

FONCTIONS CIRCULAIRES

Définition (Relations de congruence, ensembles $\alpha\mathbb{Z} + \beta$) Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

- Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on dit que x est congru à y modulo α , ce qu'on note : $x \equiv y [\alpha]$, si : $x = y + k\alpha$ pour un certain $k \in \mathbb{Z}$.
- L'ensemble $\{x \in \mathbb{R} / x \equiv \beta [\alpha]\} = \{\beta + k\alpha\}_{k \in \mathbb{Z}}$ est généralement noté $\alpha\mathbb{Z} + \beta$ ou $\beta + \alpha\mathbb{Z}$.

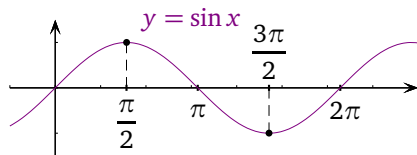
Exemple

- Être pair c'est être congru à 0 modulo 2, tandis qu'être impair c'est être congru à 1 modulo 2 : $6 \equiv 0 [2]$ et $15 \equiv 1 [2]$. L'ensemble des entiers pairs est donc $2\mathbb{Z}$ tandis que l'ensemble des entiers impairs est $2\mathbb{Z} + 1$.
- Comme vous le savez, les mesures d'angles orientés sont définies modulo 2π : $11\pi \equiv \pi [2\pi]$ et $-\frac{\pi}{2} \equiv \frac{3\pi}{2} [2\pi]$.
- On peut généraliser la notation « $\alpha\mathbb{Z} + \beta$ ». Par exemple, $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[+ \pi\mathbb{Z}$ est l'ensemble des réels de la forme : $x + k\pi$ avec $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et $k \in \mathbb{Z}$ quelconques. Ici, il s'agit aussi de l'ensemble $\mathbb{R} \setminus (\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z})$.

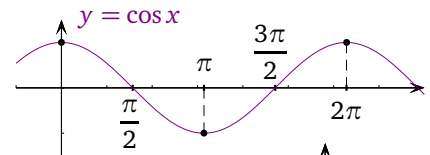
1 FONCTIONS sin, cos ET tan

Définition-théorème (Fonctions sinus et cosinus, lien avec le cercle trigonométrique)

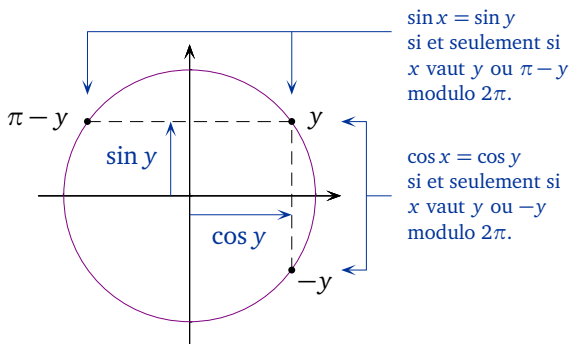
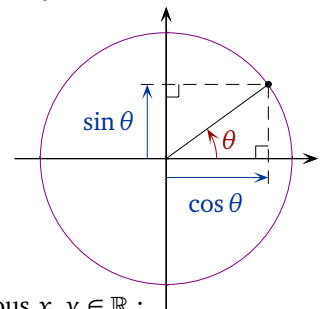
- Les fonctions sinus et cosinus sont définies et dérivables sur \mathbb{R} et 2π -périodiques. La fonction sinus est impaire, la fonction cosinus paire et en outre :



$$\begin{aligned} \sin' &= \cos \\ \text{et} \\ \cos' &= -\sin. \end{aligned}$$



- **Lien avec le cercle trigonométrique :** Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Réciproquement, pour tout couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ pour lequel : $x^2 + y^2 = 1$, il existe un réel θ , unique modulo 2π , pour lequel : $(x, y) = (\cos \theta, \sin \theta)$. Géométriquement, ce résultat signifie que tout point du cercle trigonométrique a des coordonnées de la forme $(\cos \theta, \sin \theta)$.



