# Équations différentielles linéaires

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ est l'un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $I$ est un intervalle quelconque.

**Qu'est-ce qu'une équation différentielle ?**

Une *équation différentielle* — *équadiff* en abrégé — est une équation dont l'inconnue est une fonction $y$ et dans laquelle cohabitent à la fois $y$ et ses dérivées $y'$, $y''$... On appelle *ordre* d'une telle équation le plus grand exposant de dérivation de $y$ qui y figure. Par exemple, $y' = x\,\mathrm{e}^y + 1$ est une équation différentielle du premier ordre et $xy'' - y^2 = yy'$ une équation différentielle du second ordre.

En passant, une remarque sur les notations. L'usage veut qu'on parle de l'équation différentielle $y' = xy + x^2$ — plutôt que de l'équation $y'(x) = xy(x) + x^2$ — mais cet usage manque de rigueur car on y mélange des fonctions ($y$ et $y'$) et des nombres ($x$ et $x^2$). Le raccourci est autorisé par souci de clarté, mais seulement pour désigner l'équation différentielle. Quand on mène un calcul concret, quand on est au cœur d'une démonstration, on écrit $y'(x) = \mathrm{e}^{2x} + x$ et **JAMAIS** $y' = \mathrm{e}^{2x} + x$.

Les équations différentielles les plus simples sont les « équations de primitivation » $y' = f$ d'inconnue $y$ dans lesquelles $f$ est une fonction fixée. Chercher les primitives de $f$ revient ainsi toujours à résoudre une équation différentielle. Réciproquement, nous verrons bientôt que la résolution d'une équation différentielle se ramène vite à un problème de primitivation.

Les équations différentielles sont en général très difficiles à résoudre, aussi nous contenterons-nous de travailler dans le cadre agréable des équations dites *linéaires*. Et encore, nous n'étudierons pas la théorie générale des équations différentielles linéaires, mais seulement les équations de la forme :

— $y' + a(x)\,y = f(x)$ (*équations différentielles linéaires du premier ordre*),

— $y'' + ay' + by = f(x)$ (*équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants*).

**Pourquoi la linéarité ?**

Ces équations sont *linéaires* au sens où elles peuvent être écrites sous la forme $T(y) = f$ avec $T$ linéaire et $f$ fixée. Les applications $y \longmapsto y' + ay$ et $y \longmapsto y'' + ay' + by$ sont en effet linéaires sur $\mathscr{C}^1(I,\mathbb{K})$ et $\mathscr{C}^2(I,\mathbb{K})$ respectivement si on note $I$ l'intervalle sur lequel on étudie l'équation différentielle.

Intéressons-nous à présent à une équation différentielle $y' + a(x)\,y = f(x)$ d'inconnue $y \in \mathscr{C}^1(I,\mathbb{K})$ où $a$ et $f$ sont deux fonctions fixées de $\mathscr{C}(I,\mathbb{K})$. Nous verrons que cette équation possède des solutions. Fixons-en une $y_{\text{part}}$, dite *solution particulière*. Par linéarité de l'application $y \longmapsto y' + ay$, l'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de l'équation complète $y' + a(x)y = f(x)$ est un sous-espace affine de $\mathscr{C}^1(I,\mathbb{K})$ de direction l'ensemble $S$ des solutions de l'équation homogène $y' + a(x)\,y = 0$. Concrètement : $\mathscr{S} = y_{\text{part}} + S$ et $S$ est le noyau de l'application $y \longmapsto y' + ay$.

Supposons maintenant que nous connaissons une solution particulière $y_1$ de l'équation différentielle $y' + a(x)\,y = f_1(x)$ et une autre $y_2$ de l'équation $y' + a(x)\,y = f_2(x)$ où $f_1$ et $f_2$ sont deux fonctions fixées de $\mathscr{C}(I,\mathbb{K})$. Pour tous $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$, la fonction $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$ est alors solution de l'équation $y' + a(x)\,y = \lambda f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)$ par simple linéarité de l'application $y \longmapsto y' + ay$. Cette remarque simple s'appelle le *principe de superposition* et nous aurons l'occasion de nous en servir à l'occasion en pratique.

Pour finir, les conséquences de la linéarité que nous venons de présenter pour les équations $y' + a(x)\ \ y = f(x)$ valent tout autant pour les équations différentielles linéaires du second ordre $y'' + ay' + by = f(x)$.

## 1 Équations différentielles linéaires du premier ordre

### 1.1 Équations homogènes

Soient $u, v \in \mathscr{D}(I,\mathbb{K})$. Le petit calcul qui suit n'a l'air de rien, mais c'est l'un des plus importants du chapitre :

$$\big(u\,\mathrm{e}^v\big)' = u'\,\mathrm{e}^v + uv'\,\mathrm{e}^v = \big(u' + uv'\big)\,\mathrm{e}^v.$$

Ce qu'il faut en retenir, c'est qu'en dérivant la fonction $u\,\mathrm{e}^v$, on voit apparaître la fonction $u' + uv'$.

**Théorème (Équations différentielles homogènes $y' + a(x)\,y = 0$)** Soit $a \in \mathscr{C}(I,\mathbb{K})$. On note $A$ une primitive de $a$ sur $I$. Les solutions sur $I$ de l'équation homogène $y' + a(x)\,y = 0$ sont toutes les fonctions $x \longmapsto \lambda\,\mathrm{e}^{-A(x)}$, $\lambda$ décrivant $\mathbb{K}$.

En d'autres termes, si on note $S$ l'ensemble des solutions de l'équation homogène $y' + a(x)\,y = 0$, alors $S = \mathrm{Vect}\big(\mathrm{e}^{-A}\big)$.

Dans quel ensemble de fonctions résout-on l'équation $y' + a(x)\,y = f(x)$ ? Pour qu'une fonction $y$ soit solution, il faut bien sûr qu'elle soit dérivable, mais la relation $y' = f - ay$ montre qu'une solution $y$ dérivable est automatiquement de classe $\mathscr{C}^1$ par continuité de $a$ et $f$. Pour cette raison, la tradition veut qu'on résolve l'équation sur $\mathscr{C}^1(I,\mathbb{K})$.

Si la fonction $a$ est constante, les solutions de l'équation $y' + ay = 0$ sont toutes les fonctions $x \longmapsto \lambda\,\mathrm{e}^{-ax}$, $\lambda$ décrivant $\mathbb{K}$. En particulier, la fonction exponentielle est la seule fonction $y \in \mathscr{D}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ pour laquelle $y' = y$ et $y(0) = 1$.

