} \leqslant \dfrac{5}{7}$.

Exemple Pour tout $x > 0$: $x + \dfrac{1}{x} \geqslant 2$.

Démonstration Au brouillon, il est naturel de partir du résultat et de se demander d'où il vient :

$$x + \frac{1}{x} \geqslant 2 \quad \overset{x>0}{\Longleftrightarrow} \quad x^2+1 \geqslant 2x \quad \Longleftrightarrow \quad x^2-2x+1 \geqslant 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (x-1)^2 \geqslant 0,$$

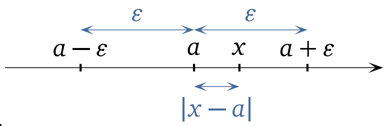
puis d'observer que le carré d'un réel est toujours positif. Sur une copie, pour un calcul aussi simple, il vaut mieux partir de la fin : $(x-1)^2 \geqslant 0$ et en déduire rapidement l'inégalité désirée.

✖ **Attention !** $a \leqslant b$ et $c \leqslant d$ $\not\Longrightarrow$ $a-c \leqslant b-d$. Pas de soustraction ! Essayez par exemple avec $0 \leqslant 1$ et $0 \leqslant 2$.

Définition-théorème (Rappels sur les valeurs absolues)

- **Définition :** Soit $x \in \mathbb{R}$. On appelle *valeur absolue de* x le réel $|x|$ défini par : $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$
  Ce réel est positif ou nul, et nul seulement si $x = 0$.
- **Interprétation géométrique :** Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x|$ est la distance entre 0 et x sur la droite réelle.
  En particulier : $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$.
- **Effet sur une somme ou un produit :** Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$: $|xy| = |x| \times |y|$
  et : $|x+y| \leqslant |x| + |y|$ (*inégalité triangulaire*).

Nous nous servirons beaucoup dans les prochains mois des équivalences que voici. Pour tous $a, x \in \mathbb{R}$, $|x-a|$ est la distance entre a et x, donc pour tout $\varepsilon > 0$:



$$|x-a| \leqslant \varepsilon \iff x \in [a-\varepsilon, a+\varepsilon] \qquad \text{et} \qquad |x-a| < \varepsilon \iff x \in]a-\varepsilon, a+\varepsilon[.$$

✖ **Attention !** $|x-y| \cancel{\leqslant} |x| - |y|$. Dans l'inégalité triangulaire, quand on remplace y par $-y$, c'est toujours un « + » qu'on trouve à droite : $|x-y| \leqslant |x| + |y|$.

En plus de la valeur absolue, on travaille dans l'exemple qui suit un principe fondamental — le *principe des substitutions*. L'idée est toute simple — si une égalité ou une inégalité est vraie pour **tout** $x \in \mathbb{R}$ par exemple, vous pouvez y remplacer la variable x par **n'importe quel réel de votre choix**, cela vous conduira souvent vers de nouveaux résultats.

Exemple Prenons l'inégalité triangulaire comme point de départ : $|x+y| \leqslant |x| + |y|$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$.

- **Premier rebondissement :** Appliquons l'inégalité triangulaire aux réels x et $-y$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$. Cela donne : $\big|x+(-y)\big| \leqslant |x| + |-y|$, donc : $|x-y| \leqslant |x| + |y|$. Cette inégalité est un nouveau résultat.
- **Deuxième rebondissement :** Appliquons l'inégalité triangulaire aux réels $x+y$ et $-y$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$. Cela donne : $\big|(x+y)+(-y)\big| \leqslant |x+y| + |-y|$, donc : $|x| \leqslant |x+y| + |y|$, puis : $|x+y| \geqslant |x| - |y|$. Encore un nouveau résultat !
- **Troisième rebondissement :** Nous venons de montrer que : $|x+y| \geqslant |x| - |y|$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, donc aussi que : $|y+x| \geqslant |y| - |x|$, ou encore : $|x+y| \geqslant |y| - |x|$. Ainsi, $|x+y|$ est supérieur ou égal aux deux réels **opposés** $|x|-|y|$ et $|y|-|x|$, donc à la valeur absolue $\big||x|-|y|\big|$: $|x+y| \geqslant \big||x|-|y|\big|$. Ces substitutions successives montrent que l'inégalité triangulaire porte en germe un peu plus qu'elle-même. En l'occurrence, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\big||x|-|y|\big| \leqslant |x \pm y| \leqslant |x| + |y| \qquad (\textit{inégalité triangulaire généralisée}).$$

Exemple Soit $x \in \mathbb{R}$. On cherche une expression de $|x-3|-|x+2|$ en fonction de x qui ne fasse apparaître aucune valeur absolue. Comment procéder ?

Démonstration $|x-3| = \begin{cases} x-3 & \text{si } x \geqslant 3 \\ -(x-3) & \text{si } x < 3 \end{cases}$ et $|x+2| = \begin{cases} x+2 & \text{si } x \geqslant -2 \\ -(x+2) & \text{si } x < -2, \end{cases}$ ce qui nous amène à couper $\mathbb{R}$ en trois intervalles disjoints : $\mathbb{R} =]-\infty, -2[\sqcup [-2, 3[\sqcup [3, +\infty[$.

$$|x-3|-|x+2| = \begin{cases} -(x-3)+(x+2) = 5 & \text{si } x \in]-\infty, -2[\\ -(x-3)-(x+2) = 1-2x & \text{si } x \in [-2, 3[\\ (x-3)-(x+2) = -5 & \text{si } x \in [3, +\infty[. \end{cases}$$

Exemple On veut résoudre l'équation $|x-4| = 2x+10$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Démonstration Tout d'abord, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $|x-4| = \begin{cases} x-4 & \text{si } x \geqslant 4 \\ 4-x & \text{si } x < 4. \end{cases}$

- **Résolution sur** $[4, +\infty[$ **:** Pour tout $x \geqslant 4$:
$$|x-4| = 2x+10 \iff x-4 = 2x+10 \iff x = -14,$$
or $-14 \notin [4, +\infty[$, donc l'équation n'a pas de solution sur $[4, +\infty[$.

