Fonctions circulaires

Définition **(Relations de congruence, ensembles $\alpha\mathbb{Z}+\beta$)** Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

- Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on dit que x *est congru à* y *modulo* α, ce qu'on note : $x \equiv y\ [\alpha]$, si : $x = y + k\alpha$ pour un certain $k \in \mathbb{Z}$.
- L'ensemble $\left\{x \in \mathbb{R}/ \quad x \equiv \beta\ [\alpha]\right\} = \left\{\beta + k\alpha\right\}_{k\in\mathbb{Z}}$ est généralement noté $\alpha\mathbb{Z}+\beta$ ou $\beta+\alpha\mathbb{Z}$.

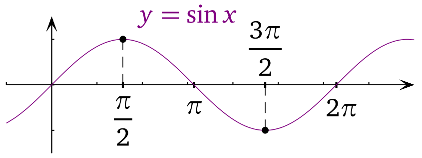
Exemple

- Être pair c'est être congru à 0 modulo 2, tandis qu'être impair c'est être congru à 1 modulo 2 : $6 \equiv 0\ [2]$ et $15 \equiv 1\ [2]$. L'ensemble des entiers pairs est donc $2\mathbb{Z}$ tandis que l'ensemble des entiers impairs est $2\mathbb{Z}+1$.
- Comme vous le savez, les mesures d'angles orientés sont définies modulo 2π : $11\pi \equiv \pi\ [2\pi]$ et $-\dfrac{\pi}{2} \equiv \dfrac{3\pi}{2}\ [2\pi]$.
- On peut généraliser la notation « $\alpha\mathbb{Z}+\beta$ ». Par exemple, $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[+ \pi\mathbb{Z}$ est l'ensemble des réels de la forme : $x + k\pi$ avec $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ et $k \in \mathbb{Z}$ quelconques. Ici, il s'agit aussi de l'ensemble $\mathbb{R} \setminus \left(\dfrac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$.

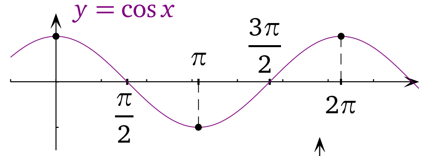
1 Fonctions sin, cos et tan

Définition-théorème **(Fonctions sinus et cosinus, lien avec le cercle trigonométrique)**

- Les fonctions sinus et cosinus sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodiques. La fonction sinus est impaire, la fonction cosinus paire et en outre :

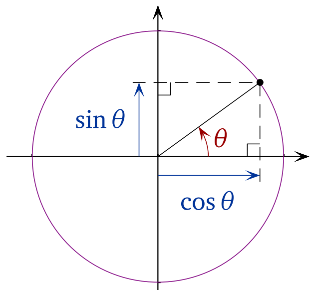


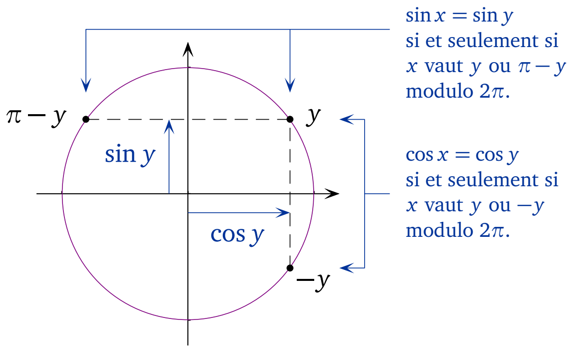
$$\sin' = \cos \quad \text{et} \quad \cos' = -\sin.$$



- **Lien avec le cercle trigonométrique :** Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

  Réciproquement, pour tout couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ pour lequel : $x^2 + y^2 = 1$, il existe un réel θ, unique modulo 2π, pour lequel : $(x, y) = (\cos\theta, \sin\theta)$. Géométriquement, ce résultat signifie que tout point du cercle trigonométrique a des coordonnées de la forme $(\cos\theta, \sin\theta)$.





