Intégration sur un segment

Pour commencer, refaites donc un tour du côté du chapitre « Calculs de primitives et d'intégrales ».

Dans tout ce chapitre, a et b sont deux réels, $\mathbb{K}$ est l'un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et $I, J \ldots$ sont des intervalles. Quand on notera $[a, b]$, il sera sous-entendu que : $\quad a \leqslant b$.

Ce chapitre développe une théorie de l'intégration **sur un segment** seulement, vous étudierez en spé une théorie de l'intégration sur un intervalle quelconque. La plupart des résultats de ce chapitre vous sont déjà connus, simplement vous ne les avez jamais démontrés et nous allons apprendre à les utiliser à d'autres fins que le calcul bête et méchant de primitives.

Définition (Subdivision d'un segment) On appelle *subdivision de* $[a, b]$ toute partie **finie** $\sigma = \{x_i\}_{0 \leqslant i \leqslant n}$ de $[a, b]$ pour laquelle : $\quad a = x_0 < \ldots < x_n = b$. $\quad$ Le réel strictement positif : $\quad \min\limits_{0 \leqslant i \leqslant n-1} (x_{i+1} - x_i) \quad$ est appelé le *pas de* σ.

1 Continuité uniforme

La notion de *continuité uniforme* aurait pu être présentée au chapitre « Continuité », mais conformément au programme, nous ne l'utiliserons que pour construire proprement l'intégrale.

Définition (Continuité uniforme) Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction. On dit que f est *uniformément continue sur* I si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \alpha > 0 / \quad \forall x, y \in I, \qquad |x - y| < \alpha \quad \Longrightarrow \quad \big|f(x) - f(y)\big| < \varepsilon.$$

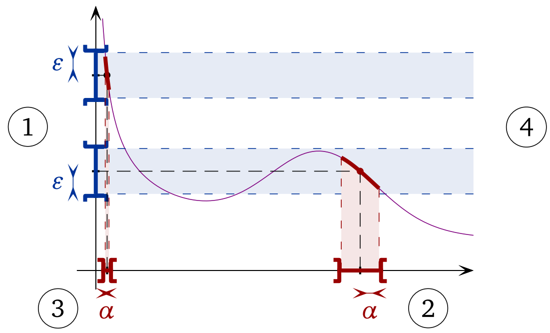
✌ **Explication** ✌ Dire que f est continue sur I, c'est dire que f est continue en tout point y de I, c'est-à-dire :

$$\forall y \in I, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists \alpha > 0 / \quad \forall x \in I, \qquad |x - y| < \alpha \quad \Longrightarrow \quad \big|f(x) - f(y)\big| < \varepsilon.$$

Avec la continuité, on se fixe donc un point $y \in I$ et un niveau ε, et on récupère un α. Si on change de y ou de ε, on change a priori la valeur de α.

Avec la continuité **uniforme**, on obtient un α en ayant seulement fixé un ε. Cet α est donc **valable pour tout point** $y \in I$. L'adjectif « uniforme » est précisément là pour signifier cette indépendance de α par rapport à y.

Pour une même valeur de ε…



À cause de cette évanescence de α en 0, aucune valeur de α ne peut convenir **pour tout point**.
Il n'y a donc pas continuité uniforme.

… mais plus on s'approche de 0, plus la pente est grande et plus les valeurs de α qu'on trouve sont petites.

… on arrive à trouver une valeur assez grande de α pour la continuité en ce point…

Théorème (Lien entre la continuité, la continuité uniforme et la lipschitzianité)

(i) Toute fonction uniformément continue sur un intervalle y est continue.

(ii) Toute fonction lipschitzienne sur un intervalle y est uniformément continue.

Démonstration

(i) Évident ! S'il existe un α **uniforme** valable pour tout point, alors bien sûr qu'il en existe un pour chacun !

(ii) Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction K-lipschitzienne sur I pour un certain $K > 0$. Soit $\varepsilon > 0$. Posons : $\alpha = \dfrac{\varepsilon}{K}$.

Alors pour tous $x, y \in I$ tels que $|x-y| < \alpha$: $\big|f(x) - f(y)\big| \overset{K\text{-lip.}}{\leqslant} K|x-y| < K\alpha = \varepsilon$. ■

Le théorème précédent n'a pas de réciproque en général, sauf l'assertion (i) dans le cas d'un **SEGMENT.**

Théorème (Théorème de Heine) Toute fonction continue sur un **SEGMENT** y est uniformément continue.

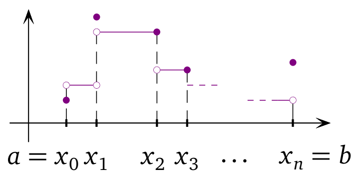
Démonstration Soit $f \in \mathscr{C}\big([a,b],\mathbb{C}\big)$. Raisonnons par l'absurde en supposant f **NON** uniformément continue sur $[a,b]$. Alors pour un certain $\varepsilon > 0$: $\boxed{\forall \alpha > 0,}$ $\exists\, x, y \in [a,b] / \quad |x-y| < \alpha \quad \text{et} \quad \big|f(x) - f(y)\big| \geqslant \varepsilon$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe donc $x_n, y_n \in [a,b]$ tels que : $|x_n - y_n| < \dfrac{1}{n}$ et $\big|f(x_n) - f(y_n)\big| \geqslant \varepsilon$.
- La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant bornée entre a et b, elle possède une suite extraite convergente $\big(x_{\varphi(n)}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ en vertu du théorème de Bolzano-Weierstrass, disons de limite $\ell \in [a,b]$.
- Comme : $\lim\limits_{n\to+\infty} \varphi(n) = +\infty$ et $\big|x_{\varphi(n)} - y_{\varphi(n)}\big| < \dfrac{1}{\varphi(n)}$, alors par encadrement : $\lim\limits_{n\to+\infty} y_{\varphi(n)} = \ell$.
- Pour conclure, passons l'inégalité : $\big|f(x_{\varphi(n)}) - f(y_{\varphi(n)})\big| \geqslant \varepsilon$ à la limite en utilisant la continuité de f en ℓ : $0 = \big|f(\ell) - f(\ell)\big| \geqslant \varepsilon > 0$ — contradiction. ■

2 Intégrale d'une fonction en escalier

Définition (Fonction en escalier, subdivision adaptée)
On dit qu'une fonction $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ est *en escalier* si pour une certaine subdivision $\{x_i\}_{0\leqslant i\leqslant n}$ de $[a,b]$, dite *adaptée à* f :

f est constante sur $]x_i, x_{i+1}[$ pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$.



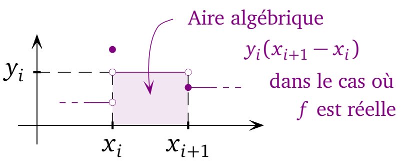
Théorème (Propriétés élémentaires des fonctions en escalier) Soient $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ et $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ en escalier.

- Lorsqu'on ajoute un nombre fini de points à une subdivision de $[a,b]$ adaptée à f, le résultat est encore une subdivision de $[a,b]$ adaptée à f.

  A fortiori, la réunion d'une subdivision de $[a,b]$ adaptée à f et d'une subdivision de $[a,b]$ adaptée à g est une subdivision de $[a,b]$ adaptée à f **ET** à g.
- Pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, $\lambda f + \mu g$ est une fonction en escalier sur $[a,b]$, de même que $|f|$, $\mathrm{Re}(f)$, $\mathrm{Im}(f)$ et fg.

Définition-théorème (Intégrale d'une fonction en escalier) Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ en escalier. Soit en outre $\{x_i\}_{0\leqslant i\leqslant n}$ une subdivision de $[a,b]$ adaptée à f. Si pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, on note y_i la valeur de f sur $]x_i, x_{i+1}[$, alors le nombre complexe : $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} y_i(x_{i+1} - x_i)$ ne dépend pas de la subdivision $\{x_i\}_{0\leqslant i\leqslant n}$ choisie.

On l'appele l'*intégrale de* f *sur* $[a,b]$, notée : $\displaystyle\int_{[a,b]} f$ ou $\displaystyle\int_{[a,b]} f(t)\,\mathrm{d}t$.



✌ **Explication** ✌ On définit ainsi directement l'intégrale d'une fonction en escalier **COMPLEXE**. Une telle intégrale ne peut bien sûr pas être interprétée en termes d'« aire sous la courbe », fût-elle algébrique.

Démonstration Pour toute subdivision $\sigma = \{x_i\}_{0\leqslant i\leqslant n}$ de $[a,b]$ adaptée à f, posons : $I_\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} y_i(x_{i+1}-x_i)$.