- **Résolution d'équations :** Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \sin x = \sin y & \iff x \equiv y [2\pi] \text{ ou } x \equiv \pi - y [2\pi] \\ \cos x = \cos y & \iff x \equiv y [2\pi] \text{ ou } x \equiv -y [2\pi]. \end{cases}$$

Ces résultats se lisent sur le cercle trigonométrique, comme l'explique la figure ci-contre.

- **Transformations affines :** Les relations suivantes se lisent toutes sur le cercle trigonométrique. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$\sin(x + \pi) = -\sin x$	$\sin(\pi - x) = \sin x$	$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$
$\cos(x + \pi) = -\cos x$	$\cos(\pi - x) = -\cos x$	$\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$

En pratique D'après les relations : $\sin(x + \pi) = -\sin x$ et $\cos(x + \pi) = -\cos x$, ajouter π dans un sinus ou un cosinus revient à le multiplier par -1 , donc a fortiori, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, ajouter $k\pi = \underbrace{\pi + \dots + \pi}_{k \text{ fois}}$ revient à multiplier par $\underbrace{(-1) \times \dots \times (-1)}_{k \text{ fois}} = (-1)^k$, et c'est même encore vrai pour $k \in \mathbb{Z}$. En d'autres termes, pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{Z}$:

$$\sin(x + k\pi) = (-1)^k \sin x \quad \text{et} \quad \cos(x + k\pi) = (-1)^k \cos x, \quad \text{et en particulier :} \quad \sin(k\pi) = 0 \quad \text{et} \quad \cos(k\pi) = (-1)^k.$$

ATTENTION ! Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$: $\sin x = \sin y \not\Rightarrow x = y$ — erreur GRAVISSIME !

L'erreur suivante est à peine meilleure : Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$: $\sin x = \sin y \not\Rightarrow x \equiv y [2\pi]$ et la remarque vaut pour le cosinus.

Exemple Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\sin x = \cos x \iff x \equiv \frac{\pi}{4} [\pi]$.

Démonstration $\sin x = \cos x \iff \sin x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

$$\iff x \equiv \frac{\pi}{2} - x [2\pi] \quad \text{ou} \quad x \equiv \pi - \left(\frac{\pi}{2} - x\right) [2\pi] \iff 2x \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \quad \text{ou} \quad \underbrace{0 \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]}_{\text{Impossible}} \iff x \equiv \frac{\pi}{4} [\pi].$$

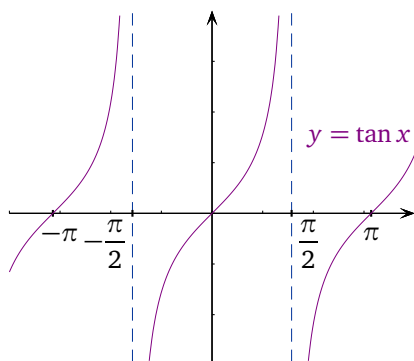
Théorème (Fonctions sinus et cosinus, formules d'addition et de produit) Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:

$\begin{aligned} \sin(x + y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y \\ \sin(x - y) &= \sin x \cos y - \cos x \sin y \\ \cos(x + y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y \\ \cos(x - y) &= \cos x \cos y + \sin x \sin y \end{aligned}$	$\begin{aligned} \sin x \sin y &= \frac{1}{2} (\cos(x - y) - \cos(x + y)) \\ \sin x \cos y &= \frac{1}{2} (\sin(x + y) + \sin(x - y)) \\ \cos x \cos y &= \frac{1}{2} (\cos(x + y) + \cos(x - y)) \end{aligned}$
--	--

Pour $x = y$, ces relations s'appellent *formules de duplication* : $\sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2},$

$$\sin(2x) = 2 \cos x \sin x \quad \text{et} \quad \cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x.$$

Définition-théorème (Fonction tangente)