- **Résolution sur** $]-\infty, 4[$ **:** Pour tout $x < 4$:
$$|x-4| = 2x+10 \iff 4-x = 2x+10 \iff x = -2,$$
et $-2 \in]-\infty, 4[$, donc -2 est bien solution. C'est finalement la seule solution sur $\mathbb{R}$.

Exemple On veut résoudre l'inéquation $|x-2| < \dfrac{3}{x}$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}^*$.

Démonstration L'équation n'a pas de solution dans $\mathbb{R}^*_-$ car pour tout $x < 0$: $\dfrac{3}{x} < 0$ alors que $|x-2| \geqslant 0$.

- **Résolution sur** $]0, 2[$ **:** Pour tout $x \in]0, 2[$:
$$|x-2| < \frac{3}{x} \iff 2-x < \frac{3}{x} \overset{x>0}{\iff} x(2-x) < 3 \iff x^2-2x+3 > 0 \overset{\text{Discriminant } -8}{\iff} x \in]0, 2[.$$

- **Résolution sur** $[2, +\infty[$ **:** Pour tout $x \in [2, +\infty[$:
$$|x-2| < \frac{3}{x} \iff x-2 < \frac{3}{x} \overset{x>0}{\iff} x(x-2) < 3 \iff x^2-2x-3 < 0 \iff (x+1)(x-3) < 0 \iff x \in]-1, 3[\iff x \in [2, 3[.$$

- **Conclusion :** L'ensemble des solutions cherché est la réunion d'intervalles $]0, 2[\cup [2, 3[=]0, 3[$.

Attention ! Pour majorer une valeur absolue $|x|$, il ne faut pas chercher à majorer x, il faut D'ABORD gérer la valeur absolue.

Réfléchissez-y bien. Supposons par exemple qu'on veuille majorer $|\sin x + \cos x|$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Votre premier réflexe consiste généralement à majorer $\sin x + \cos x$: $\sin x + \cos x \leqslant 1 + \cos x$, ce qui est correct, puis à ajouter des barres $|\ldots|$ sans trop réfléchir : $|\sin x + \cos x| \leqslant |1 + \cos x|$, SAUF QUE LÀ C'EST FAUX ! Essayez par exemple avec $x = \pi$.

En résumé : $\boxed{x \leqslant y \quad \cancel{\implies} \quad |x| \leqslant |y|}$ car la fonction valeur absolue N'est PAS croissante, elle NE respecte PAS l'ordre. À l'oral, je vous rappellerai cette erreur en vous disant qu'il est interdit de « majorer dans une valeur absolue ».

Quelle majoration de $|\sin x + \cos x|$ pourrions-nous donc proposer ? Il faut D'ABORD gérer la valeur absolue. D'après l'inégalité triangulaire : $|\sin x + \cos x| \leqslant |\sin x| + |\cos x|$, or $|\sin x| \leqslant 1$, donc : $|\sin x + \cos x| \leqslant 1 + |\cos x|$. Ainsi, observez bien que pour majorer $|\sin x + \cos x|$, nous n'avons pas seulement majoré $\sin x$ par 1, nous l'avons aussi minoré par -1.

Définition-théorème (Rappels sur les puissances)

- **Définition :** Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.
On appelle x *puissance* n le nombre x^n défini par : $x^n = \underbrace{x \times \ldots \times x}_{n \text{ fois}}$ avec $x^0 = 1$ par convention.
Si $x \neq 0$, on appelle x *puissance* $-n$ le nombre x^{-n} défini par : $x^{-n} = \dfrac{1}{x^n} = \left(\dfrac{1}{x}\right)^n = \overbrace{\dfrac{1}{x} \times \ldots \times \dfrac{1}{x}}^{n \text{ fois}}$.

- **Règles de calcul :** Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ et $m, n \in \mathbb{N}$: $x^{m+n} = x^m x^n$, $x^{mn} = \left(x^m\right)^n$ et $(xy)^n = x^n y^n$.
Ces formules sont encore vraies si m ou n est négatif à condition que x et y soient non nuls.

On ne vous demande pas tant de connaître ces règles de calcul que de les comprendre parfaitement chaque fois que vous les utilisez. Par exemple, pour les deux premières : $x^m x^n = \underbrace{x \times \ldots \times x}_{m \text{ fois}} \times \underbrace{x \times \ldots \times x}_{n \text{ fois}} = \underbrace{x \times \ldots \times x}_{m+n \text{ fois}} = x^{m+n}$ et :

$$\left(x^m\right)^n = \underbrace{\overbrace{x \times \ldots \times x}^{m \text{ fois}} \times \ldots \times \overbrace{x \times \ldots \times x}^{m \text{ fois}}}_{n \text{ fois}} = \underbrace{x \times \ldots \times x}_{m+\ldots+m \text{ fois}} = \underbrace{x \times \ldots \times x}_{mn \text{ fois}} = x^{mn}.$$

Définition-théorème (Rappels sur les racines carrées)

- **Définition :** Soit $x \geqslant 0$. Il existe un et un seul réel $r \geqslant 0$ pour lequel $x = r^2$. On l'appelle la *racine carrée de x* et on le note $\sqrt{x}$.
- **Effet sur un produit :** Pour tous $x, y \geqslant 0$: $\sqrt{xy} = \sqrt{x} \times \sqrt{y}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\sqrt{x^2} = |x|$.

