Isométries vectorielles et matrices orthogonales

Dans ce chapitre, on travaille seulement avec le corps de base $\mathbb{R}$.

1 Isométries vectorielles

Définition-théorème (Isométrie vectorielle/automorphisme orthogonal) Soient E un espace euclidien et $f \in \mathscr{L}(E)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) f préserve les produits scalaires : $\forall x, y \in E, \quad \langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle$.

(ii) f préserve les normes : $\forall x, y \in E, \quad \|f(x)\| = \|x\|$.

On dit dans ce cas que f est une *isométrie (vectorielle) de* E ou un *automorphisme orthogonal de* E. En particulier, comme le nom l'indique, f est alors un automorphisme de E.

Démonstration Nous noterons ci-dessous $\bigstar$ l'identité de polarisation : $\langle x, y \rangle = \dfrac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right)$.

(i) $\Longrightarrow$ (ii) Pour tout $x \in E$: $\|f(x)\| = \sqrt{\langle f(x), f(x) \rangle} = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \|x\|$.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) Pour tous $x, y \in E$: $\langle f(x), f(y) \rangle \overset{\bigstar}{=} \dfrac{1}{2}\left(\|f(x)+f(y)\|^2 - \|f(x)\|^2 - \|f(y)\|^2\right)$

$\overset{\text{linéarité}}{=} \dfrac{1}{2}\left(\|f(x+y)\|^2 - \|f(x)\|^2 - \|f(y)\|^2\right) \overset{\text{(ii)}}{=} \dfrac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right) \overset{\bigstar}{=} \langle x, y \rangle$.

Montrons pour finir que f est un automorphisme de E si (i) ou (ii) est vraie. Or f est injective car pour tout $x \in \operatorname{Ker} f$: $\|x\| = \|f(x)\| = \|0_E\| = 0$, donc : $x = 0_E$. Comme f est par ailleurs un endomorphisme de E et comme E est de dimension finie, f est bien un automorphisme. ■

Exemple Toute symétrie orthogonale est une isométrie vectorielle. En particulier, donc, toute réflexion — symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan — est une isométrie vectorielle.

Démonstration Simple conséquence du théorème de Pythagore ! Soient E un espace euclidien et s une symétrie orthogonale de E. Posons : $H = \operatorname{Ker}\left(s - \mathrm{Id}_E\right)$. Alors s est la symétrie par rapport à H parallèlement à $H^\perp$ — donc une application linéaire — et pour tout $x = h + h' \in E$ avec $h \in H$ et $h' \in H^\perp$:

$$\|s(x)\|^2 = \|h - h'\|^2 \overset{\text{Pythagore}}{=} \|h\|^2 + \|h'\|^2 \overset{\text{Pythagore}}{=} \|h + h'\|^2 = \|x\|^2, \qquad \text{donc : } \quad \|s(x)\| = \|x\|.$$

Théorème (Caractérisation des isométries par l'image d'une base orthonormale) Soient $E \neq \{0_E\}$ un espace euclidien, $f \in \mathscr{L}(E)$ et $\mathscr{B}$ une base orthonormale de E. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) f est une isométrie vectorielle de E. (ii) $f(\mathscr{B})$ est une base orthonormale de E.

✌ **Explication** ✌ Une isométrie transforme donc TOUTE base orthonormale en une base orthonormale, et réciproquement, un endomorphisme qui tranforme UNE base orthonormale en une base orthonormale est une isométrie vectorielle.

Démonstration Introduisons les vecteurs de $\mathscr{B}$: $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$.

(i) $\Longrightarrow$ (ii) Si f est une isométrie, alors pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$: $\langle f(e_i), f(e_j) \rangle = \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$, donc $f(\mathscr{B})$, famille de $n = \dim E$ vecteurs, est une base orthonormale de E.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) Réciproquement, si nous supposons $f(\mathscr{B})$ orthonormale, alors pour tout $x \in E$ de coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ dans $\mathscr{B}$, $f(x)$ a pour coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ dans $f(\mathscr{B})$, donc comme ces deux bases sont orhonormales : $\left\|f(x)\right\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} = \|x\|$. ■

Définition-théorème (Groupe orthogonal d'un espace euclidien) Soit E un espace euclidien. L'ensemble des isométries vectorielles de E, noté $\mathrm{O}(E)$, est un sous-groupe du groupe linéaire $\mathrm{GL}(E)$ de E appelé le *groupe orthogonal de E*.

La composée de deux isométries vectorielles et la réciproque d'une isométrie vectorielle sont donc des isométries vectorielles.