**Démonstration** Pour tout $y \in \mathscr{C}^1(I,\mathbb{K})$ : $\big(y\,\mathrm{e}^A\big)' = y'\,\mathrm{e}^A + yA'\,\mathrm{e}^A = \big(y' + ay\big)\mathrm{e}^A$, donc :

$$y' + ay = 0 \iff \big(y\,\mathrm{e}^A\big)' = 0 \iff y\,\mathrm{e}^A \text{ est constante} \iff \exists\,\lambda \in \mathbb{K},\quad y = \lambda\,\mathrm{e}^{-A}.$$

Vous noterez en passant que nous avons bien fait de travailler sur un INTERVALLE $I$. Si $I$ était une partie quelconque de $\mathbb{R}$, une dérivée $f'$ pourrait être identiquement nulle sur $I$ sans que la fonction $f$ soit constante sur $I$. ■

**Exemple** Les solutions réelles de l'équation $y' = \dfrac{y}{1+x^2}$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $x \longmapsto \lambda\,\mathrm{e}^{\operatorname{Arctan} x}$, $\lambda$ décrivant $\mathbb{R}$.

## 1.2 Équations complètes et variation de la constante

**Théorème (Équations complètes $y' + a(x)\,y = f(x)$, problème de Cauchy)** Soient $a, f \in \mathscr{C}(I,\mathbb{K})$.

- **Ensemble des solutions :** L'ensemble des solutions de l'équation complète $y' + a(x)\,y = f(x)$ d'inconnue $y \in \mathscr{C}^1(I,\mathbb{K})$ est une droite affine. Plus précisément, si on note $y_{\text{part}}$ une solution particulière de cette équation et $A$ une primitive de $a$ sur $I$, les solutions sur $I$ de l'équation complète sont toutes les fonctions $y_{\text{part}} + \lambda\,\mathrm{e}^{-A}$, $\lambda$ décrivant $\mathbb{K}$.
- **Problème de Cauchy :** Pour tous $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$, le système $\begin{cases} y' + a(x)\,y = f(x) \\ y(x_0) = y_0 \quad (\textit{condition initiale}) \end{cases}$ est appelé un *problème de Cauchy* et possède une et une seule solution sur $I$.

**Démonstration** Notons $A$ une primitive de $a$ sur $I$.

**Idée de la preuve :** Les solutions de l'équation HOMOGÈNE sont les fonctions $x \longmapsto \lambda\,\mathrm{e}^{-A(x)}$ dans lesquelles $\lambda$ est une CONSTANTE. Pour résoudre l'équation complète, nous allons faire « varier la constante », c'est-à-dire chercher les solutions sous la forme $x \longmapsto \lambda(x)\,\mathrm{e}^{-A(x)}$ où $\lambda$ est une FONCTION. Il s'avère ci-dessous que c'est une bonne idée. En d'autres termes, plutôt que de chercher les solutions $y$, nous allons chercher les fonctions $\lambda$ pour lesquelles $x \longmapsto \lambda(x)\,\mathrm{e}^{-A(x)}$ est solution. La fonction exponentielle ne s'annulant jamais, cela revient au même. Si on connaît $\lambda$, on connaît $y$ et vice versa. La technique obtenue est appelé *méthode de variation de la constante*.

Soit $y \in \mathscr{C}^1(I,\mathbb{K})$ quelconque. Notons $\lambda$ la FONCTION $y\,\mathrm{e}^A$, elle aussi de classe $\mathscr{C}^1$. Ainsi $y = \lambda\,\mathrm{e}^{-A}$.

$$\begin{aligned}
y' + ay = f \quad\text{et}\quad y(x_0) = y_0 &\iff \big(\lambda'\,\mathrm{e}^{-A} - \lambda A'\,\mathrm{e}^{-A}\big) + a\lambda\,\mathrm{e}^{-A} = f \quad\text{et}\quad \lambda(x_0)\,\mathrm{e}^{-A(x_0)} = y_0 \\
&\iff \lambda'\,\mathrm{e}^{-A} - a\lambda\,\mathrm{e}^{-A} + a\lambda\,\mathrm{e}^{-A} = f \quad\text{et}\quad \lambda(x_0) = y_0\,\mathrm{e}^{A(x_0)} \\
&\iff \lambda' = f\,\mathrm{e}^A \quad\text{et}\quad \lambda(x_0) = y_0\,\mathrm{e}^{A(x_0)} \\
&\iff \lambda \text{ est l'unique primitive de } f\,\mathrm{e}^A \text{ qui vaut } y_0\,\mathrm{e}^{A(x_0)} \text{ en } x_0.
\end{aligned}$$

Ces équivalences prouvent à la fois l'existence et l'unicité d'une fonction $\lambda$ répondant au problème car la fonction $f\,\mathrm{e}^A$ est continue sur $I$, donc y possède une et une seule primitive de valeur $y_0\,\mathrm{e}^{A(x_0)}$ en $x_0$ d'après le théorème fondamental du calcul intégral. De nouveau, l'unicité exige que $I$ soit un *intervalle*. Plus explicitement, pour tout $x \in I$ :

$$\lambda(x) = y_0\,\mathrm{e}^{A(x_0)} + \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{e}^{A(t)}\,\mathrm{d}t, \qquad \text{donc } y(x) = y_0\,\mathrm{e}^{A(x_0)-A(x)} + \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{e}^{A(t)-A(x)}\,\mathrm{d}t.$$ ■

✖ **Attention !** Au point où nous en sommes, nous savons résoudre de façon théorique toutes les équations différentielles $y' + a(x)\,y = f(x)$ et le calcul explicite des solutions requiert DEUX primitivations, une de $a$ puis une de $f\,\mathrm{e}^A$. Vous noterez que nous n'avons rien dit en revanche des équations $a(x)\,y' + b(x)\,y = f(x)$ dans lesquelles une fonction est autorisée en facteur de $y'$. La résolution précédente échoue dans ce cadre plus général, car pour isoler $\lambda'$ et achever le calcul, on a besoin de diviser par la fonction en facteur de $y'$, ce qui n'est pas forcément possible sur $I$ tout entier, et il est important que $I$ reste un intervalle.

**Exemple** On cherche les solutions réelles sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation $xy' + y = x^2$ avec la condition initiale $y(1) = 0$.

**Démonstration**

- **Équation homogène :** Divisons par $x$ pour obtenir une équation homogène de la forme $y' + a(x)\,y = 0$. Les solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation homogène $y' + \dfrac{y}{x} = 0$ sont toutes les fonctions $x \longmapsto \lambda\,\mathrm{e}^{-\ln x} = \dfrac{\lambda}{x}$, $\lambda$ décrivant $\mathbb{R}$, car la fonction logarithme est une primitive de la fonction inverse.