Attention ! La quantité $\left(\sqrt{x}\right)^2$ n'est définie QUE SI $x \geqslant 0$, et par définition de la racine carrée : $\left(\sqrt{x}\right)^2 = x$. La quantité $\sqrt{x^2}$, au contraire, est toujours définie, mais comme le passage au carré tue le signe de x^2 : $\sqrt{x^2} = |x|$.

Ce qu'il faut retenir, c'est qu'en général : $\boxed{\sqrt{x^2} \cancel{=} x.}$

Attention !

Pour $a, b, x, y \in \mathbb{R}$: $ax = ay \;\cancel{\Longrightarrow}\; x = y$, $\quad a^2 = b^2 \;\cancel{\Longrightarrow}\; a = b$

et pour $a \geqslant 0$: $x^2 = a \;\cancel{\Longrightarrow}\; x = \sqrt{a}$.

Ce sont là des ERREURS GRAVES. Pour les corriger, un rappel : $\boxed{\text{Un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs l'est.}}$

Il en découle que : $ax = ay \iff a(x-y) = 0 \iff a = 0 \text{ ou } x = y$,

que : $a^2 = b^2 \iff (a+b)(a-b) = 0 \iff a = b \text{ ou } a = -b \iff |a| = |b|$,

et enfin si $a \geqslant 0$: $x^2 = a \iff \left(x + \sqrt{a}\right)\left(x - \sqrt{a}\right) = 0 \iff x = \sqrt{a} \text{ ou } x = -\sqrt{a}$.

Voici donc la version corrigée des règles erronées précédentes :

Pour tous $a, b, x, y \in \mathbb{R}$: $ax = ay \iff a = 0 \text{ ou } x = y$,

$a^2 = b^2 \iff a = b \text{ ou } a = -b \iff |a| = |b|$,

et pour $a \geqslant 0$: $x = \sqrt{a} \iff x^2 = a \text{ et } x \geqslant 0$.

Exemple On veut résoudre l'équation $|x-2| = 2\,|x+1|$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Démonstration Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $|x-2| = 2\,|x+1| \iff (x-2)^2 = 4\,(x+1)^2$

$$\iff 3x^2 + 12x = 0 \overset{\text{Pas de}}{\underset{\text{discriminant !}}{\iff}} x(x+4) = 0 \iff x \in \left\{-4, 0\right\}.$$

Exemple On veut résoudre l'équation $\sqrt{x+8} = x+2$ d'inconnue $x \in [-8, +\infty[$.

Démonstration

- **Réponse incorrecte :** Pour tout $x \in [-8, +\infty[$: $\sqrt{x+8} = x+2 \iff x+8 = (x+2)^2$

$$\iff x^2 + 3x - 4 = 0 \overset{\text{Discriminant } 25}{\iff} x = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{2} \iff x \in \left\{-4, 1\right\}.$$

Et là — surprise — il se trouve que -4 n'est pas solution car : $\sqrt{-4+8} = 2 \neq -2 = -4+2$. Que s'est-il donc passé ? Tout simplement, la première équivalence est fausse. Le passage au carré de gauche à droite est correct, mais pas sa réciproque. En effet, si $x+8 = (x+2)^2$: $\sqrt{x+8} = \sqrt{(x+2)^2} = |x+2|$ avec une valeur absolue ! Bref, le passage au carré ne respecte pas les équivalences et on est obligé de penser la réciproque avec soin dans chaque nouvelle situation.

- **Réponse correcte :** Pour tout $x \in [-8, +\infty[$:

$$\sqrt{x+8} = x+2 \iff x+8 = (x+2)^2 \quad \boxed{\text{et} \quad x+2 \geqslant 0} \iff x^2+3x-4=0 \quad \boxed{\text{et} \quad x \geqslant -2}$$

$$\overset{\text{Discriminant } 25}{\iff} \quad x \in \{-4, 1\} \quad \boxed{\text{et} \quad x \geqslant -2} \iff x = 1.$$

Passez du temps sur cet exemple. Vous devez en sortir convaincu que la réciproque appelle la condition : $x+2 \geqslant 0$ et que tout est dans la relation : $\sqrt{a^2} = |a|$.

Attention ! Pour $x, a \in \mathbb{R}$: $\quad x \leqslant a \not\Longleftrightarrow x^2 \leqslant a^2 \quad$ et $\quad x^2 \leqslant a^2 \not\Longleftrightarrow x \leqslant a.$

Par exemple : $\begin{cases} -2 \leqslant 1 \\ (-2)^2 > 1^2 \end{cases}$ et $\begin{cases} 1 \leqslant (-2)^2 \\ 1 > -2. \end{cases}$ Par bonheur, certaines choses se passent bien.

$$\begin{array}{rrcl} \text{Pour tous } x, a \in \mathbb{R} : & x^2 \leqslant a^2 & \iff & |x| \leqslant |a|, \\ \text{pour } x, a \geqslant 0 : & x \leqslant a & \iff & x^2 \leqslant a^2, \\ \text{et pour } x \geqslant 0 \text{ seulement} : & x \leqslant a & \iff & x^2 \leqslant a^2 \quad \text{et} \quad a \geqslant 0. \end{array}$$

Exemple On veut résoudre l'inéquation $|x-1| \leqslant |2x+1|$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Démonstration Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\quad |x-1| \leqslant |2x+1| \iff (x-1)^2 \leqslant (2x+1)^2 \iff 3x^2+6x \geqslant 0$

$$\underset{\text{discriminant !}}{\overset{\text{Pas de}}{\iff}} \quad x(x+2) \geqslant 0 \iff x \in]-\infty, -2] \cup [0, +\infty[.$$

Exemple On veut résoudre l'inéquation $\sqrt{x^2-3x+2} \leqslant x+1$ d'inconnue x.

