Introduction à la décomposition en éléments simples

Les résultats du présent chapitre seront revus avec davantage de rigueur et de profondeur au chapitre « Arithmétique des polynômes et fractions rationnelles ». Nous nous contenterons ici d'une présentation informelle.

1 Division euclidienne des polynômes

Étant donnés deux polynômes A et B à coefficients complexes — généralement réels — on est souvent amené en mathématiques à se demander si B divise A ou non, i.e. si l'on peut écrire : $A = BC$ pour un certain polynôme C. On a recours pour ce faire à un algorithme — l'*algorithme de la division euclidienne*. Présentons-le sur un exemple, celui de la division de $7X^5 + 4X^4 + 2X^3 - X + 5$ par $X^2 + 2$.

Laisser la place des monômes de degré 2 même s'il n'en apparaît pas pour le moment.

$$
\begin{array}{rrrrrr|l}
 & 7X^5 & +4X^4 & +2X^3 & & -X+5 & X^2+2 \\ \cline{7-7}
- & 7X^5 & & -14X^3 & & & 7X^3 \\ \cline{2-6}
 & & 4X^4 & -12X^3 & & -X+5 &
\end{array}
$$

… ensuite…

$$
\begin{array}{rrrrrr|l}
 & 7X^5 & +4X^4 & +2X^3 & & -X+5 & X^2+2 \\ \cline{7-7}
- & 7X^5 & & -14X^3 & & & 7X^3+4X^2 \\ \cline{2-6}
 & & 4X^4 & -12X^3 & & -X+5 & \\
 & & -4X^4 & & -8X^2 & & \\ \cline{3-6}
 & & & -12X^3 & -8X^2 & -X+5 &
\end{array}
$$

On divise $7X^5$ par X^2 — résultat $7X^3$. On retranche ensuite $7X^3(X^2+2)$ du polynôme initial. On répète cette opération dans les étapes suivantes.

… et enfin…

$$
\begin{array}{rrrrrr|l}
 & 7X^5 & +4X^4 & +2X^3 & & -X+5 & X^2+2 \\ \cline{7-7}
- & 7X^5 & & -14X^3 & & & 7X^3+4X^2-12X-8 \\ \cline{2-6}
 & & 4X^4 & -12X^3 & & -X+5 & \\
 & & -4X^4 & & -8X^2 & & \\ \cline{3-6}
 & & & -12X^3 & -8X^2 & -X+5 & \\
 & & & +12X^3 & & +24X & \\ \cline{4-6}
 & & & & -8X^2 & +23X+5 & \\
 & & & & +8X^2 & +16 & \\ \cline{5-6}
 & & & & & 23X+21 &
\end{array}
$$

À ce stade, nous ne pouvons diviser davantage car $23X + 21$ est de degré **strictement inférieur** au degré de $X^2 + 2$.
Conclusion : $\underbrace{7X^5 + 4X^4 + 2X^3 - X + 5}_{\text{Dividende}} = \underbrace{\left(X^2+2\right)}_{\text{Diviseur}} \times \underbrace{\left(7X^3 + 4X^2 - 12X - 8\right)}_{\text{Quotient}} + \underbrace{23X + 21}_{\text{Reste}}.$

En particulier, $7X^5 + 4X^4 + 2X^3 - X + 5$ n'est pas divisible par $X^2 + 2$ car le reste obtenu **n'est pas** nul.

Définition-théorème (Racine d'un polynôme, multiplicité) Soient P un polynôme et $\lambda \in \mathbb{C}$.

- On dit que λ est une *racine de P* si : $P(\lambda) = 0$.

  Factorisation par une racine : λ est racine de P si et seulement si pour un certain polynôme Q : $P = (X - \lambda)Q$.
- La plus grande puissance de $X - \lambda$ qu'on peut mettre en facteur dans P est appelée la *multiplicité de λ dans P*. Une racine de multiplicité 1 est dite *simple*, une racine de multiplicité 2 est dite *double*.

Exemple Notons P le polynôme $(X-3)^2\big(X^2+X+1\big)$.

— P est divisible par $(X-3)^2$, mais pas par $(X-3)^3$ car X^2+X+1 n'admet pas 3 pour racine, donc n'est pas divisible par $X-3$. Conclusion : P admet 3 pour racine de multiplicité 2.