Démonstration Tout d'abord, $\mathrm{GL}(E)$ est un groupe pour la COMPOSITION. Ensuite : $\mathrm{O}(E) \subset \mathrm{GL}(E)$ car toute isométrie est un automorphisme, et : $\mathrm{Id}_E \in \mathrm{O}(E)$ car Id_E préserve les normes. Enfin, pour tous $f, g \in \mathrm{O}(E)$: $f^{-1}g \in \mathrm{O}(E)$ car pour tout $x \in E$: $\left\|f^{-1}g(x)\right\| \overset{f\in \mathrm{O}(E)}{=} \left\|f\left(f^{-1}g(x)\right)\right\| = \left\|g(x)\right\| \overset{g\in \mathrm{O}(E)}{=} \|x\|$. ■

2 Matrices orthogonales

Définition-théorème (Matrice orthogonale) Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) ${}^{\mathrm{t}}MM = I_n$ — il revient au même de dire que : $M{}^{\mathrm{t}}M = I_n$ ou que M est inversible d'inverse ${}^{\mathrm{t}}M$.

(ii) La famille des colonnes — ou des lignes — de M est une base orthonormale de l'espace euclidien canonique $\mathbb{R}^n$.

On dit dans ce cas que M est *orthogonale*.

Démonstration Notons $C_1, \ldots, C_n$ les colonnes de M. L'égalité : ${}^{\mathrm{t}}MM = I_n$, écrite coefficient par coefficient, signifie exactement que pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$: ${}^{\mathrm{t}}C_iC_j = \delta_{ij}$, i.e. que : $\left\langle C_i, C_j\right\rangle = \delta_{ij}$, ou encore que $(C_1, \ldots, C_n)$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$. Enfin, comme il est équivalent d'affirmer l'égalité : $M{}^{\mathrm{t}}M = I_n$, le résultat sur les lignes s'obtient de même. ■

Exemple Il est facile de vérifier « à l'œil nu » qu'une matrice carrée est orthogonale, il suffit de se demander si ses colonnes forment une famille orthonormale ou non. Par exemple, la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est orthogonale car ses deux colonnes sont de norme 1 et de produit scalaire nul. Même raisonnement avec $\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Théorème (Isométries vectorielles et matrices orthogonales) Soient $E \neq \left\{0_E\right\}$ un espace euclidien, $f \in \mathscr{L}(E)$ et $\mathscr{B}$ une base ORTHONORMALE de E. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) f est une isométrie vectorielle. (ii) $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ est une matrice orthogonale.

Démonstration Posons : $M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$, notons $C_1, \ldots, C_n$ ses colonnes et introduisons les vecteurs de $\mathscr{B}$: $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$.

(i) $\Longrightarrow$ (ii) Pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$: $\left\langle C_i, C_j\right\rangle = \left\langle f(e_i), f(e_j)\right\rangle$ car nous pouvons calculer le produit scalaire facilement à l'aide des coordonnées quand la base choisie est ORTHONORMALE, et ensuite, comme f est une isométrie : $\left\langle C_i, C_j\right\rangle = \left\langle e_i, e_j\right\rangle = \delta_{ij}$, donc en effet, la famille des colonnes de M est orthonormale — autrement dit, M est orthogonale.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) Si M est orthogonale, alors : $f \in \mathrm{O}(E)$ car pour tout $x \in E$ de coordonnées X dans $\mathscr{B}$: $\left\|f(x)\right\|^2 = {}^{\mathrm{t}}(MX)(MX) = \sqrt{{}^{\mathrm{t}}X}\left({}^{\mathrm{t}}MM\right)X = {}^{\mathrm{t}}XI_nX = {}^{\mathrm{t}}XX = \|x\|^2$, donc : $\left\|f(x)\right\| = \|x\|$. ■

Théorème (Matrice de passage d'un changement de bases orthonormales) Soient $E \neq \{0_E\}$ un espace euclidien et $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases **ORTHONORMALES** de E. La matrice de passage $P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$ de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ est alors une matrice orthogonale.

Il est donc facile de calculer son inverse : $\left(P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}\right)^{-1} = {}^{t}P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$.

Démonstration Notons f l'unique endomorphisme de E qui envoie $\mathscr{B}$ sur $\mathscr{B}'$. Comme $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ sont deux bases orthonormales, f est une isométrie vectorielle, donc la matrice : $P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ est orthogonale. ■

Vous démontrerez seuls le résultat suivant.

Définition-théorème (Groupe orthogonal) L'ensemble des matrices orthogonales de taille n, noté $\mathrm{O}(n)$ ou $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, est un sous-groupe du groupe linéaire $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ appelé le *groupe orthogonal de degré n*.