- **Résolution d'équations :** Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \sin x = \sin y & \iff \quad x \equiv y\ [2\pi] \quad \text{ou} \quad x \equiv \pi - y\ [2\pi] \\ \cos x = \cos y & \iff \quad x \equiv y\ [2\pi] \quad \text{ou} \quad x \equiv -y\ [2\pi]. \end{cases}$$

  Ces résultats se lisent sur le cercle trigonométrique, comme l'explique la figure ci-contre.

- **Transformations affines :** Les relations suivantes se lisent toutes sur le cercle trigonométrique. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$\sin(x+\pi) = -\sin x$	$\sin(\pi - x) = \sin x$	$\sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) = \cos x$	$\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$
$\cos(x+\pi) = -\cos x$	$\cos(\pi - x) = -\cos x$	$\cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) = -\sin x$	$\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$

En pratique D'après les relations : $\sin(x+\pi) = -\sin x$ et $\cos(x+\pi) = -\cos x$, ajouter π dans un sinus ou un cosinus revient à le multiplier par -1, donc a fortiori, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, ajouter $k\pi = \underbrace{\pi + \ldots + \pi}_{k \text{ fois}}$ revient à multiplier par $\underbrace{(-1) \times \ldots \times (-1)}_{k \text{ fois}} = (-1)^k$, et c'est même encore vrai pour $k \in \mathbb{Z}$. En d'autres termes, pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{Z}$:

$$\sin(x+k\pi) = (-1)^k \sin x \quad \text{et} \quad \cos(x+k\pi) = (-1)^k \cos x, \qquad \text{et en particulier :} \quad \sin(k\pi) = 0 \quad \text{et} \quad \cos(k\pi) = (-1)^k.$$

Attention ! $\boxed{\text{Pour tous } x, y \in \mathbb{R} : \quad \sin x = \sin y \quad \cancel{\Longleftrightarrow} \quad x = y}$ — erreur **gravissime** !

L'erreur suivante est à peine meilleure : $\boxed{\text{Pour tous } x, y \in \mathbb{R} : \quad \sin x = \sin y \quad \cancel{\Longleftrightarrow} \quad x \equiv y\ [2\pi]}$ et la remarque vaut pour le cosinus.

Exemple Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\quad \sin x = \cos x \iff x \equiv \dfrac{\pi}{4}\ [\pi].$

Démonstration $\sin x = \cos x \iff \sin x = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$

$$\iff x \equiv \frac{\pi}{2} - x\ [2\pi] \quad \text{ou} \quad x \equiv \pi - \left(\frac{\pi}{2} - x\right)\ [2\pi] \iff 2x \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi] \quad \text{ou} \quad \underbrace{0 \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]}_{\text{Impossible}} \iff x \equiv \frac{\pi}{4}\ [\pi].$$

Théorème (Fonctions sinus et cosinus, formules d'addition et de produit) Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \qquad \sin x \sin y = \frac{1}{2}\Big(\cos(x-y) - \cos(x+y)\Big)$$

$$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y \qquad \sin x \cos y = \frac{1}{2}\Big(\sin(x+y) + \sin(x-y)\Big)$$

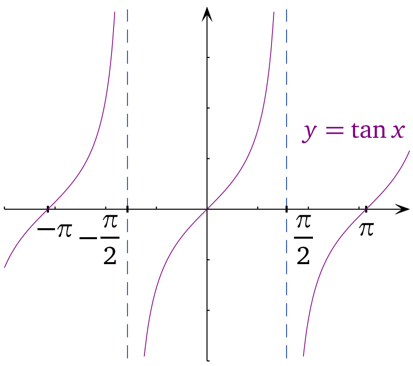
$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \qquad \cos x \cos y = \frac{1}{2}\Big(\cos(x+y) + \cos(x-y)\Big)$$