Démonstration Un petit tableau de signe s'impose pour commencer.

x		1		2	
x^2-3x+2	$+$	0	$-$	0	$+$

Ce tableau montre que l'équation étudiée n'est définie que sur $]-\infty, 1] \cup [2, +\infty[$. Pour tout x dans ce domaine :

$$\sqrt{x^2-3x+2} \leqslant x+1 \iff x^2-3x+2 \leqslant (x+1)^2 \quad \boxed{\text{et} \quad x+1 \geqslant 0}$$

$$\iff 5x \geqslant 1 \quad \boxed{\text{et} \quad x \geqslant -1} \iff x \geqslant \frac{1}{5}.$$

L'ensemble des solutions cherché est la réunion d'intervalles $\left[\frac{1}{5}, 1\right] \cup [2, +\infty[$.

En guise de bilan... Nous venons de parler d'inégalités, de valeurs absolues, de puissances et de racines carrées, des notions que vous connaissez toutes — et pourtant, que d'erreurs à éviter dont vous n'aviez pas forcément conscience ! Ces notions simples demandent du doigté, et si vous ne l'aviez pas perçu auparavant, c'est seulement qu'on n'a pas souhaité vous mettre en difficulté au lycée. Dans un calcul, dans un raisonnement, tout passage quel qu'il soit doit être l'occasion d'un questionnement et d'une justification. En particulier les réciproques quand vous manipulez des équivalences.

4 Premiers pas complexes

4.1 Addition et multiplication dans le plan complexe

Définition-théorème (Corps des nombres complexes) On admet momentanément l'existence d'un ensemble $\mathbb{C}$ dont les éléments sont appelés les *nombres complexes*, contenant $\mathbb{R}$ et muni de deux opérations d'*addition* $+$ et de *multiplication* $\times$ qui satisfont les assertions suivantes.

— $\mathbb{C}$ contient un élément i pour lequel $\mathrm{i}^2=-1$.

— Tout nombre complexe z peut être écrit d'une et une seule manière sous *forme algébrique* : $z=x+\mathrm{i}y$ avec $x,y\in\mathbb{R}$. Le réel x est appelé sa *partie réelle* et noté $\mathrm{Re}(z)$. Le réel y est appelé sa *partie imaginaire* et noté $\mathrm{Im}(z)$. En résumé : $z=\mathrm{Re}(z)+\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(z)$.

— La somme et le produit de deux réels « au sens de $\mathbb{C}$ » coïncident avec leur somme et leur produit au sens usuel.

— Les opérations $+$ et $\times$ de $\mathbb{C}$ sont soumises aux mêmes règles de calcul que leurs analogues dans $\mathbb{R}$. Pour tous $z,z',z''\in\mathbb{C}$: $z+z'=z'+z$ (*commutativité de* $+$), $zz'=z'z$ (*commutativité de* $\times$),

$$(z+z')+z''=z+(z'+z'') \quad (\textit{associativité de } +), \qquad (zz')z''=z(z'z'') \quad (\textit{associativité de } \times),$$

$$z(z'+z'')=(zz')+(zz'') \quad (\textit{distributivité de } \times \textit{ sur } +), \qquad z+0=0+z=z \quad \text{et} \quad z\times 1=1\times z=z.$$

L'unicité de la forme algébrique est utilisée fréquemment pour identifier les parties réelle et imaginaire :

$$x+\mathrm{i}y=x'+\mathrm{i}y' \quad\Longrightarrow\quad x=x' \quad\text{et}\quad y=y'.$$

En d'autres termes : Une égalité de nombres complexes $=$ Deux égalités de nombres réels

Fixons à présent deux nombres complexes $z=x+\mathrm{i}y$ et $z'=x'+\mathrm{i}y'$ avec $x,x',y,y'\in\mathbb{R}$. Leur somme $z+z'$ se calcule aisément : $z+z'=(x+x')+\mathrm{i}(y+y')$, donc après identification des parties réelle et imaginaire :

$$\mathrm{Re}(z+z')=\mathrm{Re}(z)+\mathrm{Re}(z') \qquad\text{et}\qquad \mathrm{Im}(z+z')=\mathrm{Im}(z)+\mathrm{Im}(z').$$

De la même manière : $zz'=(x+\mathrm{i}y)(x'+\mathrm{i}y')=xx'+\mathrm{i}(xy'+yx')+\mathrm{i}^2yy'=(xx'-yy')+\mathrm{i}(xy'+yx')$, donc :

$$\mathrm{Re}(zz')=\mathrm{Re}(z)\,\mathrm{Re}(z')-\mathrm{Im}(z)\,\mathrm{Im}(z') \qquad\text{et}\qquad \mathrm{Im}(zz')=\mathrm{Re}(z)\,\mathrm{Im}(z')+\mathrm{Im}(z)\,\mathrm{Re}(z').$$

✖ Attention ! En général : $\mathrm{Re}(zz')\neq\mathrm{Re}(z)\,\mathrm{Re}(z')$ et $\mathrm{Im}(zz')\neq\mathrm{Im}(z)\,\mathrm{Im}(z')$.
$\mathrm{Re}\left(z^2\right)\neq\mathrm{Re}(z)^2$ et $\mathrm{Im}\left(z^2\right)\neq\mathrm{Im}(z)^2$.