- **Solution particulière de l'équation** $y' + \dfrac{y}{x} = x$ **:** Cherchons-en une sous la forme $x \overset{y}{\longmapsto} \dfrac{\lambda(x)}{x}$ avec $\lambda \in \mathscr{C}^1\big(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}\big)$ — méthode de variation de la constante. Pour tout $x > 0$ :
$$y'(x) + \frac{y(x)}{x} = x \quad \iff \quad \frac{x\lambda'(x) - \lambda(x)}{x^2} + \frac{\lambda(x)}{x^2} = x \quad \iff \quad \lambda'(x) = x^2.$$
Attention de ne pas donner $\lambda$ comme solution particulière à la place de $y$ !
Par exemple, nous pouvons ainsi choisir pour $\lambda$ la fonction $x \longmapsto \dfrac{x^3}{3}$. La fonction $x \overset{y}{\longmapsto} \dfrac{x^2}{3}$ est alors solution de l'équation complète.
- **Conclusion :** Les solutions réelles de l'équation $xy' + y = x^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ sont finalement toutes les fonctions $x \longmapsto \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{\lambda}{x}$, $\lambda$ décrivant $\mathbb{R}$. L'unique solution qui s'annule en 1 est $x \longmapsto \dfrac{x^2}{3} - \dfrac{1}{3x} = \dfrac{x^3-1}{3x}$ pour $\lambda = -\dfrac{1}{3}$.

Sur une copie, vous n'êtes pas obligés de rédiger la méthode de la variation de la constante. Vous pouvez vous contenter de la mettre en œuvre au brouillon, puis vérifier sur votre copie que vous avez bien trouvé une solution particulière.

✖ **Attention !** Ne concluez surtout pas ainsi : « Les fonctions $x \longmapsto \ldots$ sont solutions de l'équation ... »,
ni ainsi : « Toutes les fonctions $x \longmapsto \ldots$ sont solutions de l'équation ... »,
ni ainsi : « Les fonctions $x \longmapsto \ldots$ sont toutes solutions de l'équation ... ».
Dans les trois cas, la phrase ne dit pas ce qu'elle doit dire, à savoir que nous avons trouvé **EXACTEMENT TOUTES** les solutions cherchées. Écrivez ceci et rien d'autre :

« Les solutions de l'équation ... sont (toutes) les fonctions $x \longmapsto \ldots$ »

## 1.3 Exemples de recollements

Nous avons résolu l'équation différentielle $xy' + y = x^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ seulement dans l'exemple précédent. Voyons maintenant comment on peut la résoudre sur $\mathbb{R}$ tout entier. Ce type de problème est appelé un *problème de recollement*.

**Exemple** On cherche les solutions réelles de l'équation $xy' + y = x^2$ sur $\mathbb{R}$ tout entier.

**Démonstration**

- **Résolution sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$ :** Comme on l'a vu, les solutions de l'équation sur $\mathbb{R}_+^*$ sont toutes les fonctions $x \longmapsto \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{\lambda}{x}$, $\lambda$ décrivant $\mathbb{R}$, et on aurait trouvé les mêmes solutions exactement sur $\mathbb{R}_-^*$.
- **Résolution sur $\mathbb{R}$ :** Soit $y \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Si $y$ est solution de l'équation sur $\mathbb{R}$, elle l'est en particulier sur $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$, donc il existe **DEUX** réels $\lambda$ et $\mu$ pour lesquels pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ :
$$y(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{\lambda}{x} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{\mu}{x} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$
Le point important, c'est qu'on est obligé d'introduire **DEUX** constantes !
Par ailleurs, si $y$ est solution sur $\mathbb{R}$, $y(0) = 0$ par simple substitution dans l'équation. En résumé, si $y$ est solution sur $\mathbb{R}$, nous la connaissons parfaitement, mais la fonction obtenue est-elle bien solution, réciproquement ? Eh bien oui... du moins si elle est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Mais quelle régularité a-t-elle en 0 ? Avec les notations précédentes, $y$ n'est continue en 0 que si $\lambda = \mu = 0$. Le cas échéant, $y$ est la fonction $x \longmapsto \dfrac{x^2}{3}$ sur $\mathbb{R}$ tout entier et elle est bien de classe $\mathscr{C}^1$.
- **Conclusion :** L'équation $xy' + y = x^2$ possède une et une seule solution sur $\mathbb{R}$. L'ensemble de ses solutions est donc un singleton, i.e. un sous-espace affine de $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ de dimension 0. C'est surprenant au premier abord, car sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$, l'ensemble des solutions est une droite affine, donc de dimension 1. Dans cet exemple, le recollement en 0 a occasionné la perte d'une dimension.

**Exemple** On cherche les solutions réelles de l'équation $xy' - 2y = x^3$ sur $\mathbb{R}$ tout entier.

**Démonstration**

- **Résolution sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$ :** Soit $I \in \big\{\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}_-^*\big\}$. Les solutions sur $I$ de l'équation homogène $y' - \dfrac{2y}{x} = 0$ sont toutes les fonctions $x \longmapsto \lambda\, e^{2\ln|x|} = \lambda\,|x|^2 = \lambda x^2$, $\lambda$ décrivant $\mathbb{R}$, car $x \longmapsto -2\ln|x|$ y est une primitive de $x \longmapsto -\dfrac{2}{x}$. En faisant varier la constante, on montre ensuite que la fonction $x \longmapsto x^3$ est solution sur $I$ de l'équation $xy' - 2y = x^3$. Les solutions de cette équation sur $I$ sont finalement toutes les fonctions $x \longmapsto x^3 + \lambda x^2$, $\lambda$ décrivant $\mathbb{R}$.

- **Résolution sur $\mathbb{R}$ :** Soit $y \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Si $y$ est solution de l'équation sur $\mathbb{R}$, elle l'est en particulier sur $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$, donc il existe DEUX réels $\lambda$ et $\mu$ pour lesquels pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ :
$$y(x) = \begin{cases} x^3 + \lambda x^2 & \text{si } x < 0 \\ x^3 + \mu x^2 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$
Par ailleurs, si $y$ est solution sur $\mathbb{R}$, $y(0) = 0$ par simple substitution dans l'équation. Réciproquement, la fonction obtenue est-elle bien solution ? Il lui suffit pour cela d'être de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et le seul problème éventuel se situe en 0. Or $y$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et continue en 0, et par ailleurs :
$$y'(x) = 3x^2 + 2\lambda x \underset{x\to 0^-}{\longrightarrow} 0 \qquad \text{et} \qquad y'(x) = 3x^2 + 2\mu x \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0, \qquad \text{donc } \lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} y'(x) = 0.$$
Comme voulu, $y$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ tout entier d'après la version $\mathscr{C}^1$ du théorème de la limite de la dérivée.
- **Conclusion :** Notons $f$ et $g$ les fonctions définies pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :
$$f(x) = x^2\,\mathbb{1}_{\mathbb{R}_-}(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 0 & \text{si } x > 0 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad g(x) = x^2\,\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$
Ces deux fonctions sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ tout entier et l'ensemble des solutions de l'équation $xy' + y = x^2$ sur $\mathbb{R}$ vaut $\left\{x \longmapsto x^2 + \lambda f(x) + \mu g(x) \mid \quad \lambda,\mu \in \mathbb{R}\right\} = \left(x \longmapsto x^2\right) + \mathrm{Vect}(f,g)$. Il n'est par ailleurs par difficile de montrer que la famille $(f,g)$ est libre. Notre équation possède ainsi un plan affine de solutions sur $\mathbb{R}$. Dans cet exemple, le recollement en 0 a occasionné le gain d'une dimension.

