

# INTRODUCTION À LA DÉCOMPOSITION EN ÉLÉMENTS SIMPLES

Les résultats du présent chapitre seront revus avec davantage de rigueur et de profondeur au chapitre « Arithmétique des polynômes et fractions rationnelles ». Nous nous contenterons ici d'une présentation informelle.

## 1 DIVISION EUCLIDIENNE DES POLYNÔMES

Étant donnés deux polynômes  $A$  et  $B$  à coefficients complexes — généralement réels — on est souvent amené en mathématiques à se demander si  $B$  divise  $A$  ou non, i.e. si l'on peut écrire :  $A = BC$  pour un certain polynôme  $C$ . On a recours pour ce faire à un algorithme — *l'algorithme de la division euclidienne*. Présentons-le sur un exemple, celui de la division de  $7X^5 + 4X^4 + 2X^3 - X + 5$  par  $X^2 + 2$ .

Laisser la place des monômes de degré 2 même s'il n'en apparaît pas pour le moment.

$$\begin{array}{r|l}
 7X^5 + 4X^4 + 2X^3 \quad \color{red}{\times} \quad -X + 5 & X^2 + 2 \\
 -7X^5 \quad -14X^3 & 7X^3 \\
 \hline
 4X^4 - 12X^3 \quad -X + 5 & \\
 \end{array}
 \quad \xrightarrow{\dots \text{ ensuite } \dots} \quad
 \begin{array}{r|l}
 7X^5 + 4X^4 + 2X^3 \quad -X + 5 & X^2 + 2 \\
 -7X^5 \quad -14X^3 & 7X^3 + 4X^2 \\
 \hline
 4X^4 - 12X^3 \quad -X + 5 & \\
 -4X^4 \quad -8X^2 & \\
 \hline
 -12X^3 - 8X^2 - X + 5 & \\
 \end{array}$$

On divise  $7X^5$  par  $X^2$  — résultat  $7X^3$ .  
 On retranche ensuite  $7X^3(X^2 + 2)$   
 du polynôme initial.  
 On répète cette opération  
 dans les étapes suivantes.

$$\begin{array}{r|l}
 7X^5 + 4X^4 + 2X^3 \quad -X + 5 & X^2 + 2 \\
 -7X^5 \quad -14X^3 & 7X^3 + 4X^2 - 12X - 8 \\
 \hline
 4X^4 - 12X^3 \quad -X + 5 & \\
 -4X^4 \quad -8X^2 & \\
 \hline
 -12X^3 - 8X^2 - X + 5 & \\
 +12X^3 \quad +24X & \\
 \hline
 -8X^2 + 23X + 5 & \\
 +8X^2 \quad +16 & \\
 \hline
 23X + 21 & \\
 \end{array}$$

... et enfin...

À ce stade, nous ne pouvons diviser davantage car  $23X + 21$  est de degré **STRICTEMENT INFÉRIEUR** au degré de  $X^2 + 2$ .  
 Conclusion :  $\underbrace{7X^5 + 4X^4 + 2X^3 - X + 5}_{\text{Dividende}} = \underbrace{(X^2 + 2)}_{\text{Diviseur}} \times \underbrace{(7X^3 + 4X^2 - 12X - 8)}_{\text{Quotient}} + \underbrace{23X + 21}_{\text{Reste}}$ .

En particulier,  $7X^3 + 4X^2 - 12X - 8$  n'est pas divisible par  $X^2 + 2$  car le reste de la division euclidienne n'est PAS nul.

**Définition-théorème (Racine d'un polynôme, multiplicité)** Soient  $P$  un polynôme et  $\lambda \in \mathbb{C}$ .

- On dit que  $\lambda$  est une *racine* de  $P$  si :  $P(\lambda) = 0$ .

**Factorisation par une racine :**  $\lambda$  est racine de  $P$  si et seulement si pour un certain polynôme  $Q$  :  $P = (X - \lambda)Q$ .

- La plus grande puissance de  $X - \lambda$  qu'on peut mettre en facteur dans  $P$  est appelée la *multiplicité* de  $\lambda$  dans  $P$ . Une racine de multiplicité 1 est dite *simple*, une racine de multiplicité 2 est dite *double*.

