Équations différentielles et suites récurrentes linéaires

1 Introduction aux équations linéaires

Le concept de *linéarité*, que vous avez déjà rencontré dans différents contextes, nous occupera longuement au second semestre et une présentation très informelle sera pour l'instant suffisante. En résumé, une fonction T définie sur un ensemble E est dite *linéaire* si : $\forall x, y \in E, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad T(\lambda x + \mu y) = \lambda T(x) + \mu T(y)$ (*linéarité*).

	E	T	$T(\lambda x + \mu y) = \lambda T(x) + \mu T(y)$
Linéarité de la dérivation	$\mathscr{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$	$f \longmapsto f'$	$(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'$
Linéarité de l'intégrale	$\mathscr{C}\big([a, b], \mathbb{R}\big)$	$f \longmapsto \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$	$\displaystyle\int_a^b \big(\lambda f(t) + \mu g(t)\big)\,\mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \mu \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$
Linéarité de la limite	Ensemble des suites convergentes	$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \longmapsto \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \lim\limits_{n\to+\infty} u_n + \mu \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$
Linéarité du produit scalaire	Ensemble des vecteurs du plan ou de l'espace	$\vec{x} \longmapsto \vec{a} \cdot \vec{x}$	$\vec{a} \cdot \big(\lambda \vec{x} + \mu \vec{y}\big) = \lambda \big(\vec{a} \cdot \vec{x}\big) + \mu \big(\vec{a} \cdot \vec{y}\big)$

Si T est linéaire, toute équation de la forme $T(y) = b$ d'inconnue y pour un certain b fixé est appelée une *équation linéaire* et b en est appelé le *second membre*. Lorsque $b = 0$ (fonction nulle, vecteur nul, suite nulle… selon le contexte), on dit que l'équation est *homogène* ou *sans second membre*.

Faisons l'hypothèse que, souhaitant trouver toutes les solutions de l'équation linéaire $T(y) = b$ d'inconnue y, nous en connaissons au moins une solution y_{part}, dite *solution particulière*. Dans ces conditions :

$$
\begin{aligned}
T(y) = b \quad &\iff \quad T(y) = T(y_{\text{part}}) \quad \iff \quad T(y) - T(y_{\text{part}}) = 0 \quad \overset{\text{Linéarité}}{\iff} \quad T(y - y_{\text{part}}) = 0 \\
&\iff \quad y - y_{\text{part}} \text{ est solution de l'équation HOMOGÈNE associée} \\
&\iff \quad y \text{ est la somme de la solution particulière } y_{\text{part}} \text{ et d'une solution de l'équation HOMOGÈNE.}
\end{aligned}
$$

Lisez, relisez et re-relisez ce petit raisonnement ! Nous y reviendrons constamment toute l'année. En résumé :

Pour trouver toutes les solutions d'une équation **LINÉAIRE** $T(y) = b$, il suffit d'en connaître **UNE** solution particulière et **TOUTES** les solutions de l'équation homogène $T(y) = 0$.

Exemple Les solutions de l'équation linéaire $f' = \cos$ d'inconnue $f \in \mathscr{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ sont toutes les fonctions de la forme $x \longmapsto \sin x + \lambda$, λ décrivant $\mathbb{R}$ — la fameuse « constante de primitivation ».

Démonstration

- **Équation homogène :** Les solutions de l'équation homogène $f' = 0$ sont toutes les fonctions constantes sur $\mathbb{R}$.
- **Solution particulière de l'équation $f' = \cos$:** La fonction sinus convient.
- **Conclusion :** Il ne reste plus qu'à additionner !

Une autre propriété des équations **LINÉAIRES** va compter dans ce chapitre, c'est le *principe de superposition*.

Principe de superposition : Si y_1 est solution de l'équation $T(y) = b_1$ et y_2 solution de l'équation $T(y) = b_2$, alors $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$ est solution de l'équation $T(y) = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2$ pour tous $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

En effet, tout simplement : $T\big(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2\big) \overset{\text{Linéarité}}{=} \lambda_1 T(y_1) + \lambda_2 T(y_2) = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2$.

À présent, une *équation différentielle* — en abrégé, « équadiff » — est une équation dont l'inconnue est une fonction y et dans laquelle cohabitent à la fois y et ses dérivées y', y'', etc. Le plus grand exposant de dérivation qui y figure est appelé son *ordre*. Par exemple, $y' = x^2\,\mathrm{e}^y + 1$ est une équation différentielle du premier ordre et $xy'' - y^2 = yy'$ une équation différentielle du second ordre.

Les équations différentielles sont en général très difficiles à résoudre, aussi nous contenterons-nous de travailler dans le cadre à peu près agréable des équations de la forme :

— $y' + a(x)\,y = b(x)$ (*équations différentielles linéaires du premier ordre*),

— $ay'' + by' + cy = d(x)$ (*équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants*).

L'intérêt de ces équations, c'est qu'elles sont linéaires, et nous pourrons donc leur appliquer les principes qui précèdent. Pour celles du premier ordre, notons en effet T la fonction qui associe à toute fonction dérivable y la fonction $y' + ay$. Pour toutes fonctions dérivables y et z et pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

$$T(\lambda y + \mu z) = (\lambda y + \mu z)' + a\,(\lambda y + \mu z) = \big(\lambda y' + \mu z'\big) + a\,(\lambda y + \mu z) = \lambda\big(y' + ay\big) + \mu\big(z' + az\big) = \lambda T(y) + \mu T(z).$$

Dans tout ce chapitre, I est un intervalle. Nous nous intéresserons parfois aux solutions réelles d'une équation différentielle et parfois à ses solutions complexes. Les solutions réelles sont bien sûr aussi complexes, mais quand on connaît toutes les solutions complexes et qu'on cherche les réelles, il reste du travail, la connaissance des solutions complexes ne suffit pas. Pour cette raison, nous travaillerons avec des fonctions à valeurs dans $\mathbb{K}$ où $\mathbb{K}$ désigne l'un des ensembles $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

2 Équations différentielles linéaires du premier ordre

On s'intéresse aux équations $y' + a(x)\,y = b(x)$ d'inconnue $y \in \mathscr{D}(I, \mathbb{K})$ où $a, b \in \mathscr{C}(I, \mathbb{K})$ sont fixées.

2.1 Équations homogènes

Théorème (Équation différentielle $y' + a(x)\,y = 0$) Soit $a \in \mathscr{C}(I, \mathbb{K})$. On note A une primitive de a sur I. Les solutions sur I de l'équation différentielle $y' + a(x)\,y = 0$ sont toutes les fonctions $x \longmapsto \lambda\,\mathrm{e}^{-A(x)}$, λ décrivant $\mathbb{K}$.