- Soient $\sigma = \{x_i\}_{0\leqslant i\leqslant n}$ et σ' deux subdivisions de $[a,b]$ adaptées à f pour lesquelles : $\sigma' \subset \sigma$. Nous allons commencer par montrer qu'alors : $I_\sigma = I_{\sigma'}$. Comme $\sigma' \subset \sigma$: $\sigma' = \{x_{\varphi(j)}\}_{0\leqslant j\leqslant n'}$ pour un certain $n' \in \mathbb{N}$ et une certaine fonction $\varphi : [\![0,n']\!] \longrightarrow [\![0,n]\!]$ strictement croissante telle que : $\varphi(0)=0$ et $\varphi(n')=n$ — c'est le principe des suites extraites. Pour tout $i \in [\![0,n]\!]$, notons y_i la valeur de f sur $]x_i, x_{i+1}[$, et pour tout $j \in [\![0,n']\!]$, y'_j sa valeur sur $]x_{\varphi(j)}, x_{\varphi(j+1)}[$.

$$I_{\sigma'} = \sum_{j=0}^{n'-1} y'_j(x_{\varphi(j+1)}-x_{\varphi(j)}) = \sum_{j=0}^{n'-1}\sum_{k=\varphi(j)}^{\varphi(j+1)-1} y'_j(x_{k+1}-x_k) \overset{y'_j=y_k}{=} \sum_{j=0}^{n'-1}\sum_{k=\varphi(j)}^{\varphi(j+1)-1} y_k(x_{k+1}-x_k) = \sum_{i=0}^{n-1} y_i(x_{i+1}-x_i) = I_\sigma.$$

- Montrons enfin que I_σ ne dépend pas du choix de σ. Soient σ, σ' deux subdivisions de $[a,b]$ adaptées à f. Comme $\sigma\cup\sigma'$ est encore une subdivision de $[a,b]$ adaptée à f et comme : $\sigma \subset \sigma\cup\sigma'$ et $\sigma' \subset \sigma\cup\sigma'$, le point précédent montre que : $I_\sigma = I_{\sigma\cup\sigma'}$ et $I_{\sigma'} = I_{\sigma\cup\sigma'}$, donc : $I_\sigma = I_{\sigma'}$. ■

Exemple Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\displaystyle\int_0^{n+1} \lfloor t\rfloor^2\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n} k^2\big((k+1)-k\big) = \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Théorème (Propriétés de l'intégrale d'une fonction en escalier) Soient $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ et $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ en escalier.

(i) **Linéarité :** Pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$: $\displaystyle\int_{[a,b]} (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_{[a,b]} f + \mu \int_{[a,b]} g$.

(ii) **Inégalité triangulaire :** $\displaystyle\left|\int_{[a,b]} f\right| \leqslant \int_{[a,b]} |f|$.

(iii) **Relation de Chasles :** Pour tout $c \in [a,b]$: $\displaystyle\int_{[a,b]} f = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f$.

(iv) **Lien avec les parties réelle et imaginaire :** $\displaystyle\int_{[a,b]} f = \int_{[a,b]} \mathrm{Re}(f) + \mathrm{i}\int_{[a,b]} \mathrm{Im}(f)$.

Démonstration Donnons-nous $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, $c \in [a,b]$ et une subdivision $\{x_i\}_{0\leqslant i\leqslant n}$ de $[a,b]$ adaptée à f ET à g — mais donc aussi à $\lambda f + \mu g$, $|f|$, $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.

(i) $$\int_{[a,b]} (\lambda f + \mu g) = \sum_{i=0}^{n-1} \overbrace{(\lambda f + \mu g)\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)}^{\text{Valeur de } \lambda f + \mu g \text{ sur }]x_i, x_{i+1}[} (x_{i+1}-x_i)$$

$$= \lambda \sum_{i=0}^{n-1} \underbrace{f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)}_{\text{Valeur de } f \text{ sur }]x_i, x_{i+1}[} (x_{i+1}-x_i) + \mu \sum_{i=0}^{n-1} \underbrace{g\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)}_{\text{Valeur de } g \text{ sur }]x_i, x_{i+1}[} (x_{i+1}-x_i) = \lambda \int_{[a,b]} f + \mu \int_{[a,b]} g.$$

(ii) D'après l'inégalité triangulaire sur $\mathbb{C}$:

$$\left|\int_{[a,b]} f\right| = \left|\sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)(x_{i+1}-x_i)\right| \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} |f|\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)(x_{i+1}-x_i) = \int_{[a,b]} |f|.$$

(iii) Quitte à ajouter c à la subdivision $\{x_i\}_{0\leqslant i\leqslant n}$, on peut supposer que : $x_k = c$ pour un certain $k \in [\![0,n]\!]$. Alors f est en escalier sur $[a,c]$ (resp. $[c,b]$) de subdivision adaptée $\{x_i\}_{0\leqslant i\leqslant k}$ (resp. $\{x_i\}_{k\leqslant i\leqslant n}$) et :

$$\int_{[a,b]} f = \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)(x_{i+1}-x_i) = \sum_{i=0}^{k-1} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)(x_{i+1}-x_i) + \sum_{i=k}^{n-1} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)(x_{i+1}-x_i) = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f.$$

(iv) $$\int_{[a,b]} f = \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)(x_{i+1}-x_i)$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \mathrm{Re}(f)\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)(x_{i+1}-x_i) + \mathrm{i}\sum_{i=0}^{n-1} \mathrm{Im}(f)\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)(x_{i+1}-x_i) = \int_{[a,b]} \mathrm{Re}(f) + \mathrm{i}\int_{[a,b]} \mathrm{Im}(f).$$ ■

Théorème **(Propriétés de l'intégrale d'une fonction en escalier réelle)** Soient $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ en escalier.

(i) **Positivité :** Si $f \geqslant 0$, alors : $\displaystyle\int_{[a,b]} f \geqslant 0$. (ii) **Croissance :** Si $f \leqslant g$, alors : $\displaystyle\int_{[a,b]} f \leqslant \int_{[a,b]} g$.

Démonstration Donnons-nous une subdivision $\{x_i\}_{0\leqslant i\leqslant n}$ de $[a,b]$ adaptée à f ET à g.

(i) Si : $f \geqslant 0$, alors : $\displaystyle\int_{[a,b]} f = \sum_{i=1}^{n-1} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)(x_{i+1} - x_i) \geqslant 0$.

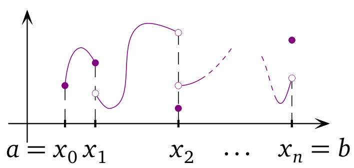
(ii) Si : $f \leqslant g$, alors : $\displaystyle\int_{[a,b]} (g-f) \geqslant 0$ par positivité, puis : $\displaystyle\int_{[a,b]} f \leqslant \int_{[a,b]} g$ par linéarité. ■

3 Intégrale d'une fonction continue par morceaux

3.1 Fonction continue par morceaux

Définition **(Fonction continue par morceaux, subdivision adaptée)**
On dit qu'une fonction $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ est *continue par morceaux* si pour une certaine subdivision $\{x_i\}_{0\leqslant i\leqslant n}$ de $[a,b]$, dite *adaptée à* f :

$$f|_{]x_i,x_{i+1}[} \text{ est continue sur }]x_i, x_{i+1}[$$



et PROLONGEABLE PAR CONTINUITÉ EN x_i ET x_{i+1} pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$.

L'ensemble des fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathscr{CM}\big([a,b],\mathbb{K}\big)$.

✖ **Attention !** ✖ Une fonction comme $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$, même prolongée en 0, n'est pas continue par morceaux sur $[0,1]$ car le prolongement en 0 ne peut pas se faire par continuité.

✌ **Explication** ✌

- Toute fonction en escalier et toute fonction continue sont continues par morceaux.
- Le théorème « Propriétés élémentaires des fonctions en escalier » est aussi valable pour les fonctions continues par morceaux. En particulier, $\mathscr{CM}\big([a,b],\mathbb{K}\big)$ est à la fois un sous-espace vectoriel et un sous-anneau de $\mathbb{K}^{[a,b]}$.

Définition-théorème **(Caractère borné d'une fonction continue par morceaux et norme infinie)** Toute fonction continue par morceaux sur $[a,b]$ est bornée.

Pour toute fonction $f \in \mathscr{CM}\big([a,b],\mathbb{C}\big)$, on peut donc poser : $\displaystyle\|f\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} \big|f(x)\big|$ (*norme infinie de* f).

✖ **Attention !** ✖ Bornée oui... MAIS N'ATTEINT PAS FORCÉMENT SES BORNES !

Démonstration Soient $f \in \mathscr{CM}\big([a,b],\mathbb{C}\big)$ et $\{x_i\}_{0\leqslant i\leqslant n}$ une subdivision de $[a,b]$ adaptée à f.

- **Cas où f est réelle :** Pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, le prolongement par continuité de $f|_{]x_i,x_{i+1}[}$ à $[x_i, x_{i+1}]$ est borné d'après le théorème des bornes atteintes, disons par un certain M_i en valeur absolue. Le maximum des réels positifs $M_1, \ldots, M_n$ et $\big|f(x_0)\big|, \ldots, \big|f(x_n)\big|$ est alors un majorant de $|f|$ sur $[a,b]$ tout entier.
- **Cas général :** D'après le cas précédent : $\big|\mathrm{Re}(f)\big| \leqslant M_R$ et $\big|\mathrm{Im}(f)\big| \leqslant M_I$ pour certains réels positifs M_R et M_I, donc a fortiori : $|f| \leqslant \sqrt{M_R^2 + M_I^2}$. ■

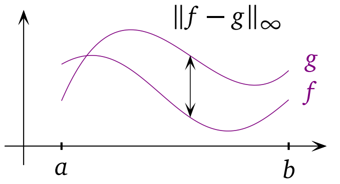
3.2 Approximation uniforme par des fonctions en escalier

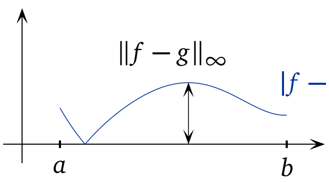
Définition-théorème **(Propriétés de la norme infinie, distance uniforme et convergence uniforme)**

- **Propriétés de la norme infinie :** Pour toutes fonctions $f, g \in \mathscr{CM}\big([a,b],\mathbb{C}\big)$:

$$\|f\|_\infty = 0 \iff f = 0 \qquad \text{et} \qquad \|f+g\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty + \|g\|_\infty \quad (\textit{inégalité triangulaire}).$$

- **Distance uniforme :** Pour toutes fonctions $f, g \in \mathscr{CM}\big([a,b],\mathbb{C}\big)$, le réel $\|f-g\|_\infty$ est appelé la *distance uniforme entre f et g*.