Ces difficultés viennent de ce que z et z' sont tous les deux des nombres complexes. La situation est plus simple quand l'un d'entre eux est un réel. Pour tous $z\in\mathbb{C}$ et $\lambda\in\mathbb{R}$: $\mathrm{Re}(\lambda z)=\lambda\mathrm{Re}(z)$ et $\mathrm{Im}(\lambda z)=\lambda\mathrm{Im}(z)$ car $\mathrm{Im}(\lambda)=0$.

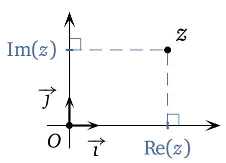
Exemple Pour $z=3+\mathrm{i}$ et $z'=1-2\mathrm{i}$, de tête : $z+6z'=9-11\mathrm{i}$ et $zz'=5-5\mathrm{i}$.

De même qu'on représente $\mathbb{R}$ comme une droite — la *droite réelle* — on représente $\mathbb{C}$ comme un plan qu'on appelle le *plan complexe*. Concrètement, étant donné un plan quelconque muni d'un repère orthonormal direct $\left(O,\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$, on identifie tout nombre complexe z au point M de coordonnées $\big(\mathrm{Re}(z),\mathrm{Im}(z)\big)$ dans le repère $\left(O,\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$. Quand on veut distinguer le nombre z du point M — souvent, on ne distingue pas — on dit que M est l'*image de* z et que z est l'*affixe de* M.

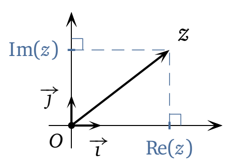
On peut aussi identifier z au vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $\big(\mathrm{Re}(z),\mathrm{Im}(z)\big)$ dans le repère $\left(O,\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$. Par exemple, $\vec{\imath}$ est l'image du nombre complexe 1 et $\vec{\jmath}$ l'image de i.

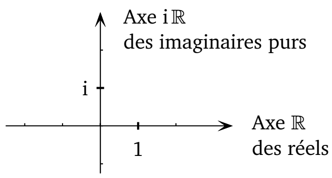
Cette représentation plane de $\mathbb{C}$ identifie $\mathbb{R}$ à l'axe des abscisses dans le repère $\left(O,\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$. L'axe des ordonnées accueille quant à lui l'ensemble des nombres complexes de la forme $\mathrm{i}y$, y décrivant $\mathbb{R}$, qu'on appelle les *imaginaires purs*.

Point de vue « point »



Point de vue « vecteur »

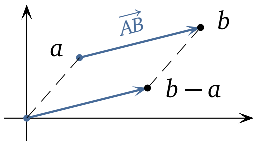


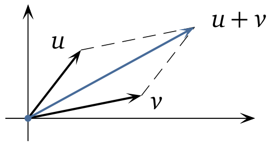


Les règles usuelles de calcul sur les coordonnées dans un repère se transmettent gentiment aux nombres complexes.

— Pour tous points A et B du plan d'affixes respectifs a et b, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $b-a$.

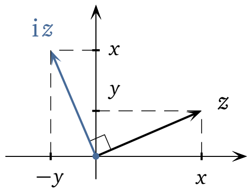
— Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan d'affixes respectifs u et v et pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, le vecteur $\lambda\vec{u}+\mu\vec{v}$ a pour affixe $\lambda u + \mu v$.





Exemple Pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$, le milieu du segment joignant z et z' a pour affixe $\dfrac{z+z'}{2}$.

Pour finir, un nombre complexe $z = x + \mathrm{i}y$ avec $x, y \in \mathbb{R}$ étant donné, que représente géométriquement le nombre complexe $\mathrm{i}\,z$? Calculons-le : $\mathrm{i}\,z = -y + \mathrm{i}x$, puis plaçons-le dans le plan complexe. N'est-il pas clair que le vecteur d'affixe z a simplement tourné d'un angle de mesure $\dfrac{\pi}{2}$? Nous y reviendrons longuement au chapitre « Nombres complexes et trigonométrie ».



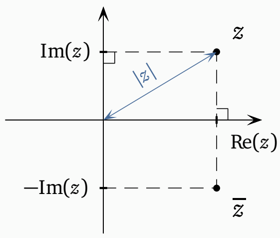
Attention ! LES INÉGALITÉS N'ONT AUCUN SENS SUR $\mathbb{C}$.

En quel sens pertinent un point d'un plan serait-il plus petit ou plus grand qu'un autre ?

4.2 Conjugué, module, inverse

Le *module* généralise à $\mathbb{C}$ la valeur absolue sur $\mathbb{R}$. N'oubliez pas que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $|x| = \sqrt{x^2}$.

Définition-théorème (Conjugué, module) Soit $z \in \mathbb{C}$.



- **Conjugué :** On appelle *conjugué de z* le nombre complexe :
$$\overline{z} = \mathrm{Re}(z) - \mathrm{i}\,\mathrm{Im}(z).$$
Géométriquement, $\overline{z}$ est le symétrique du point z par rapport à l'axe des réels.
- **Module :** On appelle *module de z* le réel positif ou nul :
$$|z| = \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2}.$$
Géométriquement, $|z|$ est la distance entre les points 0 et z dans $\mathbb{C}$, ou encore la norme du vecteur d'affixe z. Il en découle que $|z| = 0$ si et seulement si $z = 0$, mais aussi que : $\big|\mathrm{Re}(z)\big| \leqslant |z|$ et $\big|\mathrm{Im}(z)\big| \leqslant |z|$.
- **Une relation fondamentale :** $z\overline{z} = |z|^2$.

