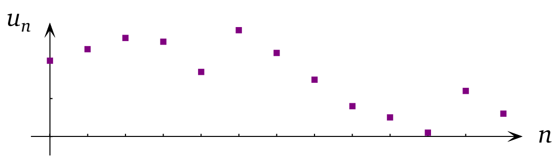
LIMITE D'UNE SUITE

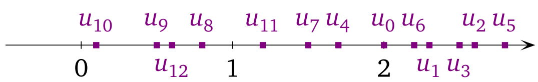
1 GÉNÉRALITÉS SUR LES SUITES RÉELLES

Définition (Suite réelle) On appelle *suite* (*réelle*) toute fonction u de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on préfère noter u_n le réel $u(n)$, et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite u.

Explication

- On travaillera seulement dans ce chapitre avec des suites définies sur tout $\mathbb{N}$, mais on pourrait bien sûr travailler avec des suites définies sur des ensembles de la forme $[\![n_0, +\infty[\![$ avec $n_0 \in \mathbb{N}$.
- Il existe au moins deux manières courantes de représenter une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:
  — soit comme une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire de manière plane avec $\mathbb{N}$ en abscisse et $\mathbb{R}$ en ordonnée,
  — soit comme un ensemble de points le long d'un axe.





Définition (Vocabulaire usuel sur les suites réelles) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

- On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *majorée* si $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une partie majorée de $\mathbb{R}$, i.e. si : $\exists\, M \in \mathbb{R}/ \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant M$. Un tel M est appelé **UN** *majorant* de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On dit aussi que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *majorée par* M ou que M *majore* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
  On dispose bien sûr d'une définition analogue des suites *minorées*.
- On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *bornée* si elle est à la fois majorée et minorée, i.e. si : $\exists\, K \in \mathbb{R}_+/ \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leqslant K$.
- On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *positive* si elle est minorée par 0, i.e. si pout tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad u_n \geqslant 0$.
  On dispose bien sûr d'une définition analogue des suites *négatives*.
- On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *croissante* (resp. *strictement croissante*) si pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad u_n \leqslant u_{n+1} \quad$ (resp. $u_n < u_{n+1}$).
  On dispose bien sûr de définitions analogues des suites *décroissantes* et *strictement décroissantes*.
- On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *monotone* (resp. *strictement monotone*) si elle est croissante ou décroissante (resp. strictement croissante ou strictement décroissante).

✖ ATTENTION ! ✖ Une suite majorée ne possède **JAMAIS UN SEUL MAJORANT**. Une suite majorée par 2 l'est aussi par 3, π, $\sqrt{15}$... Par ailleurs :

> Les majorants d'une suite sont par définition des constantes. Une majoration de u_n par un réel **QUI DÉPEND DE** n **NE** montre **PAS** que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.

En pratique Pour montrer qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone, deux méthodes courantes :

— étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$,

— **SI $u_n > 0$ POUR TOUT $n \in \mathbb{N}$:** étudier la position de $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ par rapport à 1 — méthode intéressante surtout lorsque u_n est défini par des produits et des quotients et qu'on peut espérer des simplifications.

Exemple Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $u_n = \dfrac{2^n}{n+1}$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Démonstration Les deux méthodes de différence et quotient sont envisageables ici. Au choix, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

- **Différence :** $u_{n+1} - u_n = \dfrac{2^{n+1}}{n+2} - \dfrac{2^n}{n+1} = \dfrac{2^n}{(n+1)(n+2)}\Big(2(n+1)-(n+2)\Big) = \dfrac{2^n n}{(n+1)(n+2)} \geqslant 0.$
- **Quotient :** $u_n > 0$ ET $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{2^{n+1}}{n+2} \times \dfrac{n+1}{2^n} = \dfrac{2(n+1)}{n+2} = \dfrac{(n+2)+n}{n+2} = 1 + \dfrac{n}{n+2} \geqslant 1.$

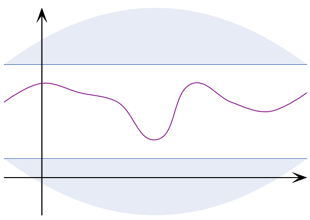
Définition (Propriété vraie à partir d'un certain rang) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite et $\mathscr{P} = (\mathscr{P}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de propositions portant sur $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *vérifie la propriété $\mathscr{P}$ à partir d'un certain rang* s'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, la proposition $\mathscr{P}_n$ soit vraie.

✌ **Explication** ✌ Ce qu'une suite a d'intéressant, ce ne sont pas ses premiers termes mais son comportement « à l'infini ». Si par exemple tous ses termes sont majorés par 1 sauf les 30 premiers, on a bien envie de dire que la suite est « presque » majorée par 1. Pour être exact, on dit qu'elle est majorée par 1 *à partir d'un certain rang*.

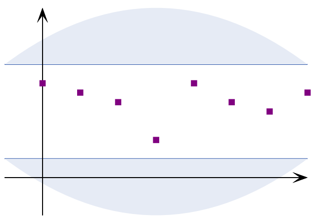
✌ **Explication** ✌ On peut définir une suite principalement de deux façons — soit explicitement, soit implicitement par récurrence. Ceci ne veut pas dire qu'il y a deux sortes de suites, ce sont là seulement deux manières de les définir. Une suite géométrique, par exemple, peut être définie aussi bien explicitement (« $u_n = q^n u_0$ ») que par récurrence (« $u_{n+1} = qu_n$ »).

- **Suites définies explicitement :** Définir une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ explicitement, c'est la définir à l'aide d'une certaine fonction f par une expression « $u_n = f(n)$ ». Avec une telle définition il n'est pas difficile de calculer u_{1000}, on calcule directement $f(1000)$.

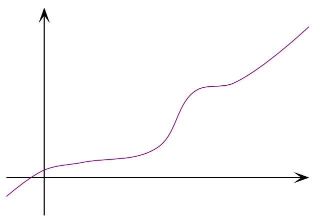
  De nombreuses propriétés de f se transmettent alors telles quelles à $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, qui n'est après tout que la restriction de f à $\mathbb{N}$ — ainsi la monotonie, le signe et le caractère majoré/minoré/borné.



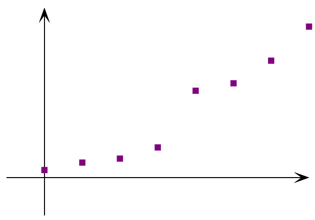
f est bornée…



… donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.



f est croissante…



… donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

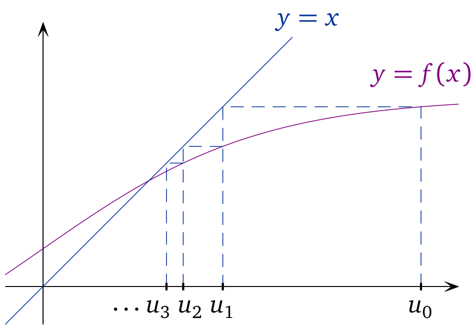
- **Suites récurrentes définies par une relation « $u_{n+1} = f(u_n)$ » :** On peut définir une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par récurrence par la donnée de son premier terme u_0 et d'une relation « $u_{n+1} = f(u_n)$ » où f est une fonction. Une telle définition présente un énorme inconvénient, on est obligé pour calculer u_{1000} de calculer les uns après les autres $u_1, \ldots, u_{999}, u_{1000}$.

✖ **Attention !** ✖

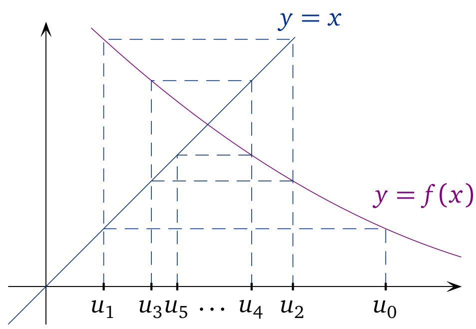
Pour une suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par une relation « $u_{n+1} = f(u_n)$ » :

f est croissante $\cancel{\Longrightarrow}$ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

f est décroissante $\cancel{\Longrightarrow}$ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.



f est croissante MAIS $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante.



f est décroissante MAIS $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est même pas monotone.

Nous reviendrons plus longuement dans un prochain paragraphe sur les suites récurrentes « $u_{n+1} = f(u_n)$ ».

2 Limite d'une suite réelle dans $\overline{\mathbb{R}}$

La notion de *voisinage*, issue d'une partie des mathématiques appelée *topologie*, n'est pas au programme de MPSI mais elle facilite grandement la compréhension des limites. Je ne vous en donne ci-dessous qu'une **DÉFINITION SIMPLIFIÉE**.

Définition (Voisinage d'un point dans $\mathbb{R}$, définition simplifiée) Soit $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. On appelle *voisinage de ℓ (dans $\mathbb{R}$)* :

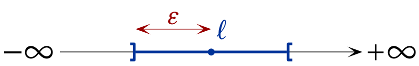
— si $\ell \in \mathbb{R}$, tout intervalle de la forme $]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon[$ avec $\varepsilon > 0$,

— si $\ell = +\infty$, tout intervalle de la forme $]A, +\infty[$ avec $A \in \mathbb{R}$,

— si $\ell = -\infty$, tout intervalle de la forme $]-\infty, A[$ avec $A \in \mathbb{R}$.