Alors qu'une équation différentielle linéaire du premier ordre $y' + a(x)y = f(x)$ admet une droite affine pour ensemble de solutions, nous venons de voir que les équations plus générales $a(x)\,y' + b(x)\,y = f(x)$ peuvent avoir pour ensemble de solutions un singleton ou un plan affine, mais sur d'autres exemples, on aurait pu obtenir l'ensemble vide ou bien des sous-espaces affines de toute dimension, y compris de dimension infinie. Bref, ça dépend.

# 2 Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

## 2.1 Équations homogènes

En pratique, ce sont plutôt les solutions réelles des équations différentielles qui nous intéressent, mais nous commencerons ici par le cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ car c'est lui le cas théorique fondamental, celui dont la preuve est naturelle.

**Théorème (Équations homogènes $y'' + ay' + by = 0$ pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$)**

Soient $a, b \in \mathbb{C}$.

On appelle *polynôme caractéristique* de l'équation $y'' + ay' + by = 0$ le polynôme $X^2 + aX + b$.

Ci-contre, $\lambda$, $\lambda'$ et $\mu$ décrivent $\mathbb{C}$.

| Discriminant $\Delta$ de $X^2 + aX + b$ | Racines de $X^2 + aX + b$ | Forme des solutions |
|---|---|---|
| $\Delta \neq 0$ | $r$ et $r'$ | $x \longmapsto \lambda\,\mathrm{e}^{rx} + \lambda'\,\mathrm{e}^{r'x}$ |
| $\Delta = 0$ | $r$ | $x \longmapsto (\lambda x + \mu)\,\mathrm{e}^{rx}$ |

En d'autres termes, si on note $S$ l'ensemble des solutions de l'équation homogène $y'' + ay' + by = 0$, alors :
$$S = \mathrm{Vect}\Big(x \longmapsto \mathrm{e}^{rx},\ x \longmapsto \mathrm{e}^{r'x}\Big) \text{ si } \Delta \neq 0 \qquad \text{et} \qquad S = \mathrm{Vect}\Big(x \longmapsto \mathrm{e}^{rx},\ x \longmapsto x\,\mathrm{e}^{rx}\Big) \text{ si } \Delta = 0.$$

Quel que soit $\Delta$, $S$ est un plan vectoriel. On vérifie en effet aisément que les familles génératrices obtenues sont libres.

**Démonstration** Mais d'où sort le polynôme caractéristique ? Et pourquoi l'exponentielle joue-t-elle un rôle si particulier ? Pour tout $r \in \mathbb{C}$ :
$$\begin{aligned} x \longmapsto \mathrm{e}^{rx} \text{ est solution de l'équation } y'' + ay' + by = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R},\quad \left(r^2 + ar + b\right)\mathrm{e}^{rx} = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad r^2 + ar + b = 0. \end{aligned}$$
À présent, notons $r$ et $r'$ les racines éventuellement égales du polynôme $X^2 + aX + b$, pour lesquelles $r + r' = -a$. La fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{rx}$ est solution de l'équation $y'' + ay' + by = 0$, mais c'est le cas plus généralement de la

fonction $x \longmapsto \lambda\,\mathrm{e}^{rx}$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$. Et si on faisait « varier la constante » pour résoudre l'équation ? Vous allez voir, ça marche. Cherchons donc nos solutions sous la forme $x \overset{y}{\longmapsto} z(x)\,\mathrm{e}^{rx}$ avec $z \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$.

$$\begin{aligned} y''+ay'+by=0 \quad &\iff \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \Big(z''(x)+2rz'(x)+r^2z(x)\Big)\mathrm{e}^{rx}+a\Big(z'(x)+rz(x)\Big)\mathrm{e}^{rx}+bz(x)\,\mathrm{e}^{rx}=0 \\ &\iff \quad z''+(2r+a)z'+\big(r^2+ar+b\big)z=0 \quad \iff \quad (z')'+(2r+a)z'=0 \\ &\iff \quad \exists\,\lambda \in \mathbb{C}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad z'(x)=\lambda\,\mathrm{e}^{-(2r+a)x}. \end{aligned}$$

Le point important de ce calcul, c'est qu'en faisant « varier la constante », on a abaissé d'une unité l'ordre de l'équation différentielle étudiée, on est passé d'une équation du second ordre à une équation du premier ordre.

Il ne nous reste maintenant plus qu'à primitiver la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{-(2r+a)x}$, mais cela nous oblige à distinguer deux cas selon que $2r+a$ est nul ou non. Cela dit : $\quad 2r+a=0 \quad \iff \quad r=-\dfrac{a}{2} \quad \iff \quad \Delta=0.$

- **Cas où $\Delta \neq 0$ :**

$$\begin{aligned} y''+ay'+by=0 \quad &\iff \quad \exists\,\lambda,\mu \in \mathbb{C}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad z(x)=-\frac{\lambda\,\mathrm{e}^{-(2r+a)x}}{2r+a}+\mu \\ &\iff \quad \exists\,\lambda,\mu \in \mathbb{C}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad z(x)=\lambda\,\mathrm{e}^{-(2r+a)x}+\mu \qquad \text{quitte à changer } \lambda \\ &\iff \quad \exists\,\lambda,\mu \in \mathbb{C}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad y(x)=z(x)\,\mathrm{e}^{rx}=\lambda\,\mathrm{e}^{-(r+a)x}+\mu\,\mathrm{e}^{rx} \\ &\iff \quad \exists\,\lambda,\mu \in \mathbb{C}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad y(x)=\lambda\,\mathrm{e}^{r'x}+\mu\,\mathrm{e}^{rx}. \end{aligned}$$

- **Cas où $\Delta = 0$ :** Cette fois, $r=-\dfrac{a}{2}$ est l'unique racine de $X^2+aX+b$.

$$\begin{aligned} y''+ay'+by=0 \quad &\iff \quad \exists\,\lambda \in \mathbb{C}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad z'(x)=\lambda \\ &\iff \quad \exists\,\lambda,\mu \in \mathbb{C}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad z(x)=\lambda x+\mu \\ &\iff \quad \exists\,\lambda,\mu \in \mathbb{C}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad y(x)=z(x)\,\mathrm{e}^{rx}=(\lambda x+\mu)\,\mathrm{e}^{rx}. \end{aligned}$$

**Théorème (Équations homogènes $y''+ay'+by=0$ pour $\mathbb{K}=\mathbb{R}$)**

Soient $a,b \in \mathbb{R}$.