$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

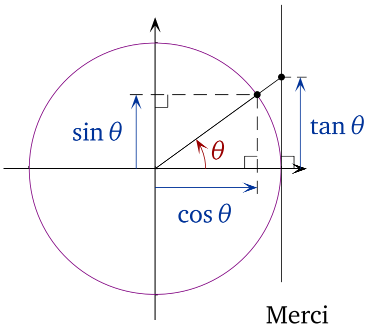
Pour $x = y$, ces relations s'appellent *formules de duplication* : $\quad \sin^2 x = \dfrac{1-\cos(2x)}{2}, \qquad \cos^2 x = \dfrac{1+\cos(2x)}{2},$

$$\sin(2x) = 2\cos x \sin x \qquad \text{et} \qquad \cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x.$$

Définition-théorème (Fonction tangente)



- On appelle *fonction tangente* la fonction définie sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[+ \pi\mathbb{Z}$ par la relation :
$$\tan = \frac{\sin}{\cos}.$$
Elle est dérivable sur son ensemble de définition, π-périodique et impaire, et :
$$\tan' = 1 + \tan^2 = \frac{1}{\cos^2}.$$



Merci
le théorème de Thalès !

Les formules suivantes sont vraies pour toutes les valeurs de x et y pour lesquelles chaque terme est bien défini.

- **Résolution d'équations :** $\quad \tan x = \tan y \iff x \equiv y\ [\pi].$
- **Formules d'addition et de duplication :**

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}, \qquad \tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y} \qquad \text{et} \qquad \tan(2x) = \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}.$$

Démonstration

- **Définition :** La tangente est définie là où le cosinus ne s'annule pas, i.e. sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[+ \pi\mathbb{Z}$ car pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\cos x = 0 \iff x \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$ ou $x \equiv -\frac{\pi}{2}\,[2\pi] \iff x \equiv \frac{\pi}{2}\,[\pi]$.
- **Imparité :** Pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[+ \pi\mathbb{Z}$: $\tan(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x$.
- **Périodicité :** Pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[+ \pi\mathbb{Z}$: $\tan(x+\pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{-\sin x}{-\cos x} = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$. On comprend ici pourquoi tangente est π-périodique alors que sinus et cosinus ne sont que 2π-périodiques, deux signes « $-$ » se simplifient !
- **Dérivée :** $\tan' = \frac{\sin' \times \cos - \sin \times \cos'}{\cos^2} = \frac{\cos^2 + \sin^2}{\cos^2}$, donc : $\tan' = \frac{1}{\cos^2} = 1 + \tan^2$.
- **Variations et limites :** Par imparité et π-périodicité, une étude sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ suffit. La fonction tangente est strictement croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ car : $\tan' = 1 + \tan^2 > 0$. En outre : $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \sin x = 1$ et $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \cos x = 0^+$, donc : $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty$.
- **Équation « $\tan x = \tan y$ » :** $\tan x = \tan y \iff \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sin y}{\cos y} \iff \sin x \cos y - \cos x \sin y = 0$
$$\iff \sin(x-y) = 0 \iff x - y \equiv 0\,[\pi] \iff x \equiv y\,[\pi].$$
- **Formule « $\tan(x+y) = \ldots$ » :**

$$\tan(x+y) = \frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)} = \frac{\sin x \cos y + \cos x \sin y}{\cos x \cos y - \sin x \sin y} = \frac{\cos x \cos y \left(\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin y}{\cos y}\right)}{\cos x \cos y \left(1 - \frac{\sin x}{\cos x} \times \frac{\sin y}{\cos y}\right)} = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}.$$ ■

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$\times$

Les valeurs remarquables du sinus, du cosinus et de la tangente doivent être connues **PAR CŒUR** !

Théorème (Transformation des expressions $a\cos\theta + b\sin\theta$) Soient a et b deux réels. Il existe deux réels φ et ψ pour lesquels :
$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \qquad a\cos\theta + b\sin\theta = \sqrt{a^2+b^2}\,\cos(\theta+\varphi) = \sqrt{a^2+b^2}\,\sin(\theta+\psi).$$
ATTENTION : φ et ψ dépendent de a et b, mais pas de θ.