Si a est une constante, les solutions de l'équation : $y' + ay = 0$ sont toutes les fonctions $x \longmapsto \lambda\,\mathrm{e}^{-ax}$, λ décrivant $\mathbb{K}$. En particulier, la fonction exponentielle est la seule fonction $y \in \mathscr{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ pour laquelle $y' = y$ et $y(0) = 1$.

Démonstration

- Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. La fonction $x \overset{y}{\longmapsto} \lambda\,\mathrm{e}^{-A(x)}$ est bien solution de l'équation étudiée car pour tout $x \in I$:
$$y'(x) + a(x)\,y(x) = -\lambda A'(x)\,\mathrm{e}^{-A(x)} + a(x) \times \lambda\,\mathrm{e}^{-A(x)} \overset{A' = a}{=} 0.$$
- Réciproquement, soit $y \in \mathscr{D}(I, \mathbb{K})$ une solution de l'équation étudiée. Pour montrer que la fonction $y\,\mathrm{e}^A$ est constante sur l'**intervalle** I, il nous suffit de montrer que sa dérivée est nulle. Or tout simplement :
$$\big(y\,\mathrm{e}^A\big)' = y'\,\mathrm{e}^A + yA'\,\mathrm{e}^A = (y' + ay)\,\mathrm{e}^A = 0.$$

Exemple Les solutions réelles de l'équation $y' = \dfrac{y}{1 + x^2}$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $x \longmapsto \lambda\,\mathrm{e}^{\operatorname{Arctan} x}$, λ décrivant $\mathbb{R}$.

2.2 Méthode de variation de la constante

Théorème (Équation différentielle $y' + a(x)\,y = b(x)$, problème de Cauchy) Soient $a, b \in \mathscr{C}(I, \mathbb{K})$, $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$. Le système $\begin{cases} y' + a(x)\,y = b(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ est appelé un *problème de Cauchy* et possède une et une seule solution sur I. La condition $y(x_0) = y_0$ est appelée sa *condition initiale*.

Démonstration Notons A une primitive de a sur I.

Idée de la preuve : Les solutions de l'équation HOMOGÈNE sont de la forme $x \longmapsto \lambda\, e^{-A(x)}$ où λ est une CONSTANTE. Nous allons résoudre l'*équation complète*, i.e. avec second membre, en faisant « varier la constante », c'est-à-dire en cherchant les solutions sous la forme $x \overset{y}{\longmapsto} \lambda(x)\, e^{-A(x)}$ où λ est une FONCTION. Ce principe de résolution est appelé la *méthode de variation de la constante*. Il se passe ici un peu la même chose que quand on pose $t = e^x$ pour résoudre l'équation $e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$. Au lieu de chercher x tel quel, on préfère chercher t dans un premier temps.

Soit $y \in \mathscr{D}(I, \mathbb{K})$ une fonction quelconque. Notons λ la FONCTION $y\,e^A$ dérivable. Via l'égalité $y = \lambda\, e^{-A}$, nous allons pouvoir remplacer momentanément notre inconnue y par l'inconnue intermédiaire λ.

$$\begin{aligned}
y' + ay = b \quad \text{et} \quad y(x_0) = y_0 \quad &\iff \quad \left(\lambda\, e^{-A}\right)' + a\left(\lambda\, e^{-A}\right) = b \quad \text{et} \quad \lambda(x_0)\, e^{-A(x_0)} = y_0 \\
&\iff \quad \left(\lambda'\, e^{-A} - \lambda A'\, e^{-A}\right) + a\lambda\, e^{-A} = b \quad \text{et} \quad \lambda(x_0) = y_0\, e^{A(x_0)} \\
&\iff \quad \lambda'\, e^{-A} - a\lambda\, e^{-A} + a\lambda\, e^{-A} = b \quad \text{et} \quad \lambda(x_0) = y_0\, e^{A(x_0)} \\
&\iff \quad \lambda' = b\, e^{A} \quad \text{et} \quad \lambda(x_0) = y_0\, e^{A(x_0)} \\
&\iff \quad \lambda \text{ est l'unique primitive de } b\, e^A \text{ qui vaut } y_0\, e^{A(x_0)} \text{ en } x_0.
\end{aligned}$$

Ces équivalences prouvent à la fois l'existence et l'unicité d'une fonction λ répondant au problème. Continue sur I, la fonction $b\,e^A$ possède en effet une et une seule primitive de valeur $y_0\, e^{A(x_0)}$ en x_0 d'après le théorème fondamental du calcul intégral. Plus explicitement, pour tout $x \in I$:

$$\lambda(x) = y_0\, e^{A(x_0)} + \int_{x_0}^{x} b(t)\, e^{A(t)}\, dt, \qquad \text{donc } y(x) = y_0\, e^{A(x_0) - A(x)} + \int_{x_0}^{x} b(t)\, e^{A(t) - A(x)}\, dt.$$

Théorème (Équation différentielle $y' + a(x)\, y = b(x)$, conséquence de la linéarité) Soient $a, b \in \mathscr{C}(I, \mathbb{K})$ et y_{part} une solution particulière de l'équation $y' + a(x)\, y = b(x)$. En notant A une primitive de a sur I, les solutions sur I de l'équation différentielle $y' + a(x)\, y = b(x)$ sont toutes les fonctions de la forme $y_{\text{part}} + \lambda\, e^{-A}$, λ décrivant $\mathbb{K}$.

Solution générale de l'équation complète	=	Solution particulière	+	Solution générale de l'équation HOMOGÈNE

Exemple On veut résoudre l'équation $xy' + y = x^2 - 1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ avec la condition initiale $y(1) = 0$.

Démonstration

- **Réécriture de l'équation :** Réécrivons d'abord l'équation sous la forme $y' + \dfrac{y}{x} = x - \dfrac{1}{x}$ pour nous ramener à la forme $y' + a(x)\, y = b(x)$ des théorèmes précédents.

  Nous ne saurons résoudre cette équation que sur $\mathbb{R}_+^*$ — ou $\mathbb{R}_-^*$ — MAIS PAS SUR $\mathbb{R}^*$. Quand nous avons appris à résoudre les équations homogènes, il a été essentiel en effet que nous travaillions sur un INTERVALLE. Faites l'effort de relire la preuve pour comprendre pourquoi.

- **Équation homogène :** La fonction logarithme étant une primitive de la fonction inverse, les solutions de l'équation homogène $y' + \dfrac{y}{x} = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ sont toutes les fonctions $x \longmapsto \lambda\, e^{-\ln x} = \dfrac{\lambda}{x}$, λ décrivant $\mathbb{R}$.

