Introduction à la décomposition en éléments simples

Les résultats de ce chapitre seront revus avec davantage de rigueur et de profondeur aux chapitres « Polynômes » et « Arithmétique des polynômes et fractions rationnelles ». Nous nous contenterons ici d'une présentation informelle. L'indéterminée des polynômes sera notée X et on parlera par exemple du polynôme $X^3 - 2X + 1$ plutôt que de la fonction polynomiale $x \longmapsto x^3 - 2x + 1$. Il y a une bonne raison à cela, mais nous la laisserons momentanément de côté.

1 Division euclidienne des polynômes

Étant donnés deux polynômes A et B à coefficients complexes — généralement réels — on sera souvent amené à se demander si B divise A ou non, i.e. si on peut écrire $A = BC$ pour un certain polynôme C. L'*algorithme de la division euclidienne* permet d'en décider. Présentons-le sur l'exemple de la division de $7X^5 + 4X^4 + 2X^3 - X + 5$ par $X^2 + 2$.

On réserve une colonne aux monômes de degré 2 même s'il n'en apparaît pas pour le moment.

$$
\begin{array}{rrrrrr|l}
\boxed{7X^5} & +4X^4 & +2X^3 & \times & -X & +5 & \boxed{X^2}+2 \\
\cline{7-7}
-7X^5 & & -14X^3 & & & & 7X^3 \\
\cline{1-6}
 & 4X^4 & -12X^3 & & -X & +5 &
\end{array}
$$

On divise $7X^5$ par X^2 (résultat $7X^3$), puis on retranche $7X^3 \times \left(X^2+2\right)$ du polynôme initial, et ainsi de suite.

… ensuite…

$$
\begin{array}{rrrrrr|l}
7X^5 & +4X^4 & +2X^3 & & -X & +5 & X^2+2 \\
\cline{7-7}
-7X^5 & & -14X^3 & & & & 7X^3+4X^2 \\
\cline{1-6}
 & 4X^4 & -12X^3 & & -X & +5 & \\
 & -4X^4 & & -8X^2 & & & \\
\cline{2-6}
 & & -12X^3 & -8X^2 & -X & +5 &
\end{array}
$$

… et enfin…

$$
\begin{array}{rrrrrr|l}
7X^5 & +4X^4 & +2X^3 & & -X & +5 & X^2+2 \\
\cline{7-7}
-7X^5 & & -14X^3 & & & & 7X^3+4X^2-12X-8 \\
\cline{1-6}
 & 4X^4 & -12X^3 & & -X & +5 & \\
 & -4X^4 & & -8X^2 & & & \\
\cline{2-6}
 & & -12X^3 & -8X^2 & -X & +5 & \\
 & & +12X^3 & & +24X & & \\
\cline{3-6}
 & & & -8X^2 & +23X & +5 & \\
 & & & +8X^2 & & +16 & \\
\cline{4-6}
 & & & & 23X & +21 &
\end{array}
$$

Fin de l'algorithme car $23X + 21$ est **strictement inférieur** à X^2+2 en degré.

Conclusion : $\underbrace{7X^5 + 4X^4 + 2X^3 - X + 5}_{\text{Dividende}} = \underbrace{\left(X^2+2\right)}_{\text{Diviseur}} \times \underbrace{\left(7X^3 + 4X^2 - 12X - 8\right)}_{\text{Quotient}} + \underbrace{23X + 21}_{\text{Reste}}.$

En particulier, $7X^5 + 4X^4 + 2X^3 - X + 5$ n'est pas divisible par X^2+2 car le reste obtenu **n'est pas** nul.

Définition-théorème (Multiplicité) Soient P un polynôme et $\lambda \in \mathbb{C}$. La plus grande puissance de $X - \lambda$ qu'on peut mettre en facteur dans P est appelée la *multiplicité de λ dans P*. Une racine de multiplicité 1 est dite *simple*, une racine de multiplicité 2 est dite *double*.

Exemple Notons P le polynôme $(X-3)^2\left(X^2+X+1\right)$.

