ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ET SUITES RÉCURRENTES LINÉAIRES

1 INTRODUCTION AUX ÉQUATIONS LINÉAIRES

- Le concept de *linéarité*, que vous avez déjà rencontré dans différents contextes, nous occupera longuement au second semestre et une présentation informelle sera pour l'instant suffisante. En résumé, une fonction T définie sur un ensemble E est dite *linéaire* si : $\boxed{\forall x, y \in E, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad T(\lambda x + \mu y) = \lambda T(x) + \mu T(y) \quad \textit{(linéarité)}.}$

	E	T	$T(\lambda x + \mu y) = \lambda T(x) + \mu T(y)$
Linéarité de la dérivation	Ensemble des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$	$f \longmapsto f'$	$(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'$
Linéarité de l'intégrale	Ensemble des fonctions continues sur $[a, b]$	$f \longmapsto \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$	$\int_a^b \big(\lambda f(t) + \mu g(t)\big)\,\mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \mu \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$
Linéarité de la limite	Ensemble des suites convergentes	$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \longmapsto \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \lim\limits_{n\to+\infty} u_n + \mu \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$
Linéarité du produit scalaire	Ensemble des vecteurs du plan ou de l'espace	$\overrightarrow{x} \longmapsto \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{x}$	$\overrightarrow{a} \cdot (\lambda \overrightarrow{x} + \mu \overrightarrow{y}) = \lambda(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{x}) + \mu(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{y})$

- Avec les mêmes notations, toute équation de la forme : $T(y) = b$ d'inconnue y pour un certain b fixé est appelée une *équation linéaire* et b est appelé son *second membre*. Lorsque : $b = 0$ (fonction nulle, vecteur nul, suite nulle... selon le contexte), l'équation est dite *homogène* ou *sans second membre*.

- Faisons l'hypothèse que, souhaitant trouver toutes les solutions de l'équation linéaire : $T(y) = b$ d'inconnue y, nous en connaissions au moins une solution particulière y_{part}. Dans ces conditions :

$$\begin{aligned} T(y) = b \quad &\iff \quad T(y) = T(y_{\text{part}}) \quad \iff \quad T(y) - T(y_{\text{part}}) = 0 \quad \underset{\text{de } T}{\overset{\text{Linéarité}}{\iff}} \quad T(y - y_{\text{part}}) = 0 \\ &\iff \quad y - y_{\text{part}} \text{ est solution de l'équation HOMOGÈNE associée} \\ &\iff \quad y \text{ est la somme de la solution particulière } y_{\text{part}} \text{ et d'une solution de l'équation HOMOGÈNE.} \end{aligned}$$

Propriété fondamentale s'il en est ! En résumé :

> Pour trouver toutes les solutions d'une équation LINÉAIRE : $T(y) = b$, il suffit d'en connaître UNE solution particulière et TOUTES les solutions de l'équation homogène : $T(y) = 0$.

Exemple Les solutions de l'équation linéaire : $f' = \cos$ d'inconnue $f \in \mathscr{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ sont toutes les fonctions de la forme $x \longmapsto \sin x + \lambda$ où λ décrit $\mathbb{R}$ — la fameuse « constante de primitivation ».

Démonstration

- **Équation homogène :** Les solutions de l'équation homogène : $f' = 0$ sont toutes les fonctions constantes sur $\mathbb{R}$.
- **Solution particulière de l'équation $f' = \cos$:** La fonction sinus convient car : $\sin' = \cos$.
- **Conclusion :** Il ne reste plus qu'à additionner !

- Une autre propriété des équations **LINÉAIRES** va compter dans ce chapitre, c'est le *principe de superposition*.

  > **Principe de superposition :** Si y_1 est solution de l'équation : $T(y) = b_1$ et y_2 solution de l'équation : $T(y) = b_2$, alors $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$ est solution de l'équation : $T(y) = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2$ pour tous $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

  En effet, tout simplement : $T\big(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2\big) \underset{\text{de } T}{\overset{\text{Linéarité}}{=}} \lambda_1 T(y_1) + \lambda_2 T(y_2) = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2$.

- À présent, une *équation différentielle* — en abrégé, « équadiff » — est une équation dont l'inconnue est une fonction y et dans laquelle cohabitent à la fois y et ses dérivées y', y'', etc. Le plus grand exposant de dérivation qui y figure est appelé son *ordre*. Par exemple : $y' = x^2 e^y + 1$ est une équation différentielle du premier ordre et : $xy'' - y^2 = yy'$ une équation différentielle du second ordre.

  Parce que les équations différentielles sont en général très difficiles à résoudre, nous nous contenterons de travailler dans le cadre à peu près agréable des équations d'inconnue y de la forme :

  — $y' + a(x)y = b(x)$ (*équations différentielles linéaires du premier ordre*),

  — $ay'' + by' + cy = d(x)$ (*équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants*).

  L'intérêt de ces équations, c'est qu'elles sont linéaires. Pour celles du premier ordre, par exemple, notons en effet T la fonction qui à une fonction dérivable y associe la fonction $y' + ay$. Aussitôt, pour toutes fonctions dérivables y et z et pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

  $$T(\lambda y + \mu z) = (\lambda y + \mu z)' + a(\lambda y + \mu z) = \big(\lambda y' + \mu z'\big) + a(\lambda y + \mu z) = \lambda\big(y' + ay\big) + \mu\big(z' + az\big) = \lambda T(y) + \mu T(z).$$

  Les propriétés des équations linéaires que nous avons mises en évidence précédemment pourront donc être utilisées pour l'étude des équations différentielles citées ci-dessus.

Dans tout ce chapitre, I est un intervalle de $\mathbb{R}$. Nous nous intéresserons parfois aux solutions réelles d'une équation différentielle et parfois à ses solutions complexes. Les solutions réelles sont bien sûr aussi complexes, mais quand on connaît toutes les solutions complexes et qu'on cherche les réelles, il reste du travail, la connaissance des solutions complexes ne suffit pas. Pour cette raison, nous travaillerons avec des fonctions à valeurs dans $\mathbb{K}$ où $\mathbb{K}$ désigne l'un des ensembles $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

2 ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES DU PREMIER ORDRE

On s'intéresse aux équations de la forme : $y' + a(x)y = b(x)$ d'inconnue $y \in \mathscr{D}(I, \mathbb{K})$ où $a, b \in \mathscr{C}(I, \mathbb{K})$ sont fixées.