- **Solution particulière de l'équation $y' + \dfrac{y}{x} = x - \dfrac{1}{x}$:** Cherchons-en une sous la forme $x \overset{y}{\longmapsto} \dfrac{\lambda(x)}{x}$ où $\lambda \in \mathscr{D}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ — méthode de variation de la constante. Pour tout $x > 0$:

$$y'(x) + \frac{y(x)}{x} = x - \frac{1}{x} \quad \iff \quad \frac{x\lambda'(x) - \lambda(x)}{x^2} + \frac{\lambda(x)}{x^2} = x - \frac{1}{x} \quad \iff \quad \lambda'(x) = x^2 - 1.$$

  Attention de ne pas donner λ comme solution particulière à la place de y !

  PAR EXEMPLE, nous pouvons CHOISIR pour λ la fonction $x \longmapsto \dfrac{x^3}{3} - x$. La fonction $x \overset{y}{\longmapsto} \dfrac{x^2}{3} - 1$ est alors une solution particulière de notre équation.

- **Conclusion :** Les solutions (réelles) de l'équation $xy' + y = x^2 - 1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ sont toutes les fonctions $x \longmapsto \dfrac{x^2}{3} - 1 + \dfrac{\lambda}{x}$, λ décrivant $\mathbb{R}$. L'unique solution qui s'annule en 1 est $x \longmapsto \dfrac{x^2}{3} - 1 + \dfrac{2}{3x} = \dfrac{x^3 - 3x + 2}{3x}$, obtenue pour $\lambda = \dfrac{2}{3}$.

Sur une copie, vous n'êtes pas obligés de rédiger la méthode de la variation de la constante. Vous pouvez vous contenter de la mettre en œuvre au brouillon, puis vérifier sur votre copie que vous avez bien trouvé une solution particulière.

Attention ! N'écrivez surtout pas pour conclure « Les fonctions $x \longmapsto \ldots$ sont solutions de l'équation ... »,
ni « Toutes les fonctions $x \longmapsto \ldots$ sont solutions de l'équation ... »,
ni « Les fonctions $x \longmapsto \ldots$ sont toutes solutions de l'équation ... ».
Dans les trois cas, la phrase ne dit pas ce qu'elle doit dire, à savoir que nous avons trouvé **EXACTEMENT TOUTES** les solutions cherchées. Écrivez ceci et rien d'autre :

« Les solutions de l'équation ... sont (toutes) les fonctions $x \longmapsto \ldots$ »

Théorème (Principe de superposition) Soient $a, b_1, b_2 \in \mathscr{C}(I, \mathbb{K})$.
Si y_1 est solution sur I de l'équation $y' + a(x)\,y = b_1(x)$ et y_2 solution sur I de l'équation $y' + a(x)\,y = b_2(x)$, alors $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$ est solution sur I de l'équation $y' + a(x)\,y = \lambda_1 b_1(x) + \lambda_2 b_2(x)$ pour tous $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$.

Pour trouver une solution particulière de l'équation $y' + xy = x + \sqrt{x}$, on peut simplement additionner une solution particulière de l'équation $y' + xy = x$ et une autre de l'équation $y' + xy = \sqrt{x}$.

2.3 Équations $y' + ay = A\,\mathrm{e}^{rx}$ dans lesquelles a est une constante

Dans le cas particulier des équations différentielles de la forme $y' + ay = A\,\mathrm{e}^{rx}$ dans lesquelles a est une **CONSTANTE**, on peut trouver une solution particulière efficacement sans faire varier la constante.

Théorème (Solution particulière de l'équation $y' + ay = A\,\mathrm{e}^{rx}$) Soient $a, A, r \in \mathbb{K}$.
L'équation $y' + ay = A\,\mathrm{e}^{rx}$ possède une solution de la forme $\begin{cases} x \longmapsto B\,\mathrm{e}^{rx} & \text{si } r \neq -a \\ x \longmapsto Bx\,\mathrm{e}^{rx} & \text{si } r = -a \end{cases}$ pour un certain $B \in \mathbb{K}$.

Ce principe permet aussi de trouver une solution particulière d'équations comme $y' + 2y = 3\cos x$ ou $y' - y = \mathrm{e}^x \sin(2x)$. Les identités $\mathrm{Re}\big(f'\big) = \mathrm{Re}(f)'$ et $\mathrm{Im}\big(f'\big) = \mathrm{Im}(f)'$ montrent en effet que :

— si f est solution de l'équation $y' + 2y = 3\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$, $\mathrm{Re}(f)$ est solution de l'équation $y' + 2y = 3\cos x$,

— si f est solution de l'équation $y' - y = \mathrm{e}^{(1+2\mathrm{i})x}$, $\mathrm{Im}(f)$ est solution de l'équation $y' - y = \mathrm{e}^x \sin(2x)$.

Démonstration Pour tout $B \in \mathbb{K}$:

$$x \longmapsto B\,\mathrm{e}^{rx} \text{ est solution de } y' + ay = A\,\mathrm{e}^{rx} \iff \forall x \in \mathbb{R},\quad rB\,\mathrm{e}^{rx} + aB\,\mathrm{e}^{rx} = A\,\mathrm{e}^{rx} \iff (r+a)B = A.$$

L'équation $y' + ay = A\,\mathrm{e}^{rx}$ possède ainsi une et une seule solution de la forme testée si $r \neq -a$, mais aucune si $r = -a$. Supposons désormais que $r = -a$. Pour tout $B \in \mathbb{K}$:

$$x \longmapsto Bx\,\mathrm{e}^{rx} \text{ est solution de } y' + ay = A\,\mathrm{e}^{rx} \iff \forall x \in \mathbb{R},\quad \big(B\,\mathrm{e}^{rx} + rB\,\mathrm{e}^{rx}\big) + aBx\,\mathrm{e}^{rx} = A\,\mathrm{e}^{rx} \overset{r=-a}{\iff} B = A.$$

La fonction $x \longmapsto Ax\,\mathrm{e}^{rx}$ convient si $r = -a$.

Exemple On veut résoudre l'équation $y' - y = \mathrm{e}^x + 4\sin x$ avec la condition initiale $y(0) = 1$.