- **Convergence uniforme :** Soient $(f_p)_{p\in\mathbb{N}} \in \mathscr{CM}\big([a,b],\mathbb{C}\big)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions et $f \in \mathscr{CM}\big([a,b],\mathbb{C}\big)$. On dit que la suite $(f_p)_{p\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément vers f sur* $[a,b]$ si : $\displaystyle\lim_{p\to+\infty} \|f_p - f\|_\infty = 0$.

Explication Il existe tout plein de distances en mathématiques, pas seulement celle à laquelle on est habitué dans le plan ou l'espace. Nous définissons ici une distance sur l'ensemble $\mathscr{CM}\big([a,b],\mathbb{C}\big)$ des fonctions continues par morceaux.

Démonstration Soient $f, g \in \mathscr{CM}\big([a,b],\mathbb{C}\big)$.

- Pour commencer : $\|f\|_\infty = 0 \iff \forall x \in [a,b],\ \big|f(x)\big| = 0 \iff \forall x \in [a,b],\ f(x) = 0 \iff f = 0.$
- Ensuite, pour tout $x \in [a,b]$: $\big|f(x)+g(x)\big| \leqslant \big|f(x)\big| + \big|g(x)\big| \leqslant \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ d'après l'inégalité triangulaire sur $\mathbb{R}$. L'ensemble $\Big\{\big|f(x)+g(x)\big|\Big\}_{x\in[a,b]}$ est ainsi majoré par $\|f\|_\infty + \|g\|_\infty$, donc par définition de la borne supérieure : $\|f+g\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$. ■

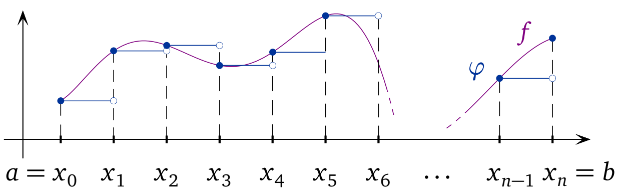
Théorème **(Approximation uniforme d'une fonction continue par morceaux par des fonctions en escalier)** Toute fonction continue par morceaux réelle (resp. complexe) sur $[a,b]$ est la limite uniforme d'une suite de fonctions en escalier réelles (resp. complexes) sur $[a,b]$.

Explication Dans $\mathbb{R}$, nous avons caractérisé la densité d'une partie par un critère séquentiel — une partie $\mathscr{A}$ de $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si tout réel est la limite d'une suite d'éléments de $\mathscr{A}$. Dans le contexte de l'ensemble $\mathscr{CM}\big([a,b],\mathbb{K}\big)$ et de la distance uniforme, on peut donner une définition analogue de la densité, et en ce sens l'ensemble des fonctions en escalier sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ est dense dans $\mathscr{CM}\big([a,b],\mathbb{K}\big)$.

Démonstration Soit $f \in \mathscr{CM}\big([a,b],\mathbb{K}\big)$. Il nous suffit de montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction $\varphi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{K}$ en escalier pour laquelle : $\|f-\varphi\|_\infty \leqslant \varepsilon$. Si on veut ensuite une suite $(\varphi_p)_{p\in\mathbb{N}}$, on peut simplement choisir : $\varepsilon = \dfrac{1}{p+1}$ pour tout $p \in \mathbb{N}$. Fixons donc $\varepsilon > 0$.

- **Cas où f est continue sur $[a,b]$:** D'après le théorème de Heine, f est uniformément continue sur $[a,b]$, donc il existe $\alpha > 0$ tel que pour tous $x, y \in [a,b]$: $|x-y| < \alpha \implies \big|f(x)-f(y)\big| < \varepsilon$. Fixons un entier $n \in \mathbb{N}^*$ pour lequel : $\dfrac{b-a}{n} < \alpha$ et posons pour tout $k \in [\![0,n]\!]$: $x_k = a + k\,\dfrac{b-a}{n}$. Notons enfin φ la fonction définie sur $[a,b]$ par :

$$\forall i \in [\![0,n-1]\!],\quad \forall x \in [x_i, x_{i+1}[,\quad \varphi(x) = f(x_i) \qquad \text{et} \qquad \varphi(b) = f(b).$$



Par construction, φ est en escalier sur $[a,b]$.

Il reste à vérifier que : $\|f-\varphi\|_\infty \leqslant \varepsilon$. Or pour tout $x \in [a,b[$, disons : $x \in [x_i, x_{i+1}[$ avec $i \in [\![0,n-1]\!]$: $|x-x_i| < x_{i+1}-x_i < \alpha$, donc par continuité uniforme :

$$\big|f(x)-\varphi(x)\big| = \big|f(x)-f(x_i)\big| < \varepsilon, \qquad \text{et comme c'est vrai pour tout } x : \quad \|f-\varphi\|_\infty \leqslant \varepsilon.$$

- **Cas général :** Soit $\{x_i\}_{0\leqslant i\leqslant n}$ une subdivision de $[a,b]$ adaptée à f. Grâce au point précédent, f étant continue sur $]x_i,x_{i+1}[$ et prolongeable par continuité en x_i et x_{i+1}, il existe pour tout $i\in[\![0,n-1]\!]$ une fonction en escalier $\varphi_i:[x_i,x_{i+1}]\longrightarrow\mathbb{K}$ pour laquelle : $\forall x\in[x_i,x_{i+1}],\quad \left|f(x)-\varphi_i(x)\right|\leqslant\varepsilon.$ On en déduit une fonction en escalier φ sur $[a,b]$ en « accolant » $\varphi_1,\ldots,\varphi_n$ les unes à la suite des autres, sauf aux points de subdivision où l'on pose pour tout $i\in[\![0,n]\!]$: $\varphi(x_i)=f(x_i)$. Ainsi : $\|f-\varphi\|_\infty\leqslant\varepsilon$. ■

✌ **Explication** ✌ En vue du paragraphe suivant, remarquons que dans la preuve précédente, si f est réelle positive, φ l'est aussi par définition. A fortiori, f est donc la limite uniforme d'une suite de fonctions en escalier réelles positives.

3.3 Intégrale d'une fonction continue par morceaux

Définition-théorème (Intégrale d'une fonction continue par morceaux) Soit $f\in\mathscr{CM}\big([a,b],\mathbb{C}\big)$.

Pour toute suite de fonctions en escalier $(\varphi_p)_{p\in\mathbb{N}}$ sur $[a,b]$ qui converge uniformément vers f, la suite $\left(\int_{[a,b]}\varphi_p\right)_{p\in\mathbb{N}}$ est convergente et sa limite ne dépend pas du choix de $(\varphi_p)_{p\in\mathbb{N}}$.

Cette limite unique est appelée l'*intégrale de f sur $[a,b]$* et notée : $\displaystyle\int_{[a,b]}f$ ou $\displaystyle\int_{[a,b]}f(t)\,\mathrm{d}t$. En outre, lorsque f est en escalier sur $[a,b]$, cette définition coïncide avec la précédente.

✌ **Explication** ✌ Nous avons vu qu'IL EXISTE toujours une suite $(\varphi_p)_{p\in\mathbb{N}}$ de fonctions en escalier sur $[a,b]$ dont f est la limite uniforme. On aurait bien envie, du coup, de définir l'intégrale $\displaystyle\int_{[a,b]}f$ comme la limite : $\displaystyle\lim_{p\to+\infty}\int_{[a,b]}\varphi_p$ — avec l'idée que l'aire algébrique sous φ_p tend vers l'aire algébrique sous f lorsque p tend vers $+\infty$. Cette « définition », hélas, pose trois problèmes :
— La limite existe-t-elle ?
— Ne dépend-elle pas du choix de la suite $(\varphi_p)_{p\in\mathbb{N}}$?
— Pour les fonctions en escalier, nos deux définitions de l'intégrale coïncident-elles ?