Explication L'idée, c'est qu'un voisinage de ℓ contient tous les réels « à proximité immédiate » de ℓ.

Voisinage de $-\infty$

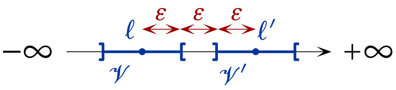


Voisinage de $\ell \in \mathbb{R}$

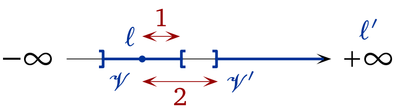
Voisinage de $+\infty$

Théorème (Deux points distincts ont des voisinages disjoints) Soient $\ell, \ell' \in \overline{\mathbb{R}}$. Si : $\ell \neq \ell'$, il existe un voisinage $\mathscr{V}$ de ℓ et un voisinage $\mathscr{V}'$ de ℓ' pour lesquels : $\mathscr{V} \cap \mathscr{V}' = \varnothing$.

Démonstration Nous ne traiterons que deux cas caractéristiques, les autres se traitent de la même manière.



- **Cas où $\ell, \ell' \in \mathbb{R}$ avec $\ell < \ell'$:** Posons : $\varepsilon = \dfrac{\ell'-\ell}{3}$, puis : $\mathscr{V} =]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon[$ et $\mathscr{V}' =]\ell'-\varepsilon, \ell'+\varepsilon[$. Alors $\mathscr{V}$ est un voisinage de ℓ, $\mathscr{V}'$ un voisinage de ℓ' et : $\mathscr{V} \cap \mathscr{V}' = \varnothing$.



- **Cas où $\ell \in \mathbb{R}$ et $\ell' = +\infty$:** Posons : $\mathscr{V} =]\ell-1, \ell+1[$ et $\mathscr{V}' =]\ell+2, +\infty[$. Alors $\mathscr{V}$ est un voisinage de ℓ, $\mathscr{V}'$ un voisinage de $\ell' = +\infty$ et : $\mathscr{V} \cap \mathscr{V}' = \varnothing$. ■

La définition suivante est l'objet central de ce chapitre.

Définition (Limite d'une suite) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

- **Définition générale :** On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *admet ℓ pour limite* si tout voisinage de ℓ contient tous les u_n à partir d'un certain rang, i.e. si :

  pour tout voisinage $\mathscr{V}$ de ℓ, u_n appartient à $\mathscr{V}$ à partir d'un certain rang.

- **Cas d'une limite finie :** Lorsque : $\ell \in \mathbb{R}$, on dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *admet ℓ pour limite* si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists\, N \in \mathbb{N}/ \quad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad n \geqslant N \implies |u_n - \ell| < \varepsilon,$$

  ou bien de manière plus concise, si : $\forall \varepsilon > 0, \quad \exists\, N \in \mathbb{N}/ \quad \forall n \geqslant N, \quad |u_n - \ell| < \varepsilon$.

- **Cas de la limite $+\infty$:** On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *admet $+\infty$ pour limite* si :

$$\forall A > 0, \quad \exists\, N \in \mathbb{N}/ \quad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad n \geqslant N \implies u_n > A,$$

  ou bien de manière plus concise, si : $\forall A > 0, \quad \exists\, N \in \mathbb{N}/ \quad \forall n \geqslant N, \quad u_n > A$.

- **Cas de la limite $-\infty$:** On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *admet $-\infty$ pour limite* si :

$$\forall A < 0, \quad \exists\, N \in \mathbb{N}/ \quad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad n \geqslant N \implies u_n < A,$$

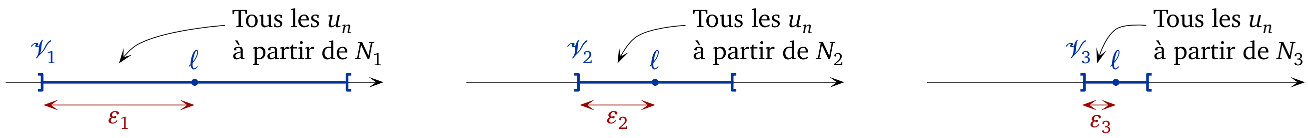
  ou bien de manière plus concise, si : $\forall A < 0, \quad \exists\, N \in \mathbb{N}/ \quad \forall n \geqslant N, \quad u_n < A$.

En pratique On peut montrer que les inégalités strictes : $|u_n - \ell| < \varepsilon$, $u_n > A$ et $u_n < A$ peuvent être remplacées par des inégalités larges : $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$, $u_n \geqslant A$ et $u_n \leqslant A$, cela n'affecte pas la notion de limite. Pour une raison qui dépasse ce cours, les mathématiciens considèrent que les inégalités strictes sont plus adaptées, mais les inégalités larges vous sembleront peut-être plus facile à manipuler.

Inégalités **STRICTES** ou inégalités **LARGES**, choisissez ce que vous préférez.

Explication Ces définitions un peu obscures au premier abord satisfont en réalité parfaitement l'intuition que nous avons des limites. Nous nous contenterons de trois remarques en guise d'explication.

— Trois voisinages $\mathscr{V}_1$, $\mathscr{V}_2$ et $\mathscr{V}_3$ ne suffisent pas à forcer $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à tendre vers ℓ. Il est essentiel que la définition de la limite commence par : « **POUR TOUT** voisinage $\mathscr{V}$ de ℓ ».



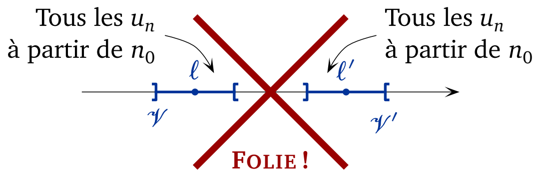
Ces figures illustrent le cas d'une limite ℓ finie mais le principe est le même dans les cas infinis.

— Intuitivement, les premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne doivent pas compter quand on s'intéresse à sa limite. C'est pour cela que la définition de la limite piège u_n dans des voisinages de ℓ **À PARTIR D'UN CERTAIN RANG**.

— Intuitivement, plus le voisinage $\mathscr{V}$ est petit, plus le rang N est grand.

Théorème (Unicité de la limite) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède une limite, elle est unique et notée $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.
Pour tout $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, la relation : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ est souvent notée : $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

Démonstration Soient $\ell, \ell' \in \overline{\mathbb{R}}$. On veut montrer, sous l'hypothèse que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet ℓ et ℓ' pour limites, que : $\ell = \ell'$. Supposons par l'absurde que : $\ell \neq \ell'$. Il existe alors un voisinage $\mathscr{V}$ de ℓ et un voisinage $\mathscr{V}'$ de ℓ' pour lesquels : $\mathscr{V} \cap \mathscr{V}' = \varnothing$. Or, par hypothèse : $u_n \in \mathscr{V}$ à partir d'un certain rang N et : $u_n \in \mathscr{V}'$ à partir d'un certain rang N'. Si nous posons : $n_0 = \max\{N, N'\}$, alors : $u_{n_0} \in \mathscr{V} \cap \mathscr{V}' = \varnothing$ — contradiction ! ■



Explication Il y a une idée importante dans cette preuve que nous allons retrouver tout au long du chapitre. Si une certaine propriété $\mathscr{P}_1$ est vraie à partir d'un rang N_1, une certaine propriété $\mathscr{P}_2$ vraie à partir d'un rang N_2... et enfin une certaine propriété $\mathscr{P}_k$ vraie à partir d'un rang N_k, les propriétés $\mathscr{P}_1, \ldots, \mathscr{P}_k$ sont **TOUTES** vraies en même temps à partir du rang $\max\{N_1, \ldots, N_k\}$.

Définition (Convergence/divergence) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *convergente* ou qu'elle *converge* si elle possède une limite **FINIE**. On dit sinon qu'elle est *divergente* ou qu'elle *diverge*.

✖ ATTENTION ! ✖ « Converger » n'est pas « avoir une limite » mais « avoir une limite **FINIE** ». « Diverger » n'est pas « avoir $\pm\infty$ pour limite », mais éventuellement « ne pas avoir de limite ».

Limite finie	Limite $\pm\infty$	Pas de limite
Convergence	Divergence	

Théorème (Convergence et caractère borné) Toute suite convergente est bornée.