— P est divisible par $(X-3)^2$, mais pas par $(X-3)^3$ car X^2+X+1 n'admet pas 3 pour racine, donc n'est pas divisible par $X-3$. Conclusion : P admet 3 pour racine double.

— P est divisible par $X - \mathrm{j}$ car $X^2+X+1 = (X-\mathrm{j})\left(X-\overline{\mathrm{j}}\right)$, mais pas par $(X-\mathrm{j})^2$, donc admet j comme racine simple. Même chose pour $\overline{\mathrm{j}}$.

Exemple Le polynôme $Q = X^3 - 4X^2 + 7X - 6$ admet 2 pour racine car $Q(2) = 0$, et après division euclidienne par $X - 2$: $Q = (X-2)\left(X^2 - 2X + 3\right)$. Ensuite, après un rapide calcul : $Q = (X-2)\left(X - 1 - \mathrm{i}\sqrt{2}\right)\left(X - 1 + \mathrm{i}\sqrt{2}\right)$, donc Q possède trois racines simples : 2, $1 + \mathrm{i}\sqrt{2}$ et $1 - \mathrm{i}\sqrt{2}$.

2 Factorisations irréductibles sur $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}$

Nous verrons en temps voulu que tout polynôme à coefficients complexes — donc éventuellement réels — peut être décomposé d'une et une seule façon, à une constante multiplicative près, comme un produit de polynômes $X - \lambda$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$. Ce théorème majeur est appelé le *théorème de d'Alembert-Gauss*. Par exemple :

$$2X^3 + 4X^2 - 48X = 2X(X-4)(X+6), \qquad 3X^2 + 27 = 3(X-3\mathrm{i})(X+3\mathrm{i}), \qquad X^4 + 2X^2 + 1 = (X-\mathrm{i})^2(X+\mathrm{i})^2$$
$$\text{et} \qquad X^5 - X^4 + 2X^3 - 10X^2 + 13X - 5 = (X-1)^3\big(X+1-2\mathrm{i}\big)\big(X+1+2\mathrm{i}\big).$$

De telles décompositions sont appelées *factorisations irréductibles sur* $\mathbb{C}$ et sont l'analogue polynomial de la factorisation première des entiers.

À présent, quand un polynôme est **à coefficients réels**, ses racines **non réelles** peuvent être regroupées par paires de conjuguées de même multiplicité. Reprenons ici les exemples précédents :

$$2X^3 + 4X^2 - 48X = 2X(X-4)(X+6) \quad \text{(pas de racine non réelle)}, \qquad 3X^2 + 27 = 3\left(X^2+9\right) \quad \text{(regroupement de } 3\mathrm{i} \text{ et } -3\mathrm{i}),$$
$$X^4 + 2X^2 + 1 = \left(X^2+1\right)^2 \quad \text{(regroupement de i et } -\mathrm{i})$$
$$\text{et} \qquad X^5 - X^4 + 2X^3 - 10X^2 + 13X - 5 = (X-1)^3\left(X^2 + 2X + 5\right) \quad \text{(regroupement de } -1+2\mathrm{i} \text{ et } -1-2\mathrm{i}).$$

Cette fois, les décompositions sont appelées *factorisations irréductibles sur* $\mathbb{R}$ et font intervenir deux types de polynômes :

- des polynômes $X - \lambda$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$,
- des polynômes $X^2 + aX + b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$, mais pas n'importe lesquels. Issus du regroupement de deux racines non réelles conjuguées, ils ont forcément un **discriminant strictement négatif**.

Attention ! En dépit des apparences, $(X+1)\left(X^2 - 3X + 2\right)^2$ n'est pas une factorisation irréductible sur $\mathbb{R}$ car le polynôme $X^2 - 3X + 2$ peut encore être brisé en morceaux plus petits à coefficients réels : $X^2 - 3X + 2 = (X-1)(X-2)$. Un polynôme de degré 2 qui apparaît dans une factorisation irréductible sur $\mathbb{R}$ est forcément de discriminant strictement négatif.