On appelle *polynôme caractéristique* de l'équation $y''+ay'+by=0$ le polynôme $X^2+aX+b$.

Ci-contre, $\lambda$, $\lambda'$ et $\mu$ décrivent $\mathbb{R}$.

| Discriminant $\Delta$ de $X^2+aX+b$ | Racines de $X^2+aX+b$ | Forme des solutions |
|---|---|---|
| $\Delta>0$ | $r$ et $r'$ | $x \longmapsto \lambda\,\mathrm{e}^{rx}+\lambda'\,\mathrm{e}^{r'x}$ |
| $\Delta=0$ | $r$ | $x \longmapsto (\lambda x+\mu)\,\mathrm{e}^{rx}$ |
| $\Delta<0$ | $r \pm \mathrm{i}\omega$ | $x \longmapsto \mathrm{e}^{rx}\Big(\lambda\cos(\omega x)+\mu\sin(\omega x)\Big)$ |

Dans le cas où $\Delta<0$, les physicien(ne)s privilégient généralement d'autres formes équivalentes des solutions :

$$x \longmapsto \lambda\,\mathrm{e}^{rx}\cos(\omega x+\varphi) \qquad \text{et} \qquad x \longmapsto \lambda\,\mathrm{e}^{rx}\sin(\omega x+\varphi).$$

En d'autres termes, si on note $S$ l'ensemble des solutions de l'équation homogène $y''+ay'+by=0$, alors :

$$S=\mathrm{Vect}\Big(x \longmapsto \mathrm{e}^{rx}, x \longmapsto \mathrm{e}^{r'x}\Big) \text{ si } \Delta>0, \qquad S=\mathrm{Vect}\Big(x \longmapsto \mathrm{e}^{rx}, x \longmapsto x\,\mathrm{e}^{rx}\Big) \text{ si } \Delta=0$$

$$\text{et} \qquad S=\mathrm{Vect}\Big(x \longmapsto \mathrm{e}^{rx}\cos(\omega x), x \longmapsto \mathrm{e}^{rx}\sin(\omega x)\Big) \text{ si } \Delta<0.$$

Quel que soit $\Delta$, $S$ est un plan vectoriel. On vérifie en effet aisément que les familles génératrices obtenues sont libres.

**Démonstration** Traitons seulement le cas $\Delta<0$ — le plus compliqué et le plus intéressant. Les racines de $X^2+aX+b$ y sont complexes conjuguées de la forme $r \pm \mathrm{i}\omega$ avec $\omega \neq 0$.

Soit $y$ une solution **COMPLEXE** de l'équation $y''+ay'+by=0$. D'après le théorème précédent, $y$ est de la forme $x \longmapsto \alpha\,\mathrm{e}^{rx+\mathrm{i}\omega x}+\beta\,\mathrm{e}^{rx-\mathrm{i}\omega x}=\mathrm{e}^{rx}\left(\alpha\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}+\beta\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\right)$ pour certains $\alpha,\beta \in \mathbb{C}$. À quelle condition nécessaire et suffisante $y$ est-elle **RÉELLE** ? En tout cas, si elle l'est, alors $\mathrm{Im}\big(y(0)\big)=\mathrm{Im}\left(y\left(\dfrac{\pi}{2\omega}\right)\right)=0$, or :

— $\mathrm{Im}\big(y(0)\big)=\mathrm{Im}(\alpha+\beta)$, donc $\mathrm{Im}(\beta)=-\mathrm{Im}(\alpha)$,

— $\mathrm{Im}\left(y\left(\dfrac{\pi}{2\omega}\right)\right)=\mathrm{Im}\Big(\mathrm{i}(\alpha-\beta)\,\mathrm{e}^{\frac{\pi r}{2\omega}}\Big)=\mathrm{Im}\Big(\mathrm{i}(\alpha-\beta)\Big)\,\mathrm{e}^{\frac{\pi r}{2\omega}}=\mathrm{Re}(\alpha-\beta)\,\mathrm{e}^{\frac{\pi r}{2\omega}}$, donc $\mathrm{Re}(\beta)=\mathrm{Re}(\alpha)$.

Bref, si $y$ est réelle, alors $\beta=\overline{\alpha}$. Posons dans ce cas $\lambda=2\,\mathrm{Re}(\alpha)$ et $\mu=-2\,\mathrm{Im}(\alpha)$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} y(x) &= \mathrm{e}^{rx}\left(\alpha\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}+\overline{\alpha}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\right)=2\,\mathrm{e}^{rx}\mathrm{Re}\Big(\alpha\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}\Big)=\mathrm{e}^{rx}\Big(2\,\mathrm{Re}(\alpha)\cos(\omega x)-2\,\mathrm{Im}(\alpha)\sin(\omega x)\Big) \\ &= \mathrm{e}^{rx}\Big(\lambda\cos(\omega x)+\mu\sin(\omega x)\Big). \qquad \text{Réciproquement, cette fonction est bien réelle.} \end{aligned}$$

Les formes $x \longmapsto \lambda\,\mathrm{e}^{rx}\cos(\omega x+\varphi)$ et $x \longmapsto \lambda\,\mathrm{e}^{rx}\sin(\omega x+\varphi)$ s'en déduisent aisément grâce à une technique du chapitre « Nombres complexes et trigonométrie ».

**Exemple**

- Les solutions réelles de l'équation $y''-3y'+2y=0$ sont toutes les fonctions $x\longmapsto \lambda\,\mathrm{e}^x+\mu\,\mathrm{e}^{2x}$, $\lambda$ et $\mu$ décrivant $\mathbb{R}$, car le polynôme $X^2-3X+2$ possède deux racines réelles distinctes, 1 et 2.
- Les solutions réelles de l'équation $y''-2y'+y=0$ sont toutes les fonctions $x\longmapsto (\lambda x+\mu)\,\mathrm{e}^x$, $\lambda$ et $\mu$ décrivant $\mathbb{R}$, car le polynôme $X^2-2X+1$ admet 1 pour unique racine.
- Les solutions réelles de l'équation $y''+4y=0$ sont toutes les fonctions $x\longmapsto \lambda\cos(2x)+\mu\sin(2x)$, $\lambda$ et $\mu$ décrivant $\mathbb{R}$, car le polynôme $X^2+4$ possède deux racines complexes conjuguées, $2\mathrm{i}$ et $-2\mathrm{i}$.
- Les solutions réelles de l'équation $y''+2y'+10y=0$ sont toutes les fonctions $x\longmapsto \mathrm{e}^{-x}\big(\lambda\cos(3x)+\mu\sin(3x)\big)$, $\lambda$ et $\mu$ décrivant $\mathbb{R}$, car le polynôme $X^2+2X+10$ possède deux racines complexes conjuguées, $-1+3\mathrm{i}$ et $-1-3\mathrm{i}$.