**Exemple** Notons  $P$  le polynôme  $(X-3)^2(X^2+X+1)$ .

- $P$  est divisible par  $(X-3)^2$ , mais pas par  $(X-3)^3$  car  $X^2+X+1$  n'admet pas 3 pour racine, donc n'est pas divisible par  $X-3$ . Conclusion :  $P$  admet 3 pour racine de multiplicité 2.
- $P$  est divisible par  $X-j$  car :  $X^2+X+1 = (X-j)(X-\bar{j})$ , mais pas par  $(X-j)^2$ , donc admet  $j$  comme racine simple. Même chose pour  $\bar{j}$ .

**Exemple** Notons  $P$  le polynôme  $X^3-4X^2+7X-6$ .

- $P$  admet 2 pour racine car :  $P(2) = 0$ , et après division euclidienne de  $P$  par  $X-2$  :  $P = (X-2)(X^2-2X+3)$ .
- Ensuite, le polynôme  $X^2-2X+3$  admet  $1+i\sqrt{2}$  et  $1-i\sqrt{2}$  pour racines, donc :  $P = (X-2)(X-1-i\sqrt{2})(X-1+i\sqrt{2})$ .

Le polynôme  $P$  admet finalement trois racines simples : 2,  $1+i\sqrt{2}$  et  $1-i\sqrt{2}$ .

## 2 FACTORISATIONS IRRÉDUCTIBLES SUR $\mathbb{C}$ ET $\mathbb{R}$

- Nous verrons en temps voulu que tout polynôme à coefficients complexes — donc éventuellement réels — peut être décomposé d'une et une seule façon, à une constante multiplicative près, comme un produit de polynômes  $X-\lambda$  avec  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Ce théorème fondamental est appelé le *théorème de d'Alembert-Gauss*. Par exemple :

$$2X^3 + 4X^2 - 48X = 2X(X-4)(X+6), \quad 3X^2 + 27 = 3(X-3i)(X+3i), \quad X^4 + 2X^2 + 1 = (X-i)^2(X+i)^2$$

$$\text{et } X^5 - X^4 + 2X^3 - 10X^2 + 13X - 5 = (X-1)^3(X+1-2i)(X+1+2i).$$

De telles décompositions sont appelées *factorisations irréductibles sur  $\mathbb{C}$*  et sont l'analogue polynomial de la factorisation première des entiers.

- À présent, quand un polynôme est à COEFFICIENTS RÉELS, ses racines NON RÉELLES peuvent être regroupées par paires de conjuguées de même multiplicité. Reprenons ici les exemples précédents :

$$2X^3 + 4X^2 - 48X = 2X(X-4)(X+6) \quad (\text{pas de racine non réelle}), \quad 3X^2 + 27 = 3(X^2+9) \quad (\text{regroupement de } 3i \text{ et } -3i),$$

$$X^4 + 2X^2 + 1 = (X^2+1)^2 \quad (\text{regroupement de } i \text{ et } -i)$$

$$\text{et } X^5 - X^4 + 2X^3 - 10X^2 + 13X - 5 = (X-1)^3(X^2+2X+5) \quad (\text{regroupement de } -1+2i \text{ et } -1-2i).$$

Cette fois, les décompositions obtenues sont appelées *factorisations irréductibles sur  $\mathbb{R}$*  et font intervenir deux types de polynômes :

- des polynômes  $X-\lambda$  avec  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,
- des polynômes  $X^2+aX+b$  avec  $a, b \in \mathbb{R}$ , mais pas n'importe lesquels. Issus du regroupement de deux racines non réelles conjuguées, ils ont forcément un DISCRIMINANT STRICTEMENT NÉGATIF.

**✗ ATTENTION ! ✗** En dépit des apparences,  $(X+1)(X^2-3X+2)^2$  n'est pas une factorisation irréductible sur  $\mathbb{R}$  car le polynôme  $X^2-3X+2$  peut encore être brisé en de plus petits morceaux à coefficients réels :  $X^2-3X+2 = (X-1)(X-2)$ . Un polynôme du second degré qui apparaît dans une factorisation irréductible sur  $\mathbb{R}$  est forcément de discriminant négatif.