Démonstration Pour tout $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$ avec $x, y \in \mathbb{R}$:
$$z\overline{z} = (x+\mathrm{i}y)(x-\mathrm{i}y) = \left(x^2+y^2\right) + \mathrm{i}(xy - yx) = x^2 + y^2 = |z|^2.$$

La relation fondamentale $z\overline{z} = |z|^2$ sert en permanence, ne serait-ce que pour inverser les nombres complexes.

Définition-théorème (Inverse)
Tout nombre complexe NON NUL z possède un et un seul inverse $\dfrac{1}{z}$ pour la multiplication : $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$.

Exemple $\dfrac{1}{2-\mathrm{i}} = \dfrac{2+\mathrm{i}}{2^2+1^2} = \dfrac{2+\mathrm{i}}{5}$. De même, $\dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$ est imaginaire pur car : $\dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} = \dfrac{(1+\mathrm{i})^2}{1^2+1^2} = \dfrac{1+2\mathrm{i}-1}{2} = \mathrm{i}$.

Théorème (Propriétés algébriques du conjugué et du module) Soient $z, z' \in \mathbb{C}$.

- **Conjugué :** $\mathrm{Re}(z) = \dfrac{z+\overline{z}}{2}$, $\mathrm{Im}(z) = \dfrac{z-\overline{z}}{2\mathrm{i}}$, $\overline{\overline{z}} = z$, $\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$ et $\overline{zz'} = \overline{z} \times \overline{z'}$.
- **Module :** $|\overline{z}| = |z|$, $|zz'| = |z| \times |z'|$ et si $z' \neq 0$: $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$.

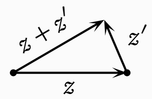
Démonstration Pour tout $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$ avec $x, y \in \mathbb{R}$:

$$z - \overline{z} = (x + \mathrm{i}y) - (x - \mathrm{i}y) = 2\mathrm{i}y = 2\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(z), \qquad \overline{\overline{z}} = \overline{x - \mathrm{i}y} = x + \mathrm{i}y,$$

puis par positivité du module : $|zz'| = \sqrt{|zz'|^2} = \sqrt{(zz')\overline{(zz')}} = \sqrt{z\overline{z} \times z'\overline{z'}} = \sqrt{|z|^2}\,\sqrt{|z'|^2} = |z| \times |z'|$. ■

Exemple Pour tout $z \in \mathbb{C}$, le conjugué de $2 + \mathrm{i}z$ vaut : $\overline{2 + \mathrm{i}z} = 2 + \overline{\mathrm{i}} \times \overline{z} = 2 - \mathrm{i}\overline{z}$, et non pas $2 - \mathrm{i}z$ comme vous le croyez souvent !

Théorème (Inégalité triangulaire) Pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$: $|z + z'| \leqslant |z| + |z'|$ avec égalité si et seulement si les vecteurs z et z' sont colinéaires de même sens.



Inégalité triangulaire généralisée : $\big||z| - |z'|\big| \leqslant |z \pm z'| \leqslant |z| + |z'|$.

Démonstration L'inégalité généralisée se démontre par substitution comme au paragraphe précédent.

- **Inégalité triangulaire :**
$$\begin{aligned} |z + z'|^2 &= (z + z')\overline{(z + z')} = (z + z')\left(\overline{z} + \overline{z'}\right) = z\overline{z} + z\overline{z'} + z'\overline{z} + z'\overline{z'} \\ &= |z|^2 + z\overline{z'} + \overline{z\overline{z'}} + |z'|^2 = |z|^2 + 2\,\mathrm{Re}\left(z\overline{z'}\right) + |z'|^2 \\ &\leqslant |z|^2 + 2\left|z\overline{z'}\right| + |z'|^2 = |z|^2 + 2\,|z|.|z'| + |z'|^2 = \left(|z| + |z'|\right)^2 \end{aligned}$$
On conclut en composant par la fonction racine carrée, croissante sur $\mathbb{R}_+$.
- **Cas d'égalité :** La majoration : $\mathrm{Re}\left(z\overline{z'}\right) \leqslant \left|z\overline{z'}\right|$ est la seule rupture d'égalité de la preuve qui précède. L'inégalité : $|z + z'| \leqslant |z| + |z'|$ est donc une égalité si et seulement si : $\mathrm{Re}\left(z\overline{z'}\right) = \left|z\overline{z'}\right|$, i.e. si et seulement si $z\overline{z'} \in \mathbb{R}_+$ car les réels positifs sont les seuls nombres complexes dont la partie réelle est égale au module.