## 2.2 Équations complètes

Le théorème qui suit est moralement satisfaisant et sa preuve est constructive, mais le programme de MPSI ne vous demande pas de savoir résoudre seuls les équations complètes $y''+ay'+by=f(x)$ en général.

**Théorème (Équations complètes $y''+ay'+by=f(x)$, problème de Cauchy)** Soient $a,b\in\mathbb{K}$ et $f\in\mathscr{C}(I,\mathbb{K})$.

- **Ensemble des solutions :** L'ensemble des solutions de l'équation complète $y''+ay'+by=f(x)$ d'inconnue $y\in\mathscr{C}^2(I,\mathbb{K})$ est un plan affine.
- **Problème de Cauchy :** Pour tous $x_0\in I$ et $y_0,y_0'\in\mathbb{K}$, le système $\begin{cases} y''+ay'+by=f(x)\\ y(x_0)=y_0 \text{ et } y'(x_0)=y_0'\end{cases}$ est appelé un *problème de Cauchy* et possède une et une seule solution sur $I$.

**Démonstration** De nouveau, nous allons faire « varier la constante » pour résoudre l'équation. Donnons-nous une racine $r$ du polynôme $X^2+aX+b$. Soit $y\in\mathscr{C}^2(I,\mathbb{K})$. Notons $\lambda$ la fonction $x\longmapsto y(x)\,\mathrm{e}^{-rx}$, elle aussi de classe $\mathscr{C}^2$, puis $\mu$ sa dérivée $\lambda'$ de classe $\mathscr{C}^1$. Ainsi $y$ est la fonction $x\longmapsto\lambda(x)\,\mathrm{e}^{rx}$ et pour tout $x\in I$ :

$$\begin{aligned} y''(x)+ay'(x)+by(x) &= \Big(\lambda''(x)+2r\lambda'(x)+r^2\lambda(x)\Big)\mathrm{e}^{rx}+a\Big(\lambda'(x)+r\lambda(x)\Big)\mathrm{e}^{rx}+b\lambda(x)\,\mathrm{e}^{rx}\\ &= \Big(\lambda''(x)+(2r+a)\,\lambda'(x)+\big(\underbrace{r^2+ar+b}_{=0}\big)\,\lambda(x)\Big)\mathrm{e}^{rx} = \Big(\lambda''(x)+(2r+a)\,\lambda'(x)\Big)\mathrm{e}^{rx}\\ &= \Big(\mu'(x)+(2r+a)\,\mu(x)\Big)\mathrm{e}^{rx}.\end{aligned}$$

Ainsi, résoudre l'équation du **second** ordre $y''+ay'+by=f(x)$ d'inconnue $y$ revient à résoudre l'équation du **premier** ordre $\mu'+(2r+a)\,\mu=f(x)\,\mathrm{e}^{-rx}$ d'inconnue $\mu$. Le point important, c'est qu'en faisant « varier la constante », on a abaissé d'une unité l'ordre de l'équation différentielle étudiée. Ensuite :

$$\begin{cases} y(x_0)=y_0\\ y'(x_0)=y_0'\end{cases} \iff \begin{cases} \lambda(x_0)=y_0\,\mathrm{e}^{-rx_0}\\ \lambda'(x_0)+r\lambda(x_0)=y_0'\,\mathrm{e}^{-rx_0}\end{cases} \iff \begin{cases} \lambda(x_0)=y_0\,\mathrm{e}^{-rx_0}\\ \mu(x_0)=(y_0'-ry_0)\,\mathrm{e}^{-rx_0}.\end{cases}$$

Notons à présent $\mu_0$ l'unique solution sur $I$ du problème de Cauchy du premier ordre $\begin{cases} \mu'+(2r+a)\,\mu=f(x)\,\mathrm{e}^{-rx}\\ \mu(x_0)=(y_0'-ry_0)\,\mathrm{e}^{-rx_0},\end{cases}$ puis $\lambda_0$ l'unique primitive de $\mu_0$ pour laquelle $\lambda_0(x_0)=y_0\,\mathrm{e}^{-rx_0}$. Finalement :

$$\begin{cases} y''+ay'+by=f(x)\\ y(x_0)=y_0\\ y'(x_0)=y'0\end{cases} \iff \begin{cases} \mu'+(2r+a)\,\mu=f(x)\,\mathrm{e}^{-rx}\\ \lambda(x_0)=y_0\,\mathrm{e}^{-rx_0}\\ \mu(x_0)=(y_0'-ry_0)\,\mathrm{e}^{-rx_0}\end{cases} \iff \begin{cases} \lambda'=\mu=\mu_0\\ \lambda(x_0)=y_0\,\mathrm{e}^{-rx_0}\end{cases} \iff \lambda=\lambda_0.$$

Comme voulu, le problème de Cauchy étudié possède une et une seule solution.

# 3 Seconds membres polynômes-exponentielles

**Attention !** Les équations différentielles de ce dernier paragraphe sont toutes **à coefficients constants**.

Fixons $a,b,u\in\mathbb{K}$ et $P\in\mathbb{K}[X]$. Nous avons appris à résoudre les équations $y'+ay=P(x)\mathrm{e}^{ux}$ et $y''+ay'+by=P(x)\mathrm{e}^{ux}$ en faisant « varier la constante », mais c'est fastidieux, et pour ce type de second membre, une certaine propriété de stabilité peut nous faire gagner du temps. Pour tout $Q\in\mathbb{K}[X]$, si on note $y$ la fonction $x\longmapsto Q(x)\,\mathrm{e}^{ux}$, alors pour tout $x\in\mathbb{R}$ :

$$y'(x)+ay(x)=\Big(Q'(x)+(u+a)Q(x)\Big)\mathrm{e}^{ux} \qquad \text{et} \qquad y''(x)+ay'(x)+by(x)=\Big(Q''(x)+(2u+a)Q'(x)+\big(u^2+au+b\big)Q(x)\Big)\mathrm{e}^{ux}.$$

Première conclusion : l'ensemble $\left\{x \longmapsto Q(x)\,e^{ux} \;\middle|\; Q \in \mathbb{K}[X]\right\}$ est stable par les applications linéaires $y \longmapsto y' + ay$ et $y \longmapsto y'' + ay' + by$, mais allons plus loin. Peut-on choisir $Q$ pour que la fonction $x \longmapsto Q(x)\,e^{ux}$ soit solution de l'équation $y' + ay = P(x)\,e^{ux}$ ou de l'équation $y'' + ay' + by = P(x)\,e^{ux}$ ? Plus généralement, les endomorphismes $Q \longmapsto Q' + (u+a)Q$ et $Q \longmapsto Q'' + (2u+a)Q' + \left(u^2 + au + b\right)Q$ de $\mathbb{K}[X]$ sont-ils surjectifs ? Sans rentrer dans les détails, la réponse est oui.