Démonstration

- Soient $(\varphi_p)_{p\in\mathbb{N}}$ et $(\psi_p)_{p\in\mathbb{N}}$ deux suites de fonctions en escalier sur $[a,b]$ dont f est la limite uniforme. Pour tout $p\in\mathbb{N}$, d'après les propriétés de l'intégrale d'une fonction en escalier :

$$\left|\int_{[a,b]}\varphi_p-\int_{[a,b]}\psi_p\right|=\left|\int_{[a,b]}(\varphi_p-\psi_p)\right|\leqslant\int_{[a,b]}|\varphi_p-\psi_p|\leqslant\int_{[a,b]}\|\varphi_p-\psi_p\|_\infty=(b-a)\,\|\varphi_p-\psi_p\|_\infty$$
$$\leqslant(b-a)\left(\|f-\varphi_p\|_\infty+\|f-\psi_p\|_\infty\right).$$

Nous noterons ★ ce résultat : $\displaystyle\left|\int_{[a,b]}\varphi_p-\int_{[a,b]}\psi_p\right|\leqslant(b-a)\left(\|f-\varphi_p\|_\infty+\|f-\psi_p\|_\infty\right).$

- Il découle directement d'★ et du théorème d'encadrement que, SI les suites $\left(\int_{[a,b]}\varphi_p\right)_{p\in\mathbb{N}}$ et $\left(\int_{[a,b]}\psi_p\right)_{p\in\mathbb{N}}$ sont convergentes, elles ont la même limite — indépendante, donc, de $(\varphi_p)_{p\in\mathbb{N}}$ et $(\psi_p)_{p\in\mathbb{N}}$.

- Il reste à montrer que la suite $\left(\int_{[a,b]}\varphi_p\right)_{p\in\mathbb{N}}$ converge. Or : $\displaystyle\lim_{p\to+\infty}\|f-\varphi_p\|_\infty=0$, donc à partir d'un certain rang N : $\|f-\varphi_p\|_\infty\leqslant1$. Pour tout $p\geqslant N$:

$$\|\varphi_p\|_\infty=\|\varphi_p-f+f\|_\infty\leqslant\|f\|_\infty+\|f-\varphi_p\|_\infty\leqslant\|f\|_\infty+1,$$

donc : $\displaystyle\left|\int_{[a,b]}\varphi_p\right|\leqslant\int_{[a,b]}|\varphi_p|\leqslant\int_{[a,b]}\big(\|f\|_\infty+1\big)=(b-a)\big(\|f\|_\infty+1\big).$ Bornée, la suite $\left(\int_{[a,b]}\varphi_p\right)_{p\in\mathbb{N}}$ possède donc une suite extraite convergente $\left(\int_{[a,b]}\varphi_{\theta(p)}\right)_{p\in\mathbb{N}}$ d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, disons de limite ℓ.

D'après ★ avec $\varphi_{\theta(p)}$ à la place de ψ_p : $\displaystyle \left|\int_{[a,b]} \varphi_p - \int_{[a,b]} \varphi_{\theta(p)}\right| \leqslant (b-a)\left(\|f-\varphi_p\|_\infty + \|f-\varphi_{\theta(p)}\|_\infty\right)$.

Par encadrement enfin : $\displaystyle \lim_{p\to+\infty} \int_{[a,b]} \varphi_p = \ell$.

- Que dire enfin si f elle-même est en escalier sur $[a,b]$? Nous pouvons dans ce cas poser : $\varphi_p = f$ pour tout $\in \mathbb{N}$, et évidemment : $\displaystyle \lim_{p\to+\infty} \|f-\varphi_p\|_\infty = 0$. Le calcul de la limite : $\displaystyle \lim_{p\to+\infty} \int_{[a,b]} \varphi_p$ indique bien comme voulu que nos deux définitions de l'intégrale de f coïncident. ■

✎ En pratique ✎ On vous demandera souvent de « justifier la bonne définition » de telle ou telle intégrale. Il s'agit simplement de montrer que la fonction intégrée est continue — éventuellement par morceaux — sur le segment concerné.

Exemple L'intégrale $\displaystyle \int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t}\,\mathrm{d}t$ est bien définie car la fonction $t \longmapsto \dfrac{\ln(1+t)}{t}$ est continue sur $]0,1]$ et prolongeable par continuité en 0 par la valeur 1.

Exemple L'intégrale $\displaystyle \int_0^\pi \frac{\sin^2 t}{1-\cos t}\,\mathrm{d}t$ est bien définie car la fonction $t \longmapsto \dfrac{\sin^2 t}{1-\cos t}$ est continue sur $]0,\pi]$ et prolongeable par continuité en 0 par la valeur 2 : $\displaystyle \frac{\sin^2 t}{1-\cos t} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{t^2}{\frac{t^2}{2}} \underset{t\to 0}{\sim} 2$.

Théorème (Propriétés de l'intégrale d'une fonction continue par morceaux) Soient $f,g \in \mathscr{CM}\big([a,b],\mathbb{C}\big)$.

(i) **Linéarité :** Pour tous $\lambda,\mu \in \mathbb{C}$: $\displaystyle \int_{[a,b]} (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_{[a,b]} f + \mu \int_{[a,b]} g$.

En d'autres termes, l'application $\varphi \longmapsto \displaystyle\int_{[a,b]} \varphi$ est une forme linéaire de $\mathscr{CM}\big([a,b],\mathbb{C}\big)$.

(ii) **Inégalité triangulaire :** $\displaystyle \left|\int_{[a,b]} f\right| \leqslant \int_{[a,b]} |f|$.

(iii) **Relation de Chasles :** Pour tout $c \in [a,b]$: $\displaystyle \int_{[a,b]} f = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f$.

(iv) **Lien avec les parties réelle et imaginaire :** $\displaystyle \int_{[a,b]} f = \int_{[a,b]} \mathrm{Re}(f) + \mathrm{i}\int_{[a,b]} \mathrm{Im}(f)$.

(v) Si f et g sont égales sur $[a,b]$ sauf en un nombre fini de points, alors : $\displaystyle \int_{[a,b]} f = \int_{[a,b]} g$.

Démonstration Donnons-nous une suite de fonctions en escalier $(\varphi_p)_{p\in\mathbb{N}}$ sur $[a,b]$ dont f est la limite uniforme et une suite de fonctions en escalier $(\psi_p)_{p\in\mathbb{N}}$ sur $[a,b]$ dont g est la limite uniforme.

(i) Pour tout $p \in \mathbb{N}$: $\big\|(\lambda f+\mu g)-(\lambda\varphi_p+\mu\psi_p)\big\|_\infty \leqslant |\lambda|\,\|f-\varphi_p\|_\infty + |\mu|\,\|g-\psi_p\|_\infty$, donc par encadrement : $\displaystyle \lim_{p\to+\infty} \big\|(\lambda f+\mu g)-(\lambda\varphi_p+\mu\psi_p)\big\|_\infty = 0$. Enfin, par linéarité de l'intégrale d'une fonction en escalier :

$$\int_{[a,b]} (\lambda f+\mu g) = \lim_{p\to+\infty} \int_{[a,b]} (\lambda\varphi_p+\mu\psi_p) = \lim_{p\to+\infty} \left(\lambda\int_{[a,b]} \varphi_p + \mu\int_{[a,b]} \psi_p\right) = \lambda\int_{[a,b]} f + \mu\int_{[a,b]} g.$$

(ii) Pour tout $p \in \mathbb{N}$: $\big||f|-|\varphi_p|\big| \leqslant |f-\varphi_p|$, donc : $\big\||f|-|\varphi_p|\big\|_\infty \leqslant \|f-\varphi_p\|_\infty$, donc par encadrement : $\displaystyle \lim_{p\to+\infty} \big\||f|-|\varphi_p|\big\|_\infty = 0$. En retour, d'après l'inégalité triangulaire pour les fonctions en escalier : $\displaystyle \left|\int_{[a,b]} f\right| = \lim_{p\to+\infty} \left|\int_{[a,b]} \varphi_p\right| \leqslant \lim_{p\to+\infty} \int_{[a,b]} |\varphi_p| = \int_{[a,b]} |f|$.

(iii) Soit $c \in [a,b]$. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, les fonctions $\varphi_p|_{[a,c]}$ et $\varphi_p|_{[c,b]}$ sont en escalier et :

$$\left\|f|_{[a,c]} - \varphi_p|_{[a,c]}\right\|_\infty \leqslant \|f-\varphi_p\|_\infty, \qquad \text{donc :} \quad \lim_{p\to+\infty}\left\|f|_{[a,c]} - \varphi_p|_{[a,c]}\right\|_\infty = 0 \quad \text{par encadrement,}$$

et de même : $\displaystyle\lim_{p\to+\infty}\left\|f|_{[c,b]} - \varphi_p|_{[c,b]}\right\|_\infty = 0$. Conclusion : $f|_{[a,c]}$ est la limite uniforme de $\left(\varphi_p|_{[a,c]}\right)_{p\in\mathbb{N}}$ et $f|_{[c,b]}$ de $\left(\varphi_p|_{[c,b]}\right)_{p\in\mathbb{N}}$. D'après la relation de Chasles pour les fonctions en escalier, du coup :

$$\int_{[a,b]} f = \lim_{p\to+\infty}\int_{[a,b]}\varphi_p = \lim_{p\to+\infty}\left(\int_{[a,c]}\varphi_p|_{[a,c]} + \int_{[c,b]}\varphi_p|_{[c,b]}\right) = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f.$$

(iv) Pour tout $p \in \mathbb{N}$: $\left|\mathrm{Re}(f) - \mathrm{Re}(\varphi_p)\right| \leqslant |f-\varphi_p|$, donc : $\left\|\mathrm{Re}(f) - \mathrm{Re}(\varphi_p)\right\|_\infty \leqslant \|f-\varphi_p\|_\infty$, donc : $\displaystyle\lim_{p\to+\infty}\left\|\mathrm{Re}(f)-\mathrm{Re}(\varphi_p)\right\|_\infty = 0$ par encadrement, et de même : $\displaystyle\lim_{p\to+\infty}\left\|\mathrm{Im}(f)-\mathrm{Im}(\varphi_p)\right\|_\infty = 0$. Ainsi :

$$\int_{[a,b]} f = \lim_{p\to+\infty}\int_{[a,b]}\varphi_p = \lim_{p\to+\infty}\left(\int_{[a,b]}\mathrm{Re}(\varphi_p) + \mathrm{i}\int_{[a,b]}\mathrm{Im}(\varphi_p)\right) = \int_{[a,b]}\mathrm{Re}(f) + \mathrm{i}\int_{[a,b]}\mathrm{Im}(f).$$

(v) Si f et g sont égales sauf en un nombre fini de points, $g-f$ est nulle partout sauf en ces points. Or en particulier, $g-f$ est en escalier sur $[a,b]$ donc il est facile de calculer son intégrale : $\displaystyle\int_{[a,b]}(g-f) = 0$.