Démonstration

- **Équation homogène :** Les solutions en sont toutes les fonctions $x \longmapsto \lambda\,\mathrm{e}^x$, λ décrivant $\mathbb{R}$.
- **Solution particulière de l'équation $y' - y = \mathrm{e}^x$:** Cherchons-en une sous la forme $x \longmapsto Bx\,\mathrm{e}^x$ avec $B \in \mathbb{R}$.
$$x \longmapsto Bx\,\mathrm{e}^x \text{ est solution de } y' - y = \mathrm{e}^x \iff \forall x \in \mathbb{R},\quad \big(B\,\mathrm{e}^x + Bx\,\mathrm{e}^x\big) - Bx\,\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x \iff B = 1.$$
La fonction $x \longmapsto x\,\mathrm{e}^x$ convient.
- **Solution particulière de l'équation $y' - y = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$:** Cherchons-en une sous la forme $x \longmapsto B\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$ avec $B \in \mathbb{C}$.
$$x \longmapsto B\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} \text{ est solution de } y' - y = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} \iff \forall x \in \mathbb{R},\quad \mathrm{i}B\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - B\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} \iff B(\mathrm{i}-1) = 1$$
$$\iff B = \frac{1}{\mathrm{i}-1} = -\frac{1+\mathrm{i}}{2}.$$
Attention ! La fonction $x \longmapsto -\dfrac{1+\mathrm{i}}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$ convient.
- **Solution particulière de l'équation $y' - y = \sin x = \mathrm{Im}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})$:** D'après le point précédent, la fonction $x \longmapsto \mathrm{Im}\left(-\dfrac{1+\mathrm{i}}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\right) = -\dfrac{\sin x + \cos x}{2}$ convient.
- **Conclusion :** Les solutions de l'équation complète sont les fonctions $x \longmapsto (x+\lambda)\mathrm{e}^x + 4 \times \left(-\dfrac{\cos x + \sin x}{2}\right)$, λ décrivant $\mathbb{R}$. L'unique solution qui vaut 1 en 0 est ainsi la fonction $x \longmapsto (x+3)\,\mathrm{e}^x - 2\sin x - 2\cos x$, obtenue pour $\lambda = 3$.

3 Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

On s'intéresse aux équations $ay''+by'+cy=d(x)$ d'inconnue $y: I \longrightarrow \mathbb{K}$ deux fois dérivables où $a \in \mathbb{R}^*$, $b,c \in \mathbb{R}$ et $d \in \mathscr{C}(I,\mathbb{K})$ sont fixés.

3.1 Équations homogènes

En pratique, ce sont généralement les solutions réelles des équations différentielles qui nous intéressent, mais nous commencerons pourtant par le cas complexe car c'est lui le cas théorique fondamental, celui dont la preuve est naturelle, et ceci entièrement grâce à l'exponentielle complexe.

Théorème (Équation différentielle $ay''+by'+cy=0$ pour $\mathbb{K}=\mathbb{C}$)

Soient $a \in \mathbb{C}^*$ et $b,c \in \mathbb{C}$.

On appelle *polynôme caractéristique* de l'équation $ay''+by'+cy=0$ le polynôme aX^2+bX+c.

Ci-contre, λ, λ' et μ décrivent $\mathbb{C}$.

Discriminant Δ de aX^2+bX+c	Racines de aX^2+bX+c	Forme des solutions
$\Delta \neq 0$	r et r'	$x \longmapsto \lambda\, e^{rx} + \lambda'\, e^{r'x}$
$\Delta = 0$	r	$x \longmapsto (\lambda x+\mu)\, e^{rx}$

Démonstration Mais d'où sort le polynôme caractéristique ? Et pourquoi l'exponentielle est-elle à ce point présente ? Pour tout $r \in \mathbb{C}$:

$$x \longmapsto e^{rx} \text{ est solution de l'équation : } \quad ay''+by'+cy=0 \quad \Longleftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \left(ar^2+br+c\right)e^{rx}=0$$
$$\Longleftrightarrow \quad r \text{ est une racine du polynôme caractéristique } aX^2+bX+c.$$

Ce calcul nous incite à introduire les racines éventuellement égales r et r' du polynôme aX^2+bX+c, liées par la relation $r+r'=-\dfrac{b}{a}$.

La fonction $x \longmapsto e^{rx}$ est alors solution de l'équation $ay''+by'+cy=0$, mais c'est le cas plus généralement de la fonction $x \longmapsto \lambda\, e^{rx}$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$. Et le contexte est certes différent, mais de nouveau, nous allons résoudre notre équation en faisant varier la constante. Concrètement, nous cherchons nos solutions sous la forme $x \overset{y}{\longmapsto} z(x)\, e^{rx}$ avec $z \in \mathscr{D}(\mathbb{R},\mathbb{C})$.

$$\begin{aligned}
ay''+by'+cy=0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad a\left(z''(x)+2rz'(x)+r^2z(x)\right)e^{rx}+b\left(z'(x)+rz(x)\right)e^{rx}+cz(x)\,e^{rx}=0\\
&\Longleftrightarrow \quad az''+(2ar+b)z'+\left(ar^2+br+c\right)z=0\\
&\Longleftrightarrow \quad (z')'+\left(2r+\frac{b}{a}\right)z'=0 \qquad \text{Tiens, une équation linéaire du premier ordre !}\\
&\Longleftrightarrow \quad \exists\, \lambda \in \mathbb{C}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad z'(x)=\lambda\, e^{-\left(2r+\frac{b}{a}\right)x}.
\end{aligned}$$

La fin du calcul requiert qu'on distingue deux cas : $\Delta \neq 0$ et $\Delta = 0$.

- **Cas où $\Delta \neq 0$:** Ici $r \neq -\dfrac{b}{2a}$, donc $2r+\dfrac{b}{a} \neq 0$.

$$\begin{aligned}
ay''+by'+cy=0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \exists\, \lambda,\mu \in \mathbb{C}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad z(x)=\frac{\lambda\, e^{-\left(2r+\frac{b}{a}\right)x}}{-\left(2r+\frac{b}{a}\right)}+\mu \qquad \text{après primitivation}\\
&\Longleftrightarrow \quad \exists\, \lambda,\mu \in \mathbb{C}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad z(x)=\lambda\, e^{-\left(2r+\frac{b}{a}\right)x}+\mu \qquad \text{quitte à changer le } \lambda\\
&\Longleftrightarrow \quad \exists\, \lambda,\mu \in \mathbb{C}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad y(x)=z(x)\,e^{rx}=\lambda\, e^{-\left(r+\frac{b}{a}\right)x}+\mu\, e^{rx}\\
&\Longleftrightarrow \quad \exists\, \lambda,\mu \in \mathbb{C}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad y(x)=\lambda\, e^{r'x}+\mu\, e^{rx}.
\end{aligned}$$

- **Cas où $\Delta = 0$:** Cette fois, $r=-\dfrac{b}{2a}$ est l'unique racine de aX^2+bX+c, donc $2r+\dfrac{b}{a}=0$.

$$\begin{aligned}
ay''+by'+cy=0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \exists\, \lambda \in \mathbb{C}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad z'(x)=\lambda\\
&\Longleftrightarrow \quad \exists\, \lambda,\mu \in \mathbb{C}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad z(x)=\lambda x+\mu \qquad \text{après primitivation}\\
&\Longleftrightarrow \quad \exists\, \lambda,\mu \in \mathbb{C}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad y(x)=z(x)\,e^{rx}=(\lambda x+\mu)\,e^{rx}.
\end{aligned}$$

Théorème **(Équation différentielle $ay''+by'+cy=0$ pour $\mathbb{K}=\mathbb{R}$)**

Soient $a\in\mathbb{R}^*$ et $b,c\in\mathbb{R}$.