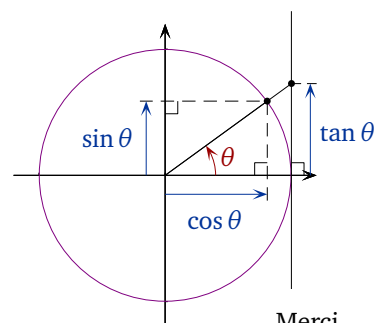


- On appelle *fonction tangente* la fonction définie sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[+ \pi\mathbb{Z}$ par la relation :

$$\tan = \frac{\sin}{\cos}.$$

Elle est dérivable sur son ensemble de définition, π -périodique et impaire, et :

$$\tan' = 1 + \tan^2 = \frac{1}{\cos^2}.$$



Merci le théorème de Thalès !

Les formules suivantes sont vraies pour toutes les valeurs de x et y pour lesquelles chaque terme est bien défini.

• **Résolution d'équations** : $\tan x = \tan y \iff x \equiv y [\pi]$.


• **Formules d'addition et de duplication** :

$$\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}, \quad \tan(x - y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y} \quad \text{et} \quad \tan(2x) = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}.$$

Démonstration

- **Définition** : La tangente est définie là où le cosinus ne s'annule pas, i.e. sur $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[+ \pi\mathbb{Z}$ car pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\cos x = 0 \iff x \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$ ou $x \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi] \iff x \equiv \frac{\pi}{2} [\pi]$.
- **Imparité** : Pour tout $x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[+ \pi\mathbb{Z}$: $\tan(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x$.
- **Périodicité** : Pour tout $x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[+ \pi\mathbb{Z}$: $\tan(x + \pi) = \frac{\sin(x + \pi)}{\cos(x + \pi)} = \frac{-\sin x}{-\cos x} = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$. On comprend ici pourquoi tangente est π -périodique alors que sinus et cosinus ne sont que 2π -périodiques, deux signes « - » se simplifient !
- **Dérivée** : $\tan' = \frac{\sin' \times \cos - \sin \times \cos'}{\cos^2} = \frac{\cos^2 + \sin^2}{\cos^2}$, donc : $\tan' = \frac{1}{\cos^2} = 1 + \tan^2$.
- **Variations et limites** : Par imparité et π -périodicité, une étude sur $\left[0, \frac{\pi}{2} \right[$ suffit. La fonction tangente est strictement croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2} \right[$ car : $\tan' = 1 + \tan^2 > 0$. En outre : $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \sin x = 1$ et $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \cos x = 0^+$, donc : $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty$.
- **Équation « tan x = tan y »** : $\tan x = \tan y \iff \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sin y}{\cos y} \iff \sin x \cos y - \cos x \sin y = 0$
 $\iff \sin(x - y) = 0 \iff x - y \equiv 0 [\pi] \iff x \equiv y [\pi]$.
- **Formule « tan(x + y) = ... »** :

$$\tan(x + y) = \frac{\sin(x + y)}{\cos(x + y)} = \frac{\sin x \cos y + \cos x \sin y}{\cos x \cos y - \sin x \sin y} = \frac{\cos x \cos y \left(\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin y}{\cos y} \right)}{\cos x \cos y \left(1 - \frac{\sin x}{\cos x} \times \frac{\sin y}{\cos y} \right)} = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y} \quad \blacksquare$$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos x	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
tan x	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	

Les valeurs remarquables du sinus, du cosinus et de la tangente doivent être connues **PAR CŒUR** !

Théorème (Transformation des expressions $a \cos \theta + b \sin \theta$) Soient a et b deux réels. Il existe deux réels φ et ψ pour lesquels :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad a \cos \theta + b \sin \theta = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(\theta + \varphi) = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\theta + \psi).$$

ATTENTION : φ et ψ dépendent de a et b , mais pas de θ .

Démonstration Si : $a = b = 0$, le résultat est trivial, toute valeur de φ et ψ convient. Nous pouvons donc supposer : $(a, b) \neq (0, 0)$, i.e. : $a^2 + b^2 \neq 0$.