Par linéarité de l'intégrale sur $\mathscr{CM}\big([a,b],\mathbb{C}\big)$ enfin : $\displaystyle\int_{[a,b]} f = \int_{[a,b]} g$. ■

Théorème (Propriétés de l'intégrale d'une fonction continue par morceaux réelle) Soient $f,g \in \mathscr{CM}\big([a,b],\mathbb{R}\big)$.

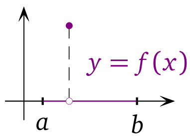
(i) **Positivité :** Si : $f \geqslant 0$, alors : $\displaystyle\int_{[a,b]} f \geqslant 0$. (ii) **Croissance :** Si : $f \leqslant g$, alors : $\displaystyle\int_{[a,b]} f \leqslant \int_{[a,b]} g$.

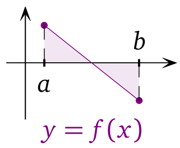
(iii) **Positivité stricte :** Si f est strictement positive sauf éventuellement en un nombre fini de points et si : $a<b$, alors : $\displaystyle\int_{[a,b]} f > 0$.

(iv) **Nullité avec signe constant :** Si f est CONTINUE et de signe constant et si : $\displaystyle\int_{[a,b]} f = 0$ avec : $a<b$, alors f est nulle sur $[a,b]$.

✖ **ATTENTION !** ✖ Continuité et signe constant sont essentiels dans l'assertion (iv) !

f est de signe constant et d'intégrale nulle, MAIS n'est pas nulle sur tout $[a,b]$ car elle n'y est pas continue partout.



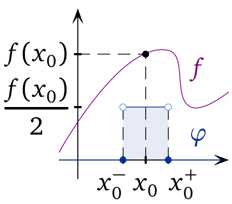


f est continue et d'intégrale nulle, MAIS n'est pas nulle sur tout $[a,b]$ car elle n'y est pas de signe constant.

Démonstration Donnons-nous une suite de fonctions en escalier $(\varphi_p)_{p\in\mathbb{N}}$ sur $[a,b]$ dont f est la limite uniforme et une suite de fonctions en escalier $(\psi_p)_{p\in\mathbb{N}}$ sur $[a,b]$ dont g est la limite uniforme.

(i) Comme : $f \geqslant 0$, on peut choisir : $\varphi_p \geqslant 0$ pour tout $p\in\mathbb{N}$, donc : $\displaystyle\int_{[a,b]} f = \lim_{p\to+\infty}\int_{[a,b]}\varphi_p \geqslant 0$.

(ii) Comme dans le cas des fonctions en escalier.



(iii) Comme f est continue sur $[a,b]$ sauf éventuellement en un nombre fini de points, il existe un point $x_0 \in [a,b]$ en lequel : $f(x_0) > 0$ ET en lequel f est continue. Par continuité de f en x_0 et sachant que : $\dfrac{f(x_0)}{2} < f(x_0)$, f est minorée par $\dfrac{f(x_0)}{2}$ sur un certain voisinage $]x_0^-, x_0^+[$ de x_0 dans $[a,b]$.

Notons alors φ la fonction de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ de valeur $\dfrac{f(x_0)}{2}$ sur $]x_0^-, x_0^+[$ et 0 sinon. Bien sûr φ est en escalier et : $\varphi \leqslant f$ par construction — notamment parce que f est positive ou nulle — du coup, par croissance de l'intégrale : $\displaystyle\int_{[a,b]} f \geqslant \int_{[a,b]}\varphi = \frac{f(x_0)}{2}\left(x_0^+ - x_0^-\right) > 0.$

(iv) On peut supposer f positive ou nulle quitte à la remplacer par $-f$. Il s'agit de montrer par contraposition que si f n'est pas nulle sur tout $[a,b]$, alors : $\displaystyle\int_{[a,b]} f > 0$, or c'est exactement ce que nous avons prouvé en (iii) grâce à l'intervention de x_0. ■

On étend à présent un chouïa la notation : $\displaystyle\int_{[a,b]} f$ précédente dans laquelle on avait forcément : $a \leqslant b$ — on intégrait toujours « dans le bon sens ». Pour tous $f \in \mathscr{CM}\big([a,b],\mathbb{R}\big)$ et $\alpha,\beta \in [a,b]$, on pose :

$$\int_\alpha^\beta f = \int_\alpha^\beta f(t)\,\mathrm{d}t = \begin{cases} \displaystyle\int_{[\alpha,\beta]} f & \text{si } \alpha \leqslant \beta \\ \displaystyle -\int_{[\beta,\alpha]} f & \text{si } \beta < \alpha. \end{cases}$$

Avec cette notation, les propriétés de l'intégrale que nous avons établies sont toutes encore vraies **MAIS ATTENTION**, avec un petit changement quand il s'agit d'**INÉGALITÉS**. Si $\beta < \alpha$: $\displaystyle\left|\int_\alpha^\beta f\right| \leqslant \int_\beta^\alpha |f|$ et si de plus $f \geqslant 0$: $\displaystyle\int_\alpha^\beta f \leqslant 0.$

Exemple On pose pour tout $x \in \mathbb{R}_+$: $\displaystyle A(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t}{1+xt}$. La fonction A ainsi définie est décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

Démonstration Soient $x,y \in \mathbb{R}_+$ avec : $x < y$. Pour tout $t \in [0,1]$: $\displaystyle\frac{\mathrm{e}^t}{1+yt} \leqslant \frac{\mathrm{e}^t}{1+xt}$, donc par croissance de l'intégrale : $\displaystyle A(y) = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t}{1+yt} \leqslant \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t}{1+xt} = A(x).$

✖ **ATTENTION !** ✖ Impossible ici de dériver A pour prouver sa monotonie ! — car rien ne nous dit que A est dérivable. Si A avait été de la forme $\displaystyle x \longmapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ pour une certaine fonction continue f, nous aurions pu la dériver grâce au théorème fondamental du calcul intégral — démontré plus loin — mais la variable x ici n'est pas « au bon endroit ».

4 INTÉGRATION ET DÉRIVATION

4.1 RAPPELS SUR LES PRIMITIVES

Le théorème d'« unicité » suivant découle de la caractérisation des fonctions constantes dérivables.

Définition-théorème (Primitive et « unicité » à constante additive près) Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction.

- On dit qu'une fonction $F : I \longrightarrow \mathbb{C}$ est une *primitive de f sur I* si F est dérivable sur I de dérivée f.
- Si f possède une primitive F sur I, les primitives de f sur I sont toutes les fonctions $F+\lambda$, λ décrivant $\mathbb{C}$.

✖ **ATTENTION !** ✖ Quand il en existe, il n'existe jamais qu'une seule primitive, ne dites donc pas « la » primitive !

Rappelons au cas où que nous savons primitiver aisément un certain nombre de fonctions classiques :

— les fonctions de la forme $x \longmapsto \mathrm{e}^{ax}\cos(bx)$ ou $x \longmapsto \mathrm{e}^{ax}\sin(bx)$ avec $a,b \in \mathbb{R}^*$ grâce à l'exponentielle complexe,

— les fonctions de la forme $x \longmapsto \sin^m x \cos^n x$ avec $m,n \in \mathbb{N}$ par linéarisation,

— les fonctions rationnelles par décomposition en éléments simples.

Les tableaux ci-dessous donnent enfin la liste des quelques primitives qu'il faut connaître à tout prix.

Fonction	Primitive
e^x	e^x
$\ln x$	$x\ln x - x$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$
$x^\alpha \quad (\alpha \neq -1)$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$

Fonction	Primitive
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$
$\tan x$	$-\ln\lvert\cos x\rvert$

Fonction	Primitive
$\mathrm{sh}\ x$	$\mathrm{ch}\ x$
$\mathrm{ch}\ x$	$\mathrm{sh}\ x$
$\mathrm{th}\ x$	$\ln \mathrm{ch}\ x$

Fonction	Primitive
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\mathrm{Arctan}\ x$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\mathrm{Arcsin}\ x$

4.2 Le théorème fondamental du calcul intégral

Exemple Nous donnons ici un exemple simple de fonction continue **par morceaux** n'admettant pas de primitive, la fonction f de $[0,2]$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f(1)=1$ et pour tout $x \in [0,2]\setminus\{1\}$: $f(x)=0$. Raisonnons par l'absurde en supposant que f possède une primitive F sur $[0,2]$. Alors F' est nulle sur l'intervalle $[0,1[$, donc F est constante de valeur disons λ sur $[0,1[$. De même, F' est nulle sur $]1,2]$, donc F est constante de valeur disons μ sur $]1,2]$. Or F est continue sur $[0,2]$, donc : $F(1)=\lambda=\mu$. Conclusion : F est constante sur tout $[0,2]$, donc : $f(1)=F'(1)=0$ — contradiction.