— P est divisible par $X-\mathrm{j}$ car : $X^2+X+1=(X-\mathrm{j})\big(X-\overline{\mathrm{j}}\,\big)$, mais pas par $(X-\mathrm{j})^2$, donc admet j comme racine simple. Même chose pour $\overline{\mathrm{j}}$.

Exemple Notons P le polynôme X^3-4X^2+7X-6.

— P admet 2 pour racine car : $P(2)=0$, et après division euclidienne de P par $X-2$: $P=(X-2)\big(X^2-2X+3\big)$.

— Ensuite, le polynôme X^2-2X+3 admet $1+\mathrm{i}\sqrt{2}$ et $1-\mathrm{i}\sqrt{2}$ pour racines, donc : $P=(X-2)\big(X-1-\mathrm{i}\sqrt{2}\big)\big(X-1+\mathrm{i}\sqrt{2}\big)$.

Le polynôme P admet finalement trois racines simples : 2, $1+\mathrm{i}\sqrt{2}$ et $1-\mathrm{i}\sqrt{2}$.

2 Factorisations irréductibles sur $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}$

- Nous verrons en temps voulu que tout polynôme à coefficients complexes — donc éventuellement réels — peut être décomposé d'une et une seule façon, à une constante multiplicative près, comme un produit de polynômes $X-\lambda$ avec $\lambda\in\mathbb{C}$. Ce théorème fondamental est appelé le *théorème de d'Alembert-Gauss*. Par exemple :

$$2X^3+4X^2-48X=2X(X-4)(X+6),\qquad 3X^2+27=3(X-3\mathrm{i})(X+3\mathrm{i}),\qquad X^4+2X^2+1=(X-\mathrm{i})^2(X+\mathrm{i})^2$$
$$\text{et}\qquad X^5-X^4+2X^3-10X^2+13X-5=(X-1)^3(X+1-2\mathrm{i})(X+1+2\mathrm{i}).$$

  De telles décompositions sont appelées *factorisations irréductibles sur* $\mathbb{C}$ et sont l'analogue polynomial de la factorisation première des entiers.

- À présent, quand un polynôme est **à coefficients réels**, ses racines **non réelles** peuvent être regroupées par paires de conjuguées de même multiplicité. Reprenons ici les exemples précédents :

$$2X^3+4X^2-48X=2X(X-4)(X+6)\quad\text{(pas de racine non réelle)},\qquad 3X^2+27=3\big(X^2+9\big)\quad\text{(regroupement de } 3\mathrm{i} \text{ et } -3\mathrm{i}),$$
$$X^4+2X^2+1=\big(X^2+1\big)^2\quad\text{(regroupement de i et } -\mathrm{i})$$
$$\text{et}\qquad X^5-X^4+2X^3-10X^2+13X-5=(X-1)^3\big(X^2+2X+5\big)\quad\text{(regroupement de } -1+2\mathrm{i} \text{ et } -1-2\mathrm{i}).$$

  Cette fois, les décompositions obtenues sont appelées *factorisations irréductibles sur* $\mathbb{R}$ et font intervenir deux types de polynômes :

  — des polynômes $X-\lambda$ avec $\lambda\in\mathbb{R}$,

  — des polynômes X^2+aX+b avec $a,b\in\mathbb{R}$, mais pas n'importe lesquels. Issus du regroupement de deux racines non réelles conjuguées, ils ont forcément un **discriminant strictement négatif**.

✖ **Attention !** ✖ En dépit des apparences, $(X+1)\big(X^2-3X+2\big)^2$ n'est pas une factorisation irréductible sur $\mathbb{R}$ car le polynôme X^2-3X+2 peut encore être brisé en de plus petits morceaux à coefficients réels : $X^2-3X+2=(X-1)(X-2)$. Un polynôme du second degré qui apparaît dans une factorisation irréductible sur $\mathbb{R}$ est forcément de discriminant négatif.