- **Existence de φ** : Posons : $x = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ et $y = -\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. Comme : $x^2 + y^2 = 1$, on peut écrire (x, y) sous la forme $(\cos \varphi, \sin \varphi)$ pour un certain $\varphi \in \mathbb{R}$. Du coup, pour tout réel θ :

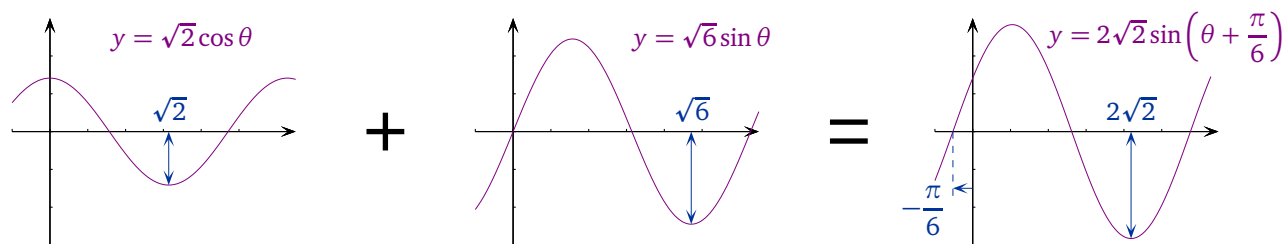
$$\begin{aligned} a \cos \theta + b \sin \theta &= \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos \theta + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin \theta \right) = \sqrt{a^2 + b^2} (x \cos \theta - y \sin \theta) \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} (\cos \theta \cos \varphi - \sin \theta \sin \varphi) = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(\theta + \varphi). \end{aligned}$$

- **Existence de ψ** : Posons : $x = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ et $y = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. Comme : $x^2 + y^2 = 1$, on peut écrire (x, y) sous la forme $(\cos \psi, \sin \psi)$ pour un certain $\psi \in \mathbb{R}$ et on conclut comme avec φ . ■

Exemple Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$: $\sqrt{2} \cos \theta + \sqrt{6} \sin \theta = 2\sqrt{2} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)$. Interprétation physique : la somme des signaux sinusoïdaux $\theta \mapsto \sqrt{2} \cos \theta$ et $\theta \mapsto \sqrt{6} \sin \theta$ est encore un signal sinusoïdal, de nouvelle amplitude $2\sqrt{2}$ et déphasé de $\frac{\pi}{6}$.

Démonstration Tout d'abord : $\sqrt{\sqrt{2}^2 + \sqrt{6}^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, donc pour tout $\theta \in \mathbb{R}$:

$$\sqrt{2} \cos \theta + \sqrt{6} \sin \theta = 2\sqrt{2} \left(\frac{1}{2} \cos \theta + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \theta \right) = 2\sqrt{2} \left(\sin \frac{\pi}{6} \cos \theta + \cos \frac{\pi}{6} \sin \theta \right) = 2\sqrt{2} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right).$$



2 FONCTIONS Arcsin, Arccos ET Arctan

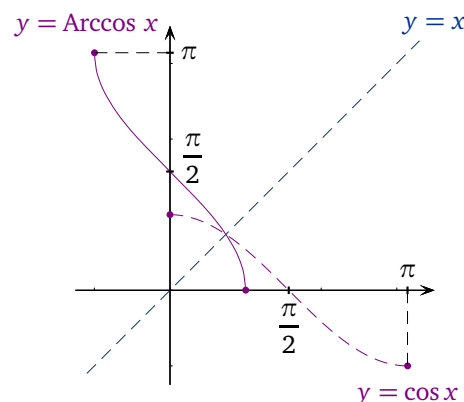
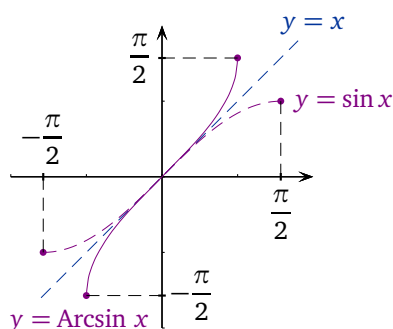
Soient \mathcal{A} une partie de \mathbb{R} , $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et \mathcal{B} une partie de \mathcal{A} . La fonction $\begin{cases} \mathcal{B} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) \end{cases}$ est appelée la restriction de f à \mathcal{B} et notée $f|_{\mathcal{B}}$. Alors que l'ensemble de définition de f était \mathcal{A} tout entier, celui de $f|_{\mathcal{B}}$ est simplement \mathcal{B} , plus petit.