Théorème (Théorème fondamental du calcul intégral) Soient $f \in \mathscr{C}(I,\mathbb{C})$ et $a,b \in I$.

(i) La fonction $x \longmapsto \displaystyle\int_a^x f$ est une primitive de f sur I.

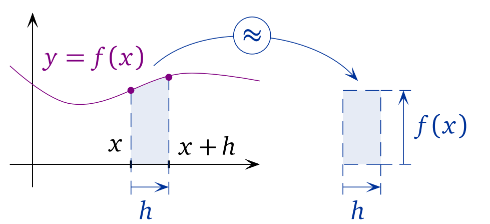
Pour tout $A \in \mathbb{C}$, il existe une et une seule primitive de f sur I de valeur A en a, la fonction $x \longmapsto A + \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

(ii) Pour toute primitive F de f : $\displaystyle\int_a^b f = F(b)-F(a)$. On note $[F]_a^b$ ou $\big[F(x)\big]_{x=a}^{x=b}$ cette quantité $F(b)-F(a)$.

Explication

- L'assertion (i) est un théorème d'**existence** de primitives pour les fonctions **continues**.
- La fonction f étant continue, sa primitive $x \longmapsto \displaystyle\int_a^x f$ est mieux que dérivable, c'est une fonction **de classe** $\mathscr{C}^1$.
- Fondamental, ce théorème l'est parce qu'il établit un lien entre des notions apparemment totalement étrangères — la notion d'aire/intégrale et la notion de primitive, liée à la dérivation. Quelle intuition cela exprime-t-il ?

  Supposons f réelle et notons F la fonction $x \longmapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$. Ci-contre, l'aire algébrique colorée à gauche vaut : $\displaystyle\int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t = F(x+h)-F(x)$. Or si h est tout petit, sachant que f est **continue** en x, on peut considérer que f est approximativement égale à $f(x)$ sur tout le segment $[x,x+h]$, et donc on peut approximer l'aire colorée à gauche par l'aire colorée à droite, qui vaut $hf(x)$ selon le principe « base × hauteur ».



  Conclusion : $F(x+h)-F(x) \approx hf(x)$ pour h tout petit, ou encore : $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(x)$. Par définition du nombre dérivé, on comprend mieux ainsi pourquoi F est dérivable de dérivée f.

Démonstration

(i) Montrons que la fonction $x \overset{F}{\longmapsto} \displaystyle\int_a^x f$ est une primitive de f sur I. Fixons pour cela $x \in I$ et montrons que F est dérivable en x avec : $F'(x)=f(x)$. Soit $\varepsilon > 0$. Par continuité en x, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $s \in I$: $|s-x| < \alpha \implies \big|f(s)-f(x)\big| < \varepsilon$. Pour tout $t \in I\setminus\{x\}$ tel que $|t-x|<\alpha$:

$$\left|\frac{F(t)-F(x)}{t-x}-f(x)\right| = \left|\frac{1}{t-x}\int_x^t \big(f(s)-f(x)\big)\,\mathrm{d}s\right| \qquad \text{car} \quad \int_x^t f(s)\,\mathrm{d}s = F(t)-F(x) \quad \text{et} \quad \int_x^t f(x)\,\mathrm{d}s = f(x)\int_x^t \mathrm{d}s = f(x)(t-x)$$

$$\leqslant \begin{cases} \dfrac{1}{t-x}\displaystyle\int_x^t \big|f(s)-f(x)\big|\,\mathrm{d}s \leqslant \dfrac{1}{t-x}\displaystyle\int_x^t \varepsilon\,\mathrm{d}s = \varepsilon & \text{si } t>x \\ \dfrac{1}{x-t}\displaystyle\int_t^x \big|f(s)-f(x)\big|\,\mathrm{d}s \leqslant \dfrac{1}{x-t}\displaystyle\int_t^x \varepsilon\,\mathrm{d}s = \varepsilon & \text{si } x>t. \end{cases}$$

Conclusion : $\displaystyle\lim_{t\to x}\frac{F(t)-F(x)}{t-x} = f(x)$, donc F est dérivable en x avec : $F'(x) = f(x)$.

(ii) La fonction F est une primitive de f qui vaut $F(a)$ en a et c'est la seule, donc : $F(x) = F(a) + \displaystyle\int_a^x f$ pour tout $x \in I$ d'après (i). Il reste à évaluer en b. ■

Exemple Pour tout $\alpha \geqslant 0$: $\displaystyle\int_0^1 x^\alpha\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{\alpha+1}$. Intégrale très courante, à connaître **PAR CŒUR** !

Exemple $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{\mathrm{e}^t+t}\,\mathrm{d}t = \left[\mathrm{e}^{\mathrm{e}^t}\right]_{t=0}^{t=1} = \mathrm{e}^{\mathrm{e}} - \mathrm{e}$. Et sans bornes : $\displaystyle\int \mathrm{e}^{\mathrm{e}^t+t}\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^t}$.

Le résultat de l'exemple qui suit a l'air trivial, mais il découle en fait du théorème fondamental du calcul intégral.

Exemple Pour toute fonction $f \in \mathscr{C}\big([a,b],\mathbb{R}\big)$: $\displaystyle\int_a^b f = \lim_{x\to b^-}\int_a^x f$ et $\displaystyle\int_a^b f = \lim_{x\to a^+}\int_x^b f$.

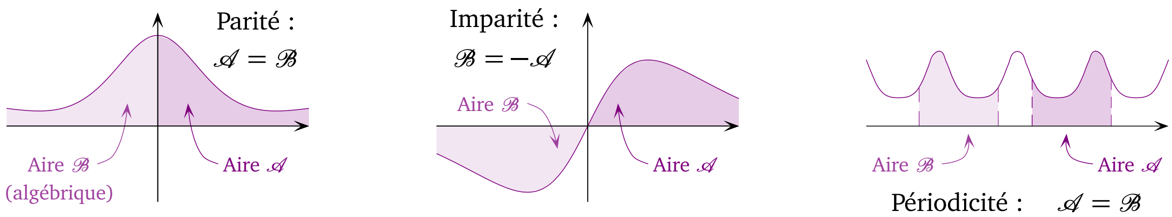
Démonstration Pour la première égalité, notons F la fonction $x \longmapsto \displaystyle\int_a^x f$ sur $[a,b]$. Comme f est continue sur $[a,b]$, F est une primitive de f d'après le théorème fondamental du calcul intégral, donc **EN PARTICULIER F EST CONTINUE EN b**. Comme voulu : $\displaystyle\int_a^b f = F(b) = \lim_{x\to b^-} F(x) = \lim_{x\to b^-}\int_a^x f$.

Le théorème suivant est valable pour des fonctions continues par morceaux mais nous ne le démontrerons que pour des fonctions continues afin d'illustrer l'assertion (i) du théorème fondamental du calcul intégral.

Théorème (Intégrales d'une fonction paire/impaire/périodique)

(i) Soit $f \in \mathscr{CM}\big([-a,a],\mathbb{R}\big)$. Alors : $\displaystyle\int_{-a}^a f = 2\int_0^a f$ si f est paire, et : $\displaystyle\int_{-a}^a f = 0$ si f est impaire.

(ii) Soit $f \in \mathscr{CM}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ périodique de période T. Alors : $\displaystyle\int_a^{a+T} f = \int_0^T f$.



Démonstration Supposant f continue, nous pouvons nous en donner une primitive F.

(i) **Cas où f est impaire :** La fonction $x \longmapsto F(-x)$ est alors dérivable de dérivée :

$$x \longmapsto -F'(-x) = -f(-x) = f(x),$$

donc est égale à la fonction F à une constante additive λ près. En particulier : $F(-0) = F(0)+\lambda$, donc : $\lambda = 0$, et ainsi : $\displaystyle\int_{-a}^a f = F(a) - F(-a) = 0$.

Cas où f est paire : La fonction $x \longmapsto F(-x)$ est alors dérivable de dérivée :

$$x \longmapsto -F'(-x) = -f(-x) = -f(x) = -F'(x),$$

donc coïncide avec $-F$ à une constante additive λ près. En particulier : $F(-0) = -F(0) + \lambda$, donc : $\lambda = 2F(0)$, et ainsi : $\displaystyle\int_{-a}^{a} f = F(a) - F(-a) = F(a) - \big(-F(a) + 2F(0)\big) = 2\big(F(a) - F(0)\big) = 2\int_0^a f.$

(ii) Si f est T-périodique, $x \longmapsto F(x+T) - F(x)$ est dérivable de dérivée $x \longmapsto f(x+T) - f(x) = 0$, donc est constante, donc : $F(a+T) - F(a) = F(T) - F(0)$, et enfin : $\displaystyle\int_a^{a+T} f = \int_0^T f.$ ■

✎ **En pratique** ✎ Le théorème fondamental du calcul intégral montre que certaines fonctions définies par des intégrales sont dérivables — et même de classe $\mathscr{C}^1$ — MAIS PAS N'IMPORTE QUELLES INTÉGRALES !