## 3 DÉCOMPOSITION EN ÉLÉMENTS SIMPLES SUR $\mathbb{R}$

Tout le monde sait réduire une somme de fractions au même dénominateur :

$$X + \frac{1}{X} - \frac{1}{X+1} = \frac{X^3+X^2+1}{X(X+1)} \quad \text{et} \quad \frac{2}{X-1} + \frac{3}{X+2} - \frac{1}{X+3} = \frac{4X^2+15X+5}{(X-1)(X+2)(X+3)}.$$

Pour le dire vite, on appelle *décomposition en éléments simples sur  $\mathbb{R}$*  l'opération inverse qui brise une fraction rationnelle « compliquée » à coefficients réels en une somme de morceaux « simples » eux-mêmes à coefficients réels. Nous ne ferons rien d'une telle décomposition dans ce chapitre, mais nous nous en servons beaucoup au prochain chapitre « Calculs de primitives et d'intégrales ». Pour une première présentation, nous nous pencherons sur l'exemple instructif de la fraction

$$\frac{X^8+8X+3}{(X-1)^3(X-2)(X^2+1)^2}.$$

- **Calcul de la partie entière :** On effectue la division euclidienne de  $X^8 + 8X + 3$  par  $(X - 1)^3(X - 2)(X^2 + 1)^2$  pour en extraire le quotient :  $X^8 + 8X + 3 = \underbrace{1}_{\text{Quotient}} \times (X - 1)^3(X - 2)(X^2 + 1)^2 + \underbrace{\dots}_{\text{Reste}}$ , puis on divise :

$$\frac{X^8 + 8X + 3}{(X - 1)^3(X - 2)(X^2 + 1)^2} = \boxed{1} + \frac{\dots}{(X - 1)^3(X - 2)(X^2 + 1)^2}.$$

Le quotient de la division euclidienne est aussi appelé la *partie entière* de la fraction.

À présent, le degré du numérateur est strictement inférieur au degré du dénominateur.

Quand le numérateur a dès le départ un degré strictement inférieur au degré du dénominateur, cette étape de division euclidienne peut être sautée car la partie entière est alors nulle.

- **Factorisation irréductible sur  $\mathbb{R}$  du dénominateur :** Ici, le dénominateur  $(X - 1)^3(X - 2)(X^2 + 1)^2$  est déjà sous forme irréductible car  $X^2 + 1$  a un discriminant strictement négatif.
- **Forme de la décomposition en éléments simples sur  $\mathbb{R}$  :** On peut montrer que pour certains  $a, b, c, d, e, f, g, h \in \mathbb{R}$  :

$$\frac{X^8 + 8X + 3}{(X - 1)^3(X - 2)(X^2 + 1)^2} = 1 + \frac{a}{(X - 1)^3} + \frac{b}{(X - 1)^2} + \frac{c}{X - 1} + \frac{d}{X - 2} + \frac{eX + f}{(X^2 + 1)^2} + \frac{gX + h}{X^2 + 1}.$$

Au dénominateur, comme  $X - 1$  apparaît à la puissance 3, la décomposition en éléments simples contient un terme  $\frac{a}{(X - 1)^3}$ , un terme  $\frac{b}{(X - 1)^2}$  et un terme  $\frac{c}{X - 1}$ .

Comme  $X - 2$  apparaît à la puissance 1, on écrit seulement un terme  $\frac{d}{X - 2}$ .

Comme  $X^2 + 1$  apparaît à la puissance 2, on écrit un terme  $\frac{eX + f}{(X^2 + 1)^2}$  et un terme  $\frac{gX + h}{X^2 + 1}$ .

C'est cela la décomposition en éléments simples sur  $\mathbb{R}$  de  $\frac{X^8 + 8X + 3}{(X - 1)^3(X - 2)(X^2 + 1)^2}$ . Il s'agira bien sûr à terme de calculer les réels  $a, b, c, d, e, f, g$  et  $h$ , mais tâchons d'abord de mieux comprendre ce qui vient de se passer.

- Chaque facteur  $(X - \lambda)^m$  du dénominateur est devenu une somme :  $\frac{a_m}{(X - \lambda)^m} + \frac{a_{m-1}}{(X - \lambda)^{m-1}} + \dots + \frac{a_1}{X - \lambda}$  avec  $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}$ .
- Chaque facteur  $(X^2 + aX + b)^m$  du dénominateur dans lequel  $X^2 + aX + b$  est à discriminant négatif est devenu une somme :  $\frac{c_m X + d_m}{(X^2 + aX + b)^m} + \frac{c_{m-1} X + d_{m-1}}{(X^2 + aX + b)^{m-1}} + \dots + \frac{c_1 X + d_1}{X^2 + aX + b}$  avec  $c_1, \dots, c_m, d_1, \dots, d_m \in \mathbb{R}$ .