Le produit de deux matrices orthogonales et l'inverse d'une matrice orthogonale sont donc des matrices orthogonales.

3 Signe d'une isométrie et d'une matrice orthogonale

Définition-théorème (Isométrie vectorielle/matrice orthogonale positive/négative)

(i) Le déterminant d'une matrice orthogonale vaut 1 ou −1. On dit qu'une matrice orthogonale est *positive* si son déterminant vaut 1 et qu'elle est *négative* s'il vaut −1.

(ii) Le déterminant d'une isométrie vectorielle vaut 1 ou −1. On dit qu'une isométrie vectorielle est *positive* si son déterminant vaut 1 et qu'elle est *négative* s'il vaut −1.

✌ **Explication** ✌ Une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale **POSITIVE** si et seulement si la famille de ses colonnes est une base orthonormale **DIRECTE** de $\mathbb{R}^n$, et une isométrie vectorielle **POSITIVE** est une isométrie qui **PRÉSERVE L'ORIENTATION**.

Démonstration

(i) Pour tout $M \in \mathrm{O}(n)$: $\det(M)^2 = \det(M)\det({}^{t}M) = \det\left(M\,{}^{t}M\right) = \det(I_n) = 1$.

(ii) Pour tout espace euclidien $E \neq \{0_E\}$ de base orthonormale $\mathscr{B}$ et pour tout $f \in \mathrm{O}(E)$, on a vu que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ est une matrice orthogonale, donc d'après (i) : $\det(f) = \det\left(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)\right) \in \{-1, 1\}$. ■

✖ **ATTENTION !** ✖ Toute matrice de déterminant ±1 n'est pas orthogonale — par exemple $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Théorème (Isométries vectorielles positives et matrices orthogonales positives) Soient $E \neq \{0_E\}$ un espace euclidien, $f \in \mathscr{L}(E)$ et $\mathscr{B}$ une base **ORTHONORMALE** de E. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) f est une isométrie vectorielle positive. (ii) $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ est une matrice orthogonale positive.

Définition-théorème (Groupe spécial orthogonal)

(i) Soit E un espace euclidien. L'ensemble des automorphismes orthogonaux positifs de E, noté $\mathrm{SO}(E)$ ou $\mathrm{O}^+(E)$, est un sous-groupe de $\mathrm{O}(E)$ appelé le *groupe spécial orthogonal de E*.

(ii) L'ensemble des matrices orthogonales positives de taille n, noté $\mathrm{SO}(n)$ ou $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$, est un sous-groupe de $\mathrm{O}(n)$ appelé le *groupe spécial orthogonal de degré n*.

Démonstration Pour (i) : $\mathrm{SO}(E) \subset \mathrm{O}(E)$ par définition, et : $\mathrm{Id}_E \in \mathrm{SO}(E)$ car $\det(\mathrm{Id}_E) = 1$. Ensuite, pour tous $f, g \in \mathrm{SO}(E)$, nous savons que $f^{-1}g \in \mathrm{O}(E)$ et par ailleurs : $\det\left(f^{-1}g\right) = \det(f)^{-1}\det(g) = 1$, donc : $f^{-1}g \in \mathrm{SO}(E)$. L'assertion (ii) se démontre de la même manière. ■

4 Produit mixte, aires et volumes orientés

Définition-théorème (Produit mixte) Soit $E \neq \{0_E\}$ un espace euclidien orienté de dimension n.

(i) Soient $x_1, \ldots, x_n \in E$. Le scalaire $\det_{\mathscr{B}}(x_1, \ldots, x_n)$ ne dépend pas de la base $\mathscr{B}$ de E choisie **si elle est orthonormale directe**. On l'appelle le *produit mixte de* $x_1, \ldots, x_n$ et on le note : $\left[x_1, \ldots, x_n\right]$.

(ii) Le produit mixte d'une base orthonormale directe est toujours égal à 1.

Démonstration Soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases orthonormales directes de E. L'unique endomorphisme f de E qui envoie $\mathscr{B}$ sur $\mathscr{B}'$ est une isométrie vectorielle positive, donc : $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') = \det_{\mathscr{B}}\left(f(\mathscr{B})\right) = 1$ — ce qui prouve l'assertion (ii). En retour : $\det_{\mathscr{B}}(x_1, \ldots, x_n) = \det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')\,\det_{\mathscr{B}'}(x_1, \ldots, x_n) = \det_{\mathscr{B}'}(x_1, \ldots, x_n)$. ■