On appelle *polynôme caractéristique* de l'équation $ay''+by'+cy=0$ le polynôme aX^2+bX+c.

Ci-contre, λ, λ' et μ décrivent $\mathbb{R}$.

Discriminant Δ de aX^2+bX+c	Racines de aX^2+bX+c	Forme des solutions
$\Delta>0$	r et r'	$x\longmapsto \lambda\,\mathrm{e}^{rx}+\lambda'\,\mathrm{e}^{r'x}$
$\Delta=0$	r	$x\longmapsto (\lambda x+\mu)\,\mathrm{e}^{rx}$
$\Delta<0$	$r\pm\mathrm{i}\omega$	$x\longmapsto \mathrm{e}^{rx}\big(\lambda\cos(\omega x)+\mu\sin(\omega x)\big)$

Dans le cas où $\Delta<0$, on privilégie en physique d'autres formes équivalentes des solutions : $x\longmapsto\lambda\,\mathrm{e}^{rx}\sin(\omega x+\varphi)$ et $x\longmapsto\lambda\,\mathrm{e}^{rx}\cos(\omega x+\varphi)$.

Démonstration Les solutions réelles de l'équation $ay''+by'+cy=0$ en sont aussi des solutions complexes, donc soumises au théorème précédent. Nous nous contenterons du cas $\Delta<0$ — le plus compliqué et le plus intéressant. Les racines de aX^2+bX+c y sont complexes conjuguées de la forme $r\pm\mathrm{i}\omega$ avec $\omega\neq0$.

Soit y une solution **COMPLEXE** de l'équation $ay''+by'+cy=0$. D'après le théorème précédent, y est de la forme $x\longmapsto\alpha\,\mathrm{e}^{rx+\mathrm{i}\omega x}+\beta\,\mathrm{e}^{rx-\mathrm{i}\omega x}=\mathrm{e}^{rx}\left(\alpha\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}+\beta\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\right)$ pour certains $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$.

À quelle condition y est-elle **RÉELLE** ? Si elle l'est, alors $\mathrm{Im}\big(y(0)\big)=\mathrm{Im}\left(y\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)\right)=0$, or :

— $\mathrm{Im}\big(y(0)\big)=\mathrm{Im}(\alpha+\beta)$, donc $\mathrm{Im}(\beta)=-\mathrm{Im}(\alpha)$,

— $\mathrm{Im}\left(y\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)\right)=\mathrm{Im}\left(\mathrm{i}(\alpha-\beta)\,\mathrm{e}^{\frac{\pi r}{2\omega}}\right)=\mathrm{Im}\big(\mathrm{i}(\alpha-\beta)\big)\,\mathrm{e}^{\frac{\pi r}{2\omega}}=\mathrm{Re}(\alpha-\beta)\,\mathrm{e}^{\frac{\pi r}{2\omega}}$, donc $\mathrm{Re}(\beta)=\mathrm{Re}(\alpha)$.

Bref, si y est réelle : $\beta=\overline{\alpha}$. Posons dans ce cas $\lambda=2\,\mathrm{Re}(\alpha)$ et $\mu=-2\,\mathrm{Im}(\alpha)$. Pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}y(x)&=\mathrm{e}^{rx}\left(\alpha\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}+\overline{\alpha}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\right)=2\,\mathrm{e}^{rx}\mathrm{Re}\big(\alpha\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}\big)=\mathrm{e}^{rx}\left(2\,\mathrm{Re}(\alpha)\cos(\omega x)-2\,\mathrm{Im}(\alpha)\sin(\omega x)\right)\\&=\mathrm{e}^{rx}\big(\lambda\cos(\omega x)+\mu\sin(\omega x)\big).\end{aligned}$$

Réciproquement, cette fonction est bien réelle.

Les formes $\lambda\,\mathrm{e}^{rx}\sin(\omega x+\varphi)$ et $\lambda\,\mathrm{e}^{rx}\cos(\omega x+\varphi)$ s'en déduisent aisément grâce à une technique du chapitre « Nombres complexes et trigonométrie ».

Exemple

- Les solutions (réelles) de l'équation $y''-3y'+2y=0$ sont toutes les fonctions $x\longmapsto\lambda\,\mathrm{e}^{x}+\mu\,\mathrm{e}^{2x}$, λ et μ décrivant $\mathbb{R}$, car le polynôme X^2-3X+2 possède deux racines réelles distinctes, 1 et 2.
- Les solutions (réelles) de l'équation $y''-2y'+y=0$ sont toutes les fonctions $x\longmapsto(\lambda x+\mu)\,\mathrm{e}^{x}$, λ et μ décrivant $\mathbb{R}$, car le polynôme X^2-2X+1 admet 1 pour unique racine.
- Les solutions (réelles) de l'équation $y''+4y=0$ sont toutes les fonctions $x\longmapsto\lambda\cos(2x)+\mu\sin(2x)$, λ et μ décrivant $\mathbb{R}$, car le polynôme X^2+4 possède deux racines complexes conjuguées, $2\mathrm{i}$ et $-2\mathrm{i}$.
- Les solutions (réelles) de l'équation $y''+2y'+10y=0$ sont toutes les fonctions $x\longmapsto\mathrm{e}^{-x}\big(\lambda\cos(3x)+\mu\sin(3x)\big)$, λ et μ décrivant $\mathbb{R}$, car le polynôme $X^2+2X+10$ possède deux racines complexes conjuguées, $-1+3\mathrm{i}$ et $-1-3\mathrm{i}$.

3.2 Équations avec second membre

Nous admettrons le théorème suivant pour ne pas perdre de temps.