3 Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$

Tout le monde sait réduire une somme de fractions au même dénominateur :

$$X + \frac{1}{X} - \frac{1}{X+1} = \frac{X^3 + X^2 + 1}{X(X+1)} \qquad \text{et} \qquad \frac{2}{X-1} + \frac{3}{X+2} - \frac{1}{X+3} = \frac{4X^2 + 15X + 5}{(X-1)(X+2)(X+3)}.$$

Pour le dire vite, on appelle *décomposition en éléments simples sur* $\mathbb{R}$ l'opération inverse qui brise une fraction rationnelle « compliquée » à coefficients réels en une somme de morceaux « simples » eux-mêmes à coefficients réels. Nous ne ferons rien d'une telle décomposition dans ce chapitre, nous préparons seulement le terrain du prochain chapitre « Techniques élémentaires de calcul intégral ». Pour une première présentation, penchons-nous sur l'exemple instructif de la fraction :

$$\frac{X^8 + 8X + 3}{(X-1)^3(X-2)\left(X^2+1\right)^2}.$$

- **Calcul de la partie entière :** On effectue la division euclidienne de $X^8 + 8X + 3$ par $(X-1)^3(X-2)\left(X^2+1\right)^2$ pour en extraire le quotient : $X^8 + 8X + 3 = \underbrace{1}_{\text{Quotient}} \times (X-1)^3(X-2)\left(X^2+1\right)^2 + \underbrace{\ldots}_{\text{Reste}}$, puis on divise :

$$\frac{X^8 + 8X + 3}{(X-1)^3(X-2)\left(X^2+1\right)^2} = \boxed{1} + \boxed{\frac{\ldots}{(X-1)^3(X-2)\left(X^2+1\right)^2}}.$$

Le quotient de la division euclidienne est aussi appelé la *partie entière* de la fraction.

À présent, le degré du numérateur est strictement inférieur au degré du dénominateur.

Quand le numérateur a dès le départ un degré strictement inférieur au degré du dénominateur, cette étape de division euclidienne peut être sautée car la partie entière est alors nulle.

- **Factorisation irréductible sur $\mathbb{R}$ du dénominateur :** Ici, le dénominateur $(X-1)^3(X-2)\left(X^2+1\right)^2$ est déjà sous forme irréductible car X^2+1 a un discriminant strictement négatif.
- **Forme de la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$:** On peut montrer que pour certains $a,b,c,d,e,f,g,h \in \mathbb{R}$:

$$\frac{X^8+8X+3}{(X-1)^3(X-2)\left(X^2+1\right)^2} = 1 + \boxed{\frac{a}{(X-1)^3}+\frac{b}{(X-1)^2}+\frac{c}{X-1}} + \boxed{\frac{d}{X-2}} + \boxed{\frac{eX+f}{\left(X^2+1\right)^2}+\frac{gX+h}{X^2+1}}.$$

Au dénominateur, $X-1$ est à la puissance 3, donc la décomposition en éléments simples contient trois termes.

Comme $X-2$ est à la puissance 1, un seul terme.

X^2+1 est à la puissance 2, donc deux termes.

C'est cela la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$ de $\dfrac{X^8+8X+3}{(X-1)^3(X-2)\left(X^2+1\right)^2}$. Nous apprendrons plus tard à calculer les réels a, b, c, d, e, f, g et h, mais tâchons d'abord de bien comprendre ce qui vient de se passer.

— Chaque facteur $(X-\lambda)^m$ du dénominateur est devenu une somme : $\dfrac{a_m}{(X-\lambda)^m}+\dfrac{a_{m-1}}{(X-\lambda)^{m-1}}+\ldots+\dfrac{a_1}{X-\lambda}$ avec $a_1,\ldots,a_m \in \mathbb{R}$.

— Chaque facteur $\left(X^2+aX+b\right)^m$ du dénominateur dans lequel X^2+aX+b est à discriminant strictement négatif est devenu une somme : $\dfrac{c_mX+d_m}{\left(X^2+aX+b\right)^m}+\dfrac{c_{m-1}X+d_{m-1}}{\left(X^2+aX+b\right)^{m-1}}+\ldots+\dfrac{c_1X+d_1}{X^2+aX+b}$ avec $c_1,\ldots,c_m,d_1,\ldots,d_m \in \mathbb{R}$.