✌ **Explication** ✌

- Le produit mixte est un déterminant qui, en apparence, ne dépend pas d'une base, mais c'est seulement parce qu'il dépend fondamentalement du produit scalaire vis-à-vis duquel on le calcule, et donc des bases orthonormales directes qui vont avec. Ce que la définition du produit mixte énonce, c'est que tant qu'on prend pour pavé élémentaire un pavé orienté positivement dont les arêtes sont orthogonales et de longueur 1, on compte les aires ou volumes de la même manière quel que soit le pavé choisi. Au chapitre « Déterminants », il y avait quelque chose d'arbitraire dans le choix d'une base comme base de référence pour les aires ou volumes orientés. De fait, dans un espace vectoriel quelconque sans produit scalaire, la notion de longueur fait défaut — d'où l'impossibilité de relier les aires ou volumes et les longueurs — d'où l'arbitraire. Dans un espace euclidien, le produit scalaire réconcilie les aires ou volumes aux longueurs qu'il définit.
- Rappelons pour finir que le produit mixte, comme tout déterminant d'une famille dans une base, digère très bien les endomorphismes. Pour tous $f \in \mathscr{L}(E)$ et $x_1, \ldots, x_n \in E$: $\left[f(x_1), \ldots, f(x_n)\right] = \det(f) \times \left[x_1, \ldots, x_n\right]$. Géométriquement, ce résultat signifie que lorsqu'on transforme un parallélépipède par une application linéaire f, le volume orienté s'en trouve tout simplement multiplié par $\det(f)$.

5 Isométries vectorielles d'un plan euclidien et angles orientés

Théorème (Matrices orthogonales de taille 2)

- Toute matrice orthogonale positive de taille 2 est de la forme $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ pour un certain $\theta \in \mathbb{R}$.
- Toute matrice orthogonale négative de taille 2 est de la forme $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ pour un certain $\theta \in \mathbb{R}$.

Démonstration Pour tout $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$: $M \in \mathrm{O}(2) \iff {}^t\!MM = I_2 \iff \begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ c^2 + d^2 = 1 \\ ac + bd = 0 \end{cases}$

$$\iff \exists\, \theta, \varphi \in \mathbb{R}/ \quad \begin{cases} a = \cos\theta \text{ et } b = \sin\theta \\ c = \cos\varphi \text{ et } d = \sin\varphi \\ \cos\theta\cos\varphi + \sin\theta\sin\varphi = 0 \end{cases} \iff \exists\, \theta, \varphi \in \mathbb{R}/ \quad \begin{cases} a = \cos\theta \text{ et } b = \sin\theta \\ c = \cos\varphi \text{ et } d = \sin\varphi \\ \cos(\theta - \varphi) = 0 \end{cases}$$

$$\iff \quad \exists\, \theta,\varphi\in\mathbb{R},\ \varepsilon\in\{-1,1\}/\quad \begin{cases} a=\cos\theta \text{ et } b=\sin\theta\\ c=\cos\varphi \text{ et } d=\sin\varphi\\ \varphi\equiv\theta+\varepsilon\,\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]\end{cases}$$

Or $\cos\left(\theta+\varepsilon\,\dfrac{\pi}{2}\right)=-\varepsilon\sin\theta$ et $\sin\left(\theta+\varepsilon\,\dfrac{\pi}{2}\right)=\varepsilon\cos\theta$.

$$\iff \quad \exists\, \theta\in\mathbb{R},\ \varepsilon\in\{-1,1\}/\quad \begin{cases} a=\cos\theta \text{ et } b=\sin\theta\\ c=-\varepsilon\sin\theta \text{ et } d=\varepsilon\cos\theta\end{cases} \qquad \iff \quad \exists\, \theta\in\mathbb{R},\ \varepsilon\in\{-1,1\}/\quad M=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\varepsilon\sin\theta\\ \sin\theta & \varepsilon\cos\theta\end{pmatrix}.$$

Il reste à remarquer que pour tous $\theta\in\mathbb{R}$ et $\varepsilon\in\{-1,1\}$: $\begin{vmatrix}\cos\theta & -\varepsilon\sin\theta\\ \sin\theta & \varepsilon\cos\theta\end{vmatrix}=\varepsilon.$ ■

Explication Le calcul suivant n'a l'air de rien comme ça, mais ce sera pourtant lui notre passeport pour une définition satisfaisante des angles orientés. Pour tous $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$: $\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\cos\beta & -\sin\beta\\ \sin\beta & \cos\beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta)\\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta)\end{pmatrix}$.

Théorème (Commutativité du groupe $\mathrm{SO}(2)$**)** Le groupe $\mathrm{SO}(2)$ est commutatif.