Théorème **(Équation différentielle $ay''+by'+cy=d(x)$, problème de Cauchy)** Soient $a\in\mathbb{K}^*$, $b,c\in\mathbb{K}$ et $d\in\mathscr{C}(I,\mathbb{K})$. Pour tous $x_0\in I$ et $y_0,y_0'\in\mathbb{K}$, le *problème de Cauchy* $\left\{\begin{array}{l}ay''+by'+cy=d(x)\\ y(x_0)=y_0\ \text{ et }\ y'(x_0)=y_0'\end{array}\right.$ possède une et une seule solution sur I.

Je ne l'énonce pas de nouveau, mais le principe « solution particulière + solution générale de l'équation homogène » et le principe de superposition sont toujours valables au second ordre car ils découlent seulement de la **LINÉARITÉ** de l'équation.

En revanche, le programme de MPSI ne vous donne aucune méthode un peu générale de recherche de solution particulière pour les équations du second ordre. Seuls les seconds membres du théorème suivant sont exigibles.

Théorème **(Solution particulière de l'équation $ay''+by'+cy=A\,\mathrm{e}^{rx}$)** Soient $a\in\mathbb{C}^*$ et $b,c,A,r\in\mathbb{K}$. L'équation $ay''+by'+cy=A\,\mathrm{e}^{rx}$ possède pour un certain $B\in\mathbb{K}$ une solution de la forme :

$$\begin{cases} x\longmapsto B\,\mathrm{e}^{rx} & \text{si } r \text{ N'est PAS racine du polynôme caractéristique} \\ x\longmapsto Bx\,\mathrm{e}^{rx} & \text{si } r \text{ est racine SIMPLE du polynôme caractéristique} \\ x\longmapsto Bx^2\,\mathrm{e}^{rx} & \text{si } r \text{ est racine DOUBLE du polynôme caractéristique.} \end{cases}$$

Comme au premier ordre, ce principe permet aussi de traiter le cas de seconds membres exponentiels-(co)sinus. Par exemple, si f est solution de l'équation $y''+2y=2\,\mathrm{e}^{(3+\mathrm{i})x}$, $\mathrm{Im}(f)$ est solution de l'équation $y''+2y=2\,\mathrm{e}^{3x}\sin x$.

Exemple On veut résoudre l'équation $y''-y=\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{x}$ avec les conditions initiales $y(0)=1$ et $y'(0)=0$.

Démonstration

- **Équation homogène :** Les solutions de l'équation $y''-y=0$ sont toutes les fonctions $x\longmapsto\lambda\,\mathrm{e}^{x}+\mu\,\mathrm{e}^{-x}$, λ et μ décrivant $\mathbb{R}$, car les racines du polynôme X^2-1 sont -1 et 1.
- **Solution particulière de l'équation $y''-y=\mathrm{e}^{2x}$:** Comme 2 N'est PAS racine de X^2-1, cherchons-en une sous la forme $x\longmapsto B\,\mathrm{e}^{2x}$ avec $B\in\mathbb{R}$.

$$x\longmapsto B\,\mathrm{e}^{2x} \text{ est solution de } y''-y=\mathrm{e}^{2x} \iff \forall x\in\mathbb{R},\quad 4B\,\mathrm{e}^{2x}-B\,\mathrm{e}^{2x}=\mathrm{e}^{2x} \iff B=\frac{1}{3}.$$

- **Solution particulière de l'équation $y''-y=\mathrm{e}^{x}$:** Comme 1 est racine SIMPLE de X^2-1, cherchons-en une sous la forme $x\longmapsto Bx\,\mathrm{e}^{x}$ avec $B\in\mathbb{R}$.

$$x\longmapsto Bx\,\mathrm{e}^{x} \text{ est solution de } y''-y=\mathrm{e}^{x} \iff \forall x\in\mathbb{R},\quad \big(Bx\,\mathrm{e}^{x}+2B\,\mathrm{e}^{x}\big)-Bx\,\mathrm{e}^{x}=\mathrm{e}^{x} \iff B=\frac{1}{2}.$$

- **Conclusion :** Les solutions de l'équation complète $y''-y=\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{x}$ sont finalement toutes les fonctions $x\longmapsto\left(\lambda-\frac{x}{2}\right)\mathrm{e}^{x}+\mu\,\mathrm{e}^{-x}+\frac{\mathrm{e}^{2x}}{3}$, λ et μ décrivant $\mathbb{R}$. L'unique solution pour laquelle $y(0)=1$ et $y'(0)=0$ est obtenue sous réserve que λ et μ satisfassent les relations $\lambda+\mu+\frac{1}{3}=1$ et $\lambda-\mu+\frac{1}{6}=0$, i.e. $\lambda=\frac{1}{4}$ et $\mu=\frac{5}{12}$. L'unique solution finale est ainsi la fonction $x\longmapsto\frac{1-2x}{4}\,\mathrm{e}^{x}+\frac{5}{12}\,\mathrm{e}^{-x}+\frac{\mathrm{e}^{2x}}{3}$.

Exemple On cherche les solutions réelles de l'équation $y''+y'+y=\mathrm{e}^{x}\cos x$.

Démonstration

- **Équation homogène :** Les solutions en sont les fonctions $x\longmapsto\left(\lambda\cos\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)+\mu\sin\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)\right)\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$, λ et μ décrivant $\mathbb{R}$, car les racines de X^2+X+1 sont j et $\overline{\mathrm{j}}$.
- **Solution particulière de l'équation $y''+y'+y=\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x}$:** Comme $1+\mathrm{i}$ n'est pas racine de X^2+X+1, cherchons-en une sous la forme $x\longmapsto B\,\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x}$ avec $B\in\mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} & x\longmapsto B\,\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x} \text{ est solution de } y''+y'+y=\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x} \\ & \iff \forall x\in\mathbb{R},\quad (1+\mathrm{i})^2B\,\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x}+(1+\mathrm{i})B\,\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x}+B\,\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x}=\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x} \iff (2+3\mathrm{i})B=1 \\ & \iff B=\frac{1}{2+3\mathrm{i}}=\frac{2-3\mathrm{i}}{13}. \qquad \text{La fonction } x\longmapsto\frac{2-3\mathrm{i}}{13}\,\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x} \text{ convient.} \end{aligned}$$

- **Solution particulière de l'équation $y''+y'+y=\mathrm{e}^{x}\cos x=\mathrm{Re}\big(\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x}\big)$:** D'après le point précédent, la fonction $x\longmapsto\mathrm{Re}\left(\frac{2-3\mathrm{i}}{13}\,\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x}\right)=\left(\frac{2\cos x+3\sin x}{13}\right)\mathrm{e}^{x}$ convient.
- **Conclusion :** Les solutions (réelles) de l'équation $y''+y'+y=\mathrm{e}^{x}\cos x$ sont toutes les fonctions :

$$x\longmapsto\left(\frac{2\cos x+3\sin x}{13}\right)\mathrm{e}^{x}+\left(\lambda\cos\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)+\mu\sin\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)\right)\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}},\qquad \lambda \text{ et } \mu \text{ décrivant } \mathbb{R}.$$

4 Suites récurrentes linéaires

Nous achèverons ce chapitre par l'étude de certaines suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfaisant l'une des relations de récurrence suivantes :

— $u_{n+1} = au_n + b$ (*suites arithmético-géométriques*, dont arithmétiques pour $a = 1$ et géométriques pour $b = 0$),

— $au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0$ (*suites récurrentes linéaires homogènes du second ordre*).