Démonstration Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente, disons de limite $\ell \in \mathbb{R}$. Pour $\varepsilon = 1$, la définition de la limite affirme que l'inégalité : $|u_n - \ell| < 1$ est vraie à partir d'un certain rang N. Ainsi pour tout $n \geqslant N$:

$$|u_n| = \Big|(u_n - \ell) + \ell\Big| \leqslant |u_n - \ell| + |\ell| \leqslant |\ell| + 1 \qquad \text{d'après l'inégalité triangulaire.}$$

Posons : $K = \max\Big\{|u_0|, |u_1|, \ldots, |u_{N-1}|, |\ell|+1\Big\}$. Alors K est plus grand que $|u_0|, \ldots, |u_{N-1}|$, mais aussi que $|u_n|$ pour tout $n \geqslant N$. Conclusion : $|u_n| \leqslant K$ pour **TOUT** $n \in \mathbb{N}$, autrement dit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. ■

✖ **Attention !** ✖

- La réciproque est fausse, la suite de terme général $(-1)^n$ est bornée (entre -1 et 1) sans être convergente.
- Une suite non bornée n'admet pas forcément $+\infty$ ou $-\infty$ pour limite. La suite de terme général $(-1)^n n$, par exemple, n'est pas bornée et n'a pas de limite — que dire en effet de ses termes d'indice pair/impair ?

✎ **En pratique** ✎ La manipulation des définitions de la limite n'est pas trop difficile si l'on veut bien se conformer aux recommandations qui suivent. Imprégnez-vous-en comme jamais, sans quoi vous serez vite perdus.

- Supposons dans un premier temps que : $\ell \in \mathbb{R}$. Pour montrer que : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, N \in \mathbb{N}/\ \forall n \geqslant N,\ |u_n - \ell| < \varepsilon$, on commence sans réfléchir par : « Soit $\varepsilon > 0$. » Ensuite, pour trouver un rang N à partir duquel : $|u_n - \ell| < \varepsilon$, on essaie de **MAJORER** $|u_n - \ell|$ **EN RESPECTANT <u>DEUX</u> RÈGLES** :
  - — La majoration obtenue doit **TENDRE VERS** 0 **QUAND** n **TEND VERS** $+\infty$. Sans cela nous ne pourrons pas trouver un rang N à partir duquel : $|u_n - \ell| < \varepsilon$ quand ε est trop petit.
  - — La majoration obtenue doit **ÊTRE SIMPLE VIS-À-VIS DE LA RECHERCHE DU RANG** N. Par exemple, la majoration : $|u_n - \ell| \leqslant \dfrac{1}{n}$ peut être considérée simple car on peut dans ce cas choisir : $N = \left\lfloor \dfrac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$.
- Dans le cas où : $\ell = +\infty$, on s'adapte. Pour montrer que : $\forall A > 0,\ \exists\, N \in \mathbb{N}/\ \forall n \geqslant N,\ u_n > A$, on commence sans réfléchir par : « Soit $A > 0$. » Ensuite, pour trouver un rang N à partir duquel : $u_n > A$, on essaie de **MINORER** u_n **EN RESPECTANT <u>DEUX</u> RÈGLES** :
  - — La minoration obtenue doit **TENDRE VERS** $+\infty$ **QUAND** n **TEND VERS** $+\infty$.
  - — La minoration obtenue doit **ÊTRE SIMPLE VIS-À-VIS DE LA RECHERCHE DU RANG** N. Par exemple, la minoration : $u_n \geqslant n^2$ peut être considérée simple car on peut dans ce cas choisir : $N = \lfloor \sqrt{A} \rfloor + 1$.

Exemple $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n \sin n}{n^2+2} = 0$.

Démonstration Nous devons montrer que : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, N \in \mathbb{N}/\ \forall n \geqslant N,\ \left|\dfrac{n\sin n}{n^2+2}\right| < \varepsilon$.

Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, majorons : $\left|\dfrac{n\sin n}{n^2+2}\right| = \dfrac{n|\sin n|}{n^2+2} \leqslant \dfrac{n}{n^2+2} \leqslant \dfrac{n}{n^2} = \dfrac{1}{n}$.

On majore en **SIMPLIFIANT** et en vérifiant que ce par quoi on majore **TEND TOUJOURS VERS** 0.

On arrête de majorer quand on se sent capable de trouver le rang N cherché.

Posons donc : $N = \left\lfloor \dfrac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$. À partir de N, l'inégalité : $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$ est vraie, donc aussi l'inégalité : $\left|\dfrac{n\sin n}{n^2+2}\right| < \varepsilon$.

Exemple $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \Big(n^2 + (-1)^n n\Big) = +\infty$.

Démonstration Nous devons montrer que : $\forall A > 0,\ \exists\, N \in \mathbb{N}/\ \forall n \geqslant N,\ n^2 + (-1)^n n > A$.

Soit $A > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, minorons : $n^2 + (-1)^n n \geqslant n^2 - n = n(n-1) \geqslant (n-1)^2$.

On minore en **SIMPLIFIANT** et en vérifiant que ce par quoi on minore **TEND TOUJOURS VERS** $+\infty$.

On arrête de minorer quand on se sent capable de trouver le rang N cherché.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $(n-1)^2 > A \iff n > \sqrt{A} + 1$. Posons donc : $N = \lfloor \sqrt{A} \rfloor + 2$. À partir de N, l'inégalité : $(n-1)^2 > A$ est vraie, donc aussi l'inégalité : $n^2 + (-1)^n n > A$.

Définition **(Notation $\sum^{+\infty}$)** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. Si elle **EXISTE** et est **FINIE**, la limite : $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k$ est notée $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$.

✖ **ATTENTION !** ✖ Une somme infinie de réels cache toujours une limite dont l'**EXISTENCE** et la **FINITUDE** doivent être justifiées avant utilisation ! Dans l'exemple qui suit, on les justifie par une simplification préalable. La flèche « $\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}$ » de passage à la limite n'est employée qu'à la fin du calcul quand plus aucune difficulté ne subsiste.

Exemple $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1.$

Démonstration Pour tout $n\in\mathbb{N}$: $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) = 1-\frac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$

3 Manipulation des limites

3.1 Opérations sur les limites

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles, $\ell,\ell'\in\mathbb{R}$ et $\lambda\in\mathbb{R}$. On suppose dans tout ce paragraphe que les limites $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ **EXISTENT**. Dans les tableaux ci-dessous, le symbole **???** ne signifie pas une absence de limite mais une *indétermination* — précisions plus loin.

SOMME

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	ℓ ou $+\infty$	ℓ ou $-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n+v_n)$	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	**???**

PRODUIT

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	$\ell>0$ ou $+\infty$	$\ell<0$ ou $-\infty$	$\ell>0$ ou $+\infty$	$\ell<0$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_nv_n)$	$\ell\ell'$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	**???**

MULTIPLICATION PAR UN RÉEL

	$\lambda>0$			$\lambda=0$	$\lambda<0$		
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	$+\infty$	ℓ	$-\infty$	peu importe	$+\infty$	ℓ	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} (\lambda u_n)$	$+\infty$	$\lambda\ell$	$-\infty$	0	$-\infty$	$\lambda\ell$	$+\infty$

INVERSE

			$u_n>0$ à partir d'un certain rang	$u_n<0$ à partir d'un certain rang	sinon
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	$\ell\neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	0	0	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n}$	$\frac{1}{\ell}$	0	$+\infty$	$-\infty$	**???**

✌ **Explication** ✌ On pourrait bien sûr construire un tableau « quotient » à partir des tableaux « produit » et « inverse ». On y découvrirait de nouveaux cas d'indétermination : $\dfrac{1}{0}$ et $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$. Mais qu'est-ce au fond qu'une *forme indéterminée* ? C'est une « forme <u>À</u> déterminer ». Dans les tableaux précédents, le symbole **???** signifie qu'en effectuant une opération $(+\infty)-(+\infty)$ ou $0\times(+\infty)$, on peut tomber a priori sur **N'IMPORTE QUEL RÉSULTAT**.

- **Cas de la forme indéterminée** $(+\infty)-(+\infty)$ **:**
  - On peut obtenir n'importe quel réel ℓ : $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+\ell)=+\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n=+\infty$, mais : $\lim\limits_{n\to+\infty}\big((n+\ell)-n\big)=\ell$.
  - On peut obtenir $\pm\infty$: $\lim\limits_{n\to+\infty} 2n=+\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n=\infty$, mais : $\lim\limits_{n\to+\infty}\big(2n-n\big)=+\infty$.
  - On peut ne pas obtenir de limite : $\lim\limits_{n\to+\infty}\big(n+(-1)^n\big)=+\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n=+\infty$, mais $\big(n+(-1)^n\big)-n=(-1)^n$ n'a pas de limite.
- **Cas de la forme indéterminée** $0\times(+\infty)$ **:**
  - On peut obtenir n'importe quel réel ℓ : $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\ell}{n}=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n=+\infty$, mais : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{\ell}{n}\times n\right)=\ell$.
  - On peut obtenir $\pm\infty$: $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2=+\infty$, mais : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{n}\times n^2\right)=+\infty$.
  - On peut ne pas obtenir de limite : $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n=+\infty$, mais $\dfrac{(-1)^n}{n}\times n=(-1)^n$ n'a pas de limite.

Démonstration Nous nous contentrons de démontrer quelques-uns des résultats des tableaux précédents.