2.1 ÉQUATIONS HOMOGÈNES

> **Théorème (Équation différentielle $y' + a(x)y = 0$)** Soient $a \in \mathscr{C}(I, \mathbb{K})$ et A une primitive de a sur I. Les solutions sur I de l'équation différentielle : $y' + a(x)y = 0$ sont toutes les fonctions $x \longmapsto \lambda e^{-A(x)}$, λ décrivant $\mathbb{K}$.

✌ **Explication** ✌ Dans le cas particulier courant où a est une constante, les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation : $y' + ay = 0$ sont toutes les fonctions $x \longmapsto \lambda e^{-ax}$, λ décrivant $\mathbb{K}$. Conséquence : la fonction exponentielle est la seule fonction $y \in \mathscr{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ pour laquelle : $y' = y$ et $y(0) = 1$.

Démonstration

- Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. La fonction $x \overset{y}{\longmapsto} \lambda e^{-A(x)}$ est solution de l'équation étudiée car pour tout $x \in I$:

  $$y'(x) + a(x)y(x) = -\lambda A'(x) e^{-A(x)} + a(x) \times \lambda e^{-A(x)} \overset{A'=a}{=} 0.$$

- Réciproquement, soit $y \in \mathscr{D}(I, \mathbb{K})$ une solution de l'équation étudiée. On veut au fond montrer que la fonction ye^A est constante sur l'**INTERVALLE** I. Il suffit pour cela de montrer que sa dérivée est nulle, or : $\big(ye^A\big)' = y'e^A + yA'e^A = (y' + ay)e^A = 0$. ■

Exemple Les solutions réelles de l'équation : $y' = \dfrac{y}{1+x^2}$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $x \longmapsto \lambda e^{\operatorname{Arctan} x}$, λ décrivant $\mathbb{R}$.

2.2 Équations avec second membre

Théorème **(Équation différentielle $y'+a(x)y=b(x)$, problème de Cauchy)** Soient $a,b\in\mathscr{C}(I,\mathbb{K})$, $x_0\in I$ et $y_0\in\mathbb{K}$. Le problème : $\left\{\begin{array}{l} y'+a(x)y=b(x)\\ y(x_0)=y_0\end{array}\right.$ possède une et une seule solution sur I. Un tel problème est appelé un *problème de Cauchy* et la condition : $y(x_0)=y_0$ en est appelée la *condition initiale*.

Démonstration Notons A une primitive de a sur I.

- **Idée de la preuve :** Les solutions de l'équation HOMOGÈNE sont de la forme $x\longmapsto \lambda e^{-A(x)}$ où λ est une CONSTANTE. Nous allons résoudre l'équation complète, i.e. avec second membre, en faisant « varier la constante », c'est-à-dire en cherchant les solutions sous la forme $x\longmapsto \lambda(x)e^{-A(x)}$ où λ est une FONCTION. Ce principe de résolution est appelé la *méthode de variation de la constante*.
- Soit $y\in\mathscr{D}(I,\mathbb{K})$. Nous noterons λ la FONCTION ye^A dérivable sur I. Via l'égalité : $y=\lambda e^{-A}$, notre inconnue y est remplacée momentanément par l'inconnue intermédiaire λ.

$$\begin{aligned} y'+ay=b \quad\text{et}\quad y(x_0)=y_0 &\iff \left(\lambda e^{-A}\right)'+a\left(\lambda e^{-A}\right)=b \quad\text{et}\quad \lambda(x_0)e^{-A(x_0)}=y_0\\ &\iff \left(\lambda' e^{-A}-\lambda A' e^{-A}\right)+a\lambda e^{-A}=b \quad\text{et}\quad \lambda(x_0)=y_0e^{A(x_0)}\\ &\iff \lambda' e^{-A}-a\lambda e^{-A}+a\lambda e^{-A}=b \quad\text{et}\quad \lambda(x_0)=y_0e^{A(x_0)}\\ &\iff \lambda'=be^A \quad\text{et}\quad \lambda(x_0)=y_0e^{A(x_0)}\\ &\iff \lambda \text{ est l'unique primitive de } be^A \text{ qui vaut } y_0e^{A(x_0)} \text{ en } x_0.\end{aligned}$$

Ces équivalences prouvent à la fois l'existence et l'unicité d'une fonction λ répondant au problème de Cauchy étudié. L'existence de λ comme primitive découle de la continuité de la fonction be^A d'après le théorème fondamental du calcul intégral. La condition initiale du problème de Cauchy en garantit l'unicité. « Concrètement », on vient de montrer que pour tout $x\in I$:

$$\lambda(x)=y_0e^{A(x_0)}+\int_{x_0}^x b(t)e^{A(t)}\,dt,\qquad \text{et donc :}\quad y(x)=y_0e^{A(x_0)-A(x)}+\int_{x_0}^x b(t)e^{A(t)-A(x)}\,dt.\quad\blacksquare$$

Théorème **(Équation différentielle $y'+a(x)y=b(x)$, conséquence de la linéarité)** Soient $a,b\in\mathscr{C}(I,\mathbb{K})$, A une primitive de a sur I et y_{part} une solution fixée sur I de l'équation : $y'+a(x)y=b(x)$ dite *solution particulière*. Les solutions sur I de l'équation différentielle : $y'+a(x)y=b(x)$ sont toutes les fonctions de la forme $y_{\text{part}}+\lambda e^{-A}$, λ décrivant $\mathbb{K}$.

Explication

Solution générale de l'équation complète **=** Solution particulière **+** Solution générale de l'équation HOMOGÈNE

Exemple L'unique solution de l'équation : $xy'+y=x^2-1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ qui s'annule en 1 est la fonction $x\longmapsto \dfrac{x^3-3x+2}{3x}$.