Démonstration Soient $A,B\in\mathrm{SO}(2)$, disons : $A=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}\cos\beta & -\sin\beta\\ \sin\beta & \cos\beta\end{pmatrix}$ avec $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. D'après le calcul de la remarque précédente et sachant que $\alpha+\beta=\beta+\alpha$:

$$\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\cos\beta & -\sin\beta\\ \sin\beta & \cos\beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\beta & -\sin\beta\\ \sin\beta & \cos\beta\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix},\quad \text{i.e. :}\quad AB=BA.$$ ■

Théorème (Classification des automorphismes orthogonaux en dimension 2) Soient E un espace euclidien orienté de dimension 2 et $f\in\mathrm{O}(E)$.

(i) Si f est positif, i.e. si : $f\in\mathrm{SO}(E)$, la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ de f ne dépend pas du choix de la base $\mathscr{B}$ à condition que $\mathscr{B}$ soit ORTHONORMALE DIRECTE. Cette matrice est de la forme : $\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ pour un certain $\theta\in\mathbb{R}$ unique à 2π près. On dit que f est la *rotation (vectorielle) d'angle de mesure* θ.

(ii) Si f est négatif, f est une réflexion, i.e. ici une symétrie orthogonale par rapport à une droite.

✖ **Attention !** ✖ Il est essentiel dans l'assertion (i) que les bases considérées soient DIRECTES. Dans une base orthonormale indirecte, la mesure de l'angle d'une rotation serait l'opposée de ce qu'elle est dans une base orthonormale directe.

Explication Les remarques qui suivent ne concernent que l'assertion (i).

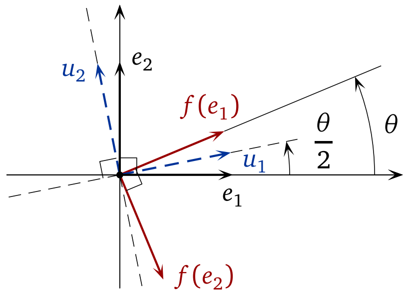
- La commutativité du groupe $\mathrm{SO}(2)$ signifie géométriquement que deux rotations vectorielles commutent toujours — tourner d'un angle φ puis d'un angle ψ, c'est pareil que tourner de ψ puis de φ.
- L'indépendance de la matrice de f par rapport à la base orthonormale choisie signifie géométriquement qu'une rotation vectorielle agit UNIFORMÉMENT sur les vecteurs du plan, i.e. de la même manière dans toutes les directions.
- On parle de « rotation d'ANGLE de MESURE θ » sans avoir jamais défini auparavant les mots « angle » et « mesure ». De fait, toute construction rigoureuse de la notion d'angle orienté est hors programme. On peut tout de même résumer la définition d'un angle orienté de la manière suivante. Pour tous $u,v\in E$ unitaires, il existe une et une seule rotation $r\in\mathrm{SO}(E)$ pour laquelle : $v=r(u)$, et c'est cette rotation, en un sens, qu'on peut appeler l'*angle orienté* (u,v). Tout réel θ pour lequel r admet $\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ pour matrice dans une base orthonormale directe est alors appelé UNE *mesure de l'angle orienté* (u,v) et généralement notée elle aussi (u,v). La notation usuelle : $(u,v)\equiv\theta\ [2\pi]$ se trouve ainsi justifiée.

Démonstration

(i) Supposons f positif et donnons-nous deux bases orthonormales directes $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ de E. Les matrices $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)$ sont orthogonales positives, donc éléments de $\mathrm{SO}(2)$, et c'est aussi le cas de $P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$. Par changement de base, et sachant que $\mathrm{SO}(2)$ est commutatif :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)=\left(P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}\right)^{-1}\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}=\left(P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}\right)^{-1}P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)=\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f),$$

donc en effet la matrice de f ne dépend pas de la base choisie lorsqu'elle est orthonormale directe.



(ii) Supposons f négatif et donnons-nous une base orthonormale directe (e_1, e_2) de E. La matrice de f dans la base (e_1, e_2) est alors orthogonale négative, disons : $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ pour un certain $\theta \in \mathbb{R}$.
On voit sur la figure ci-contre que e_1 et $f(e_1)$ (resp. e_2 et $f(e_2)$) sont orthogonalement symétriques l'un de l'autre par rapport à la droite engendrée par u_1. C'est pourquoi nous avons l'idée de montrer que f est la réflexion par rapport à la droite engendrée par u_1. Posons ainsi : $u_1 = \cos\frac{\theta}{2}\, e_1 + \sin\frac{\theta}{2}\, e_2$ et $u_2 = -\sin\frac{\theta}{2}\, e_1 + \cos\frac{\theta}{2}\, e_2$. Il est clair que (u_1, u_2) est une base orthonormale de E. De plus un calcul facile montre que : $f(u_1) = u_1$ et $f(u_2) = -u_2$, de sorte que la matrice de f dans (u_1, u_2) est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Conclusion : f est la réflexion par rapport à $\mathrm{Vect}(u_1)$. ■