**Exemple** Dans les exemples suivants, on a pris soin de faire apparaître la partie entière même quand elle est nulle.

- Pour certains  $a, b \in \mathbb{R}$  :  $\frac{X^3 - 2X + 4}{X^2 - 1} = X + \frac{a}{X - 1} + \frac{b}{X + 1}$ .
- Pour certains  $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$  :  $\frac{X^6 + 3}{X(X + 1)(X - 4)^3} = X + 11 + \frac{a}{X} + \frac{b}{X + 1} + \frac{c}{(X - 4)^3} + \frac{d}{(X - 4)^2} + \frac{e}{X - 4}$ .
- Pour certains  $a, b, c \in \mathbb{R}$  :  $\frac{X + 1}{(X - 3)(X^2 + X + 2)} = 0 + \frac{a}{X - 3} + \frac{bX + c}{X^2 + X + 2}$ .
- Pour certains  $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$  :  $\frac{1}{X^2(X^2 + X + 1)^2} = 0 + \frac{a}{X^2} + \frac{b}{X} + \frac{cX + d}{(X^2 + X + 1)^2} + \frac{eX + f}{X^2 + X + 1}$ .

À présent, pour calculer les coefficients d'une décomposition en éléments simples sur  $\mathbb{R}$ , nous développerons quatre techniques de calcul :

- multiplier par  $(X - \lambda)^m$  puis évaluer en  $\lambda$ , y compris lorsque :  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ ,
- multiplier par  $X$  puis passer à la limite en  $+\infty$ ,
- évaluer en un point,
- mettre au même dénominateur et identifier.

Des exemples vaudront ici mieux qu'un long discours.

**Exemple** 
$$\frac{X+3}{(X+1)^2(X+2)} = \frac{2}{(X+1)^2} - \frac{1}{X+1} + \frac{1}{X+2}.$$

**Démonstration**

- **Forme de la décomposition en éléments simples** : La partie entière est nulle, donc pour certains  $a, b, c \in \mathbb{R}$  :
 
$$\star \quad \frac{X+3}{(X+1)^2(X+2)} = \frac{a}{(X+1)^2} + \frac{b}{X+1} + \frac{c}{X+2}.$$
- **Calcul de  $a, b$  et  $c$  par simple identification** : Toute décomposition en éléments simples peut être calculée par identification, mais au prix de calculs souvent importants. Ici :

$$\begin{aligned} \frac{X+3}{(X+1)^2(X+2)} &= \frac{a}{(X+1)^2} + \frac{b}{X+1} + \frac{c}{X+2} = \frac{a(X+2) + b(X+1)(X+2) + c(X+1)^2}{(X+1)^2(X+2)} \\ &= \frac{(b+c)X^2 + (a+3b+2c)X + (2a+2b+c)}{(X+1)^2(X+2)}, \end{aligned}$$

donc par identification :  $b+c=0$ ,  $a+3b+2c=1$  et  $2a+2b+c=3$ . Il « suffit » dès lors de résoudre ce système linéaire de 3 équations à 3 inconnues pour conclure. Pratiquée brutalement, l'identification est ainsi déjà pénible pour calculer 3 coefficients, mais elle l'est encore plus pour davantage de coefficients.

On reprend ci-dessous le travail en valorisant l'économie des calculs.

- **Calcul de  $a$**  : On multiplie  $\star$  par  $(X+1)^2$  puis on évalue en  $-1$  :  $a=2$ . En voilà une bonne technique !
- **Calcul de  $c$**  : On recommence. On multiplie  $\star$  par  $X+2$  puis on évalue en  $-2$  :  $c=1$ .
- **Calcul de  $b$**  : On ne peut malheureusement pas reproduire le raisonnement précédent pour calculer  $b$ . Multiplier  $\star$  par  $X+1$  puis évaluer en  $-1$  nous conduirait en effet à diviser par 0 à cause du terme  $(X+1)^2$ . Qu'à cela ne tienne, plusieurs approches sont envisageables, **AU CHOIX** :
  - On peut multiplier  $\star$  par  $X$  puis passer à la limite en  $+\infty$  :  $0=0+b+c$ , donc :  $b=-c=-1$ . On obtient généralement ainsi une équation simple et agréable.
  - On peut évaluer  $\star$  en un point, par exemple en 0 :  $\frac{3}{2}=a+b+\frac{c}{2}$ , ce qui donne aussi :  $b=-1$ . Les équations qu'on obtient en évaluant en un point sont souvent un peu plus compliquées que celles qu'on obtient en passant à la limite en  $+\infty$ .
  - Comme il ne reste qu'un coefficient à calculer, on peut aussi finir par simple identification :