Démonstration

- **Réécriture de l'équation :** Réécrivons d'abord cette équation sous la forme : $y'+\dfrac{y}{x}=x-\dfrac{1}{x}$ pour nous ramener à la forme : $y'+a(x)y=b(x)$ des théorèmes précédents.
Nous ne saurons résoudre cette équation que sur $\mathbb{R}_+^*$ — ou $\mathbb{R}_-^*$ — MAIS PAS SUR $\mathbb{R}^*$. Dans notre résolution des équations homogènes, il a été essentiel en effet que nous travaillions sur un INTERVALLE. Saurez-vous comprendre pourquoi ?
- **Équation homogène :** La fonction logarithme étant primitive de la fonction inverse, les solutions de l'équation homogène : $y'+\dfrac{y}{x}=0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ sont les fonctions $x\longmapsto \lambda e^{-\ln x}=\dfrac{\lambda}{x}$, λ décrivant $\mathbb{R}$.
- **Solution particulière de l'équation $y'+\dfrac{y}{x}=x-\dfrac{1}{x}$:** Cherchons-en une sous la forme $x\overset{y}{\longmapsto}\dfrac{\lambda(x)}{x}$ où $\lambda\in\mathscr{D}(\mathbb{R}_+^*,\mathbb{R})$ — variation de la constante.

$$\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\quad y'(x)+\frac{y(x)}{x}=x-\frac{1}{x}\quad\iff\quad \forall x\in\mathbb{R}_+^*,\quad \frac{x\lambda'(x)-\lambda(x)}{x^2}+\frac{\lambda(x)}{x^2}=x-\frac{1}{x}\quad\iff\quad \forall x\in\mathbb{R}_+^*,\quad \lambda'(x)=x^2-1.$$

Attention de ne pas donner λ comme solution particulière à la place de y !

Nous pouvons **CHOISIR** pour λ la fonction $x \longmapsto \frac{x^3}{3} - x$. La fonction $x \overset{y}{\longmapsto} \frac{x^2}{3} - 1$ est alors une solution particulière de notre équation.

- **Conclusion :** Les solutions (réelles) de l'équation : $xy' + y = x^2 - 1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ sont toutes les fonctions $x \longmapsto \frac{x^2}{3} - 1 + \frac{\lambda}{x}$, λ décrivant $\mathbb{R}$. L'unique solution qui s'annule en 1 est $x \longmapsto \frac{x^2}{3} - 1 + \frac{2}{3x} = \frac{x^3 - 3x + 2}{3x}$, obtenue pour : $\lambda = \frac{2}{3}$.

En pratique Sur une copie, vous n'êtes pas obligés de rédiger la méthode de la variation de la constante. Vous pouvez vous contenter de la mettre en œuvre au brouillon et écrire seulement sur votre copie : « Vérifions que la fonction (...) est une solution de l'équation. » Une telle rédaction est économique en temps et tout à fait correcte.

Théorème (Principe de superposition) Soient $a, b_1, b_2 \in \mathscr{C}(I, \mathbb{K})$.
Si y_1 est solution sur I de l'équation : $y' + a(x)y = b_1(x)$ et y_2 solution sur I de l'équation : $y' + a(x)y = b_2(x)$, alors $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$ est solution sur I de l'équation : $y' + a(x)y = \lambda_1 b_1(x) + \lambda_2 b_2(x)$ pour tous $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$.

En pratique Pour trouver une solution particulière de l'équation : $y' + xy = x + \sqrt{x}$, on n'a qu'à additionner une solution particulière de chacune des équations : $y' + xy = x$ et $y' + xy = \sqrt{x}$. Ainsi, au lieu de faire un seul calcul compliqué, on peut choisir d'en faire deux simples.

En pratique La remarque suivante ne concerne que les équations linéaires du premier ordre **À COEFFICIENTS CONSTANTS**, le a de l'équation : $y' + a(x)y = b(x)$ est ici une **CONSTANTE**.

- Soient $a, A, \lambda \in \mathbb{K}$. Pour trouver une solution particulière de l'équation : $y' + ay = Ae^{\lambda x}$, on n'est pas obligé de « faire varier la constante », il y a plus rapide.

L'équation : $y' + ay = Ae^{\lambda x}$ admet une solution particulière de la forme : $\begin{cases} x \longmapsto Be^{\lambda x} & \text{si } \lambda \neq -a \\ x \longmapsto Bxe^{\lambda x} & \text{si } \lambda = -a \end{cases}$ avec $B \in \mathbb{K}$ à déterminer.

- Soient $a, A, \lambda, \omega \in \mathbb{R}$. Pour trouver une solution particulière de l'équation : $y' + ay = Ae^{\lambda x}\cos(\omega x)$, on n'est pas non plus obligé de « faire varier la constante », il y a plus rapide.
  - On cherche une solution particulière **COMPLEXE** $y_{\mathbb{C}}$ de l'équation : $y' + ay = Ae^{(\lambda + i\omega)x}$.
  - Sa partie réelle $\mathrm{Re}(y_{\mathbb{C}})$ est alors solution de l'équation : $y' + ay = Ae^{\lambda x}\cos(\omega x)$ car :

$$\mathrm{Re}(y_{\mathbb{C}})' + a\mathrm{Re}(y_{\mathbb{C}}) \overset{a\in\mathbb{R}}{=} \mathrm{Re}\big(y_{\mathbb{C}}' + ay_{\mathbb{C}}\big) = \mathrm{Re}\big(Ae^{(\lambda+i\omega)x}\big) \overset{A\in\mathbb{R}}{=} Ae^{\lambda x}\cos(\omega x).$$

De la même manière, bien sûr, $\mathrm{Im}(y_{\mathbb{C}})$ est une solution particulière de l'équation : $y' + ay = Ae^{\lambda x}\sin(\omega x)$.

Exemple La fonction $x \longmapsto (x+3)e^x - 2\sin x - 2\cos x$ est l'unique solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation : $y' - y = e^x + 4\sin x$ qui vaut 1 en 0.

Démonstration

- **Équation homogène :** Les solutions en sont toutes les fonctions $x \longmapsto \lambda e^x$, λ décrivant $\mathbb{R}$.
- **Solution particulière de l'équation** $y' - y = e^x$ **:** Cherchons-en une sous la forme $x \longmapsto Bxe^x$ avec $B \in \mathbb{R}$.

$$x \longmapsto Bxe^x \text{ est solution de } y' - y = e^x \iff \forall x \in \mathbb{R},\quad \big(Be^x + Bxe^x\big) - Bxe^x = e^x \iff B = 1.$$

La fonction $x \longmapsto xe^x$ convient.

- **Solution particulière de l'équation** $y' - y = e^{ix}$ **:** Cherchons-en une sous la forme $x \longmapsto Be^{ix}$ avec $B \in \boxed{\mathbb{C}}$.

ATTENTION !

$$x \longmapsto Be^{ix} \text{ est solution de } y' - y = e^{ix} \iff \forall x \in \mathbb{R},\quad iBe^{ix} - Be^{ix} = e^{ix} \iff B(i-1) = 1$$

$$\iff B = \frac{1}{i-1} = -\frac{1+i}{2}.$$

La fonction $x \longmapsto -\frac{1+i}{2}e^{ix}$ convient.