- **Somme de deux limites finies :** On suppose que : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\ell$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=\ell'$. Soit $\varepsilon>0$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, d'après l'inégalité triangulaire : $\Big|(u_n+v_n)-(\ell+\ell')\Big|=\Big|(u_n-\ell)+(v_n-\ell')\Big|\leqslant|u_n-\ell|+|v_n-\ell'|$.

  Ici, **SIMPLIFIER**, c'est faire apparaître les quantités $|u_n-\ell|$ et $|v_n-\ell'|$ de l'hypothèse.

  On majore en **SIMPLIFIANT** et en vérifiant que ce par quoi on majore **TEND TOUJOURS VERS** 0.

  Or par hypothèse : $|u_n-\ell|<\dfrac{\varepsilon}{2}$ à partir d'un certain rang N et : $|v_n-\ell'|<\dfrac{\varepsilon}{2}$ à partir d'un certain rang N'. Posons : $n_0=\max\big\{N,N'\big\}$. Pour tout $n\geqslant n_0$: $\Big|(u_n+v_n)-(\ell+\ell')\Big|\leqslant|u_n-\ell|+|v_n-\ell'|<\dfrac{\varepsilon}{2}+\dfrac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$.
- **Somme d'une limite finie et d'une limite** $+\infty$ **:** On suppose que : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\ell$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=+\infty$. Soit $A>0$. Par hypothèse : $|u_n-\ell|<1$ à partir d'un certain rang N, donc en particulier : $u_n>\ell-1$, et : $v_n>A-\ell+1$ à partir d'un certain rang N'. Posons : $n_0=\max\big\{N,N'\big\}$. Pour tout $n\geqslant n_0$: $u_n+v_n>(\ell-1)+(A-\ell+1)=A$.
- **Somme de deux limites** $+\infty$ **:** On suppose que : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=+\infty$. Soit $A>0$. Par hypothèse : $u_n>A$ à partir d'un certain rang N et : $v_n>0$ à partir d'un certain rang N'. Posons : $n_0=\max\big\{N,N'\big\}$. Pour tout $n\geqslant n_0$: $u_n+v_n>A+0=A$.
- **Produit de deux limites finies :** On suppose que : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\ell$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=\ell'$. Soit $\varepsilon>0$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$ d'après l'inégalité triangulaire : $\big|u_nv_n-\ell\ell'\big|=\Big|(u_n-\ell)v_n+\ell(v_n-\ell')\Big|\leqslant|u_n-\ell|.|v_n|+|\ell|.|v_n-\ell'|$.

  À présent, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente donc bornée, disons par K en valeur absolue. En outre : $|u_n-\ell|<\dfrac{\varepsilon}{2K}$ à partir d'un certain rang N et : $|v_n-\ell'|<\dfrac{\varepsilon}{2\big(|\ell|+1\big)}$ à partir d'un certain rang N'. Posons donc : $n_0=\max\big\{N,N'\big\}$. Pour tout $n\geqslant n_0$:

$$\big|u_nv_n-\ell\ell'\big|\leqslant|u_n-\ell|.|v_n|+|\ell|.|v_n-\ell'|<\frac{\varepsilon}{2K}\,K+|\ell|\,\frac{\varepsilon}{2\big(|\ell|+1\big)}\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

- **Produit $\ell \times (+\infty)$ avec $\ell \in \mathbb{R}_+^*$:** On suppose que : $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \in \mathbb{R}_+^*$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$. Soit $A > 0$. Par hypothèse : $|u_n - \ell| < \frac{\ell}{2}$ à partir d'un certain rang N, donc en particulier : $u_n > \ell - \frac{\ell}{2} = \frac{\ell}{2} > 0$, et : $v_n > \frac{2A}{\ell} > 0$ à partir d'un certain rang N'. Posons : $n_0 = \max\{N, N'\}$. Pour tout $n \geqslant n_0$: $u_n v_n > \frac{\ell}{2} \times \frac{2A}{\ell} = A$.

- **Produit de deux limites $+\infty$:** On suppose que : $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$. Soit $A > 0$. Par hypothèse : $u_n > A$ à partir d'un certain rang N et : $v_n > 1$ à partir d'un certain rang N'. Posons : $n_0 = \max\{N, N'\}$. Pour tout $n \geqslant n_0$: $u_n v_n > A \times 1 = A$.

- **Inverse d'une limite finie non nulle :** On suppose que : $u_n \neq 0$ à partir d'un certain rang N et que : $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \neq 0$. Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $n \geqslant N$: $\left|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{\ell}\right| = \frac{|u_n - \ell|}{|u_n|.|\ell|}$.
Par hypothèse : $|u_n - \ell| < \min\left\{\frac{|\ell|}{2}, \frac{\varepsilon|\ell|^2}{2}\right\}$ à partir d'un certain rang N', donc d'après l'inégalité triangulaire : $|\ell| - |u_n| \leqslant |u_n - \ell| < \frac{|\ell|}{2}$, d'où : $|u_n| > |\ell| - \frac{|\ell|}{2} = \frac{|\ell|}{2}$. Posons : $n_0 = \max\{N, N'\}$. Pour tout $n \geqslant n_0$: $\left|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{\ell}\right| = \frac{|u_n - \ell|}{|u_n|.|\ell|} < \frac{\frac{\varepsilon|\ell|^2}{2}}{\frac{|\ell|}{2} \times |\ell|} = \varepsilon$.

- **Inverse d'une limite $+\infty$:** On suppose que : $u_n \neq 0$ à partir d'un certain rang N et que : $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. Soit $\varepsilon > 0$. Par hypothèse : $u_n > \frac{1}{\varepsilon}$ à partir d'un certain rang N'. Posons : $n_0 = \max\{N, N'\}$. Pour tout $n \geqslant n_0$: $\left|\frac{1}{u_n}\right| = \frac{1}{u_n} < \varepsilon$.

- **Inverse d'une limite nulle de suite strictement positive :** On suppose que : $u_n > 0$ à partir d'un certain rang N et que : $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$. Soit $A > 0$. Par hypothèse : $|u_n| < \frac{1}{A}$ à partir d'un certain rang N'. Posons : $n_0 = \max\{N, N'\}$. Pour tout $n \geqslant n_0$: $\frac{1}{u_n} = \frac{1}{|u_n|} > A$. ■

Le résultat suivant est momentanément admis car il requiert la notion de limite d'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ — notion connue intuitivement, mais qui ne sera définie proprement que plus tard dans l'année.

Théorème (Composition à gauche par une fonction) Soient I un intervalle, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction, ℓ un élément de I ou une borne de I, $L \in \overline{\mathbb{R}}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite.

$$\text{Si : } \lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \quad \text{et} \quad \lim_{x\to\ell} f(x) = L, \quad \text{alors : } \lim_{n\to+\infty} f(u_n) = L.$$

Exemple Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\mathrm{e}^x = \lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$. **RÉSULTAT À CONNAÎTRE !**

Démonstration Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \mathrm{e}^{n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}$. Or : $\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t} = \ln'(1) = 1$, donc par composition : $\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}{\frac{x}{n}} = 1$, ou encore : $\lim_{n\to+\infty} n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) = x$. On achève le travail en composant ce résultat avec la limite : $\lim_{t\to x}\mathrm{e}^t = \mathrm{e}^x$.

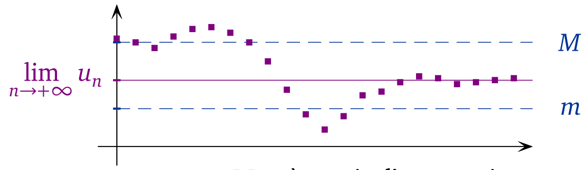
✖ **ATTENTION !** ✖ Cet exemple prouve qu'on peut avoir : $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$ sans avoir : $\lim_{n\to+\infty} u_n^n = 1$. On peut résumer cela en disant que $1^{+\infty}$ est une nouvelle forme indéterminée.

3.2 Passage à la limite dans les inégalités

Théorème (Limites et inégalités strictes) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle possédant une limite et $m, M \in \mathbb{R}$.

(i) Si : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n < M$, alors : $u_n < M$ à partir d'un certain rang.

(ii) Si : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n > m$, alors : $u_n > m$ à partir d'un certain rang.



$m < u_n < M$ à partir d'un certain rang

Démonstration Prouvons seulement (i). Posons : $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. Si : $\ell = -\infty$, tous les u_n sont dans le voisinage $]-\infty, M[$ de ℓ à partir d'un certain rang. Si au contraire : $\ell \in \mathbb{R}$, sachant que : $M - \ell > 0$ par hypothèse, tous les u_n sont tous dans le voisinage $]\ell - (M-\ell), \ell + (M-\ell)[\subset]-\infty, M[$ de ℓ à partir d'un certain rang. Dans les deux cas : $u_n < M$ à partir d'un certain rang. ■

Théorème (Limites et inégalités larges) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles possédant une limite finie.

$$\text{Si : } u_n \leqslant v_n \text{ à partir d'un certain rang, alors : } \lim_{n\to+\infty} u_n \leqslant \lim_{n\to+\infty} v_n.$$

Ce résultat est utilisé le plus souvent lorsque l'une des deux suites est constante.