$$\frac{X+3}{(X+1)^2(X+2)} = \frac{2}{(X+1)^2} + \frac{b}{X+1} + \frac{1}{X+2} = \frac{2(X+2) + b(X+1)(X+2) + (X+1)^2}{(X+1)^2(X+2)} = \frac{(b+1)X^2 + \dots X + \dots}{(X+1)^2(X+2)}.$$

On n'a même pas besoin d'identifier tous les coefficients, le coefficient de degré 2 suffit par exemple :  $0=b+1$ , donc de nouveau :  $b=-1$ .

**Exemple** 
$$\frac{X^4}{(X+3)(X^2+X+3)} = X-4 + \frac{9}{X+3} + \frac{X+3}{X^2+X+3}.$$

**Démonstration**

- **Partie entière** : La division euclidienne de  $X^4$  par  $(X+3)(X^2+X+3)$  s'écrit :

$$X^4 = (X+3)(X^2+X+3) \underbrace{(X-4)}_{\text{Quotient}} + \underbrace{10X^2+15X+36}_{\text{Reste}}, \quad \text{donc la partie entière cherchée vaut } X-4.$$

- **Forme de la décomposition en éléments simples** : Pour certains  $a, b, c \in \mathbb{R}$  :

$$\frac{X^4}{(X+3)(X^2+X+3)} = X-4 + \frac{a}{X+3} + \frac{bX+c}{X^2+X+3},$$

mais en tenant compte de la division euclidienne calculée juste avant, on peut aussi dire que :

$$\star \quad \frac{10X^2+15X+36}{(X+3)(X^2+X+3)} = \frac{a}{X+3} + \frac{bX+c}{X^2+X+3}.$$

Il est toujours plus facile de calculer les coefficients d'une décomposition en éléments simples quand la partie entière est nulle.

- **Calcul de  $a$**  : On multiplie ★ par  $X + 3$  puis on évalue en  $-3$  :  $a = 9$ .
- **Calcul de  $b$**  : On multiplie ★ par  $X$  puis on passe à la limite en  $+\infty$  :  $10 = a + b$ , donc :  $b = 1$ .
- **Calcul de  $c$**  : On évalue par exemple ★ en  $0$  :  $0 = -4 + \frac{a}{3} + \frac{c}{3}$ , donc :  $c = 12 - a = 3$ .

**Exemple** 
$$\frac{1}{(X-1)^2(X^2+4)} = \frac{1}{5(X-1)^2} - \frac{2}{25(X-1)} + \frac{2X-3}{25(X^2+4)}.$$

**Démonstration**

- **Forme de la décomposition en éléments simples** : La partie entière est nulle, donc pour certains  $a, b, c \in \mathbb{R}$  :
 
$$\star \quad \frac{1}{(X-1)^2(X^2+4)} = \frac{a}{(X-1)^2} + \frac{b}{X-1} + \frac{cX+d}{X^2+4}.$$
- **Calcul de  $a$**  : On multiplie ★ par  $(X-1)^2$  puis on évalue en  $1$  :  $a = \frac{1}{5}$ .
- **Calcul de  $c$  et  $d$**  : Le polynôme  $X^2 + 4$  admet  $2i$  et  $-2i$  pour racines. On multiplie ★ par  $X^2 + 4$  puis on évalue en  $2i$  :  $2ic + d = \frac{1}{(2i-1)^2} = \frac{1}{-3-4i} = \frac{-3+4i}{25}$ . Or  $c$  et  $d$  sont des RÉELS, donc :  $c = \frac{2}{25}$  et  $d = -\frac{3}{25}$ .
- **Calcul de  $b$**  : On multiplie ★ par  $X$  puis on passe à la limite en  $+\infty$  :  $0 = b + c$ , ce qui donne finalement :  $b = -c = -\frac{2}{25}$ .