Avec les notations précédentes :

$$\deg\left(Q' + (u+a)Q\right) = \begin{cases} \deg(Q) & \text{si } u + a \neq 0, \text{ i.e. si } u \text{ est de multiplicité } 0 \text{ dans } X + a \\ \deg(Q') & \text{si } u + a = 0, \text{ i.e. si } u \text{ est est de multiplicité } 1 \text{ dans } X + a \end{cases}$$

et de même :

$$\deg\left(Q''+(2u+a)Q'+\left(u^2+au+b\right)Q\right) = \begin{cases} \deg(Q) & \text{si } u^2 + au + b \neq 0, \text{ i.e. si } u \text{ est de multiplicité } 0 \text{ dans } X^2 + aX + b \\ \deg(Q') & \text{si } u^2 + au + b = 0 \text{ mais } 2u + a \neq 0, \text{ i.e. si u est de multiplicité } 1 \text{ dans } X^2 + aX + b \\ \deg(Q'') & \text{si } u^2 + au + b = 2u + a = 0, \text{ i.e. si } u \text{ est de multiplicité } 2 \text{ dans } X^2 + aX + b. \end{cases}$$

On retrouve ici au second ordre le polynôme caractéristique $X^2 + aX + b$ de l'équation $y'' + ay' + by = 0$, ainsi qu'un autre polynôme au premier ordre, $X + a$, qui mérite lui aussi d'être appelé le *polynôme caractéristique* de l'équation $y' + ay = 0$. En résumé, les polynômes $Q' + (u+a)Q$ et $Q'' + (2u+a)Q' + \left(u^2 + au + b\right)Q$ sont de même degré que $Q$ ou de degré inférieur selon la multiplicité de $u$ dans le polynôme caractéristique. Si on veut que ces polynômes soient égaux à un polynôme $P$ fixé, il faut chercher $Q$ de degré $\deg(P)$, $\deg(P) + 1$ ou $\deg(P) + 2$ selon la multiplicité de $u$ dans le polynôme caractéristique.

Pour un second membre $P(x)\,e^{ux}$, on cherche une solution particulière sous la forme $x \longmapsto Q(x)\,e^{ux}$ avec $\deg(Q) = \deg(P) + m$ où $m$ est la multiplicité de $u$ dans le polynôme caractéristique de l'équation homogène.

**Exemple** On cherche les solutions réelles de l'équation $y' + y = 3\,e^{-x} + (6x+5)\,e^{2x}$.

**Démonstration** L'équation est À COEFFICIENTS CONSTANTS de polynôme caractéristique $X + 1$.

- **Équation homogène :** Les solutions de l'équation $y' + y = 0$ sont toutes les fonctions $x \longmapsto \lambda\,e^{-x}$, $\lambda$ décrivant $\mathbb{R}$.
- **Solution particulière de l'équation** $y' + y = (6x+5)\,e^{2x}$ **:** Comme 2 est de multiplicité 0 dans $X + 1$, cherchons une solution sous la forme $x \overset{y}{\longmapsto} (ax+b)\,e^{2x}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ — même degré que le polynôme $6X + 5$ du second membre.

$$\begin{aligned} x \longmapsto (ax+b)\,e^{2x} \text{ est solution de } y' + y = (6x+5)\,e^{2x} &\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad (2ax + a + 2b)\,e^{2x} + (ax+b)\,e^{2x} = (6x+5)\,e^{x} \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad 3ax + a + 3b = 6x + 5 \\ &\iff 3a = 6 \quad \text{et} \quad a + 3b = 5 \\ &\qquad \text{car un certain polynôme a un nombre infini de racines} \\ &\iff a = 2 \quad \text{et} \quad b = 1. \end{aligned}$$

  La fonction $x \longmapsto (2x+1)\,e^{2x}$ convient.
- **Solution particulière de l'équation** $y' + y = 3\,e^{-x}$ **:** Comme $-1$ est de multiplicité 1 dans $X + 1$, cherchons une solution sous la forme $x \longmapsto (ax+b)\,e^{-x}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ — on ajoute 1 au degré du polynôme 3 du second membre.

$$\begin{aligned} x \longmapsto (ax+b)\,e^{-x} \text{ est solution de } y' + y = 3\,e^{-x} &\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad (-ax + a - b)\,e^{-x} + (ax+b)\,e^{-x} = 3\,e^{-x} \\ &\iff a = 3. \end{aligned}$$

  La fonction $x \longmapsto (3x+b)e^{-x}$ convient donc pour tout $b \in \mathbb{R}$. Il n'est pas surprenant qu'on n'obtienne aucune condition sur $b$ car les fonctions $x \longmapsto b\,e^{-x}$ sont solutions de l'équation homogène $y' + y = 0$. Sachant cela, on aurait pu chercher dès le début une solution particulière sous la forme tronquée $x \longmapsto ax\,e^{-x}$. Finalement, la fonction $x \longmapsto 3x\,e^{-x}$ est solution particulière de l'équation $y' + y = 3\,e^{-x}$.
- **Conclusion :** D'après ce qui précède et le principe de superposition, la fonction $x \longmapsto 3x\,e^{-x} + (2x+1)e^{2x}$ est solution de l'équation complète. Les solutions réelles de l'équation complète sont ainsi toutes les fonctions $x \longmapsto (3x + \lambda)\,e^{-x} + (2x+1)\,e^{2x}$, $\lambda$ décrivant $\mathbb{R}$.

Les idées qui précèdent permettent aussi de trouver rapidement une solution particulière quand le second membre est de la forme $P(x)\cos(ux)$ ou $P(x)\sin(ux)$. Les identités $\mathrm{Re}\left(f'\right) = \mathrm{Re}(f)'$ et $\mathrm{Im}\left(f'\right) = \mathrm{Im}(f)'$ montrent en effet que :

— si $f$ est solution de l'équation $y' + 2y = (3x+1)e^{ix}$, $\mathrm{Re}(f)$ est une solution RÉELLE de l'équation $y' + 2y = (3x+1)\cos x$,

— si $f$ est solution de l'équation $y'' - y = e^{(1+2i)x}$, $\mathrm{Im}(f)$ est une solution RÉELLE de l'équation $y'' - y = e^{x}\sin(2x)$.