- **Solution particulière de l'équation** $y' - y = \sin x = \mathrm{Im}(e^{ix})$ **:** D'après le point précédent, la fonction $x \longmapsto \mathrm{Im}\left(-\frac{1+i}{2}e^{ix}\right) = -\frac{\sin x + \cos x}{2}$ convient.
- **Conclusion :** Les solutions de l'équation complète sont les fonctions $x \longmapsto (x+\lambda)e^x + 4 \times \left(-\frac{\sin x + \cos x}{2}\right)$, λ décrivant $\mathbb{R}$. L'unique solution qui vaut 1 en 0 est obtenue pour : $\lambda = 3$.

3 Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

On s'intéresse aux équations de la forme : $ay''+by'+cy=d(x)$ d'inconnue $y : I \longrightarrow \mathbb{K}$ deux fois dérivables où $a,b,c \in \mathbb{R}$ et $d \in \mathscr{C}(I,\mathbb{K})$ sont fixés avec : $a \neq 0$.

3.1 Équations homogènes

On rappelle que la précision de l'ensemble $\mathbb{K}$ dans ce chapitre renseigne sur la nature des solutions cherchées — réelles ou complexes. En pratique, ce sont généralement les solutions réelles qui nous intéressent. Nous commencerons pourtant par le cas complexe car c'est lui le cas théorique fondamental, celui qui se démontre le plus naturellement.

Théorème (Équation différentielle $ay''+by'+cy=0$ pour $\mathbb{K}=\mathbb{C}$)

Soient $a,b,c \in \mathbb{C}$ avec : $a \neq 0$. On appelle *polynôme caractéristique* de l'équation : $ay''+by'+cy=0$ le polynôme aX^2+bX+c.

Ci-contre, λ, λ' et μ décrivent $\mathbb{C}$.

Discriminant Δ de aX^2+bX+c	Racines de aX^2+bX+c	Forme des solutions
$\Delta \neq 0$	r et r'	$x \longmapsto \lambda e^{rx}+\lambda' e^{r'x}$
$\Delta = 0$	r	$x \longmapsto (\lambda x+\mu)e^{rx}$

Démonstration

- **Préliminaire :** L'idée suivante justifie la pertinence du polynôme caractéristique. Pour tout $r \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned}&\text{La fonction } x \longmapsto e^{rx} \text{ est solution de l'équation : } ay''+by'+cy=0\\ \iff\quad & \forall x \in \mathbb{R},\quad \left(ar^2+br+c\right)e^{rx}=0 \quad\iff\quad ar^2+br+c=0\\ \iff\quad & r \text{ est une racine du polynôme caractéristique } aX^2+bX+c.\end{aligned}$$

- Fixons momentanément une racine r du polynôme aX^2+bX+c. Anticipant la fin du calcul qui suit, remarquons tout de suite que la seconde racine r' du polynôme aX^2+bX+c — éventuellement la même — est égale à $-r-\dfrac{b}{a}$ car la somme des racines du polynôme aX^2+bX+c vaut $-\dfrac{b}{a}$. Nous allons chercher les solutions de notre équation sous la forme $x \overset{y}{\longmapsto} z(x)e^{rx}$ avec $z \in \mathscr{D}(\mathbb{R},\mathbb{C})$.

$$\begin{aligned}ay''+by'+cy=0 \quad&\iff\quad \forall x \in \mathbb{R},\quad a\Big(z''(x)+2rz'(x)+r^2z(x)\Big)e^{rx}+b\Big(z'(x)+rz(x)\Big)e^{rx}+cz(x)e^{rx}=0\\ &\iff\quad az''+(2ar+b)z'+\underbrace{\left(ar^2+br+c\right)}_{=0}z=0\\ &\iff\quad (z')'+\left(2r+\frac{b}{a}\right)z'=0 \qquad \text{Tiens, une équation linéaire du premier ordre !}\\ &\iff\quad \exists\,\lambda \in \mathbb{C}/\quad \forall x \in \mathbb{R},\quad z'(x)=\lambda e^{-\left(2r+\frac{b}{a}\right)x}.\end{aligned}$$

La fin du calcul requiert qu'on distingue les cas : $\Delta \neq 0$ et $\Delta = 0$.

- Supposons : $\Delta \neq 0$. Dans ce cas : $r \neq -\dfrac{b}{2a}$, donc : $2r+\dfrac{b}{a} \neq 0$.

$$\begin{aligned}ay''+by'+cy=0 \quad&\iff\quad \exists\,\lambda,\mu \in \mathbb{C}/\quad \forall x \in \mathbb{R},\quad z(x)=\frac{\lambda e^{-\left(2r+\frac{b}{a}\right)x}}{-\left(2r+\frac{b}{a}\right)}+\mu \qquad \text{après primitivation}\\ &\iff\quad \exists\,\lambda,\mu \in \mathbb{C}/\quad \forall x \in \mathbb{R},\quad z(x)=\lambda e^{-\left(2r+\frac{b}{a}\right)x}+\mu \qquad \text{quitte à changer le } \lambda\\ &\iff\quad \exists\,\lambda,\mu \in \mathbb{C}/\quad \forall x \in \mathbb{R},\quad y(x)=z(x)e^{rx}=\lambda e^{-\left(r+\frac{b}{a}\right)x}+\mu e^{rx}\\ &\iff\quad \exists\,\lambda,\mu \in \mathbb{C}/\quad \forall x \in \mathbb{R},\quad y(x)=\lambda e^{r'x}+\mu e^{rx} \qquad \text{comme voulu.}\end{aligned}$$

- Supposons : $\Delta = 0$. Dans ce cas, $r = -\dfrac{b}{2a}$ est l'unique racine de $aX^2 + bX + c$ et : $2r + \dfrac{b}{a} = 0$.

$$\begin{aligned} ay'' + by' + cy = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \exists\, \lambda \in \mathbb{C}/ \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad z'(x) = \lambda \\ &\Longleftrightarrow \quad \exists\, \lambda, \mu \in \mathbb{C}/ \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad z(x) = \lambda x + \mu \qquad \text{après primitivation} \\ &\Longleftrightarrow \quad \exists\, \lambda, \mu \in \mathbb{C}/ \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad y(x) = z(x)e^{rx} = (\lambda x + \mu)e^{rx} \qquad \text{comme voulu.} \end{aligned}$$

Théorème (Équation différentielle $ay'' + by' + cy = 0$ pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$)

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec : $a \neq 0$. On appelle *polynôme caractéristique* de l'équation : $ay'' + by' + cy = 0$ le polynôme $aX^2 + bX + c$.