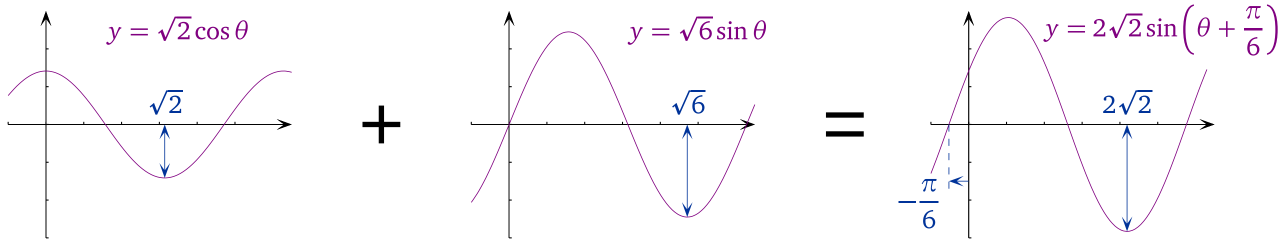
Démonstration Si : $a = b = 0$, le résultat est trivial, toute valeur de φ et ψ convient. Nous pouvons donc supposer : $(a,b) \neq (0,0)$, i.e. : $a^2 + b^2 \neq 0$.

- **Existence de φ :** Posons : $x = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $y = -\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Comme : $x^2 + y^2 = 1$, on peut écrire (x,y) sous la forme $(\cos\varphi, \sin\varphi)$ pour un certain $\varphi \in \mathbb{R}$. Du coup, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$:
$$a\cos\theta + b\sin\theta = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\theta + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\theta\right) = \sqrt{a^2+b^2}\big(x\cos\theta - y\sin\theta\big)$$
$$= \sqrt{a^2+b^2}\big(\cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi\big) = \sqrt{a^2+b^2}\,\cos(\theta+\varphi).$$
- **Existence de ψ :** Posons : $x = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $y = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Comme : $x^2 + y^2 = 1$, on peut écrire (x,y) sous la forme $(\cos\psi, \sin\psi)$ pour un certain $\psi \in \mathbb{R}$ et on conclut comme avec φ. ■

Exemple Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$: $\sqrt{2}\cos\theta + \sqrt{6}\sin\theta = 2\sqrt{2}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)$. Interprétation physique : la somme des signaux sinusoïdaux $\theta \longmapsto \sqrt{2}\cos\theta$ et $\theta \longmapsto \sqrt{6}\sin\theta$ est encore un signal sinusoïdal, de nouvelle amplitude $2\sqrt{2}$ et déphasé de $\frac{\pi}{6}$.

Démonstration Tout d'abord : $\sqrt{\sqrt{2}^2 + \sqrt{6}^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, donc pour tout $\theta \in \mathbb{R}$:

$$\sqrt{2}\cos\theta + \sqrt{6}\sin\theta = 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}\cos\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\right) = 2\sqrt{2}\left(\sin\frac{\pi}{6}\cos\theta + \cos\frac{\pi}{6}\sin\theta\right) = 2\sqrt{2}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right).$$

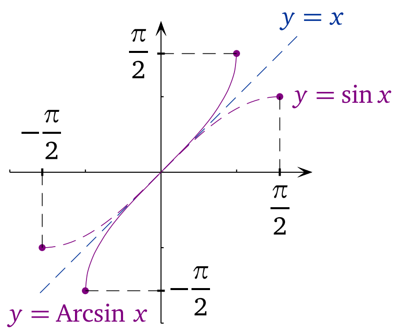


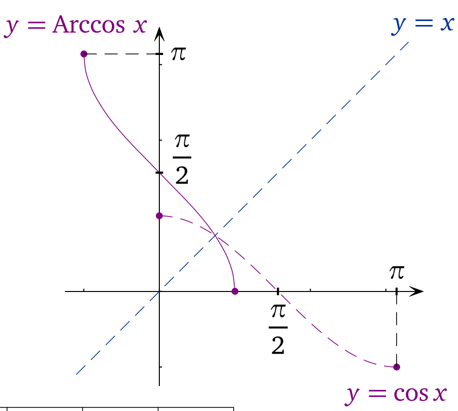
2 Fonctions Arcsin, Arccos et Arctan

Soient $\mathscr{A}$ une partie de $\mathbb{R}$, $f : \mathscr{A} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $\mathscr{B}$ une partie de $\mathscr{A}$. La fonction $\begin{cases} \mathscr{B} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) \end{cases}$ est appelée la *restriction de f à $\mathscr{B}$* et notée $f\big|_{\mathscr{B}}$. Alors que l'ensemble de définition de f était $\mathscr{A}$ tout entier, celui de $f\big|_{\mathscr{B}}$ est simplement $\mathscr{B}$, plus petit.