En pratique, pour trouver une solution particulière RÉELLE de l'équation $y' + 2y = (3x+1)\cos x$, on commence par en chercher une COMPLEXE de l'équation $y' + 2y = (3x+1)\,e^{ix}$, dont on calcule ensuite la partie réelle.

**Exemple** Le tableau ci-dessous propose différents exemples de recherches de solution particulière.

| Second membre $P(x)\,\mathrm{e}^{ux}$, ou version $\cos/\sin$ | Polynôme caractéristique | Multiplicité de $u$ dans le polynôme caractéristique | Solution particulière $x \longmapsto Q(x)\,\mathrm{e}^{ux}$ |
|---|---|---|---|
| $y' + 2y = x^3 - x = \left(x^3 - x\right)\mathrm{e}^{0x}$ | $X + 2$ | 0 | $x \longmapsto ax^3 + bx^2 + cx + d$ |
| $y'' - 3y' + 2y = \mathrm{e}^{4x}$ | $X^2 - 3X + 2$ | 0 | $x \longmapsto a\,\mathrm{e}^{4x}$ |
| $y'' - 3y' + 2y = (x+2)\,\mathrm{e}^{x}$ | $X^2 - 3X + 2$ | 1 | $x \longmapsto \left(ax^2 + bx + c\right)\mathrm{e}^{x}$, et même $x \longmapsto \left(ax^2 + bx\right)\mathrm{e}^{x}$ ♣ |
| $y'' - 4y = \left(x^2 + 1\right) = \left(x^2 + 1\right)\mathrm{e}^{0x}$ | $X^2 - 4$ | 0 | $x \longmapsto x^2 + bx + c$ |
| $y'' - 2y' + y = x\,\mathrm{e}^{x}$ | $X^2 - 2X + 1$ | 2 | $x \longmapsto \left(ax^3 + bx^2 + cx + d\right)\mathrm{e}^{x}$, et même $x \longmapsto \left(ax^3 + bx^2\right)\mathrm{e}^{x}$ ♠ |
| $y' + y = 3\,\mathrm{e}^{2x}\cos x$ | $X + 1$ | 0 | $x \longmapsto a\,\mathrm{e}^{(2+\mathrm{i})x}$, puis partie réelle |
| $y'' + 4y = 3\sin(2x)$ | $X^2 + 4$ | 1 | $x \longmapsto (ax+b)\,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}$, puis partie imaginaire |

♣ Les solutions de l'équation homogène $y'' - 3y' + y = 0$ sont les fonctions $x \longmapsto \lambda\,\mathrm{e}^{x} + \mu\,\mathrm{e}^{2x}$, $\lambda$ et $\mu$ décrivant $\mathbb{R}$, et les solutions de l'équation complète sont les fonctions $x \longmapsto \lambda\,\mathrm{e}^{x} + \mu\,\mathrm{e}^{2x} +$ « une solution particulière ». Il ne sert donc à rien d'inclure un terme $c\,\mathrm{e}^{x}$ dans la solution particulière cherchée, toute valeur de $c$ convient.

♠ Les solutions de l'équation homogène $y'' - 2y' + y = 0$ sont les fonctions $x \longmapsto (\lambda x + \mu)\,\mathrm{e}^{x}$, $\lambda$ et $\mu$ décrivant $\mathbb{R}$, et les solutions de l'équation complète sont les fonctions $x \longmapsto (\lambda x + \mu)\,\mathrm{e}^{x} +$ « une solution particulière ». Il ne sert donc à rien d'inclure un terme $(cx + d)\,\mathrm{e}^{x}$ dans la solution particulière cherchée, toute valeur de $c$ convient.

**Exemple** On cherche les solutions réelles de l'équation $y'' - y = 2\cos x + \mathrm{e}^{x}$ avec les conditions initiales $y(0) = -1$ et $y'(0) = 0$.

**Démonstration**

- **Équation homogène :** Les solutions de l'équation $y'' - y = 0$ sont toutes les fonctions $x \longmapsto \lambda\,\mathrm{e}^{x} + \mu\,\mathrm{e}^{-x}$, $\lambda$ et $\mu$ décrivant $\mathbb{R}$, car le polynôme $X^2 - 1$ possède deux racines réelles distinctes, $-1$ et $1$.
- **Solution particulière de l'équation $y'' - y = 2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$ :** Comme $\mathrm{i}$ est de multiplicité 0 dans $X^2 - 1$, cherchons une solution sous la forme $x \longmapsto a\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$ avec $a \in \mathbb{C}$. Attention !
$$x \longmapsto a\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} \text{ est solution de } y'' - y = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} \iff \forall x \in \mathbb{R},\quad -a\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - a\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = 2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} \iff a = -1.$$
La fonction $x \longmapsto -\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$ convient.
- **Solution particulière de l'équation $y'' - y = 2\cos x$ :** La fonction $x \longmapsto \mathrm{Re}\left(-\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\right) = -\cos x$ convient.
- **Solution particulière de l'équation $y'' - y = \mathrm{e}^{x}$ :** Comme 1 est de multiplicité 1 dans $X^2 - 1$, cherchons une solution sous la forme $x \longmapsto ax\,\mathrm{e}^{x}$ avec $a \in \mathbb{R}$.
$$x \longmapsto ax\,\mathrm{e}^{x} \text{ est solution de } y'' - y = \mathrm{e}^{x} \iff \forall x \in \mathbb{R},\quad \left(ax\,\mathrm{e}^{x} + 2a\,\mathrm{e}^{x}\right) - ax\,\mathrm{e}^{x} = \mathrm{e}^{x} \iff a = \frac{1}{2}.$$
La fonction $x \longmapsto \frac{x}{2}\,\mathrm{e}^{x}$ convient.
- **Conclusion :** D'après ce qui précède et le principe de superposition, la fonction $x \longmapsto \frac{x}{2}\,\mathrm{e}^{x} - \cos x$ est solution de l'équation complète. Les solutions réelles de l'équation complète sont ainsi toutes les fonctions $x \longmapsto \left(\frac{x}{2} + \lambda\right)\mathrm{e}^{x} + \mu\,\mathrm{e}^{-x} - \cos x$, $\lambda$ et $\mu$ décrivant $\mathbb{R}$. Les conditions initiales $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$ imposent après calcul les relations $\lambda + \mu = 0$ et $\lambda - \mu = -\frac{1}{2}$, donc $\lambda = -\frac{1}{4}$ et $\mu = \frac{1}{4}$. L'unique solution du problème de Cauchy étudié est finalement la fonction $x \longmapsto \frac{1}{4}\left((2x-1)\,\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}\right) - \cos x$.