Ci-contre, λ, λ' et μ décrivent $\mathbb{R}$.

Discriminant Δ de $aX^2 + bX + c$	Racines de $aX^2 + bX + c$	Forme des solutions
$\Delta > 0$	r et r'	$x \longmapsto \lambda e^{rx} + \lambda' e^{r'x}$
$\Delta = 0$	r	$x \longmapsto (\lambda x + \mu)e^{rx}$
$\Delta < 0$	$r \pm i\omega$	$x \longmapsto e^{rx}\big(\lambda \sin(\omega x) + \mu \cos(\omega x)\big)$

Dans le cas où : $\Delta < 0$, on privilégie parfois d'autres formes équivalentes des solutions : $x \longmapsto \lambda e^{rx} \sin(\omega x + \varphi)$ ou $x \longmapsto \lambda e^{rx} \cos(\omega x + \varphi)$, en physique notamment.

Démonstration Les solutions réelles de l'équation : $ay'' + by' + cy = 0$ en sont aussi des solutions complexes, donc soumises au théorème précédent. Nous nous contenterons du cas : $\Delta < 0$ — le plus compliqué et le plus intéressant. Les racines de $aX^2 + bX + c$ y sont complexes conjuguées de la forme $r \pm i\omega$ avec : $\omega \neq 0$.

Soit y une solution COMPLEXE de l'équation : $ay'' + by' + cy = 0$. Comme : $\Delta \neq 0$, il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $y(x) = \alpha e^{rx + i\omega x} + \beta e^{rx - i\omega x} = e^{rx}\big(\alpha e^{i\omega x} + \beta e^{-i\omega x}\big)$.

Question : à quelle condition y est-elle RÉELLE ? Si elle l'est : $\mathrm{Im}\big(y(0)\big) = \mathrm{Im}\left(y\left(\dfrac{\pi}{2\omega}\right)\right) = 0$. Or :

— $\mathrm{Im}\big(y(0)\big) = \mathrm{Im}(\alpha + \beta)$, donc : $\mathrm{Im}(\beta) = -\mathrm{Im}(\alpha)$,

— $\mathrm{Im}\left(y\left(\dfrac{\pi}{2\omega}\right)\right) = \mathrm{Im}\Big(i(\alpha - \beta)e^{\frac{\pi r}{2\omega}}\Big) = \mathrm{Im}\Big(i(\alpha - \beta)\Big)e^{\frac{\pi r}{2\omega}} = \mathrm{Re}(\alpha - \beta)e^{\frac{\pi r}{2\omega}}$, donc : $\mathrm{Re}(\beta) = \mathrm{Re}(\alpha)$.

Conclusion : $\beta = \overline{\alpha}$. Posons alors : $\lambda = -2\mathrm{Im}(\alpha)$ et $\mu = 2\mathrm{Re}(\alpha)$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{rx}\big(\alpha e^{i\omega x} + \overline{\alpha} e^{-i\omega x}\big) = 2e^{rx}\mathrm{Re}\big(\alpha e^{i\omega x}\big) = e^{rx}\big(2\mathrm{Re}(\alpha)\cos(\omega x) - 2\mathrm{Im}(\alpha)\sin(\omega x)\big) \\ &= e^{rx}\big(\lambda \sin(\omega x) + \mu \cos(\omega x)\big). \end{aligned}$$

Réciproquement, cette fonction est bien réelle.

Les formes : $\lambda e^{rx} \sin(\omega x + \varphi)$ et $\lambda e^{rx} \cos(\omega x + \varphi)$ s'en déduisent aisément grâce à une technique du chapitre « Fonctions circulaires ».

Exemple

- Les solutions (réelles) de l'équation : $y'' - 3y' + 2y = 0$ sont toutes les fonctions $x \longmapsto \lambda e^x + \mu e^{2x}$, λ et μ décrivant $\mathbb{R}$, car le polynôme $X^2 - 3X + 2$ possède deux racines réelles distinctes, 1 et 2.
- Les solutions (réelles) de l'équation : $y'' - 2y' + y = 0$ sont toutes les fonctions $x \longmapsto (\lambda x + \mu)e^x$, λ et μ décrivant $\mathbb{R}$, car le polynôme $X^2 - 2X + 1$ admet 1 pour unique racine.
- Les solutions (réelles) de l'équation : $y'' + 4y = 0$ sont toutes les fonctions $x \longmapsto \lambda \sin(2x) + \mu \cos(2x)$, λ et μ décrivant $\mathbb{R}$, car le polynôme $X^2 + 4$ possède deux racines complexes conjuguées, $2i$ et $-2i$.

3.2 Équations avec second membre

Nous admettrons le théorème suivant pour ne pas perdre de temps.

Théorème (Équation différentielle $ay'' + by' + cy = d(x)$, problème de Cauchy) Soient $a, b, c \in \mathbb{K}$ avec : $a \neq 0$ et $d \in \mathscr{C}(I, \mathbb{K})$. Pour tout $x_0 \in I$ et $y_0, y'_0 \in \mathbb{K}$, le *problème de Cauchy* : $\begin{cases} ay'' + by' + cy = d(x) \\ y(x_0) = y_0 \text{ et } y'(x_0) = y'_0 \end{cases}$ possède une et une seule solution.

Théorème (Équation différentielle $ay''+by'+cy=d(x)$, conséquence de la linéarité) Soient $a,b,c\in\mathbb{K}$ avec : $a\neq 0$ et $d\in\mathscr{C}(I,\mathbb{K})$ et y_{part} une solution fixée sur I de l'équation : $ay''+by'+cy=d(x)$ dite *solution particulière*. Les solutions de l'équation différentielle : $ay''+by'+cy=d(x)$ sont toutes les fonctions de la forme $y_{\text{part}}+y_{\text{hom}}$ dans lesquelles y_{hom} est une solution quelconque de l'équation homogène associée.

Explication Solution générale de l'équation complète **=** Solution particulière **+** Solution générale de l'équation HOMOGÈNE

Théorème (Principe de superposition) Soient $a,b,c\in\mathbb{K}$ avec : $a\neq 0$ et $d_1,d_2\in\mathscr{C}(I,\mathbb{K})$. Si y_1 est solution sur I de l'équation : $ay''+by'+cy=d_1(x)$ et y_2 solution sur I de l'équation : $ay''+by'+cy=d_2(x)$, alors $\lambda_1y_1+\lambda_2y_2$ est solution sur I de l'équation : $ay''+by'+cy=\lambda_1d_1(x)+\lambda_2d_2(x)$ pour tous $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{K}$.