Définition-théorème (Fonctions arcsinus et arccosinus)

- La fonction sinus est bijective de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $[-1,1]$. On appelle *fonction arcsinus* la réciproque de $\sin\big|_{\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]}$, notée Arcsin. Cette fonction est définie et continue sur $[-1,1]$, impaire, MAIS dérivable seulement sur $]-1,1[$ et pour tout $x \in\,]-1,1[$: $$\text{Arcsin}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
- La fonction cosinus est bijective de $[0,\pi]$ sur $[-1,1]$. On appelle *fonction arccosinus* la réciproque de $\cos\big|_{[0,\pi]}$, notée Arccos. Cette fonction est définie et continue sur $[-1,1]$, MAIS dérivable seulement sur $]-1,1[$ et pour tout $x \in\,]-1,1[$: $$\text{Arccos}'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
- Pour tout $x \in [-1,1]$: $\cos \text{Arcsin}\, x = \sin \text{Arccos}\, x = \sqrt{1-x^2}$.





x	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
Arcsin x	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
Arccos x	π	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0

✖ **Attention !** ✖ Les fonctions sinus et cosinus, périodiques, ne sont évidemment pas bijectives !

- Arcsinus n'est pas la réciproque de la fonction sinus, mais celle de $\sin\big|_{\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]}$.

Vrai : $\forall x \in [-1,1],\quad \sin \text{Arcsin}\, x = x.$	**Faux :** $\forall x \cancel{\in \mathbb{R}},\quad \text{Arcsin}\ \sin x = x.$	**Vrai :** $\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right],\quad \text{Arcsin}\ \sin x = x.$

Par exemple : $\quad \text{Arcsin}\ \sin \pi = \text{Arcsin}\ 0 = 0 \neq \pi.$

- Arccosinus n'est pas la réciproque de la fonction cosinus, mais celle de $\cos\big|_{[0,\pi]}$.

Vrai : $\forall x \in [-1,1],\quad \cos \text{Arccos}\, x = x.$	**Faux :** $\forall x \cancel{\in \mathbb{R}},\quad \text{Arccos}\ \cos x = x.$	**Vrai :** $\forall x \in [0,\pi],\quad \text{Arccos}\ \cos x = x.$

Par exemple : $\quad \text{Arccos}\ \cos(2\pi) = \text{Arccos}\ 1 = 0 \neq 2\pi.$

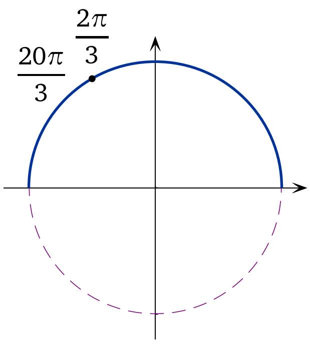
Démonstration Contentons-nous de faire le travail pour Arccos — démonstration analogue pour Arcsin.