Nous n'en avons pas parlé jusqu'ici, mais $\mathbb{C}$, envisagé comme un plan vectoriel sur $\mathbb{R}$, peut être muni d'un produit scalaire naturel défini pour tous $x, x', y, y' \in \mathbb{R}$ par : $\langle x + \mathrm{i}y, x' + \mathrm{i}y' \rangle = xx' + yy'$. De manière équivalente, on peut aussi dire que pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$: $\langle z, z' \rangle = \mathrm{Re}(\overline{z}z')$. Pour ce produit scalaire sans surprise, la base canonique $(1, \mathrm{i})$ de $\mathbb{C}$ est orthonormale.

Théorème (Rotations de $\mathbb{C}$) Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, la fonction $z \longmapsto e^{\mathrm{i}\theta} z$ n'est autre que la rotation d'angle de mesure θ du plan euclidien $\mathbb{C}$.

✌ **Explication** ✌ Résultat bien connu de début d'année, mais nous parlions alors de rotations en termes seulement intuitifs. Ici, les rotations intuitives de début d'année s'avèrent coïncider avec les rotations définies proprement dans ce chapitre.

Démonstration Soit $\theta \in \mathbb{R}$. La fonction $z \xmapsto{r} e^{\mathrm{i}\theta} z$ est linéaire sur $\mathbb{C}$ car pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$ et $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$: $r(\lambda z + \lambda' z') = e^{\mathrm{i}\theta}(\lambda z + \lambda' z') = \lambda e^{\mathrm{i}\theta} z + \lambda' e^{\mathrm{i}\theta} z' = \lambda r(z) + \lambda' r(z')$. Ensuite : $r(1) = e^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$ et $r(\mathrm{i}) = e^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{i} = -\sin\theta + \mathrm{i}\cos\theta$, donc : $\mathrm{Mat}_{(1,\mathrm{i})}(r) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. ■

Théorème (Produit scalaire et cosinus) Soient E un espace euclidien orienté de dimension 2 et $u, v \in \mathrm{E}$ non nuls. Il existe une et une seule rotation $r \in \mathrm{SO}(E)$, disons d'angle de mesure θ, pour laquelle : $\dfrac{v}{\|v\|} = r\left(\dfrac{u}{\|u\|}\right)$.
Dans ces conditions : $\langle u, v \rangle = \|u\|.\|v\| \cos\theta$.

✌ **Explication** ✌ On retrouve ici la relation bien connue de géométrie élémentaire : $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \left\|\overrightarrow{u}\right\|.\left\|\overrightarrow{v}\right\| \cos\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$.

Démonstration

- Posons : $e_1 = \dfrac{u}{\|u\|}$, complétons (e_1) en une base orthonormale directe (e_1, e_2) de E et notons (x, y) les coordonnées de $\dfrac{v}{\|v\|}$ dans (e_1, e_2) — en particulier : $x^2 + y^2 = 1$. Si r est la rotation de E de matrice $\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$ dans (e_1, e_2), on a bien comme voulu : $\dfrac{v}{\|v\|} = r\left(\dfrac{u}{\|u\|}\right)$, mais ce résultat est-il possible avec une autre rotation ? Non, car la forme d'une matrice de rotation dans une base orthonormale directe est telle qu'on n'a besoin que de connaître sa première colonne pour la connaître entièrement.
- Par définition de r et θ : $\dfrac{v}{\|v\|} = \cos\theta\, e_1 + \sin\theta\, e_2$, donc :

$$\langle u, v \rangle = \|u\|.\|v\| \left\langle \frac{u}{\|u\|}, \frac{v}{\|v\|} \right\rangle = \|u\|.\|v\| \langle e_1, \cos\theta\, e_1 + \sin\theta\, e_2 \rangle = \|u\|.\|v\| \cos\theta.$$ ■

6 Produit vectoriel

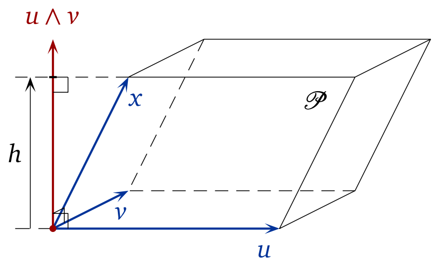
Hors programme en mathématiques en MPSI, la notion de produit vectoriel n'en constitue pas moins un prolongement naturel des paragraphes précédents, alors ne résistons pas. Si la définition qui suit paraît compliquée au premier abord, elle offre une démonstration rapide et intelligente de tous les résultats sur le produit vectoriel que vous connaissez déjà.