> De quelles fonctions le théorème fondamental nous parle-t-il ?
> Uniquement des fonctions de la forme :
>
> Le même x !
>
> $$x \longmapsto \int_a^x f(t)\,dt.$$
>
> PAS DE x !

Face un problème d'un autre type, soit on parvient à se ramener à la forme ci-dessus, soit on trouve une autre idée.

Exemple On note φ la fonction $x \longmapsto \displaystyle\int_0^1 e^{xt^2}\,dt$ sur $\mathbb{R}$. Alors φ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ de dérivée $x \longmapsto \dfrac{e^x}{x} - \dfrac{1}{2x}\displaystyle\int_0^x e^{xt^2}\,dt$.

Démonstration Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$: $\varphi(x) \overset{u=t\sqrt{x}}{=} \dfrac{1}{\sqrt{x}}\displaystyle\int_0^{\sqrt{x}} e^{u^2}\,du = \dfrac{F(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$ si l'on note F la fonction $x \longmapsto \displaystyle\int_0^x e^{u^2}\,du$. D'après le théorème fondamental du calcul intégral, F est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction continue $u \longmapsto e^{u^2}$. Ainsi, φ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$\varphi'(x) = \frac{\dfrac{F'(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \times \sqrt{x} - F(\sqrt{x}) \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{F'(\sqrt{x})}{x} - \frac{F(\sqrt{x})}{2x\sqrt{x}} = \frac{F'(\sqrt{x})}{x} - \frac{\varphi(x)}{2x} = \frac{e^x}{x} - \frac{\varphi(x)}{2x}.$$

4.3 INTÉGRATION PAR PARTIES ET CHANGEMENT DE VARIABLE

Théorème **(Intégration par parties)** Soient $u, v \in \mathscr{C}^1(I,\mathbb{C})$ et $a, b \in I$. $\displaystyle\int_a^b u'v = \big[uv\big]_a^b - \int_a^b uv'.$

Démonstration Comme u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$, les fonctions $(uv)'$, $u'v$ et uv' sont continues, donc d'après le théorème fondamental du calcul intégral et par linéarité de l'intégrale :

$$\big[uv\big]_a^b = \int_a^b (uv)' = \int_a^b (u'v + uv') = \int_a^b u'v + \int_a^b uv'.$$ ■

Théorème **(Changement de variable)** Soient $\varphi \in \mathscr{C}^1(I,\mathbb{R})$, $f \in \mathscr{C}(J,\mathbb{C})$ et $a, b \in I$. On suppose $\varphi(I) \subset J$.

$$\int_a^b f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\,dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx.$$

En pratique Pour retrouver vite la formule, mais sans rigueur, on dérive la relation « $x=\varphi(t)$ » : $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\varphi'(t)$, donc : $\mathrm{d}x=\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$, puis : $f(x)\,\mathrm{d}x=f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$. Enfin, on intègre — pendant que t varie de a à b, $x=\varphi(t)$ varie de $\varphi(a)$ à $\varphi(b)$.

Démonstration Continue, f possède une primitive F de classe $\mathscr{C}^1$, et comme φ est de classe $\mathscr{C}^1$, la fonction $(F\circ\varphi)'=f\circ\varphi\times\varphi'$ est continue. Du coup, d'après le théorème fondamental du calcul intégral :

$$\int_a^b f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t=\big[F\circ\varphi\big]_a^b=F\big(\varphi(b)\big)-F\big(\varphi(a)\big)=\big[F\big]_{\varphi(a)}^{\varphi(b)}=\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x.$$ ■

Exemple $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x=\int_0^{2\pi}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x.$

Démonstration Les fonctions $x\longmapsto\dfrac{1-\cos x}{x^2}$ et $x\longmapsto\dfrac{\sin x}{x}$ sont continues sur $]0,2\pi]$ et prolongeables par continuité en 0 par les valeurs $\dfrac{1}{2}$ et 1 respectivement, donc les intégrales $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ sont bien définies. Ensuite, formellement :

$$\int(1-\cos x)\times\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x\overset{\text{IPP}}{=}(1-\cos x)\times\left(-\frac{1}{x}\right)-\int\sin x\times\left(-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x=\frac{\cos x-1}{x}+\int\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Hélas, la fonction $x\longmapsto 1-\cos x$ a beau être de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,2\pi]$, la fonction $x\longmapsto-\dfrac{1}{x}$ NE L'EST PAS, elle est de classe $\mathscr{C}^1$ seulement sur $]0,2\pi]$. Comment procéder dès lors à une intégration par parties sur $[0,2\pi]$? Réponse : par un passage à la limite grâce au théorème fondamental du calcul intégral, comme on l'a vu dans un exemple précédent. En l'occurrence, pour tout $\varepsilon\in]0,2\pi]$:

$$\int_\varepsilon^{2\pi}\frac{1-\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x\overset{\text{IPP}}{=}\left[\frac{\cos x-1}{x}\right]_{x=\varepsilon}^{x=2\pi}+\int_\varepsilon^{2\pi}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x=\frac{1-\cos\varepsilon}{\varepsilon}+\int_\varepsilon^{2\pi}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x.$$

On en déduit le résultat voulu en faisant simplement tendre ε vers 0^+ car d'après le théorème fondamental du calcul intégral : $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_\varepsilon^{2\pi}\frac{1-\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_\varepsilon^{2\pi}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x.$

4.4 Limites d'intégrales

✖ Attention ! ✖ Vous aurez souvent à calculer des limites de la forme : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t$ ou $\displaystyle\lim_{x\to x_0}\int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}t$.

En général : $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t\neq\int_a^b\lim_{n\to+\infty}f_n(t)\,\mathrm{d}t}$ et $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to x_0}\int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}t\neq\int_a^b\lim_{x\to x_0}f(x,t)\,\mathrm{d}t.}$

En MPSI, nous nous en sortirons toujours en utilisant le théorème d'encadrement.

Exemple Soit $f\in\mathscr{CM}\big([0,1],\mathbb{R}\big)$. Alors : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 t^nf(t)\,\mathrm{d}t=0.$

Démonstration Continue par morceaux, f est bornée sur le segment $[0,1]$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, dès lors : $\displaystyle\left|\int_0^1 t^nf(t)\,\mathrm{d}t\right|\leqslant\int_0^1 t^n\big|f(t)\big|\,\mathrm{d}t\leqslant\|f\|_\infty\int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t=\frac{\|f\|_\infty}{n+1}$ — d'où le résultat par encadrement.

Exemple $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\int_x^{2x}\frac{\mathrm{e}^t}{t}\,\mathrm{d}t=\ln 2.$

Démonstration Pour tous $x>0$ et $t\in[x,2x]$: $\dfrac{1}{t}\leqslant\dfrac{\mathrm{e}^t}{t}\leqslant\dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{t}$, donc : $\displaystyle\int_x^{2x}\frac{\mathrm{d}t}{t}\leqslant\int_x^{2x}\frac{\mathrm{e}^t}{t}\,\mathrm{d}t\leqslant\mathrm{e}^{2x}\int_x^{2x}\frac{\mathrm{d}t}{t}$ par croissance de l'intégrale, donc après calcul : $\displaystyle\ln 2\leqslant\int_x^{2x}\frac{\mathrm{e}^t}{t}\,\mathrm{d}t\leqslant\mathrm{e}^{2x}\ln 2.$ On conclut par encadrement.

5 Formules de Taylor-Lagrange

Théorème (Formule de Taylor-Lagrange avec reste intégral) Soient $f \in \mathscr{C}^{n+1}(I,\mathbb{C})$ et $a,b \in I$.

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(b-a)^k \; + \underbrace{\int_a^b \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}\,(b-t)^n\,\mathrm{d}t}_{\text{Reste intégral}}.$$

Explication Pour $n=0$, cette formule n'est jamais que le théorème fondamental du calcul intégral.

Démonstration Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, d'après le théorème fondamental du calcul intégral « en sens inverse » :

$$\frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(b-a)^k = \left[-f^{(k)}(t)\times\frac{(b-t)^k}{k!}\right]_{t=a}^{t=b} = \int_a^b f^{(k)}(t)\times\frac{(b-t)^{k-1}}{(k-1)!}\,\mathrm{d}t - \int_a^b f^{(k+1)}(t)\times\frac{(b-t)^k}{k!}\,\mathrm{d}t.$$

Il ne reste plus qu'à sommer et faire une simplification télescopique :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(b-a)^k = \int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^b f^{(n+1)}(t)\times\frac{(b-t)^n}{n!}\,\mathrm{d}t = f(b)-f(a)-\int_a^b f^{(n+1)}(t)\times\frac{(b-t)^n}{n!}\,\mathrm{d}t.$$

On réordonne enfin ce résultat. ■

Exemple Pour tout $x \geqslant 0$: $\quad x-\dfrac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}$.

Démonstration On pourrait bien sûr effectuer deux études de fonctions, mais il y a mieux. Fixons $x \geqslant 0$ et appliquons la formule de Taylor-Lagrange avec reste intégral à la fonction $t \longmapsto \ln(1+t)$ de classe $\mathscr{C}^4$ entre les points 0 et x :

— à l'ordre 2 : $\quad \ln(1+x) = x-\dfrac{x^2}{2}+\displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^2}{(1+t)^3}\,\mathrm{d}t$. Comme enfin $x \geqslant 0$: $\displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^2}{(1+t)^3}\,\mathrm{d}t \geqslant 0$.