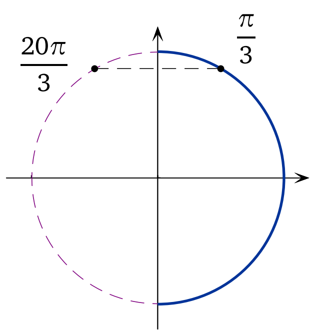
- La fonction cosinus est continue et strictement décroissante sur $[0,\pi]$, donc $\cos\big|_{[0,\pi]}$ est une bijection strictement décroissante de $[0,\pi]$ sur $[\cos\pi, \cos 0] = [-1,1]$ d'après le TVI strictement monotone. La fonction arccosinus, réciproque de $\cos\big|_{[0,\pi]}$, est ainsi bien définie.
- Ce premier point et la continuité du cosinus montrent la continuité d'Arccos sur $[-1,1]$ d'après le théorème de continuité d'une réciproque.
- Pour tout $x \in [-1,1]$: $\quad \text{Arccos}\, x \in [0,\pi], \quad$ donc : $\quad \sin \text{Arccos}\, x \geqslant 0, \quad$ donc :
$$\sin \text{Arccos}\, x = \left|\sin \text{Arccos}\, x\right| = \sqrt{1-(\cos \text{Arccos}\, x)^2} = \sqrt{1-x^2}.$$
- Enfin, cosinus est dérivable sur $]0,\pi[$ et sa dérivée $\cos' = -\sin$ ne s'y annule pas, donc d'après le théorème de dérivabilité d'une réciproque, Arccos est dérivable sur $]-1,1[$ et pour tout $x \in]-1,1[$:
$$\text{Arccos}'(x) = \frac{1}{\cos' \circ \text{Arccos}(x)} = -\frac{1}{\sin \text{Arccos}\, x} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$
Le théorème de dérivabilité en revanche ne nous dit rien sur la dérivabilité de Arccos en -1 et 1 car : $\cos'(0) = \cos'(\pi) = 0$. On peut montrer cependant qu'Arccos **n'est pas** dérivable en ces points. ■

Exemple $\quad \text{Arccos}\ \cos\dfrac{20\pi}{3} = \dfrac{2\pi}{3} \quad$ et $\quad \text{Arcsin}\ \sin\dfrac{20\pi}{3} = \dfrac{\pi}{3}.$

Démonstration Pour la première égalité, le travail est simple car : $\dfrac{20\pi}{3} \in [0,\pi] + 2\pi\mathbb{Z}$. C'est un peu plus compliqué pour la deuxième car : $\dfrac{20\pi}{3} \notin \left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right] + 2\pi\mathbb{Z}$, mais nous pouvons toujours nous ramener à ce domaine, **à sinus constant**, en remarquant que : $\quad \sin\dfrac{20\pi}{3} = \sin\dfrac{\pi}{3} \quad$ où : $\quad \dfrac{\pi}{3} \in \left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Domaine privilégié du cosinus pour toutes les questions d'arccosinus : $\quad [0,\pi]$





Domaine privilégié du sinus pour toutes les questions d'arcsinus : $\quad \left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$

Exemple $\quad \dfrac{3}{5}$ est l'unique solution de l'équation : $\quad \text{Arcsin}\, x = \text{Arccos}\,\dfrac{4}{5} \quad$ d'inconnue $x \in [-1,1]$.

Démonstration Pour tous $x \in [-1,1]$ et $y \in \left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$: $\quad y = \text{Arcsin}\, x \iff x = \sin y \quad$ par définition de l'arcsinus. Or : $\quad \text{Arccos}\,\dfrac{4}{5} \in \left[0,\dfrac{\pi}{2}\right] \quad$ car : $\quad \dfrac{4}{5} \in [0,1]$. Du coup, pour tout $x \in [-1,1]$:
$$\text{Arcsin}\, x = \text{Arccos}\,\frac{4}{5} \iff x = \sin \text{Arccos}\,\frac{4}{5} \iff x = \sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{3}{5}.$$

Exemple Pour tout $x \in [-1,1]$: $\quad \mathrm{Arcsin}\, x + \mathrm{Arccos}\, x = \dfrac{\pi}{2}$.