Définition-théorème (Produit vectoriel) Soient E un espace euclidien orienté de dimension 3 et $u, v \in E$. Il existe un unique vecteur de E, noté : $u \wedge v$ et appelé le *produit vectoriel de u et v*, pour lequel : $\forall x \in E, \quad \left[u, v, x\right] = \left\langle u \wedge v, x \right\rangle$.

Démonstration

- Pour tout $a \in E$, notons φ_a la forme linéaire $x \longmapsto \langle a, x \rangle$ de E. Je vous laisse vérifier que l'application $a \overset{\varphi}{\longmapsto} \varphi_a$ est elle-même linéaire de E dans $\mathscr{L}(E, \mathbb{R})$. Nous allons montrer que φ est même un isomorphisme, et pour cela, comme : $\dim \mathscr{L}(E, \mathbb{R}) = \dim E \times \dim \mathbb{R} = \dim E$, l'injectivité sera suffisante. Or pour tout $a \in \operatorname{Ker} \varphi$: $\varphi_a = 0_{\mathscr{L}(E,\mathbb{R})}$ donc : $\|a\|^2 = \langle a, a \rangle = \varphi_a(a) = 0$, et enfin : $a = 0_E$.
- À présent, pour tous $u, v \in E$, l'application $x \longmapsto \left[u, v, x\right]$ est une forme linéaire de E, donc possède un et un seul antécédent par φ que nous notons $u \wedge v$. Par définition, $u \wedge v$ est donc le seul vecteur de E tel que pour tout $x \in E$: $\left[u, v, x\right] = \varphi_{u \wedge v}(x) = \langle u \wedge v, x \rangle$. ■

✌ **Explication** ✌ Que signifie géométriquement la relation : $\left[u, v, x\right] = \langle u \wedge v, x \rangle$? Supposons : $u \wedge v \neq 0_E$.

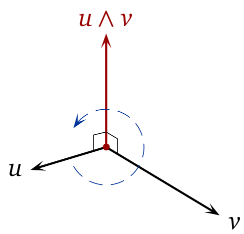


À gauche, $\left[u, v, x\right]$ n'est autre que le volume orienté du parallélépipède $\mathscr{P}$ engendré par u, v et x.

Et à droite ? Posons : $a = \dfrac{u \wedge v}{\|u \wedge v\|}$. Alors : $\langle u \wedge v, x \rangle = \|u \wedge v\| \times \langle x, a \rangle$. Or $h = \langle x, a \rangle$ n'est autre que la hauteur — éventuellement négative si l'orientation l'exige — de $\mathscr{P}$ au-dessus du parallélogramme engendré par u et v.

Conclusion : le volume orienté de $\mathscr{P}$ vaut : $\|u \wedge v\| \times h$ où h représente une hauteur, donc $\|u \wedge v\|$ est finalement la valeur de l'aire du parallélogramme engendré par u et v.

Théorème (Propriétés du produit vectoriel) Soient E un espace euclidien orienté de dimension 3 et $u, v, w \in E$.



(i) Le vecteur $u \wedge v$ est orthogonal à u et v.

(ii) Les vecteurs u et v sont colinéaires si et seulement si : $u \wedge v = 0_E$.

(iii) Le produit vectoriel $\wedge$ est une application bilinéaire alternée de $E \times E$ dans E.

(iv) Si u et v ne sont pas colinéaires, alors $(u, v, u \wedge v)$ est une base directe de E.

(v) On suppose la famille (u, v) orthonormale. Alors :

$$(u, v, w) \text{ est une base orthonormale directe de } E \text{ si et seulement si } w = u \wedge v.$$

(vi) Soit $\mathscr{B}$ une base **orthonormale directe** de E. Si on note (x, y, z) et (x', y', z') les coordonnées respectives de u et v dans $\mathscr{B}$, alors $u \wedge v$ a pour coordonnées $\left(yz' - zy', zx' - xz', xy' - yx'\right)$.

✌ **Explication** ✌ Pour toute base orthonormale directe (i, j, k) de E, les familles (j, k, i) et (k, i, j) sont aussi des bases orthonormales directes de E, donc d'après l'assertion (v) : $k = i \wedge j$, $i = j \wedge k$ et $j = k \wedge i$.

Démonstration Pour suivre la preuve qui suit, n'oubliez pas que tout produit mixte n'est qu'un déterminant, donc nul sur toute famille liée.