Exemple Dans les exemples suivants, on a pris soin de faire apparaître la partie entière même quand elle est nulle.

- Pour certains $a,b \in \mathbb{R}$: $\dfrac{X^3-2X+4}{X^2-1} = X + \dfrac{a}{X-1}+\dfrac{b}{X+1}$.
- Pour certains $a,b,c,d,e \in \mathbb{R}$: $\dfrac{X^6+3}{X(X+1)(X-4)^3} = X+11+\dfrac{a}{X}+\dfrac{b}{X+1}+\dfrac{c}{(X-4)^3}+\dfrac{d}{(X-4)^2}+\dfrac{e}{X-4}$.
- Pour certains $a,b,c \in \mathbb{R}$: $\dfrac{X+1}{(X-3)\left(X^2+X+2\right)} = 0+\dfrac{a}{X-3}+\dfrac{bX+c}{X^2+X+2}$.
- Pour certains $a,b,c,d,e,f \in \mathbb{R}$: $\dfrac{1}{X^2\left(X^2+X+1\right)^2} = 0+\dfrac{a}{X^2}+\dfrac{b}{X}+\dfrac{cX+d}{\left(X^2+X+1\right)^2}+\dfrac{eX+f}{X^2+X+1}$.

À présent, pour calculer les coefficients d'une décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$, nous exploiterons quatre techniques de calcul :

— multiplier par $(X-\lambda)^m$ puis évaluer en λ, y compris lorsque $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$,

— multiplier par X puis passer à la limite en $+\infty$,

— évaluer en un point,

— mettre au même dénominateur et identifier.

Quelques exemples vaudront ici mieux qu'un long discours.

Exemple $\dfrac{X+3}{(X+1)^2(X+2)} = \dfrac{2}{(X+1)^2}-\dfrac{1}{X+1}+\dfrac{1}{X+2}$.

Démonstration

- **Forme de la décomposition en éléments simples :** La partie entière est nulle, donc pour certains $a,b,c \in \mathbb{R}$: $\bigstar \quad \dfrac{X+3}{(X+1)^2(X+2)} = \dfrac{a}{(X+1)^2}+\dfrac{b}{X+1}+\dfrac{c}{X+2}$.
- **Calcul de a, b et c par simple identification :** Toute décomposition en éléments simples peut être calculée par identification, mais au prix de calculs souvent importants. Ici :

$$\frac{X+3}{(X+1)^2(X+2)} = \frac{a}{(X+1)^2}+\frac{b}{X+1}+\frac{c}{X+2} = \frac{a(X+2)+b(X+1)(X+2)+c(X+1)^2}{(X+1)^2(X+2)}$$
$$= \frac{(b+c)X^2+(a+3b+2c)X+(2a+2b+c)}{(X+1)^2(X+2)},$$

donc par identification : $b+c=0$, $a+3b+2c=1$ et $2a+2b+c=3$. Il « suffit » dès lors de résoudre ce système linéaire de 3 équations à 3 inconnues pour conclure. Pratiquée brutalement, l'identification est ainsi déjà pénible pour calculer 3 coefficients, mais elle l'est encore plus pour davantage de coefficients.

On reprend ci-dessous le travail en valorisant l'économie des calculs.

- **Calcul de a :** On multiplie ★ par $(X+1)^2$ puis on évalue en -1 : $a=2$. En voilà une bonne technique !
- **Calcul de c :** On recommence. On multiplie ★ par $X+2$ puis on évalue en -2 : $c=1$.
- **Calcul de b :** On ne peut malheureusement pas reproduire le raisonnement précédent pour calculer b. Multiplier ★ par $X+1$ puis évaluer en -1 nous conduirait en effet à diviser par 0 à cause du terme $(X+1)^2$. Qu'à cela ne tienne, plusieurs approches sont envisageables, AU CHOIX :
  - On peut multiplier ★ par X puis passer à la limite en $+\infty$: $0=0+b+c$, donc $b=-c=-1$. On obtient généralement ainsi une équation simple et agréable.
  - On peut évaluer ★ en un point, par exemple en 0 : $\dfrac{3}{2}=a+b+\dfrac{c}{2}$, ce qui donne aussi $b=-1$. Les équations qu'on obtient en évaluant en un point sont souvent un peu plus compliquées que celles qu'on obtient en passant à la limite en $+\infty$.
  - Comme il ne reste qu'un coefficient à calculer, on peut aussi finir par simple identification :
  $$\frac{X+3}{(X+1)^2(X+2)}=\frac{2}{(X+1)^2}+\frac{b}{X+1}+\frac{1}{X+2}=\frac{2(X+2)+b(X+1)(X+2)+(X+1)^2}{(X+1)^2(X+2)}=\frac{(b+1)X^2+\ldots X+\ldots}{(X+1)^2(X+2)}.$$
  On n'a même pas besoin d'identifier tous les coefficients, le coefficient de degré 2 suffit par exemple : $0=b+1$, donc de nouveau $b=-1$.