Définition-théorème (Fonctions arcsinus et arccosinus)

- La fonction sinus est bijective de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $[-1, 1]$. On appelle *fonction arcsinus* la réciproque de $\sin|_{\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]}$, notée *Arcsin*. Cette fonction est définie et continue sur $[-1, 1]$, impaire, MAIS dérivable seulement sur $] -1, 1[$ et pour tout $x \in] -1, 1[$:
- La fonction cosinus est bijective de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$. On appelle *fonction arccosinus* la réciproque de $\cos|_{[0, \pi]}$, notée *Arccos*. Cette fonction est définie et continue sur $[-1, 1]$, MAIS dérivable seulement sur $] -1, 1[$ et pour tout $x \in] -1, 1[$:
- Pour tout $x \in [-1, 1]$: $\cos \text{Arcsin } x = \sin \text{Arccos } x = \sqrt{1 - x^2}$.

$$\text{Arcsin}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\text{Arccos}'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$



x	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\text{Arcsin } x$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\text{Arccos } x$	π	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0

✘ ATTENTION ! ✘ Les fonctions sinus et cosinus, périodiques, ne sont évidemment pas bijectives !

- Arcsinus n'est pas la réciproque de la fonction sinus, mais celle de $\sin|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}$.

VRAI : $\forall x \in [-1, 1], \sin \operatorname{Arcsin} x = x.$

FAUX : $\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{Arcsin} \sin x = x.$

VRAI : $\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \operatorname{Arcsin} \sin x = x.$

Par exemple : $\operatorname{Arcsin} \sin \pi = \operatorname{Arcsin} 0 = 0 \neq \pi.$

- Arccosinus n'est pas la réciproque de la fonction cosinus, mais celle de $\cos|_{[0, \pi]}$.

VRAI : $\forall x \in [-1, 1], \cos \operatorname{Arccos} x = x.$

FAUX : $\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{Arccos} \cos x = x.$

VRAI : $\forall x \in [0, \pi], \operatorname{Arccos} \cos x = x.$

Par exemple : $\operatorname{Arccos} \cos(2\pi) = \operatorname{Arccos} 1 = 0 \neq 2\pi.$

Démonstration Contentons-nous de faire le travail pour Arccos — démonstration analogue pour Arcsin.

- La fonction cosinus est continue et strictement décroissante sur $[0, \pi]$, donc $\cos|_{[0, \pi]}$ est une bijection strictement décroissante de $[0, \pi]$ sur $[\cos \pi, \cos 0] = [-1, 1]$ d'après le TVI strictement monotone. La fonction arccosinus, réciproque de $\cos|_{[0, \pi]}$, est ainsi bien définie.
- Ce premier point et la continuité du cosinus montrent la continuité d'Arccos sur $[-1, 1]$ d'après le théorème de continuité d'une réciproque.
- Pour tout $x \in [-1, 1]$: $\operatorname{Arccos} x \in [0, \pi]$, donc : $\sin \operatorname{Arccos} x \geq 0$, donc :

$$\sin \operatorname{Arccos} x = |\sin \operatorname{Arccos} x| = \sqrt{1 - (\cos \operatorname{Arccos} x)^2} = \sqrt{1 - x^2}.$$