✖ **Attention !** ✖ C'est faux avec des inégalités **strictes** ! Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\dfrac{1}{n} > 0$, mais : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

Démonstration Raisonnons par l'absurde en supposant que : $\lim\limits_{n\to+\infty} (v_n - u_n) < 0$. Le théorème précédent affirme alors que : $v_n - u_n < 0$ à partir d'un certain rang — contradiction. ■

3.3 Extraction de suites

Définition (Suite extraite) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. On appelle *suite extraite de* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ toute suite de la forme $\big(u_{\varphi(n)}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ où $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ est une fonction strictement croissante.

✌ **Explication** ✌

- La fonction φ n'est jamais qu'une suite strictement croissante d'entiers naturels utilisés comme de nouveaux indices. Par exemple, si : $\varphi = (2, 4, 5, 8, 24, 59, \ldots)$, la suite $\big(u_{\varphi(n)}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite $(u_2, u_4, u_5, u_8, u_{24}, u_{59}, \ldots)$.
- La suite extraite $\big(u_{\varphi(n)}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est jamais que la **composée** $u \circ \varphi$. En particulier, si on en extrait une nouvelle suite à partir d'une fonction $\psi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante, le résultat est : $u \circ \varphi \circ \psi = \big(u_{\varphi\circ\psi(n)}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ **et non pas** : $u \circ \psi \circ \varphi = \big(u_{\psi\circ\varphi(n)}\big)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemple

- Les suites $\left(\sqrt{2^n + 4n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites extraites de la suite de terme général $\sqrt{n}$, associées respectivement aux fonctions $n \longmapsto 2^n + 4n$ et $n \longmapsto n^2$ strictement croissantes de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.
- Les suites constantes égales à 1 et -1 respectivement sont deux suites extraites de la suite de terme général $(-1)^n$.

✖ **Attention !** ✖ Pour tout $k \in \mathbb{N}$, le terme qui vient après u_{2k} dans la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est : $u_{2(k+1)} = u_{2k\underline{\underline{+2}}}$ **et non pas** u_{2k+1}. De même, le terme qui vient après u_{2k+1} dans la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est : $u_{2(k+1)+1} = u_{2k\underline{\underline{+3}}}$ **et non pas** u_{2k+2}.

Théorème Soit φ une fonction strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\varphi(n) \geqslant n$.

Démonstration **Initialisation :** Comme $\varphi(0) \in \mathbb{N}$: $\varphi(0) \geqslant 0$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que : $\varphi(n) \geqslant n$. Alors par stricte croissance de φ : $\varphi(n+1) > \varphi(n) \geqslant n$. Or $\varphi(n+1)$ est un ENTIER, donc : $\varphi(n+1) \geqslant n+1$. ■

Théorème **(Limites de suites extraites)** Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

(i) Si : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$, alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{\varphi(n)} = \ell$ pour toute fonction $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante.

(ii) Si : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1} = \ell$, alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

Démonstration

(i) Sous l'hypothèse que : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$, soit $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante. Nous voulons montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{\varphi(n)} = \ell$. Soit $\mathscr{V}$ un voisinage de ℓ. À partir d'un certain rang N : $u_n \in \mathscr{V}$. Or pour tout $n \geqslant N$, par croissance de φ et d'après le lemme : $\varphi(n) \geqslant \varphi(N) \geqslant N$, donc enfin : $u_{\varphi(n)} \in \mathscr{V}$.

(ii) Sous l'hypothèse que : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1} = \ell$, montrons que : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$. Soit $\mathscr{V}$ un voisinage de ℓ. Alors : $u_{2n} \in \mathscr{V}$ à partir d'un certain rang N et : $u_{2n+1} \in \mathscr{V}$ à partir d'un certain rang N'. Posons : $n_0 = \max\left\{2N, 2N'+1\right\}$ et donnons-nous $n \geqslant n_0$ quelconque.

— Si n est pair : $n = 2p$ avec $p \in \mathbb{N}$, alors : $2p = n \geqslant n_0 \geqslant 2N$ donc : $p \geqslant N$, donc : $u_n = u_{2p} \in \mathscr{V}$.

— Si n est impair : $n = 2p+1$ avec $p \in \mathbb{N}$, alors : $2p+1 = n \geqslant n_0 \geqslant 2N'+1$ donc : $p \geqslant N'$, donc : $u_n = u_{2p+1} \in \mathscr{V}$.

Dans les deux cas : $u_n \in \mathscr{V}$. ■

✎ **En pratique** ✎ Ce théorème est souvent utilisé pour montrer qu'une suite N'A PAS DE LIMITE. Il suffit pour cela d'en exhiber deux suites extraites n'ayant pas la même limite.

Exemple La suite de terme général $(-1)^n$ n'a pas de limite car : $\lim\limits_{n\to+\infty} (-1)^{2n} = 1$ alors que : $\lim\limits_{n\to+\infty} (-1)^{2n+1} = -1$.

Exemple Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $u_n = \dfrac{n}{9} - \left\lfloor \dfrac{\sqrt{n}}{3} \right\rfloor^2$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite car : $u_{9n^2} = 0 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ alors que : $u_{(3n+1)^2} = \dfrac{(3n+1)^2}{9} - \left\lfloor \dfrac{3n+1}{3} \right\rfloor^2 = \left(n^2 + \dfrac{6n+1}{9}\right) - n^2 = \dfrac{6n+1}{9} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

4 Théorèmes d'existence de limite

L'existence d'une limite n'est jamais acquise. Dans les paragraphes qui précèdent, l'existence de certaines limites a été établie — somme, produit, suites extraites, etc. On omet généralement de voir ces résultats comme des théorèmes d'EXISTENCE pour les voir seulement, en pratique, comme des théorèmes de CALCUL, de manipulation des limites. Les théorèmes qui suivent, au contraire, gagnent à être conçus comme de vrais théorèmes d'existence. Ce qu'ils nous fournissent de façon essentielle, ce n'est pas tant la VALEUR d'une limite que son EXISTENCE.

4.1 Théorèmes d'encadrement/minoration/majoration

Théorème Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites réelles et $\ell \in \mathbb{R}$.

(i) **Théorème d'encadrement :**
Si : $\lim\limits_{n\to+\infty} m_n = \lim\limits_{n\to+\infty} M_n = \ell$ et si : $m_n \leqslant u_n \leqslant M_n$ à partir d'un certain rang, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ **EXISTE** et vaut ℓ.

(ii) **Théorème de minoration :**
Si : $\lim\limits_{n\to+\infty} m_n = +\infty$ et si : $u_n \geqslant m_n$ à partir d'un certain rang, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ **EXISTE** et vaut $+\infty$.

(iii) **Théorème de majoration :**
Si : $\lim\limits_{n\to+\infty} M_n = -\infty$ et si : $u_n \leqslant M_n$ à partir d'un certain rang, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ **EXISTE** et vaut $-\infty$.

Démonstration

(i) Soit $\varepsilon > 0$. Par hypothèse : $m_n \leqslant u_n \leqslant M_n$ à partir d'un certain rang N, $m_n > \ell - \varepsilon$ à partir d'un certain rang N' et : $M_n < \ell + \varepsilon$ à partir d'un certain rang N''. Alors pour tout $n \geqslant \max\{N, N', N''\}$: $\ell - \varepsilon < m_n \leqslant u_n \leqslant M_n < \ell + \varepsilon$, donc : $|u_n - \ell| < \varepsilon$.

(ii) Soit $A > 0$. Par hypothèse : $u_n \geqslant m_n$ à partir d'un certain rang N et : $m_n > A$ à partir d'un certain rang N'. Alors pour tout $n \geqslant \max\{N, N'\}$: $u_n \geqslant m_n > A$, donc : $u_n > A$. ■

✖ **Attention !** ✖ Ne prenez pas le théorème d'encadrement pour un simple passage à la limite dans des inégalités larges. Quand on passe à la limite dans une inégalité, on sait déjà que son membre de gauche et son membre de droite ont une limite. Dans le théorème d'encadrement au contraire, seules les limites $\lim\limits_{n\to+\infty} m_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} M_n$ sont réputées exister au départ et l'existence de $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ en découle.

Exemple $\lim\limits_{n\to+\infty} n! = +\infty$ par minoration, car pour tout $n \in \mathbb{N}$: $n! \geqslant n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$.

Le théorème d'encadrement est souvent utilisé sous la forme suivante :

Théorème (Produit d'une suite bornée par une suite de limite nulle) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et si : $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$, alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n u_n = 0$.