Dans les deux cas, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par une équation linéaire. Notons par exemple T la fonction qui associe à toute suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite $\big(u_{n+1} - au_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$. Alors T est linéaire car pour toutes suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

$$T\Big(\lambda(u_n)_{n\in\mathbb{N}} + \mu(v_n)_{n\in\mathbb{N}}\Big) = T\Big((\lambda u_n + \mu v_n)_{n\in\mathbb{N}}\Big) = \Big((\lambda u_{n+1} + \mu v_{n+1}) - a(\lambda u_n + \mu v_n)\Big)_{n\in\mathbb{N}} = \Big(\lambda(u_{n+1} - au_n) + \mu(v_{n+1} - av_n)\Big)_{n\in\mathbb{N}}$$
$$= \lambda\big(u_{n+1} - au_n\big)_{n\in\mathbb{N}} + \mu\big(v_{n+1} - av_n\big)_{n\in\mathbb{N}} = \lambda T\Big((u_n)_{n\in\mathbb{N}}\Big) + \mu T\Big((v_n)_{n\in\mathbb{N}}\Big).$$

Or dire qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfait la relation de récurrence $u_{n+1} = au_n + b$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, c'est dire exactement que $T\Big((u_n)_{n\in\mathbb{N}}\Big) = (b)_{n\in\mathbb{N}}$. C'est donc aussi dire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est solution d'une équation linéaire.

4.1 Suites arithmétiques, géométriques et arithmético-géométriques

Théorème (Suites arithmétiques/géométriques) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe et $q, r \in \mathbb{C}$.

- **Suites arithmétiques :** On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *arithmétique de raison r* si pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = u_n + r$.
  Dans ce cas, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = u_0 + nr$.
- **Suites géométriques :** On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *géométrique de raison q* si pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = qu_n$.
  Dans ce cas, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = q^n u_0$.

$$\begin{tikzcd}
u_0 \arrow[r, bend left, "+r/\times q"] \arrow[rrrr, bend right, "+nr/\times q^n"'] & u_1 \arrow[r, bend left, "+r/\times q"] & u_2 \arrow[r, bend left, "+r/\times q"] & \ldots \arrow[r, bend left, "+r/\times q"] & u_n
\end{tikzcd}$$

Théorème (Suites arithmético-géométriques) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe et $a, b \in \mathbb{C}$. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *arithmético-géométrique (de raison a)* si pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = au_n + b$.

Deux situations peuvent se présenter :

— soit $a = 1$, auquel cas $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique,

— soit $a \neq 1$, auquel cas l'équation $ax + b = x$ d'inconnue $x \in \mathbb{C}$ possède une et une seule solution ℓ. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors de la forme $\big(\ell + \lambda a^n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{C}$.

Démonstration (n°1 plus conceptuelle, avec un point de vue linéaire) Supposons $a \neq 1$. Nous voulons résoudre l'équation linéaire $\big(u_{n+1} - au_n\big)_{n\in\mathbb{N}} = (b)_{n\in\mathbb{N}}$ d'inconnue $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

- **Équation homogène :** Les suites complexes qui vérifient cette équation sont exactement les suites géométriques de raison a, i.e. les suites $(\lambda a^n)_{n\in\mathbb{N}}$, λ décrivant $\mathbb{C}$.
- **Solution particulière de l'équation complète :** À tout hasard, cherchons-en une qui soit constante. Pour tout $\ell \in \mathbb{C}$, la suite $(\ell)_{n\in\mathbb{N}}$ est solution de l'équation complète si et seulement si $\ell - a\ell = b$, i.e. $\ell = \dfrac{b}{1-a}$.
- **Conclusion :** Les solutions de l'équation complète sont toutes les suites $\big(\ell + \lambda a^n\big)_{n\in\mathbb{N}}$, λ décrivant $\mathbb{C}$. ■

Démonstration (n°2 plus pratique) Supposons $a \neq 1$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe pour laquelle pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = au_n + b$.

- Pour commencer, l'équation $ax + b = x$ d'inconnue $x \in \mathbb{C}$ admet $\ell = \dfrac{b}{1-a}$ comme seule solution.
- La suite $(u_n - \ell)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors géométrique car pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} - \ell = (au_n + b) - (a\ell + b) = a(u_n - \ell)$. Il en découle que $u_n - \ell = a^n(u_0 - \ell)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc bien de la forme $\big(\ell + \lambda a^n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{C}$. ■

Exemple On cherche une expression explicite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = 2u_n + 1$.

Démonstration L'équation $2x + 1 = x$ pour solution -1, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de la forme $\big(\lambda 2^n - 1\big)_{n\in\mathbb{N}}$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}$, et comme $u_0 = 1$: $\lambda = 2$ après calcul, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = 2^{n+1} - 1$.

4.2 Suites récurrentes linéaires homogènes du second ordre

Théorème (Suites récurrentes linéaires homogènes du second ordre)

Soient $a,c \in \mathbb{K}^*$, $b \in \mathbb{K}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$.

On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *récurrente linéaire homogène du second ordre de polynôme caractéristique* aX^2+bX+c si pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$au_{n+2}+bu_{n+1}+cu_n=0.$$

	Discriminant Δ de aX^2+bX+c	Racines de aX^2+bX+c	Forme des solutions
$\mathbb{K}=\mathbb{C}$	$\Delta \neq 0$	r et r'	$\left(\lambda r^n+\lambda' r'^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$
	$\Delta = 0$	r	$\left((\lambda n+\mu)r^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$

	Discriminant Δ de aX^2+bX+c	Racines de aX^2+bX+c	Forme des solutions
$\mathbb{K}=\mathbb{R}$	$\Delta > 0$	r et r'	$\left(\lambda r^n+\lambda' r'^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$
	$\Delta = 0$	r	$\left((\lambda n+\mu)r^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$
	$\Delta < 0$	$\rho\,\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\theta}$	$\left(\rho^n\big(\lambda\cos(n\theta)+\mu\sin(n\theta)\big)\right)_{n\in\mathbb{N}}$

Démonstration Petite remarque préliminaire. Une suite $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant donnée, si d'une part $\delta_0=\delta_1=0$ et si d'autre part $a\delta_{n+2}+b\delta_{n+1}+c\delta_n=0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, alors $\delta_n=0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

À présent, soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$ récurrente linéaire homogène du second ordre de polynôme caractéristique aX^2+bX+c.