Démonstration Il s'agit de montrer que la fonction $x \overset{f}{\longmapsto} \mathrm{Arcsin}\, x + \mathrm{Arccos}\, x$ est constante sur $[-1,1]$ de valeur $\dfrac{\pi}{2}$. Or cette fonction est dérivable sur $]-1,1[$ — ouvert a priori — et pour tout $x \in]-1,1[$:

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0.$$

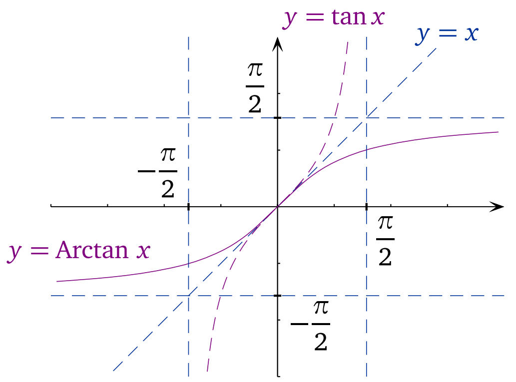
Comme $]-1,1[$ est un **INTERVALLE**, f y est ainsi constante.

Quelle valeur ? Nous pouvons la calculer en 0 par exemple : $f(0) = \mathrm{Arcsin}\, 0 + \mathrm{Arccos}\, 0 = 0 + \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{2}$. Il reste à vérifier que $f(-1)$ et $f(1)$ valent aussi $\dfrac{\pi}{2}$. Pour $f(1)$: $f(1) = \mathrm{Arcsin}\, 1 + \mathrm{Arccos}\, 1 = \dfrac{\pi}{2} + 0 = \dfrac{\pi}{2}$.

Définition-théorème (Fonction arctangente)
La fonction tangente est bijective de $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$. On appelle *fonction arctangente* la réciproque de $\tan|_{]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[}$, notée Arctan. Cette fonction est définie et dérivable (donc continue) sur $\mathbb{R}$, impaire, et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\mathrm{Arctan}'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

La fonction arctangente possède une asymptote d'équation : $\quad y = \dfrac{\pi}{2}$ au voisinage de $+\infty$ (resp. : $\quad y = -\dfrac{\pi}{2}$ au voisinage de $-\infty$).



x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$\mathrm{Arctan}\, x$	$-\dfrac{\pi}{2}$	$-\dfrac{\pi}{3}$	$-\dfrac{\pi}{4}$	$-\dfrac{\pi}{6}$	0	$\dfrac{\pi}{6}$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\dfrac{\pi}{2}$

✖ **ATTENTION !** ✖ La fonction tangente, périodique, n'est évidemment pas bijective ! Arctan n'est pas la réciproque de la fonction tangente, mais celle de $\tan|_{]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[}$.

VRAI : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \tan \mathrm{Arctan}\, x = x.$

FAUX : $\forall x \in \left]-\cancel{\dfrac{\pi}{2}}, \cancel{\dfrac{\pi}{2}}\right[+ \cancel{\pi\mathbb{Z}}, \quad \mathrm{Arctan}\, \tan x = x.$

VRAI : $\forall x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[, \quad \mathrm{Arctan}\, \tan x = x.$

Par exemple : $\quad \mathrm{Arctan}\, \tan \pi = \mathrm{Arctan}\, 0 = 0 \neq \pi.$

Démonstration

- La fonction tangente est continue et strictement croissante sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, donc $\tan|_{]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[}$ est une bijection strictement croissante de $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ sur $]-\infty,+\infty[= \mathbb{R}$ d'après le TVI strictement monotone. La fonction arctangente, réciproque de $\tan|_{]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[}$, est ainsi bien définie.
- Ensuite, tangente est dérivable sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ et sa dérivée $\tan' = 1 + \tan^2 > 0$ ne s'y annule pas, donc d'après le théorème de dérivabilité d'une réciproque, Arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$\mathrm{Arctan}'(x) = \frac{1}{\tan' \circ \mathrm{Arctan}(x)} = \frac{1}{1 + \tan^2 \mathrm{Arctan}\, x} = \frac{1}{1+x^2}.$$
- Enfin, la fonction $\tan|_{]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[}$ étant impaire, sa réciproque Arctan l'est aussi. ■

Exemple Pour tout $x > 0$: $\quad \mathrm{Arctan}\, x + \mathrm{Arctan}\, \dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2} \quad$ et pour tout $x < 0$: $\quad \mathrm{Arctan}\, x + \mathrm{Arctan}\, \dfrac{1}{x} = -\dfrac{\pi}{2}$.