3 Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$

Tout le monde sait réduire une somme de fractions au même dénominateur :

$$X+\frac{1}{X}-\frac{1}{X+1}=\frac{X^3+X^2+1}{X(X+1)}\qquad\text{et}\qquad\frac{2}{X-1}+\frac{3}{X+2}-\frac{1}{X+3}=\frac{4X^2+15X+5}{(X-1)(X+2)(X+3)}.$$

Pour le dire vite, on appelle *décomposition en éléments simples sur* $\mathbb{R}$ l'opération inverse qui brise une fraction rationnelle « compliquée » à coefficients réels en une somme de morceaux « simples » eux-mêmes à coefficients réels. Nous ne ferons rien d'une telle décomposition dans ce chapitre, mais nous nous en servirons beaucoup au prochain chapitre « Calculs de primitives et d'intégrales ». Pour une première présentation, nous nous pencherons sur l'exemple instructif de la fraction $\dfrac{X^8+8X+3}{(X-1)^3(X-2)\big(X^2+1\big)^2}$.

- **Calcul de la partie entière :** On effectue la division euclidienne de X^8+8X+3 par $(X-1)^3(X-2)\left(X^2+1\right)^2$ pour en extraire le quotient : $X^8+8X+3 = \underbrace{1}_{\text{Quotient}} \times (X-1)^3(X-2)\left(X^2+1\right)^2 + \underbrace{\ldots}_{\text{Reste}}$, puis on divise :

$$\frac{X^8+8X+3}{(X-1)^3(X-2)\left(X^2+1\right)^2} = \boxed{1} + \boxed{\frac{\ldots}{(X-1)^3(X-2)\left(X^2+1\right)^2}}.$$

Le quotient de la division euclidienne est aussi appelé la *partie entière* de la fraction.

À présent, le dégré du numérateur est strictement inférieur au degré du dénominateur.

Quand le numérateur a dès le départ un degré strictement inférieur au degré du dénominateur, cette étape de division euclidienne peut être sautée car la partie entière est alors nulle.

- **Factorisation irréductible sur $\mathbb{R}$ du dénominateur :** Ici, le dénominateur $(X-1)^3(X-2)\left(X^2+1\right)^2$ est déjà sous forme irréductible car X^2+1 a un discriminant strictement négatif.

- **Forme de la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$:** On peut montrer que pour certains $a,b,c,d,e,f,g,h \in \mathbb{R}$:

$$\frac{X^8+8X+3}{(X-1)^3(X-2)\left(X^2+1\right)^2} = 1 + \boxed{\frac{a}{(X-1)^3} + \frac{b}{(X-1)^2} + \frac{c}{X-1}} + \boxed{\frac{d}{X-2}} + \boxed{\frac{eX+f}{\left(X^2+1\right)^2} + \frac{gX+h}{X^2+1}}.$$

Au dénominateur, comme $X-1$ apparaît à la puissance 3, la décomposition en éléments simples contient un terme $\dfrac{a}{(X-1)^3}$, un terme $\dfrac{b}{(X-1)^2}$ et un terme $\dfrac{c}{X-1}$.

Comme $X-2$ apparaît à la puissance 1, on écrit seulement un terme $\dfrac{d}{X-2}$.

Comme X^2+1 apparaît à la puissance 2, on écrit un terme $\dfrac{eX+f}{\left(X^2+1\right)^2}$ et un terme $\dfrac{gX+h}{X^2+1}$.

C'est cela la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$ de $\dfrac{X^8+8X+3}{(X-1)^3(X-2)\left(X^2+1\right)^2}$. Il s'agira bien sûr à terme de calculer les réels a, b, c, d, e, f, g et h, mais tâchons d'abord de mieux comprendre ce qui vient de se passer.

— Chaque facteur $(X-\lambda)^m$ du dénominateur est devenu une somme : $\dfrac{a_m}{(X-\lambda)^m} + \dfrac{a_{m-1}}{(X-\lambda)^{m-1}} + \ldots + \dfrac{a_1}{X-\lambda}$ avec $a_1,\ldots,a_m \in \mathbb{R}$.

— Chaque facteur $\left(X^2+aX+b\right)^m$ du dénominateur dans lequel X^2+aX+b est à discriminant négatif est devenu une somme : $\dfrac{c_mX+d_m}{\left(X^2+aX+b\right)^m} + \dfrac{c_{m-1}X+d_{m-1}}{\left(X^2+aX+b\right)^{m-1}} + \ldots + \dfrac{c_1X+d_1}{X^2+aX+b}$ avec $c_1,\ldots,c_m,d_1,\ldots,d_m \in \mathbb{R}$.