- **Cas où aX^2+bX+c possède deux racines distinctes r et r' dans $\mathbb{K}$ ($\Delta\neq 0$ si $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ et $\Delta>0$ si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$) :** Soient λ et λ' deux éléments de $\mathbb{K}$ que nous allons choisir explicitement dans un instant. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, posons $\delta_n=u_n-\lambda r^n-\lambda' r'^n$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$:
$$\begin{aligned}a\delta_{n+2}+b\delta_{n+1}+c\delta_n &= \left(au_{n+2}+bu_{n+1}+cu_n\right)-\lambda\left(ar^{n+2}+br^{n+1}+cr^n\right)-\lambda'\left(ar'^{n+2}+br'^{n+1}+cr'^n\right)\\ &= 0-\lambda r^n\left(ar^2+br+c\right)-\lambda' r'^n\left(ar'^2+br'+c\right)=0.\end{aligned}$$
Peut-on choisir λ et λ' de façon à garantir que $\delta_0=\delta_1=0$? Eh bien oui car $r\neq r'$, il suffit de poser $\lambda=\dfrac{r'u_0-u_1}{r'-r}$ et $\lambda'=\dfrac{u_1-ru_0}{r'-r}$. Ainsi $\delta_n=0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, donc $u_n=\lambda r^n+\lambda' r'^n$.

- **Cas où aX^2+bX+c possède une unique racine r dans $\mathbb{K}$ ($\Delta=0$) :** Bien sûr $r=-\dfrac{b}{2a}$, et comme $\Delta=0$ avec $a\neq 0$ et $c\neq 0$: $b\neq 0$, donc $r\neq 0$. Soient λ et μ deux éléments de $\mathbb{K}$ que nous allons choisir explicitement dans un instant. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, posons $\delta_n=u_n-(\lambda n+\mu)r^n$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$:
$$\begin{aligned}a\delta_{n+2}+b\delta_{n+1}+c\delta_n &= \left(au_{n+2}+bu_{n+1}+cu_n\right)-\lambda\Big(a(n+2)r^{n+2}+b(n+1)r^{n+1}+cnr^n\Big)-\mu\left(ar^{n+2}+br^{n+1}+cr^n\right)\\ &= 0-\lambda\Big(nr^n\left(ar^2+br+c\right)+r^{n+1}(2ar+b)\Big)-\mu r^n\left(ar^2+br+c\right)=0.\end{aligned}$$
Peut-on choisir λ et μ de façon à garantir que $\delta_0=\delta_1=0$? Eh bien oui car $r\neq 0$, il suffit de poser $\lambda=\dfrac{u_1-ru_0}{r}$ et $\mu=u_0$. Ainsi $\delta_n=0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, donc $u_n=(\lambda n+\mu)r^n$.

- **Cas où aX^2+bX+c ne possède pas de racine dans $\mathbb{K}$ ($\Delta<0$ si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$) :** Les racines de aX^2+bX+c dans $\mathbb{C}$ sont ici complexes conjuguées distinctes, disons $\rho\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ et $\rho\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$ pour certains $\rho>0$ et $\theta\in\mathbb{R}\setminus\pi\mathbb{Z}$. À valeurs réelles donc aussi complexes, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de la forme $\left(\alpha\rho^n\,\mathrm{e}^{n\mathrm{i}\theta}+\beta\rho^n\,\mathrm{e}^{-n\mathrm{i}\theta}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ pour certains $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$ d'après le premier point. Or $\mathrm{Im}(u_0)=\mathrm{Im}(u_1)=0$, i.e. $\mathrm{Im}(\beta)=-\mathrm{Im}(\alpha)$ et $\mathrm{Im}\left(\alpha\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+\beta\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\right)=0$. La deuxième égalité s'écrit aussi : $\Big(\mathrm{Im}(\alpha)+\mathrm{Im}(\beta)\Big)\cos\theta+\Big(\mathrm{Re}(\alpha)-\mathrm{Re}(\beta)\Big)\sin\theta=0$, donc avec la première : $\Big(\mathrm{Re}(\alpha)-\mathrm{Re}(\beta)\Big)\sin\theta$, i.e. $\mathrm{Re}(\beta)=\mathrm{Re}(\alpha)$ car $\theta\in\mathbb{R}\setminus\pi\mathbb{Z}$. Conclusion : $\beta=\overline{\alpha}$. Posons finalement $\lambda=2\,\mathrm{Re}(\alpha)$ et $\mu=-2\,\mathrm{Im}(\alpha)$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$:
$$u_n=\alpha\rho^n\,\mathrm{e}^{n\mathrm{i}\theta}+\overline{\alpha}\rho^n\,\mathrm{e}^{-n\mathrm{i}\theta}=2\rho^n\,\mathrm{Re}\big(\alpha\,\mathrm{e}^{n\mathrm{i}\theta}\big)=\rho^n\big(\lambda\cos(n\theta)+\mu\sin(n\theta)\big).$$

Exemple On cherche une expression explicite de la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$.

Démonstration Le polynôme caractéristique $X^2 - 2X + 1$ possède une racine réelle unique qui est 1. Il existe donc deux réels λ et μ pour lesquels $u_n = \lambda n + \mu$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Mais $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$, donc $\lambda = 1$ et $\mu = 0$, autrement dit $u_n = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exemple On cherche une expression explicite de la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+2} = u_{n+1} - u_n$.

Démonstration Les racines du polynôme $X^2 - X + 1$ sont $e^{\frac{i\pi}{3}}$ et $e^{-\frac{i\pi}{3}}$ — complexes conjuguées. Il existe donc deux réels λ et μ pour lesquels $u_n = \lambda \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) + \mu \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Or comme $u_0 = u_1 = 1$: $\lambda = \frac{\lambda + \mu\sqrt{3}}{2} = 1$, donc $\lambda = 1$ et $\mu = \frac{1}{\sqrt{3}}$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)$.