Démonstration Par hypothèse, il existe $K \geqslant 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $|u_n| \leqslant K$. Multiplions par ε_n : $0 \leqslant |\varepsilon_n u_n| \leqslant K|\varepsilon_n|$. Aussitôt : $\lim\limits_{n\to+\infty} |\varepsilon_n u_n| = 0$ par encadrement, donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n u_n = 0$. ■

Exemple $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sin n}{n} = 0$ car la suite $(\sin n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

Théorème (Limite d'une suite géométrique) Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

	$x > 1$	$x = 1$	$\lvert x\rvert < 1$	$x \leqslant -1$
$\lim\limits_{n\to+\infty} x^n$	$+\infty$	1	0	Pas de limite

Démonstration

- **Cas où $x > 1$:** $x^n = \big(1+(x-1)\big)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(x-1)^k = 1+n(x-1)+\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}(x-1)^k \overset{x>1}{\geqslant} n(x-1)$ pour tout $n \geqslant 2$. Or : $\lim\limits_{n\to+\infty} n(x-1) = +\infty$ car : $x > 1$, donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} x^n = +\infty$ par minoration.
- **Cas où $|x| < 1$:** $\dfrac{1}{|x|} > 1$, donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{|x|}\right)^n = +\infty$ d'après le cas précédent, puis : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|x^n\right| = 0$ par passage à l'inverse, et enfin : $\lim\limits_{n\to+\infty} x^n = 0$.

- **Cas où $x=-1$:** Le cas de la suite $\left((-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ a déjà été traité dans le paragraphe sur les suites extraites.
- **Cas où $x<-1$:** $x^2>1$, donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} x^{2n}=+\infty$ d'après le premier cas, puis : $\lim\limits_{n\to+\infty} x^{2n+1}=-\infty$. Les suites extraites $\left(x^{2n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(x^{2n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ n'ayant pas même limite, $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite. ■

Exemple Pour tout $x\in\,]-1,1[$: $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n=\frac{1}{1-x}$.

Démonstration Par hypothèse sur x : $\lim\limits_{n\to+\infty} x^n=0$, donc : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\frac{1}{1-x}$.

Exemple Pour tout $x\in\,]-1,1[$: $\lim\limits_{n\to+\infty} x^{2^n}=0$.
On remarquera bien que la suite $\left(x^{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ N'est PAS géométrique, x^{2^n} et $\left(x^2\right)^n=a^{2n}$ n'ont rien de commun.

Démonstration Tout simplement, $\left(x^{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ — qui converge vers 0.

Exemple Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite strictement positive et $\eta\in\,]0,1[$. On suppose que : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\leqslant\eta$ à partir d'un certain rang N. Alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=0$.

Démonstration Pour tout $n\geqslant N$: $u_{n+1}\leqslant\eta u_n$, donc : $\dfrac{u_{n+1}}{\eta^{n+1}}\leqslant\dfrac{u_n}{\eta^n}$, donc la suite $\left(\dfrac{u_n}{\eta^n}\right)_{n\geqslant N}$ est décroissante, et donc bornée car positive. Or : $\eta\in\,]0,1[$, donc : $\lim\limits_{n\to+\infty}\eta^n=0$. Par produit d'une suite bornée et d'une suite convergente de limite nulle : $u_n=\dfrac{u_n}{\eta^n}\times\eta^n\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$.

Théorème (Comparaison exponentielles/factorielle) Pour tout $x\in\mathbb{R}$: $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x^n}{n!}=0$.

Démonstration Si : $x\neq0$, posons : $u_n=\dfrac{|x|^n}{n!}>0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, de sorte que : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\dfrac{|x|}{n+1}$. L'égalité : $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{|x|}{n+1}=0$ montre que : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\leqslant\dfrac{1}{2}$ à partir d'un certain rang. Ainsi, d'après l'exemple précédent : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=0$. ■

4.2 THÉORÈME DE LA LIMITE MONOTONE

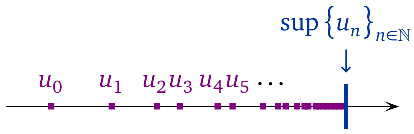
Le théorème de la limite monotone est LE théorème d'EXISTENCE par excellence.

Théorème (Théorème de la limite monotone) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

$$\boxed{\text{Si } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est monotone, alors } \lim_{n\to+\infty} u_n \text{ EXISTE.}}$$

Plus précisément, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante majorée, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, et si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante NON majorée : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$. On dispose bien sûr d'un résultat analogue sur les suites décroissantes.

✌ **Explication** ✌ En fait, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\sup\left\{u_n\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ avec une borne supérieure DANS $\overline{\mathbb{R}}$ — éventuellement $+\infty$. Si de plus $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée, on voit sur la figure ci-contre que les u_n viennent s'écraser contre leur « sup » fini.



Démonstration Nous traiterons seulement le cas d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante.

- Supposons $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ majorée. L'ensemble $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est alors une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$, donc possède une borne supérieure ℓ DANS $\mathbb{R}$ d'après la propriété de la borne supérieure.
  Montrons que : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$. Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de ℓ, $\ell - \varepsilon$ ne majore pas $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donc : $u_N > \ell - \varepsilon$ pour un certain $N \in \mathbb{N}$. Du coup, pour tout $n \geqslant N$: $u_n \geqslant u_N > \ell - \varepsilon$ car $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, mais donc aussi : $\ell - \varepsilon < u_n \leqslant \ell < \ell + \varepsilon$, ou encore : $|u_n - \ell| < \varepsilon$.
- Supposons $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ NON majorée. Soit $A > 0$. Comme A ne majore pas $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $u_N > A$ pour un certain $N \in \mathbb{N}$, donc pour tout $n \geqslant N$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant croissante : $u_n \geqslant u_N > A$, donc : $u_n > A$. Comme voulu : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. ■

✖ **ATTENTION !** ✖

> Une suite croissante majorée par M converge…
> MAIS PAS FORCÉMENT VERS M, qui n'est qu'UN majorant parmi d'autres !

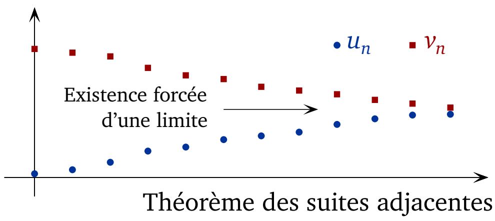
Exemple Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\lfloor 2^k\sqrt{2}\rfloor}{3^k}$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Démonstration Il nous suffit, d'après le théorème de la limite monotone, de montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée. Or $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante car pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = \dfrac{\lfloor 2^{n+1}\sqrt{2}\rfloor}{3^{n+1}} \geqslant 0$, et majorée car pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \leqslant \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{2^k\sqrt{2}}{3^k} = \sqrt{2}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{2}{3}\right)^k = \sqrt{2}\,\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{3}} \leqslant \frac{\sqrt{2}}{1-\frac{2}{3}} = 3\sqrt{2}$.

4.3 THÉORÈME DES SUITES ADJACENTES

Définition (Suites adjacentes) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont *adjacentes* si l'une de ces suites est croissante, l'autre décroissante et : $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = 0$.

✌ **Explication** ✌ Deux suites adjacentes sont deux suites qui viennent à la rencontre l'une de l'autre, l'une en croissant, l'autre en décroissant, et qui finissent par s'écraser l'une contre l'autre. « Il faut bien qu'elles s'écrasent QUELQUE PART ! » nous dit le théorème des suites adjacentes — théorème d'EXISTENCE.



Théorème des suites adjacentes

Théorème (Théorème des suites adjacentes) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. Si elles sont adjacentes, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont toutes deux convergentes de même limite ℓ.
Précisément, si c'est $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui est croissante et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui est décroissante, alors pour tous $m, n \in \mathbb{N}$: $u_m \leqslant \ell \leqslant v_n$.

Démonstration Supposons $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante.

- Montrons d'abord que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \leqslant v_n$ en supposant par l'absurde que pour un certain $N \in \mathbb{N}$: $u_N > v_N$, i.e. : $u_N - v_N > 0$. Pour tout $n \geqslant N$, sachant que par croissance : $u_N \leqslant u_n$, et par décroissance : $v_n \leqslant v_N$, alors : $u_n - v_n \geqslant u_N - v_N$. Faisons finalement tendre n vers $+\infty$: $0 = \lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) \geqslant u_N - v_N$. Conclusion : $0 \geqslant u_N - v_N > 0$. Contradiction !
- Montrons ensuite que pour tous $m, n \in \mathbb{N}$: $u_m \leqslant v_n$. Soient $m, n \in \mathbb{N}$. Si $m \leqslant n$: $u_m \leqslant u_n \leqslant v_n$ par croissance de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et d'après le premier point, et si $m > n$: $u_m \leqslant v_m \leqslant v_n$ par décroissance de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et d'après le premier point. Dans les deux cas : $u_m \leqslant v_n$.

- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée (par v_0), donc convergente de limite un certain réel ℓ_u en vertu du théorème de la limite monotone. De même, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée (par u_0), donc convergente de limite un certain réel ℓ_v. L'égalité : $\ell_u = \ell_v$ découle de ce que : $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$.
- Pour tous $m, n \in \mathbb{N}$, l'inégalité : $u_m \leqslant \ell_u = \ell_v \leqslant v_n$ exprime simplement le fait que la suite croissante $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est majorée par sa limite et la suite décroissante $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ minorée par la sienne. ■

Exemple Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. On peut montrer que : $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = \mathrm{e}$.