En pratique Pour les équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants, le programme de MPSI ne vous demande pas de savoir trouver une solution particulière dans le cas d'un second membre quelconque. Seuls les seconds membres de la remarque suivante sont exigibles.

- Soient $a,b,c,A,\lambda\in\mathbb{C}$ avec : $a\neq 0$.

  L'équation : $ay''+by'+cy=Ae^{\lambda x}$ admet une solution particulière de la forme suivante, avec $B\in\mathbb{C}$:
  $$\begin{cases} x\longmapsto Be^{\lambda x} & \text{si } \lambda \text{ N'EST PAS racine du polynôme caractéristique}\\ x\longmapsto Bxe^{\lambda x} & \text{si } \lambda \text{ est racine SIMPLE du polynôme caractéristique}\\ x\longmapsto Bx^2e^{\lambda x} & \text{si } \lambda \text{ est racine DOUBLE du polynôme caractéristique.}\end{cases}$$

- Soient $a,b,c,A,\lambda,\omega\in\mathbb{R}$ avec : $a\neq 0$. Pour trouver une solution particulière de : $ay''+by'+cy=Ae^{\lambda x}\cos(\omega x)$ ou de : $ay''+by'+cy=Ae^{\lambda x}\sin(\omega x)$, on procède exactement comme dans le cas des équations de la forme : $y'+ay=Ae^{\lambda x}\cos(\omega x)$ et $y'+ay=Ae^{\lambda x}\sin(\omega x)$.

Exemple L'unique solution de l'équation différentielle : $y''-y=e^{2x}-e^x$ pour laquelle : $y(0)=1$ et $y'(0)=0$ est la fonction $x\longmapsto \dfrac{1-2x}{4}\,e^x+\dfrac{5}{12}\,e^{-x}+\dfrac{e^{2x}}{3}$.

Démonstration

- **Équation homogène :** Les solutions de l'équation homogène : $y''-y=0$ sont toutes les fonctions $x\longmapsto \lambda e^x+\mu e^{-x}$, λ et μ décrivant $\mathbb{R}$, car les racines du polynôme X^2-1 sont -1 et 1.
- **Solution particulière de l'équation $y''-y=e^{2x}$:** Comme 2 N'EST PAS racine de X^2-1, cherchons-en une sous la forme $x\longmapsto Be^{2x}$ avec $B\in\mathbb{R}$.
  $$x\longmapsto B \text{ est solution de } y''-y=e^{2x} \iff \forall x\in\mathbb{R},\quad 4Be^{2x}-Be^{2x}=e^{2x} \iff B=\frac{1}{3}.$$
- **Solution particulière de l'équation $y''-y=e^x$:** Comme 1 est racine SIMPLE de X^2-1, cherchons-en une sous la forme $x\longmapsto Bxe^x$ avec $B\in\mathbb{R}$.
  $$x\longmapsto Bxe^x \text{ est solution de } y''-y=e^x \iff \forall x\in\mathbb{R},\quad \left(Bxe^x+2Be^x\right)-Bxe^x=e^x \iff B=\frac{1}{2}.$$
- **Conclusion :** Les solutions de l'équation complète : $y''-y=e^{2x}-e^x$ sont ainsi toutes les fonctions $x\longmapsto\left(\lambda-\dfrac{x}{2}\right)e^x+\mu e^{-x}+\dfrac{e^{2x}}{3}$, λ et μ décrivant $\mathbb{R}$. L'unique solution pour laquelle : $y(0)=1$ et $y'(0)=0$ est obtenue pour λ et μ tels que : $\lambda+\mu+\dfrac{1}{3}=1$ et $\lambda-\mu+\dfrac{1}{6}=0$, i.e. : $\lambda=\dfrac{1}{4}$ et $\mu=\dfrac{5}{12}$.

Exemple Les solutions (réelles) de l'équation : $y''+y'+y=e^x\cos x$ sont toutes les fonctions :
$$x\longmapsto\left(\frac{2\cos x+3\sin x}{13}\right)e^x+\left(\lambda\sin\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)+\mu\cos\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)\right)e^{-\frac{x}{2}},\qquad \lambda \text{ et } \mu \text{ décrivant } \mathbb{R}.$$

Démonstration

- **Équation homogène :** Les solutions en sont les fonctions $x \longmapsto \left(\lambda \sin\left(\dfrac{x\sqrt{3}}{2}\right) + \mu \cos\left(\dfrac{x\sqrt{3}}{2}\right)\right) e^{-\frac{x}{2}}$, λ et μ décrivant $\mathbb{R}$, car les racines du polynôme X^2+X+1 sont j et $\overline{\mathrm{j}}$, i.e. : $-\dfrac{1}{2} \pm i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
- **Solution particulière de l'équation $y''+y'+y = e^{(1+i)x}$:** Comme $1+i$ n'est pas racine de X^2+X+1, cherchons-en une sous la forme $x \longmapsto Be^{(1+i)x}$ avec $B \in \mathbb{C}$.

$$x \longmapsto Be^{(1+i)x} \text{ est solution de } y''+y'+y = e^{(1+i)x}$$
$$\iff \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad (1+i)^2 Be^{(1+i)x} + (1+i)Be^{(1+i)x} + Be^{(1+i)x} = e^{(1+i)x} \quad \iff \quad (2+3i)B = 1$$
$$\iff \quad B = \frac{1}{2+3i} = \frac{2-3i}{13}. \qquad \text{La fonction } x \longmapsto \frac{2-3i}{13}\, e^{(1+i)x} \text{ convient.}$$

- **Solution particulière de l'équation $y''+y'+y = e^x \cos x = \mathrm{Re}\left(e^{(1+i)x}\right)$:** D'après le point précédent, la fonction $x \longmapsto \mathrm{Re}\left(\dfrac{2-3i}{13}\, e^{(1+i)x}\right) = \left(\dfrac{2\cos x + 3\sin x}{13}\right) e^x$ convient.
- **Conclusion :** On obtient bien le résultat annoncé.

4 Suites récurrentes linéaires

Nous allons clore ce chapitre par l'étude de certaines suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfaisant l'une des relations de récurrence suivantes :

— $u_{n+1} = au_n + b$ (*suites arithmético-géométriques*, dont arithmétiques pour : $a = 1$
et géométriques pour : $b = 0$),

— $au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0$ (*suites récurrentes linéaires homogènes du second ordre*).