— à l'ordre 3 : $\quad \ln(1+x) = x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^3}{(1+t)^4}\,\mathrm{d}t$. Comme enfin $x \geqslant 0$: $\displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^3}{(1+t)^4}\,\mathrm{d}t \geqslant 0$.

Théorème (Inégalité de Taylor-Lagrange) Soient $f \in \mathscr{C}^{n+1}(I,\mathbb{C})$ et $a,b \in I$.

$$\left|f(b)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(b-a)^k\right| \leqslant \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}\,\left\|f^{(n+1)}\right\|_\infty,$$

où la norme infinie est calculée sur le segment d'extrémités a et b.

Démonstration La quantité $\left\|f^{(n+1)}\right\|_\infty$ est bien définie d'après le théorème des bornes atteintes. Sous l'hypothèse que $a \leqslant b$:

$$\left|f(b)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(b-a)^k\right| = \left|\int_a^b \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}\,(b-t)^n\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b \frac{\left|f^{(n+1)}(t)\right|}{n!}\,|b-t|^n\,\mathrm{d}t \leqslant \left\|f^{(n+1)}\right\|_\infty \int_a^b \frac{|b-t|^n}{n!}\,\mathrm{d}t$$

$$= \left\|f^{(n+1)}\right\|_\infty \left[-\frac{|b-t|^{n+1}}{(n+1)!}\right]_{t=a}^{t=b} = \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}\,\left\|f^{(n+1)}\right\|_\infty.$$

On fait pareil si : $\quad b<a$, $\quad$ mais il faut remplacer les « $\displaystyle\int_a^b$ » par des « $\displaystyle\int_b^a$ » dans les majorations positives. ■

Exemple Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\quad \mathrm{e}^x = \displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}$, $\quad$ résultat que l'on note aussi : $\quad \mathrm{e}^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}$.

Démonstration Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction exponentielle est de classe $\mathscr{C}^\infty$ entre 0 et x et pour tout $n \in \mathbb{N}$, entre ces points : $\quad \left|\exp^{(n+1)}\right| \leqslant \mathrm{e}^{|x|}$, $\quad$ donc d'après l'inégalité de Taylor-Lagrange : $\quad \left|\mathrm{e}^x-\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\right| \leqslant \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}\,\mathrm{e}^{|x|}$.

On conclut par encadrement.

6 Approximations d'intégrales

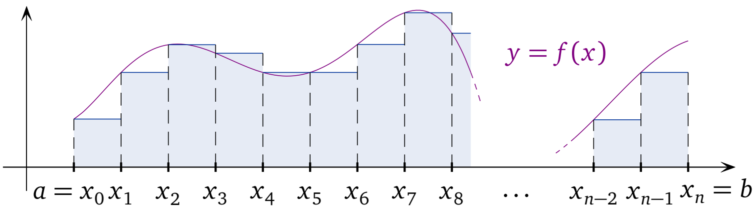
6.1 Sommes de Riemann ou méthode des rectangles

Théorème (Sommes de Riemann ou méthode des rectangles)

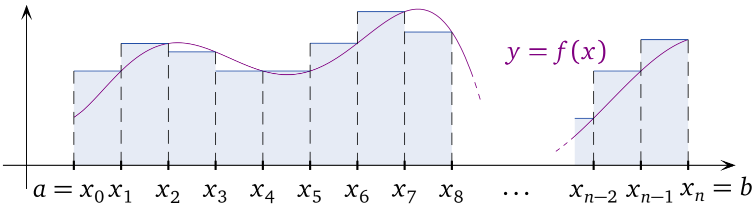
- Pour tout $f \in \mathscr{CM}\big([a,b],\mathbb{C}\big)$: $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\,\frac{b-a}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\,\frac{b-a}{n}\right).$
- Si de plus f est de classe $\mathscr{C}^1$: $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{=} \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\,\frac{b-a}{n}\right) + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right).$

Explication

- Ce théorème affirme en particulier l'EXISTENCE des deux limites.
- On ne comprend les sommes de Riemann qu'en les dessinant. Pour n fixé, on a noté ci-dessous x_k le point $a+k\,\dfrac{b-a}{n}$.



L'aire du domaine coloré vaut : $\displaystyle\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\,\frac{b-a}{n}\right).$



L'aire du domaine coloré vaut : $\displaystyle\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\,\frac{b-a}{n}\right).$

Démonstration Nous prouverons le résultat dans le seul cas où f est K-lipschitzienne pour un certain $K>0$ — c'est vrai en particulier si f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur le SEGMENT $[a,b]$ d'après le théorème des bornes atteintes et l'inégalité des accroissements finis. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, si on pose : $x_k = a+k\,\dfrac{b-a}{n}$ pour tout $k\in[\![0,n]\!]$:

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\right| = \left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,\mathrm{d}x - \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x_k)\,\mathrm{d}x\right| = \left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} \big(f(x)-f(x_k)\big)\,\mathrm{d}x\right|$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} \big|f(x)-f(x_k)\big|\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} K(x-x_k)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n-1} K\left[\frac{(x-x_k)^2}{2}\right]_{x=x_k}^{x=x_{k+1}} = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{K(b-a)^2}{2n^2} = \frac{K(b-a)^2}{2n}.$$

Le théorème d'encadrement montre finalement à la fois la convergence des sommes de Riemann et la majoration de l'écart en $\mathrm{O}\left(\dfrac{1}{n}\right)$. ■

Exemple $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k} = \ln 2.$

Démonstration Par continuité de $x\longmapsto \dfrac{1}{1+x}$ sur $[0,1]$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\dfrac{k}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t} = \ln 2.$

6.2 Méthode des trapèzes

Nous venons de voir que l'erreur dans le cas $\mathscr{C}^1$ de la méthode des rectangles est un $\mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)$ si n désigne le nombre de termes sommés. Cette majoration de l'erreur n'est pas très bonne car $\frac{1}{n}$ ne tend pas vers 0 rapidement lorsque n tend vers $+\infty$. L'approximation d'une intégrale par des sommes de Riemann n'est donc pas pleinement satisfaisante. Nous présentons ci-dessous une méthode — hors programme — proche de la précédente mais de convergence accélérée $\frac{1}{n^2}$, appelée la *méthode des trapèzes*.

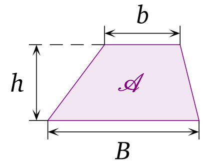
Théorème (Méthode des trapèzes)

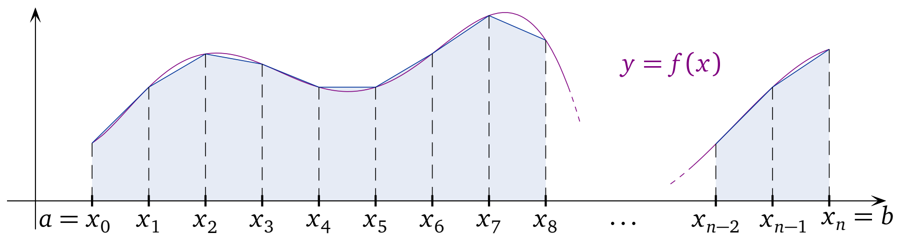
- Pour tout $f \in \mathscr{CM}\big([a,b],\mathbb{C}\big)$: $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f\left(a+k\,\frac{b-a}{n}\right)\right).$
- Si de plus f est de classe $\mathscr{C}^2$: $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{=} \frac{b-a}{n}\left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f\left(a+k\,\frac{b-a}{n}\right)\right) + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$

Démonstration Nous avons démontré ce résultat en TD au chapitre « Dérivabilité ». ■

✌ **Explication** ✌ Étrangement, le terme : $\displaystyle\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(a+k\,\frac{b-a}{n}\right)$ est presque le terme que nous donnait la méthode des rectangles, aux bornes près, mais d'où sort cette formule ? L'idée, c'est qu'au lieu d'approximer f par un plateau sur $[x_k, x_{k+1}]$ pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, on l'approxime maintenant par une fonction affine et les rectangles sont remplacés par des trapèzes. Il n'est pas dur de se convaincre, intuitivement, que l'approximation par des trapèzes est meilleure que l'approximation par des rectangles.

Rappelons pour les étourdis que l'aire d'un trapèze est donnée par la formule suivante : $\mathscr{A} = \dfrac{(B+b)\times h}{2}$.





L'aire du domaine coloré est : $\displaystyle\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f(x_k)+f(x_{k+1})}{2}$.

Mais d'où voit-on surgir l'approximation : $\displaystyle\frac{b-a}{n}\left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f\left(a+k\,\frac{b-a}{n}\right)\right)$ de $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$? C'est juste un petit calcul :

$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f(x_k)+f(x_{k+1})}{2} = \frac{b-a}{n}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f(x_k)}{2} + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f(x_{k+1})}{2}\right) = \frac{b-a}{n}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f(x_k)}{2} + \sum_{k=1}^{n}\frac{f(x_k)}{2}\right)$$
$$= \frac{b-a}{n}\left(\frac{f(x_0)+f(x_n)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)\right) = \frac{b-a}{n}\left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f\left(a+k\,\frac{b-a}{n}\right)\right).$$