Démonstration Posons : $v_n = u_n + \frac{1}{n.n!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et montrons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes. En particulier, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sera alors convergente d'après le théorème des suites adjacentes.

— Tout d'abord : $v_n - u_n = \frac{1}{n.n!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

— Ensuite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante car pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_{n+1} - u_n = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \frac{1}{(n+1)!} \geqslant 0$.

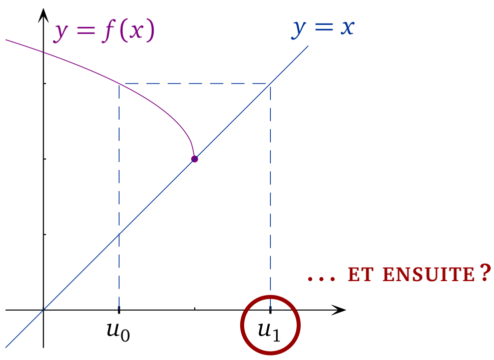
— Enfin $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante car pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \big(u_{n+1} - u_n\big) + \frac{1}{(n+1).(n+1)!} - \frac{1}{n.n!} = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1).(n+1)!} - \frac{1}{n.n!} \\ &= \frac{1}{n(n+1).(n+1)!}\Big(n(n+1) + n - (n+1)^2\Big) = \frac{-1}{n(n+1).(n+1)!} \leqslant 0. \end{aligned}$$

5 Suites récurrentes définies par une relation « $u_{n+1} = f(u_n)$ »

Les exercices qu'on vous a proposés jusqu'ici ont pu vous donner l'impression que pour définir une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par récurrence, il suffit de se donner une fonction f quelconque et un u_0 dans le domaine de définition de f, et de décréter simplement que « $u_{n+1} = f(u_n)$ ». Quelle illusion !

Notons par exemple f la fonction $x \longmapsto 2 + \sqrt{2-x}$ définie sur $]-\infty, 2]$ et posons : $u_0 = 1$. Comme : $f(u_0) = f(1) = 3$, on peut poser : $u_1 = 3$. Mais ensuite $f(3)$? Aucun sens ! Quelle valeur pour u_2 ? La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est ici pas définie. Mais comment différencier alors les exemples qui marchent de ceux qui ne marchent pas ?



Définition (Partie stable par une fonction) Soient E un ensemble, $f : E \longrightarrow E$ une fonction et D une partie de E. On dit que D est *stable par* f si : $f(D) \subset D$, i.e. si pour tout $x \in D$: $f(x) \in D$.

Exemple

- L'intervalle $\mathbb{R}_+^*$ est stable par la fonction inverse $x \longmapsto \frac{1}{x}$ car pour tout $x > 0$: $\frac{1}{x} > 0$.
- L'intervalle $[0,1]$ est stable par la fonction $x \longmapsto \sqrt{1-x}$ car pour tout $x \in [0,1]$: $0 \leqslant \sqrt{1-x} \leqslant 1$.

Théorème (Existence de suites récurrentes définies par une relation « $u_{n+1} = f(u_n)$ ») Soient D une partie de $\mathbb{R}$ et $f : D \longrightarrow D$ une fonction — ainsi D est stable par f.

- Pour tout $\delta \in D$, il existe une et une seule suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour laquelle : $u_0 = \delta$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = f(u_n)$.
- Cette suite, par ailleurs, est à valeurs dans D.

✌ **Explication** ✌ Idée toute simple ! Pour définir $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a besoin de composer et re-composer f par elle-même autant de fois qu'on veut et c'est précisément ce que la stabilité de D par f garantit : $u_n = \underbrace{f \circ \ldots \circ f}_{n \text{ fois}}(u_0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

En pratique Le fait que la suite du théorème soit à valeurs dans D est très pratique pour montrer qu'une suite est minorée/majorée/bornée. Par exemple, si l'intervalle $[1,3]$ est stable par une fonction f, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 2 \in [1,3]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = f(u_n)$ est à valeurs dans $[1,3]$, donc bornée entre 1 et 3.

Exemple Il existe une et une seule suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = \ln\left(1+\sqrt{u_n}\right)$.

Démonstration D'une part : $2 \in \mathbb{R}_+$, d'autre part l'intervalle $\mathbb{R}_+$ est stable par la fonction $x \longmapsto \ln\left(1+\sqrt{x}\right)$ car pour tout $x \in \mathbb{R}_+$: $1+\sqrt{x} \geqslant 1$ donc : $\ln\left(1+\sqrt{x}\right) \in \mathbb{R}_+$.

On s'intéresse à présent à la convergence des suites récurrentes définies par une relation « $u_{n+1} = f(u_n)$ », et pour cela, on commence par deux exemples simples.

Exemple La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = u_n + \mathrm{e}^{u_n}$ diverge vers $+\infty$.

Démonstration Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = \mathrm{e}^{u_n} \geqslant 0$, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, donc possède une limite $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ d'après le théorème de la limite monotone. Par l'absurde, faisons l'hypothèse que : $\ell \in \mathbb{R}$. Or : $\lim\limits_{x\to\ell} \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^\ell$, donc : $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(u_n + \mathrm{e}^{u_n}\right) = \ell + \mathrm{e}^\ell$, donc : $\mathrm{e}^\ell = 0$ — contradiction ! Il en découle que ℓ n'est pas un réel, donc : $\ell = +\infty$.

Exemple La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n^2}$ converge vers 0.

Démonstration L'intervalle $\mathbb{R}_+^*$ est stable par la fonction $x \longmapsto \dfrac{x}{1+x^2}$ et : $u_0 = 1 \in \mathbb{R}_+^*$, donc : $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Du coup : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_n}{1+u_n^2} - u_n = -\dfrac{u_n^3}{1+u_n^2} \leqslant 0$. Décroissante et positive, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se trouve donc converger d'après le théorème de la limite monotone, disons vers ℓ.
Aussitôt : $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{1+u_n^2} = \dfrac{\ell}{1+\ell^2}$, donc : $\ell - \dfrac{\ell}{1+\ell^2} = \dfrac{\ell^3}{1+\ell^2} = 0$. Enfin : $\ell = 0$.

En vue d'exemples plus sophistiqués, on démontre à présent deux petits théorèmes bien pratiques sur les suites définies par récurrence « $u_{n+1} = f(u_n)$ », l'un sur la monotonie d'une telle suite, l'autre sur la valeur de sa limite éventuelle.

Théorème (Monotonie d'une suite récurrente définie par une relation « $u_{n+1} = f(u_n)$ ») Soient D une partie de $\mathbb{R}$, $u_0 \in D$ et $f : D \longrightarrow D$ une fonction — ainsi D est stable par f. On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $u_{n+1} = f(u_n)$.

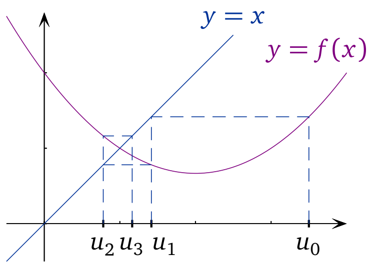
(i) Si : $f(x) \geqslant x$ pour tout $x \in D$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, et si : $f(x) \leqslant x$ pour tout $x \in D$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Le signe de la fonction $x \longmapsto f(x) - x$ nous renseigne donc sur la monotonie de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(ii) Si f est croissante, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone. Son sens de variation dépend de la position de u_0 par rapport à u_1.

(iii) Si f est décroissante, $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones de sens contraires. Leurs sens de variation dépendent de la position de u_0 et u_2.

Attention !

- Les assertions (i), (ii) et (iii) ne peuvent être utilisées que sur un domaine D STABLE PAR f. Sur la figure ci-contre, f est croissante sur $[2,+\infty[$ et : $u_0 \in [2,+\infty[$, mais $[2,+\infty[$ N'est PAS stable par f. On voit dans cet exemple $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ quitter le domaine $[2,+\infty[$. La croissance de f sur $[2,+\infty[$ n'a ainsi aucun impact sur $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dès lors que ses termes vivent leur vie ailleurs.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(u_{2n})$ vaut u_{2n+1} et non pas u_{2n+2}. Par contre : $u_{2n+2} = f \circ f(u_{2n})$, donc LA SUITE $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ EST RÉCURRENTE ASSOCIÉE À LA FONCTION $\boxed{f \circ f}$. Même chose pour $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.



Démonstration

(i) Si : $f(x) \geqslant x$ pour tout $x \in D$, alors : $u_{n+1} = f(u_n) \geqslant u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

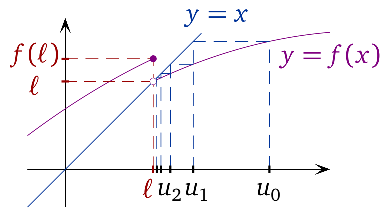
(ii) Supposons f croissante et montrons que, si : $u_0 \leqslant u_1$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante — on montrerait de même que si $u_1 \leqslant u_0$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. **Initialisation :** $u_0 \leqslant u_1$ par hypothèse.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Si : $u_n \leqslant u_{n+1}$, alors par croissance de f : $u_{n+1} = f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) = u_{n+2}$.