Dans les deux cas, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par une équation linéaire. En effet, dans le premier cas, notons T la fonction qui, à toute suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, associe la suite $\left(u_{n+1} - au_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Alors T est linéaire car pour toutes suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} T\left(\lambda(u_n)_{n\in\mathbb{N}} + \mu(v_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) &= T\left((\lambda u_n + \mu v_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) = \left((\lambda u_{n+1} + \mu v_{n+1}) - a(\lambda u_n + \mu v_n)\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\lambda(u_{n+1} - au_n) + \mu(v_{n+1} - av_n)\right)_{n\in\mathbb{N}} \\ &= \lambda\left(u_{n+1} - au_n\right)_{n\in\mathbb{N}} + \mu\left(v_{n+1} - av_n\right)_{n\in\mathbb{N}} = \lambda T\left((u_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) + \mu T\left((v_n)_{n\in\mathbb{N}}\right). \end{aligned}$$

Or dire qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfait la relation de récurrence : $u_{n+1} = au_n + b$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, c'est dire que : $T\left((u_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) = (b)_{n\in\mathbb{N}}$, mais c'est donc aussi dire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfait une certaine équation linéaire. On pourrait procéder de même pour les suites récurrentes linéaires homogènes du second ordre.

4.1 Suites arithmétiques, géométriques et arithmético-géométriques

Théorème (Suite arithmétique/géométrique) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe et $q, r \in \mathbb{C}$.

- On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *arithmétique de raison r* si pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = u_n + r$.
  Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = u_0 + nr$.
- On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *géométrique de raison q* si pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = qu_n$.
  Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = q^n u_0$.

✌ **Explication** ✌

$$\begin{tikzcd} u_0 \arrow[r, bend left, "+r/\times q"] \arrow[rrrr, bend right, "+nr/\times q^n"'] & u_1 \arrow[r, bend left, "+r/\times q"] & u_2 \arrow[r, bend left, "+r/\times q"] & \dots \arrow[r, bend left, "+r/\times q"] & u_n \end{tikzcd}$$

Théorème (Suite arithmético-géométrique) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe et $a, b \in \mathbb{C}$. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *arithmético-géométrique (de raison a et de second membre b)* si pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = au_n + b$.

Deux situations peuvent alors se présenter :

— soit : $a = 1$, i.e. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique,

— soit : $a \neq 1$, et dans ce cas l'équation : $ax + b = x$ d'inconnue $x \in \mathbb{C}$ possède une et une seule solution ℓ. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors de la forme $\left(\ell + \lambda a^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{C}$.

Démonstration (n°1, avec un point de vue linéaire) Supposons : $a \neq 1$. Nous devons résoudre l'équation linéaire : $\left(u_{n+1} - au_n\right)_{n\in\mathbb{N}} = (b)_{n\in\mathbb{N}}$ d'inconnue $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

- **Équation homogène :** Les suites complexes qui vérifient cette équation sont exactement les suites géométriques de raison a, i.e. les suites $(\lambda a^n)_{n\in\mathbb{N}}$, λ décrivant $\mathbb{C}$.
- **Solution particulière de l'équation complète :** À tout hasard, cherchons-en une qui soit constante, à tout hasard, disons $(\ell)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $\ell \in \mathbb{C}$. La suite $(\ell)_{n\in\mathbb{N}}$ est solution de l'équation complète si et seulement si : $\ell - a\ell = b$, i.e. : $\ell = \dfrac{b}{1-a}$.
- **Conclusion :** Les solutions de l'équation complète sont toutes les suites $\left(\ell + \lambda a^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$, λ décrivant $\mathbb{C}$. ■

Démonstration (n°2, plus classique, moins conceptuelle) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe pour laquelle pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = au_n + b$. Nous supposons : $a \neq 1$.

- Résolvons dans un premier temps l'équation : $ax + b = x$ d'inconnue $x \in \mathbb{C}$. Comme : $a \neq 1$, cette équation admet $\ell = \dfrac{b}{1-a}$ comme seule solution.
- La suite $(u_n - \ell)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors géométrique car pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} - \ell = (au_n + b) - (a\ell + b) = a(u_n - \ell)$. Aussitôt, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n - \ell = a^n(u_0 - \ell)$. Comme voulu, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de la forme $\left(\ell + \lambda a^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{C}$. ■

Exemple L'unique suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = 2u_n + 1$ a pour expression explicite, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = 2^{n+1} - 1$.

Démonstration L'équation : $2x + 1 = x$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ a pour solution -1, donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de la forme $\left(\lambda 2^n - 1\right)_{n\in\mathbb{N}}$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}$. Or : $u_0 = 1$ donc : $\lambda - 1 = 1$, i.e. : $\lambda = 2$.

4.2 Suites récurrentes linéaires homogènes du second ordre

Théorème (Suite récurrente linéaire homogène du second ordre)

Soient $a, b, c \in \mathbb{K}$ avec : $a \neq 0$ et $c \neq 0$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *récurrente linéaire homogène du second ordre de polynôme caractéristique* $aX^2 + bX + c$ si pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0.$$

	Discriminant Δ de aX^2+bX+c	Racines de aX^2+bX+c	Forme des solutions
$\mathbb{K}=\mathbb{C}$	$\Delta \neq 0$	r et r'	$\left(\lambda r^n + \lambda' r'^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$
	$\Delta = 0$	r	$\left((\lambda n + \mu) r^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$

	Discriminant Δ de aX^2+bX+c	Racines de aX^2+bX+c	Forme des solutions
$\mathbb{K}=\mathbb{R}$	$\Delta > 0$	r et r'	$\left(\lambda r^n + \lambda' r'^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$
	$\Delta = 0$	r	$\left((\lambda n + \mu) r^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$
	$\Delta < 0$	$\rho\, e^{\pm i\theta}$	$\left(\rho^n\left(\lambda \sin(n\theta) + \mu \cos(n\theta)\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$

Démonstration

- **Principe de la preuve :** Soit $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. Si d'une part : $\delta_0=\delta_1=0$ et si d'autre part pour tout $n\in\mathbb{N}$: $a\delta_{n+2}+b\delta_{n+1}+c\delta_n=0$, alors pour tout $n\in\mathbb{N}$: $\delta_n=0$.

À présent, soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$ récurrente linéaire homogène du second ordre de polynôme caractéristique aX^2+bX+c.