Exemple Dans les exemples suivants, on a pris soin de faire apparaître la partie entière même quand elle est nulle.

- Pour certains $a,b \in \mathbb{R}$: $\dfrac{X^3-2X+4}{X^2-1} = X + \dfrac{a}{X-1} + \dfrac{b}{X+1}$.
- Pour certains $a,b,c,d,e \in \mathbb{R}$: $\dfrac{X^6+3}{X(X+1)(X-4)^3} = X+11 + \dfrac{a}{X} + \dfrac{b}{X+1} + \dfrac{c}{(X-4)^3} + \dfrac{d}{(X-4)^2} + \dfrac{e}{X-4}$.
- Pour certains $a,b,c \in \mathbb{R}$: $\dfrac{X+1}{(X-3)\left(X^2+X+2\right)} = 0 + \dfrac{a}{X-3} + \dfrac{bX+c}{X^2+X+2}$.
- Pour certains $a,b,c,d,e,f \in \mathbb{R}$: $\dfrac{1}{X^2\left(X^2+X+1\right)^2} = 0 + \dfrac{a}{X^2} + \dfrac{b}{X} + \dfrac{cX+d}{\left(X^2+X+1\right)^2} + \dfrac{eX+f}{X^2+X+1}$.

À présent, pour calculer les coefficients d'une décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$, nous développerons quatre techniques de calcul :

— multiplier par $(X-\lambda)^m$ puis évaluer en λ, y compris lorsque : $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$,

— multiplier par X puis passer à la limite en $+\infty$,

— évaluer en un point,

— mettre au même dénominateur et identifier.

Des exemples vaudront ici mieux qu'un long discours.

Exemple $\dfrac{X+3}{(X+1)^2(X+2)} = \dfrac{2}{(X+1)^2} - \dfrac{1}{X+1} + \dfrac{1}{X+2}.$

Démonstration

- **Forme de la décomposition en éléments simples :** La partie entière est nulle, donc pour certains $a,b,c \in \mathbb{R}$: $\bigstar \quad \dfrac{X+3}{(X+1)^2(X+2)} = \dfrac{a}{(X+1)^2} + \dfrac{b}{X+1} + \dfrac{c}{X+2}.$
- **Calcul de a, b et c par simple identification :** Toute décomposition en éléments simples peut être calculée par identification, mais au prix de calculs souvent importants. Ici :

$$\frac{X+3}{(X+1)^2(X+2)} = \frac{a}{(X+1)^2} + \frac{b}{X+1} + \frac{c}{X+2} = \frac{a(X+2)+b(X+1)(X+2)+c(X+1)^2}{(X+1)^2(X+2)}$$
$$= \frac{(b+c)X^2+(a+3b+2c)X+(2a+2b+c)}{(X+1)^2(X+2)},$$

donc par identification : $b+c=0$, $a+3b+2c=1$ et $2a+2b+c=3$. Il « suffit » dès lors de résoudre ce système linéaire de 3 équations à 3 inconnues pour conclure. Pratiquée brutalement, l'identification est ainsi déjà pénible pour calculer 3 coefficients, mais elle l'est encore plus pour davantage de coefficients.

On reprend ci-dessous le travail en valorisant l'économie des calculs.

- **Calcul de a :** On multiplie $\bigstar$ par $(X+1)^2$ puis on évalue en -1 : $a=2$. En voilà une bonne technique !
- **Calcul de c :** On recommence. On multiplie $\bigstar$ par $X+2$ puis on évalue en -2 : $c=1$.
- **Calcul de b :** On ne peut malheureusement pas reproduire le raisonnement précédent pour calculer b. Multiplier $\bigstar$ par $X+1$ puis évaluer en -1 nous conduirait en effet à diviser par 0 à cause du terme $(X+1)^2$. Qu'à cela ne tienne, plusieurs approches sont envisageables, AU CHOIX :
  - On peut multiplier $\bigstar$ par X puis passer à la limite en $+\infty$: $0=0+b+c$, donc : $b=-c=-1$. On obtient généralement ainsi une équation simple et agréable.
  - On peut évaluer $\bigstar$ en un point, par exemple en 0 : $\dfrac{3}{2} = a+b+\dfrac{c}{2}$, ce qui donne aussi : $b=-1$. Les équations qu'on obtient en évaluant en un point sont souvent un peu plus compliquées que celles qu'on obtient en passant à la limite en $+\infty$.
  - Comme il ne reste qu'un coefficient à calculer, on peut aussi finir par simple identification :