(i) Les vecteurs u et $u \wedge v$ sont orthogonaux car : $\langle u \wedge v, u \rangle = \left[u, v, u\right] \overset{\star}{=} 0$.

(ii) Si u et v sont colinéaires : $\left\|u \wedge v\right\|^2 = \left\langle u \wedge v, u \wedge v\right\rangle = \left[u, v, u \wedge v\right] \overset{\bigstar}{=} 0$, donc : $u \wedge v = 0_E$.

Supposons réciproquement que : $u \wedge v = 0_E$. Comme : $\dim \mathrm{Vect}(u, v) \leqslant 2 < 3 = \dim E$, nous pouvons nous donner un vecteur quelconque x de $E \setminus \mathrm{Vect}(u, v)$. La famille (u, v, x) est alors liée car : $\left[u, v, x\right] = \left\langle u \wedge v, x\right\rangle = \left\langle 0_E, x\right\rangle = 0$. Comme x n'est pas combinaison linéaire de u et v, il en découle que la famille (u, v) est liée.

(iii) D'après (ii), si le produit vectoriel est bilinéaire, il est aussi alterné — nul sur toute famille dont deux vecteurs sont égaux. Montrons simplement sa linéarité par rapport à la deuxième variable. Soient $u, v, w \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Pour tout $x \in E$:

$$\left\langle u\wedge(\lambda v+\mu w)-\lambda(u\wedge v)-\mu(u\wedge w), x\right\rangle = \left\langle u\wedge(\lambda v+\mu w), x\right\rangle-\lambda\left\langle u\wedge v, x\right\rangle-\mu\left\langle u\wedge w, x\right\rangle = \left[u, \lambda v+\mu w, x\right]-\lambda\left[u, v, x\right]-\mu\left[u, w, x\right] = 0,$$

donc le vecteur : $u \wedge (\lambda v + \mu w) - \lambda(u \wedge v) - \mu(u \wedge w)$ est orthogonal à tout vecteur — en particulier à lui-même — donc est nul : $u \wedge (\lambda v + \mu w) = \lambda(u \wedge v) + \mu(u \wedge w)$.

(iv) Supposons u et v non colinéaires. Montrer que $\left(u, v, u \wedge v\right)$ est une base directe de E revient à montrer que son déterminant dans une base directe est strictement positif, par exemple que : $\left[u, v, u \wedge v\right] > 0$, ce qui est vrai car : $\left[u, v, u \wedge v\right] = \left\langle u \wedge v, u \wedge v\right\rangle = \left\|u \wedge v\right\|^2 \overset{\text{(ii)}}{>} 0$.

(v) Supposons (u, v) orthonormale.

- Montrons que $(u, v, u \wedge v)$ est une base orthonormale directe de E. Ce qui est sûr, c'est que la famille $\left(u, v, \dfrac{u \wedge v}{\|u \wedge v\|}\right)$ est orthonormale directe d'après (i) et (iv), donc :
$$\left\|u \wedge v\right\| = \left\langle u \wedge v, \frac{u \wedge v}{\left\|u \wedge v\right\|}\right\rangle = \left[u, v, \frac{u \wedge v}{\|u \wedge v\|}\right] \overset{\text{BOND}}{=} 1.$$
- Réciproquement, sous l'hypothèse que (u, v, w) est une base orthonormale directe de E, montrons que : $w = u \wedge v$. Comme $\mathrm{Vect}(u, v)$ est de dimension 2, $\mathrm{Vect}(u, v)^\perp$ est une droite vectorielle qui contient à la fois w et $u \wedge v$, donc : $u \wedge v = \lambda w$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}$. Il reste à montrer que : $\lambda = 1$, ce qui n'est pas compliqué : $\lambda = \left\langle \lambda w, w\right\rangle = \left\langle u \wedge v, w\right\rangle = \left[u, v, w\right] \overset{\text{BOND}}{=} 1$.

(vi) Introduisons les vecteurs de $\mathscr{B}$: $\mathscr{B} = (i, j, k)$. Comme $\mathscr{B}$ est orthonormale, les coordonnées de $u \wedge v$ dans $\mathscr{B}$ sont $\left(\left\langle u \wedge v, i\right\rangle, \left\langle u \wedge v, j\right\rangle, \left\langle u \wedge v, k\right\rangle\right)$, donc : $\left\langle u \wedge v, i\right\rangle = \left[u, v, i\right] = \begin{vmatrix} x & x' & 1 \\ y & y' & 0 \\ z & z' & 0 \end{vmatrix} = yz' - zy'$, et il en va de même des autres coordonnées. ■