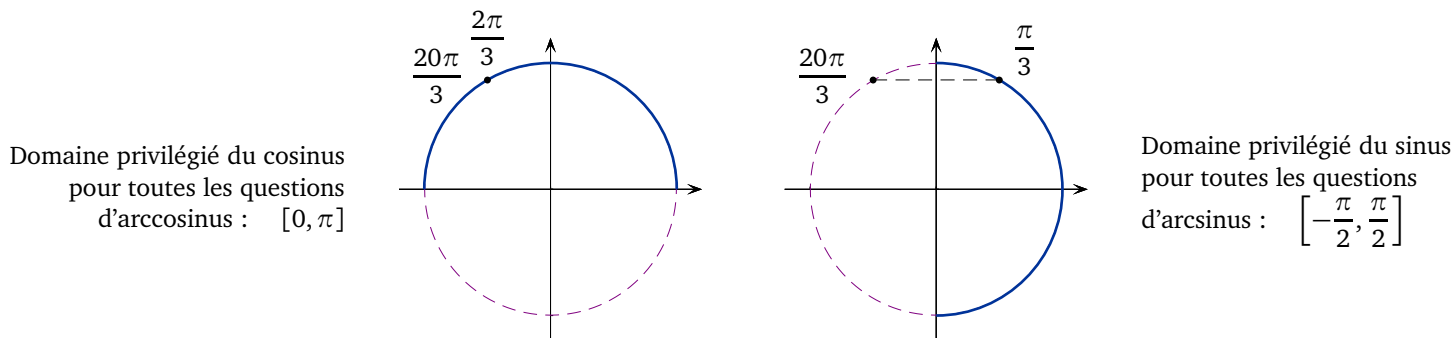
- Enfin, cosinus est dérivable sur $]0, \pi[$ et sa dérivée $\cos' = -\sin$ ne s'y annule pas, donc d'après le théorème de dérivabilité d'une réciproque, Arccos est dérivable sur $] -1, 1[$ et pour tout $x \in] -1, 1[$:

$$\operatorname{Arccos}'(x) = \frac{1}{\cos' \circ \operatorname{Arccos}(x)} = -\frac{1}{\sin \operatorname{Arccos} x} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Le théorème de dérivabilité en revanche ne nous dit rien sur la dérivabilité de Arccos en -1 et 1 car : $\cos'(0) = \cos'(\pi) = 0$. On peut montrer cependant qu'Arccos n'est PAS dérivable en ces points. ■

Exemple $\operatorname{Arccos} \cos \frac{20\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$ et $\operatorname{Arcsin} \sin \frac{20\pi}{3} = \frac{\pi}{3}.$

Démonstration Pour la première égalité, le travail est simple car : $\frac{20\pi}{3} \in [0, \pi] + 2\pi\mathbb{Z}$. C'est un peu plus compliqué pour la deuxième car : $\frac{20\pi}{3} \notin \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] + 2\pi\mathbb{Z}$, mais nous pouvons toujours nous ramener à cet intervalle, à SINUS CONSTANT, en remarquant que : $\sin \frac{20\pi}{3} = \sin \frac{\pi}{3}$ avec : $\frac{\pi}{3} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$



Exemple $\frac{3}{5}$ est l'unique solution de l'équation : $\operatorname{Arcsin} x = \operatorname{Arccos} \frac{4}{5}$ d'inconnue $x \in [-1, 1].$

Démonstration Pour tous $x \in [-1, 1]$ et $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$: $y = \operatorname{Arcsin} x \iff x = \sin y$ par définition de l'arcsinus. Or : $\operatorname{Arccos} \frac{4}{5} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ car : $\frac{4}{5} \in [0, 1].$ Du coup, pour tout $x \in [-1, 1]$:

$$\operatorname{Arcsin} x = \operatorname{Arccos} \frac{4}{5} \iff x = \sin \operatorname{Arccos} \frac{4}{5} \iff x = \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{3}{5}.$$

Exemple Pour tout $x \in [-1, 1]$: $\text{Arcsin } x + \text{Arccos } x = \frac{\pi}{2}$.