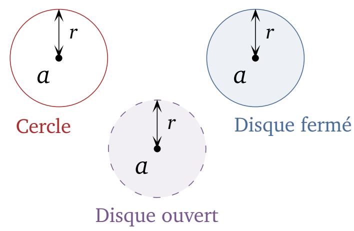
  Le cas d'égalité annoncé est bien sûr vrai si $z' = 0$ car z et z' sont alors colinéaires de même sens. Dans le cas contraire :
$$z\overline{z'} \in \mathbb{R}_+ \overset{|z'|>0}{\iff} \frac{z\overline{z'}}{|z'|^2} \in \mathbb{R}_+ \iff \frac{z}{z'} \in \mathbb{R}_+ \iff z \text{ et } z' \text{ sont colinéaires de même sens.}$$ ■

Pour tous $a, b \in \mathbb{C}$ d'images A, B, le module $|a - b|$ n'est autre que la distance AB. Il en découle que pour tout $r > 0$:

— le cercle de centre a et de rayon r est l'ensemble $\left\{z \in \mathbb{C} \mid \ |z - a| = r\right\}$,

— le disque fermé de centre a et de rayon r est l'ensemble $\left\{z \in \mathbb{C} \mid \ |z - a| \leqslant r\right\}$,

— le disque ouvert de centre a et de rayon r est l'ensemble $\left\{z \in \mathbb{C} \mid \ |z - a| < r\right\}$.



Exemple Pour tout $t \in \mathbb{R}$, le point d'affixe $\dfrac{2}{1 + \mathrm{i}t}$ appartient au cercle de centre 1 et de rayon 1.

Démonstration $$\left|\frac{2}{1 + \mathrm{i}t} - 1\right| = \left|\frac{2 - (1 + \mathrm{i}t)}{1 + \mathrm{i}t}\right| = \left|\frac{1 - \mathrm{i}t}{1 + \mathrm{i}t}\right| = \frac{\sqrt{1 + t^2}}{\sqrt{1 + t^2}} = 1.$$

Exemple À quelle condition sur $z \in \mathbb{C} \setminus \{\mathrm{i}\}$ le quotient $\dfrac{z + 2}{1 + \mathrm{i}z}$ est-il un réel ?

Démonstration Comment caractériser les réels dans $\mathbb{C}$? Être réel, c'est par exemple être égal à son conjugué, mais on peut aussi dire que c'est avoir une partie imaginaire nulle.

Pour tout $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C} \setminus \{\mathrm{i}\}$ avec $x, y \in \mathbb{R}$: $\quad \dfrac{z + 2}{1 + \mathrm{i}z} \in \mathbb{R} \iff \mathrm{Im}\left(\dfrac{z + 2}{1 + \mathrm{i}z}\right) = 0$.

Or : $$\mathrm{Im}\left(\frac{z + 2}{1 + \mathrm{i}z}\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{(z + 2)\left(1 - \mathrm{i}\overline{z}\right)}{|1 + \mathrm{i}z|^2}\right) \overset{|1+\mathrm{i}z|^2 \in \mathbb{R}}{=} \frac{\mathrm{Im}\left(z - \mathrm{i}|z|^2 + 2 - 2\mathrm{i}\overline{z}\right)}{|1 + \mathrm{i}z|^2} = \frac{y - |z|^2 - 2x}{|1 + \mathrm{i}z|^2} = \frac{y - 2x - x^2 - y^2}{|1 + \mathrm{i}z|^2}.$$

Ainsi : $$\begin{aligned} \frac{z + 2}{1 + \mathrm{i}z} \in \mathbb{R} &\iff \mathrm{Im}\left(\frac{z + 2}{1 + \mathrm{i}z}\right) = 0 &&\iff x^2 + y^2 + 2x - y = 0 \\ &\iff (x + 1)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = 1 + \frac{1}{4} &&\iff \left|z + 1 - \frac{\mathrm{i}}{2}\right| = \frac{\sqrt{5}}{2}. \end{aligned}$$

Conclusion : $\dfrac{z + 2}{1 + \mathrm{i}z}$ est un réel si et seulement si z appartient au cercle de centre $-1 + \dfrac{\mathrm{i}}{2}$ et de rayon $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ — privé du point i car de fait, i appartient à ce cercle.

4.3 Équations du second degré à coefficients complexes

Théorème (Racines carrées d'un nombre complexe) Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, l'équation $\omega^2 = z$ d'inconnue $\omega \in \mathbb{C}$ possède exactement DEUX solutions opposées appelées les *racines carrées de z*.

L'équation $\omega^2 = 0$ d'inconnue $\omega \in \mathbb{C}$ ne possède quant à elle qu'une seule solution, à savoir 0.

Attention !

$\sqrt{x}$ Notation autorisée SEULEMENT si $x \in \mathbb{R}_+$.

$\cancel{\sqrt{z}}$ LA PLUS INTERDITE DES NOTATIONS INTERDITES SINON !

Pourquoi cet interdit ? Parce que nous ne savons pas CHOISIR, tout nombre complexe non nul a DEUX racines carrées distinctes et aucune ne vaut mieux que l'autre en général. Un réel strictement positif possède lui aussi deux racines carrées, mais l'une est positive et l'autre négative, et on CHOISIT par convention de noter $\sqrt{x}$ la première.

Démonstration Soit $z \in \mathbb{C}^*$ et $\omega \in \mathbb{C}$ de formes algébriques respectives $z = x + iy$ et $\omega = a + ib$. L'idée forte de la preuve est cachée dans l'équivalence : $\omega^2 = z \iff \omega^2 = z$ et $|\omega|^2 = |z|$ dans laquelle on a ajouté manu militari l'équation des modules. Oui, cette équivalence est idiote, mais féconde.

$$\omega^2 = z \iff \omega^2 = z \quad \text{et} \quad |\omega|^2 = |z| \iff \left\{\begin{array}{l} a^2 - b^2 = x \\ 2ab = y \end{array}\right. \quad \text{et} \quad a^2 + b^2 = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\iff a^2 = \frac{\sqrt{x^2+y^2}+x}{2} \quad \text{et} \quad b^2 = \frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{2} \quad \text{et} \quad 2ab = y \quad \text{par demi-somme et demi-différence.}$$

Comme : $|x| = \sqrt{x^2} \leqslant \sqrt{x^2+y^2}$, les réels $\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}+x}{2}$ et $\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{2}$ sont tous deux positifs ou nuls, donc possèdent chacun deux racines carrées RÉELLES a et b, l'une positive, l'autre négative — avec éventuellement $a = b = 0$. Cela nous fournit a priori jusqu'à quatre couples (a, b), mais l'équation $2ab = y$ force a et b à être de même signe ou de signes opposés selon le signe de y. On obtient ainsi exactement deux racines carrées $\omega = a+ib$ de z, opposées et distinctes.