$$\frac{X+3}{(X+1)^2(X+2)} = \frac{2}{(X+1)^2} + \frac{b}{X+1} + \frac{1}{X+2} = \frac{2(X+2)+b(X+1)(X+2)+(X+1)^2}{(X+1)^2(X+2)} = \frac{(b+1)X^2+\ldots X+\ldots}{(X+1)^2(X+2)}.$$

  On n'a même pas besoin d'identifier tous les coefficients, le coefficient de degré 2 suffit par exemple : $0=b+1$, donc de nouveau : $b=-1$.

Exemple $\dfrac{X^4}{(X+3)\big(X^2+X+3\big)} = X-4+\dfrac{9}{X+3} + \dfrac{X+3}{X^2+X+3}.$

Démonstration

- **Partie entière :** La division euclidienne de X^4 par $(X+3)\big(X^2+X+3\big)$ s'écrit :

$$X^4 = (X+3)\big(X^2+X+3\big)\underbrace{(X-4)}_{\text{Quotient}} + \underbrace{10X^2+15X+36}_{\text{Reste}}, \qquad \text{donc la partie entière cherchée vaut } X-4.$$

- **Forme de la décomposition en éléments simples :** Pour certains $a,b,c \in \mathbb{R}$:

$$\frac{X^4}{(X+3)\big(X^2+X+3\big)} = X-4+\frac{a}{X+3} + \frac{bX+c}{X^2+X+3},$$

mais en tenant compte de la division euclidienne calculée juste avant, on peut aussi dire que :

$$\bigstar \quad \frac{10X^2+15X+36}{(X+3)\big(X^2+X+3\big)} = \frac{a}{X+3} + \frac{bX+c}{X^2+X+3}.$$

Il est toujours plus facile de calculer les coefficients d'une décomposition en éléments simples quand la partie entière est nulle.

- **Calcul de a :** On multiplie $\bigstar$ par $X+3$ puis on évalue en -3 : $a=9$.
- **Calcul de b :** On multiplie $\bigstar$ par X puis on passe à la limite en $+\infty$: $10=a+b$, donc : $b=1$.
- **Calcul de c :** On évalue par exemple $\bigstar$ en 0 : $0=-4+\dfrac{a}{3}+\dfrac{c}{3}$, donc : $c=12-a=3$.

Exemple $\dfrac{1}{(X-1)^2\left(X^2+4\right)}=\dfrac{1}{5(X-1)^2}-\dfrac{2}{25(X-1)}+\dfrac{2X-3}{25\left(X^2+4\right)}$.

Démonstration

- **Forme de la décomposition en éléments simples :** La partie entière est nulle, donc pour certains $a,b,c\in\mathbb{R}$: $$\bigstar \qquad \frac{1}{(X-1)^2\left(X^2+4\right)}=\frac{a}{(X-1)^2}+\frac{b}{X-1}+\frac{cX+d}{X^2+4}.$$
- **Calcul de a :** On multiplie $\bigstar$ par $(X-1)^2$ puis on évalue en 1 : $a=\dfrac{1}{5}$.
- **Calcul de c et d :** Le polynôme X^2+4 admet $2\mathrm{i}$ et $-2\mathrm{i}$ pour racines. On multiplie $\bigstar$ par X^2+4 puis on évalue en $2\mathrm{i}$: $2\mathrm{i}c+d=\dfrac{1}{(2\mathrm{i}-1)^2}=\dfrac{1}{-3-4\mathrm{i}}=\dfrac{-3+4\mathrm{i}}{25}$. Or c et d sont des **RÉELS**, donc : $c=\dfrac{2}{25}$ et $d=-\dfrac{3}{25}$.
- **Calcul de b :** On multiplie $\bigstar$ par X puis on passe à la limite en $+\infty$: $0=b+c$, ce qui donne finalement : $b=-c=-\dfrac{2}{25}$.