Démonstration Il s'agit de montrer que la fonction $x \mapsto \text{Arcsin } x + \text{Arccos } x$ est constante sur $[-1, 1]$ de valeur $\frac{\pi}{2}$. Or cette fonction est dérivable sur $] -1, 1[$ — ouvert a priori — et pour tout $x \in] -1, 1[$:

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0. \quad \text{Comme }] -1, 1[\text{ est un INTERVALLE, } f \text{ y est ainsi constante.}$$

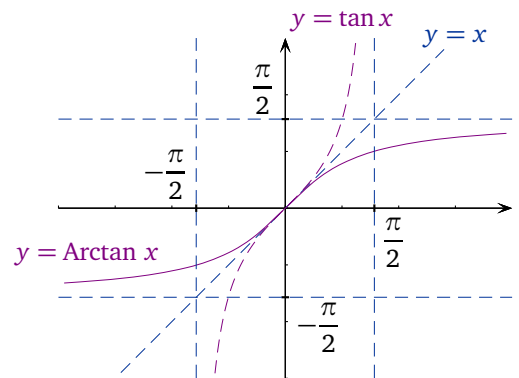
Quelle valeur ? Nous pouvons la calculer en 0 par exemple : $f(0) = \text{Arcsin } 0 + \text{Arccos } 0 = 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$. Il reste à vérifier que $f(-1)$ et $f(1)$ valent aussi $\frac{\pi}{2}$. Pour $f(1)$: $f(1) = \text{Arcsin } 1 + \text{Arccos } 1 = \frac{\pi}{2} + 0 = \frac{\pi}{2}$.

Définition-théorème (Fonction arctangente)

La fonction tangente est bijective de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur \mathbb{R} . On appelle *fonction arctangente* la réciproque de $\tan|_{]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[}$, notée *Arctan*. Cette fonction est définie et dérivable (donc continue) sur \mathbb{R} , impaire, et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\text{Arctan}'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

La fonction arctangente possède une asymptote d'équation : $y = \frac{\pi}{2}$ au voisinage de $+\infty$ (resp. : $y = -\frac{\pi}{2}$ au voisinage de $-\infty$).



x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$\text{Arctan } x$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$

✗ ATTENTION ! ✗ La fonction tangente, périodique, n'est évidemment pas bijective ! *Arctan* n'est pas la réciproque de la fonction tangente, mais celle de $\tan|_{]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[}$. VRAI : $\forall x \in \mathbb{R}, \tan \text{Arctan } x = x$.

FAUX : $\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $\text{Arctan } \tan x = x$.

VRAI : $\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $\text{Arctan } \tan x = x$.

Par exemple : $\text{Arctan } \tan \pi = \text{Arctan } 0 = 0 \neq \pi$.

Démonstration

- La fonction tangente est continue et strictement croissante sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, donc $\tan|_{]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[}$ est une bijection strictement croissante de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur $] -\infty, +\infty[= \mathbb{R}$ d'après le TVI strictement monotone. La fonction arctangente, réciproque de $\tan|_{]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[}$, est ainsi bien définie.
- Ensuite, tangente est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et sa dérivée $\tan' = 1 + \tan^2 > 0$ ne s'y annule pas, donc d'après le théorème de dérivabilité d'une réciproque, *Arctan* est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\text{Arctan}'(x) = \frac{1}{\tan' \circ \text{Arctan}(x)} = \frac{1}{1 + \tan^2 \text{Arctan } x} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

- Enfin, la fonction $\tan|_{]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[}$ étant impaire, sa réciproque *Arctan* l'est aussi. ■

Exemple Pour tout $x > 0$: $\text{Arctan } x + \text{Arctan } \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$ et pour tout $x < 0$: $\text{Arctan } x + \text{Arctan } \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}$.

Démonstration La fonction $x \mapsto \text{Arctan } x + \text{Arctan } \frac{1}{x}$ est dérivable sur \mathbb{R}^* et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \left(-\frac{1}{x^2}\right) \times \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0.$$

Comme $\mathbb{R}^* =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ n'est PAS un INTERVALLE, on ne peut pas en déduire que f est constante sur \mathbb{R}^* tout entier, mais seulement qu'elle l'est sur \mathbb{R}_+^* et \mathbb{R}_-^* indépendamment. Quelles valeurs ? Calculons $f(1)$:
 $f(1) = 2 \operatorname{Arctan} 1 = 2 \times \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$. Pour la valeur de f sur \mathbb{R}_-^* , remarquer simplement que f est impaire.