Exemple Les racines carrées de $24 + 10i$ sont $\pm(5 + i)$.

Démonstration Pour tout $\omega = a + ib \in \mathbb{C}$ sous forme algébrique :

$$\begin{aligned} \omega^2 = 24 + 10i &\iff \omega^2 = 24 + 10i \quad \text{et} \quad |\omega|^2 = |24 + 10i| = 2 \times |12 + 5i| \\ &\iff \left\{\begin{array}{l} a^2 - b^2 = 24 \\ 2ab = 10 \end{array}\right. \quad \text{et} \quad a^2 + b^2 = 2\sqrt{12^2 + 5^2} = 26 \\ &\iff a^2 = \frac{26+24}{2} = 25, \quad b^2 = \frac{26-24}{2} = 1 \quad \text{et} \quad ab = 5 \\ &\overset{ab=5\geqslant 0}{\iff} (a, b) = (5, 1) \quad \text{ou} \quad (a, b) = (-5, -1) \iff \omega = 5 + i \quad \text{ou} \quad \omega = -(5 + i). \end{aligned}$$

Nous sommes à présent capables de résoudre TOUTES les équations du second degré À COEFFICIENTS COMPLEXES.

Théorème (Équations du second degré à coefficients complexes) Soient $a \in \mathbb{C}^*$ et $b, c \in \mathbb{C}$.

- **Résolution de l'équation :** Les solutions de l'équation $az^2 + bz + c = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ sont les nombres : $z_1 = \dfrac{-b+\delta}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b-\delta}{2a}$ où δ est l'une quelconque des deux racines carrées du discriminant $b^2 - 4ac$.
- **Factorisation du polynôme associé :** Pour tout $z \in \mathbb{C}$: $az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$.
- **Somme et produit des racines :** $z_1 + z_2 = -\dfrac{b}{a}$ et $z_1 z_2 = \dfrac{c}{a}$.

Démonstration La preuve repose sur une transformation TRÈS IMPORTANTE des expressions du second degré — leur mise sous forme canonique. Posons $\Delta = b^2 - 4ac$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} az^2 + bz + c &= a\left(z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a}\right) = a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right) = a\left(\left(z + \frac{b}{a}\right)^2 - \frac{\Delta}{(2a)^2}\right) \quad \textit{(forme canonique)} \\ &= a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\delta}{2a}\right)^2\right) = a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right) + \frac{\delta}{2a}\right) \times \left(\left(z + \frac{b}{2a}\right) - \frac{\delta}{2a}\right) = a\left(z - \frac{-b-\delta}{2a}\right)\left(z - \frac{-b+\delta}{2a}\right). \end{aligned}$$

On conclut en observant qu'un produit de nombres complexes est nul si et seulement si l'un de ses facteurs l'est.

À présent, pour tout $z \in \mathbb{C}$, avec les notations du théorème :

$$az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2) = az^2 - a(z_1 + z_2)z + az_1z_2,$$

donc par identification des coefficients de degrés 0 et 1 : $b = -a(z_1 + z_2)$ et $c = az_1z_2$. On en tire les expressions annoncées de $z_1 + z_2$ et z_1z_2. Entraînez-vous à les retrouver rapidement de tête !

Exemple Les solutions de l'équation $z^2 - (3 + \mathrm{i})z + (2 + \mathrm{i}) = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ sont 1 et $2 + \mathrm{i}$.

Démonstration Le discriminant de cette équation vaut $(3 + \mathrm{i})^2 - 4(2 + \mathrm{i}) = 2\mathrm{i}$. Or on peut montrer que les racines carrées de $2\mathrm{i}$ sont $\pm(1 + \mathrm{i})$, donc les solutions cherchées sont $\dfrac{(3 + \mathrm{i}) \pm (1 + \mathrm{i})}{2}$, i.e. 1 et $2 + \mathrm{i}$.

En lien avec ce qui précède, la relation : $(X - x)(X - y) = X^2 - (x + y)X + xy$ nous permet de calculer x et y quand on connaît leur somme $x + y$ et leur produit xy.

Théorème (Systèmes somme-produit) Soient $a, b \in \mathbb{C}$. Les solutions du *système somme-produit* $\left\{ \begin{array}{l} x + y = a \\ xy = b \end{array} \right.$ d'inconnues $x, y \in \mathbb{C}$ sont les deux racines — éventuellement égales — du polynôme $X^2 - aX + b$.

Exemple Les solutions du système $\left\{ \begin{array}{l} x + y = 3 + \mathrm{i} \\ xy = 2 + \mathrm{i} \end{array} \right.$ d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{C}^2$ sont les couples $(1, 2 + \mathrm{i})$ et $(2 + \mathrm{i}, 1)$. Nous avons en effet calculé les racines du polynôme $X^2 - (3 + \mathrm{i})X + (2 + \mathrm{i})$ dans l'exemple précédent.