- **Cas où aX^2+bX+c possède deux racines distinctes r et r' dans $\mathbb{K}$ ($\Delta\neq 0$ si $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ et $\Delta>0$ si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$) :** Soient λ et λ' deux éléments de $\mathbb{K}$ que nous allons choisir explicitement dans un instant. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, posons : $\delta_n=u_n-\lambda r^n-\lambda' r'^n$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$:
$$a\delta_{n+2}+b\delta_{n+1}+c\delta_n=\underbrace{au_{n+2}+bu_{n+1}+cu_n}_{=0}-\lambda\underbrace{\left(ar^{n+2}+br^{n+1}+cr^n\right)}_{=r^n(ar^2+br+c)=0}-\lambda'\underbrace{\left(ar'^{n+2}+br'^{n+1}+cr'^n\right)}_{=r'^n(ar'^2+br'+c)=0}=0.$$
Peut-on choisir λ et λ' de façon à garantir que : $\delta_0=\delta_1=0$? La réponse est oui car : $r\neq r'$, il suffit de poser : $\lambda=\dfrac{r'u_0-u_1}{r'-r}$ et $\lambda'=\dfrac{u_1-ru_0}{r'-r}$ après calcul.
Conclusion : $\delta_n=0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, donc : $u_n=\lambda r^n+\lambda' r'^n$.

- **Cas où aX^2+bX+c possède une unique racine r dans $\mathbb{K}$ ($\Delta=0$) :** Cette racine unique vaut en réalité $r=-\dfrac{b}{2a}$, et comme : $\Delta=0$ avec : $a\neq 0$ et $c\neq 0$, alors : $b\neq 0$ et donc : $r\neq 0$. Soient λ et μ deux éléments de $\mathbb{K}$ que nous allons choisir explicitement dans un instant. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, posons : $\delta_n=u_n-(\lambda n+\mu)r^n$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$:
$$\begin{aligned}a\delta_{n+2}+b\delta_{n+1}+c\delta_n&=\underbrace{au_{n+2}+bu_{n+1}+cu_n}_{=0}-\lambda\left(a(n+2)r^{n+2}+b(n+1)r^{n+1}+cnr^n\right)-\mu\underbrace{\left(ar^{n+2}+br^{n+1}+cr^n\right)}_{=r^n(ar^2+br+c)=0}\\&=-\lambda\left(\underbrace{\left(ar^2+br+c\right)}_{=0}nr^n+\underbrace{(2ar+b)}_{=0}r^{n+1}\right)=0.\end{aligned}$$
Peut-on choisir λ et μ de façon à garantir que : $\delta_0=\delta_1=0$? La réponse est oui car : $r\neq 0$, il suffit de poser : $\lambda=\dfrac{u_1-ru_0}{r}$ et $\mu=u_0$ après calcul.
Conclusion : $\delta_n=0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, donc : $u_n=(\lambda n+\mu)r^n$.

- **Cas où aX^2+bX+c ne possède pas de racine dans $\mathbb{K}$ ($\Delta<0$ si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$) :** Les racines de aX^2+bX+c dans $\mathbb{C}$ sont ici complexes conjuguées distinctes, disons $\rho e^{i\theta}$ et $\rho e^{-i\theta}$ pour certains $\rho>0$ et $\theta\in\mathbb{R}\setminus\pi\mathbb{Z}$. À valeurs réelles donc aussi complexes, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de la forme $\left(\alpha\rho^n e^{ni\theta}+\beta\rho^n e^{-ni\theta}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ pour certains $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$ d'après le premier point. Or : $\mathrm{Im}(u_0)=\mathrm{Im}(u_1)=0$, i.e. : $\mathrm{Im}(\beta)=-\mathrm{Im}(\alpha)$ et $\mathrm{Im}\left(\alpha e^{i\theta}+\beta e^{-i\theta}\right)=0$. La deuxième égalité s'écrit aussi :
$$\left(\mathrm{Im}(\alpha)+\mathrm{Im}(\beta)\right)\cos\theta+\left(\mathrm{Re}(\alpha)-\mathrm{Re}(\beta)\right)\sin\theta=0,$$
donc avec la première : $\left(\mathrm{Re}(\alpha)-\mathrm{Re}(\beta)\right)\sin\theta$, et comme $\theta\in\mathbb{R}\setminus\pi\mathbb{Z}$: $\mathrm{Re}(\beta)=\mathrm{Re}(\alpha)$. Conclusion : $\beta=\overline{\alpha}$. Posons alors : $\lambda=2\,\mathrm{Re}(\alpha)$ et $\mu=-2\,\mathrm{Im}(\alpha)$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$:
$$u_n=\alpha\rho^n e^{ni\theta}+\overline{\alpha}\rho^n e^{-ni\theta}=2\rho^n\,\mathrm{Re}\left(\alpha e^{ni\theta}\right)=\rho^n\left(\lambda\cos(n\theta)+\mu\sin(n\theta)\right).\qquad\blacksquare$$

Exemple La suite $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ est l'unique suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour laquelle : $u_0=0$ et $u_1=1$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$: $u_{n+2}=2u_{n+1}-u_n$.

Démonstration Le polynôme caractéristique X^2-2X+1 possède une racine réelle unique qui est 1. Il existe donc deux réels λ et μ tels que pour tout $n\in\mathbb{N}$: $u_n=\lambda n+\mu$. Or : $u_0=0$ et $u_1=1$, donc pour tout $n\in\mathbb{N}$: $u_n=n$.

Exemple Il existe une unique suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour laquelle : $u_0=u_1=1$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$: $u_{n+2}=u_{n+1}-u_n$. Elle est définie pour tout $n\in\mathbb{N}$ par : $u_n=\cos\left(\dfrac{n\pi}{3}\right)+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\sin\left(\dfrac{n\pi}{3}\right)$.

Démonstration Les racines du polynôme caractéristique X^2-X+1 sont $e^{\frac{i\pi}{3}}$ et $e^{-\frac{i\pi}{3}}$ — complexes conjuguées. Il existe donc deux réels λ et μ tels que pour tout $n\in\mathbb{N}$: $u_n=\lambda\cos\left(\dfrac{n\pi}{3}\right)+\mu\sin\left(\dfrac{n\pi}{3}\right)$.

Or : $u_0=u_1=1$, donc : $\lambda=\dfrac{\lambda+\sqrt{3}\mu}{2}=1$, et enfin comme annoncé : $\lambda=1$ et $\mu=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.