Exemple $\frac{1}{6}$ est l'unique solution de l'équation : $\operatorname{Arctan}(2x) + \operatorname{Arctan}(3x) = \frac{\pi}{4}$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Démonstration

- **Remarque préliminaire** : Soient $x, y \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[+ \pi\mathbb{Z}$. Si : $\tan x = \tan y$, a-t-on : $x = y$? **NON**, seulement : $x \equiv y [\pi]$. En revanche, si x et y sont choisis dans un même intervalle de longueur π , typiquement $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, alors oui : $x = y$.
- Par ailleurs, pour tout $x \in \mathbb{R}$ pour lequel chacun des termes écrits ci-dessous est bien défini :

$$\tan(\operatorname{Arctan}(2x) + \operatorname{Arctan}(3x)) = \frac{\tan \operatorname{Arctan}(2x) + \tan \operatorname{Arctan}(3x)}{1 - \tan \operatorname{Arctan}(2x) \tan \operatorname{Arctan}(3x)} = \frac{2x + 3x}{1 - 2x \times 3x} = \frac{5x}{1 - 6x^2}.$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\operatorname{Arctan}(2x) + \operatorname{Arctan}(3x) = \frac{\pi}{4} \iff \begin{cases} \tan(\operatorname{Arctan}(2x) + \operatorname{Arctan}(3x)) = \tan \frac{\pi}{4} \\ \operatorname{Arctan}(2x) + \operatorname{Arctan}(3x) \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\end{cases}$

$$\iff \frac{5x}{1 - 6x^2} = 1 \text{ et } \operatorname{Arctan}(2x) + \operatorname{Arctan}(3x) \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$$

$$\iff 6x^2 + 5x - 1 = 0 \text{ et } \operatorname{Arctan}(2x) + \operatorname{Arctan}(3x) \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$$

$$\iff \left(x = -1 \text{ ou } x = \frac{1}{6}\right) \text{ et } \operatorname{Arctan}(2x) + \operatorname{Arctan}(3x) \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[.$$

- À ce stade, l'équation étudiée possède au plus deux solutions, -1 et $\frac{1}{6}$. Cela dit, -1 ne convient pas car le réel $\operatorname{Arctan}(-2) + \operatorname{Arctan}(-3)$ est négatif, donc distinct de $\frac{\pi}{4}$.

Au contraire, $\frac{1}{6}$ convient. Pour le vérifier, d'après les équivalences précédentes, il nous suffit de montrer que : $\operatorname{Arctan}(2x) + \operatorname{Arctan}(3x) \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ pour $x = \frac{1}{6}$. C'est vrai par stricte croissance de la fonction arctangente : $0 = 0 + 0 < \operatorname{Arctan}\left(2 \times \frac{1}{6}\right) + \operatorname{Arctan}\left(3 \times \frac{1}{6}\right) < \operatorname{Arctan} 1 + \operatorname{Arctan} 1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.

La réciproque de la première équivalence repose entièrement sur la remarque préliminaire et constitue la difficulté principale de cet exemple. À MÉDITER!

3 TABLEAU RÉCAPITULATIF

Fonction	Ensemble de définition	Ensemble de dérivabilité	Dérivée
$\sin x$	\mathbb{R}	\mathbb{R}	$\cos x$
$\cos x$	\mathbb{R}	\mathbb{R}	$-\sin x$
$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$	$]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[+ \pi\mathbb{Z}$	$]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[+ \pi\mathbb{Z}$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$
$\operatorname{Arcsin} x$	$[-1, 1]$	$] -1, 1[$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{Arccos} x$	$[-1, 1]$	$] -1, 1[$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{Arctan} x$	\mathbb{R}	\mathbb{R}	$\frac{1}{1+x^2}$