Exemple $\dfrac{X^4}{(X+3)\left(X^2+X+3\right)}=X-4+\dfrac{9}{X+3}+\dfrac{X+3}{X^2+X+3}$.

Démonstration

- **Partie entière :** La division euclidienne de X^4 par $(X+3)\left(X^2+X+3\right)$ s'écrit :
$$X^4=(X+3)\left(X^2+X+3\right)\underbrace{(X-4)}_{\text{Quotient}}+\underbrace{10X^2+15X+36}_{\text{Reste}},$$ donc la partie entière cherchée vaut $X-4$.
- **Forme de la décomposition en éléments simples :** Pour certains $a,b,c\in\mathbb{R}$:
$$\frac{X^4}{(X+3)\left(X^2+X+3\right)}=X-4+\frac{a}{X+3}+\frac{bX+c}{X^2+X+3},$$
mais en tenant compte de la division euclidienne calculée juste avant, on peut aussi dire que :
$$\bigstar\qquad \frac{10X^2+15X+36}{(X+3)\left(X^2+X+3\right)}=\frac{a}{X+3}+\frac{bX+c}{X^2+X+3}.$$
Il est toujours plus facile de calculer les coefficients d'une décomposition en éléments simples quand la partie entière est nulle.
- **Calcul de a :** On multiplie ★ par $X+3$ puis on évalue en -3 : $a=9$.
- **Calcul de b :** On multiplie ★ par X puis on passe à la limite en $+\infty$: $10=a+b$, donc $b=1$.
- **Calcul de c :** On évalue par exemple ★ en 0 : $0=-4+\dfrac{a}{3}+\dfrac{c}{3}$, donc $c=12-a=3$.

Exemple $\dfrac{1}{(X-1)^2\left(X^2+4\right)}=\dfrac{1}{5(X-1)^2}-\dfrac{2}{25(X-1)}+\dfrac{2X-3}{25\left(X^2+4\right)}$.

Démonstration

- **Forme de la décomposition en éléments simples :** La partie entière est nulle, donc pour certains $a,b,c\in\mathbb{R}$: $$\bigstar\qquad \frac{1}{(X-1)^2\left(X^2+4\right)}=\frac{a}{(X-1)^2}+\frac{b}{X-1}+\frac{cX+d}{X^2+4}.$$
- **Calcul de a :** On multiplie ★ par $(X-1)^2$ puis on évalue en 1 : $a=\dfrac{1}{5}$.
- **Calcul de c et d :** Le polynôme X^2+4 admet $2\mathrm{i}$ et $-2\mathrm{i}$ pour racines. On multiplie ★ par X^2+4 puis on évalue en $2\mathrm{i}$: $2\mathrm{i}c+d=\dfrac{1}{(2\mathrm{i}-1)^2}=\dfrac{1}{-3-4\mathrm{i}}=\dfrac{-3+4\mathrm{i}}{25}$. Or c et d sont des RÉELS, donc par identification des parties réelles et imaginaires : $c=\dfrac{2}{25}$ et $d=-\dfrac{3}{25}$.
- **Calcul de b :** On multiplie ★ par X puis on passe à la limite en $+\infty$: $0=b+c$, ce qui donne finalement $b=-c=-\dfrac{2}{25}$.