Démonstration La fonction $x \overset{f}{\longmapsto} \mathrm{Arctan}\, x + \mathrm{Arctan}\, \dfrac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \left(-\frac{1}{x^2}\right) \times \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0.$$

Comme $\mathbb{R}^* =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ **N'EST PAS UN INTERVALLE**, on ne peut pas en déduire que f est constante sur $\mathbb{R}^*$ tout entier, mais seulement qu'elle l'est sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$ indépendamment. Quelles valeurs ? Calculons $f(1)$: $f(1) = 2 \text{ Arctan } 1 = 2 \times \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$. Pour la valeur de f sur $\mathbb{R}_-^*$, remarquer simplement que f est impaire.

Exemple $\frac{1}{6}$ est l'unique solution de l'équation : $\text{Arctan}(2x) + \text{Arctan}(3x) = \frac{\pi}{4}$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Démonstration

- **Remarque préliminaire :** Soient $x, y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[+ \pi\mathbb{Z}$. Si : $\tan x = \tan y$, a-t-on : $x = y$? **NON**, seulement : $x \equiv y\ [\pi]$. En revanche, si x et y sont choisis dans un même intervalle de longueur π, typiquement $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, alors oui : $x = y$.
- Par ailleurs, pour tout $x \in \mathbb{R}$ pour lequel chacun des termes écrits ci-dessous est bien défini :

$$\tan\big(\text{Arctan}(2x) + \text{Arctan}(3x)\big) = \frac{\tan \text{Arctan}(2x) + \tan \text{Arctan}(3x)}{1 - \tan \text{Arctan}(2x)\ \tan \text{Arctan}(3x)} = \frac{2x + 3x}{1 - 2x \times 3x} = \frac{5x}{1-6x^2}.$$

La réciproque de la première équivalence repose entièrement sur la remarque préliminaire et constitue la difficulté principale de cet exemple. À MÉDITER !

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\text{Arctan}(2x) + \text{Arctan}(3x) = \frac{\pi}{4} \iff \begin{cases} \tan\big(\text{Arctan}(2x) + \text{Arctan}(3x)\big) = \tan \frac{\pi}{4} \\ \text{Arctan}(2x) + \text{Arctan}(3x) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[. \end{cases}$

$$\iff \frac{5x}{1-6x^2} = 1 \quad \text{et} \quad \text{Arctan}(2x) + \text{Arctan}(3x) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

$$\iff 6x^2 + 5x - 1 = 0 \quad \text{et} \quad \text{Arctan}(2x) + \text{Arctan}(3x) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

$$\iff \left(x = -1 \quad \text{ou} \quad x = \frac{1}{6}\right) \quad \text{et} \quad \text{Arctan}(2x) + \text{Arctan}(3x) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[.$$

- À ce stade, l'équation étudiée possède au plus deux solutions, -1 et $\frac{1}{6}$. Cela dit, -1 ne convient pas car le réel $\text{Arctan}(-2) + \text{Arctan}(-3)$ est négatif, donc distinct de $\frac{\pi}{4}$.

  Au contraire, $\frac{1}{6}$ convient. Pour le vérifier, d'après les équivalences précédentes, il nous suffit de montrer que : $\text{Arctan}(2x) + \text{Arctan}(3x) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ pour $x = \frac{1}{6}$. C'est vrai par stricte croissance de la fonction arctangente : $0 = 0 + 0 < \text{Arctan}\left(2 \times \frac{1}{6}\right) + \text{Arctan}\left(3 \times \frac{1}{6}\right) < \text{Arctan } 1 + \text{Arctan } 1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.

3 TABLEAU RÉCAPITULATIF

Fonction	Ensemble de définition	Ensemble de dérivabilité	Dérivée
$\sin x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\cos x$
$\cos x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$-\sin x$
$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$	$\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[+ \pi\mathbb{Z}$	$\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[+ \pi\mathbb{Z}$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$
$\text{Arcsin } x$	$[-1, 1]$	$]-1, 1[$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\text{Arccos } x$	$[-1, 1]$	$]-1, 1[$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\text{Arctan } x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{1+x^2}$