(iii) Supposons f décroissante avec : $u_0 \leqslant u_2$. Alors $f \circ f$ est croissante et : $u_{2n+2} = f \circ f(u_{2n})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante d'après (i). Il en découle que $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante car pour tout $n \in \mathbb{N}$, par décroissance de f : $u_{2n+1} = f(u_{2n}) \geqslant f(u_{2n+2}) = u_{2n+3}$. ■

Théorème (Limite d'une suite récurrente convergente définie par une relation « $u_{n+1} = f(u_n)$ ») Soient D une partie de $\mathbb{R}$, $u_0 \in D$ et $f : D \longrightarrow D$ une fonction — ainsi D est stable par f. On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $u_{n+1} = f(u_n)$.

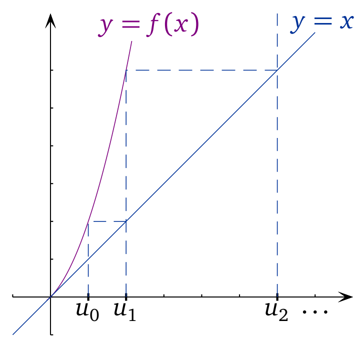
Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CONVERGE vers $\ell \in D$ et si f est CONTINUE en ℓ, alors ℓ est un point fixe de f, i.e. : $f(\ell) = \ell$.

✖ **ATTENTION !** ✖ L'hypothèse de continuité n'est vraiment pas là pour décorer. Sur la figure ci-contre : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ mais : $f(\ell) \neq \ell$.



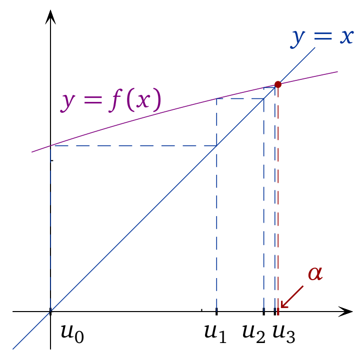
Démonstration Comme f est continue en ℓ : $\lim\limits_{x\to\ell} f(x) = f(\ell)$. Composons avec la limite $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$: $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\ell)$. Or : $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$, donc en effet : $f(\ell) = \ell$. ■

Exemple On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = u_n^2 + u_n$ et f la fonction $x \longmapsto x^2 + x$.



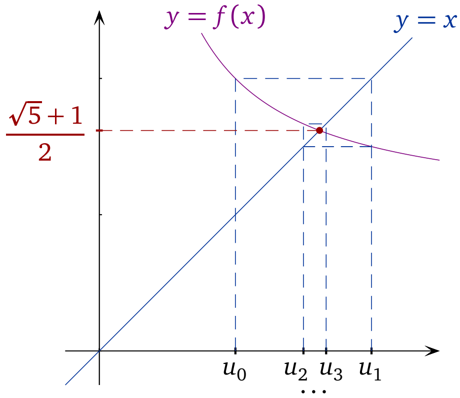
- Comme $[1, +\infty[$ est stable par f et : $u_0 \in [1, +\infty[$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et minorée par 1.
- Comme : $f(x) \geqslant x$ pour tout $x \in [1, +\infty[$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante donc possède une limite ℓ d'après le théorème de la limite monotone.
- Supposons par l'absurde que : $\ell \in \mathbb{R}$. Alors : $f(\ell) = \ell$ puisque f est continue sur $\mathbb{R}$, i.e. : $\ell^2 + \ell = \ell$, i.e. : $\ell = 0$. Or $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et : $u_0 = 1$, donc : $\ell \geqslant 1$ — contradiction !
- Conclusion : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croît vers $+\infty$.

Exemple On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = \ln(u_n + 3)$ et f la fonction $x \longmapsto \ln(x+3)$ sur $]-3, +\infty[$.



- La fonction $x \overset{g}{\longmapsto} f(x) - x$ est à la fois continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$ avec : $g(0) = \ln 3$ et : $\lim\limits_{+\infty} g = -\infty$, donc d'après le TVI strictement monotone, g s'annule une et une seule fois sur $\mathbb{R}_+$, disons en α — l'unique point fixe de f sur $\mathbb{R}_+$.
- Montrons que l'intervalle $[0, \alpha]$ est stable par f. Pour tout $x \in [0, \alpha]$, la croissance de f montre que : $0 \leqslant \ln 3 = f(0) \leqslant f(x) \leqslant f(\alpha) = \alpha$, donc que : $f(x) \in [0, \alpha]$.
- À présent, comme $[0, \alpha]$ est stable par f et comme : $u_0 = 0 \in [0, \alpha]$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et à valeurs dans $[0, \alpha]$. Or g est positive ou nulle sur $[0, \alpha]$, donc pour tout $x \in [0, \alpha]$: $f(x) \geqslant x$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = f(u_n) \geqslant u_n$. Conclusion : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Majorée par α, elle est finalement convergente d'après le théorème de la limite monotone, et comme f est continue sur $[0, \alpha]$, sa limite est un point fixe de f — forcément α. Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$.

Exemple On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{u_n}$ et f la fonction $x \longmapsto 1 + \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.



- L'intervalle $[1, 2]$ est clairement stable par f et : $u_0 \in [1, 2]$, donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et à valeurs dans $[1, 2]$ — donc bornée.
- Or f est décroissante comme somme sur $\mathbb{R}_+^*$ et : $u_2 = \dfrac{3}{2} \geqslant u_0$, donc $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante. Bornées, ces deux suites sont alors convergentes, disons de limites respectives ℓ et ℓ'.

- À présent, $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ étant récurrentes associées à la fonction continue $f\circ f$, ℓ et ℓ' sont points fixes de $f\circ f$. Or pour tout $x\in[1,2]$: $f\circ f(x)=x \iff 1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}=x \iff x^2-x-1=0 \overset{x\in[1,2]}{\iff} x=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$, donc : $\ell=\ell'=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$. Comme : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n}=\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1}=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge enfin vers $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$.

6 Bornes supérieures/inférieures, densité et limites

Explication Dans ce paragraphe, « caractérisation séquentielle » veut dire « caractérisation en termes de suites ».

Théorème (Caractérisation séquentielle de la borne supérieure/inférieure) Soient A une partie non vide de $\mathbb{R}$ et $M\in\mathbb{R}$.

(i) $M=\sup A$ si et seulement si M majore A et est la limite d'une suite d'éléments de A.

(ii) A n'est pas majorée si et seulement s'il existe une suite d'éléments de A de limite $+\infty$.

On dispose bien sûr de résultats analogues pour les bornes inférieures et les parties non minorées.

Démonstration

(i) Supposons d'abord que A admet M pour borne supérieure. Dans ce cas, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, comme $M-\dfrac{1}{n}$ ne majore pas A, A contient au moins un élément a_n supérieur ou égal à $M-\dfrac{1}{n}$. Comme par ailleurs la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par M : $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=M$ par encadrement.

Réciproquement, faisons l'hypothèse que M majore A et est la limite d'une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A. Soit M' un majorant de A. Alors : $a_n\leqslant M'$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, donc : $M\leqslant M'$ par passage à la limite, ce qui montre bien que M est le plus petit majorant de A, i.e. que : $M=\sup A$.

(ii) Supposons d'abord A non majorée. Dans ce cas, pour tout $n\in\mathbb{N}$, comme n ne majore pas A, A contient au moins un élément a_n supérieur ou égal à n, donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=+\infty$ par minoration.

La réciproque est tout à fait évidente. ■

Exemple On note A l'ensemble $\left\{\dfrac{q}{2^p+q}\right\}_{p,q\in\mathbb{N}^*}$. Alors : $\inf A=0$ et $\sup A=1$.

Démonstration Pour tous $p,q\in\mathbb{N}^*$: $0\leqslant\dfrac{q}{2^p+q}\leqslant 1$, donc A est minoré par 0 et majoré par 1. Ensuite : $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{2^n+1}=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n}{2+n}=1$ avec : $\dfrac{1}{2^n+1}\in A$ et $\dfrac{n}{2+n}\in A$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Théorème (Caractérisation séquentielle de la densité) Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) A est dense dans $\mathbb{R}$. (ii) Tout réel est la limite d'une suite d'éléments de A.

Démonstration

(i) $\Longrightarrow$ (ii) Supposons A dense dans $\mathbb{R}$. Soit $x\in\mathbb{R}$. Nous voulons montrer que x est la limite d'une suite d'éléments de A. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, l'intervalle ouvert non vide $\left]x,x+\dfrac{1}{n}\right[$ contient un élément a_n de A par hypothèse. Dans ces conditions : $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=x$ par encadrement.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) Faisons l'hypothèse que tout réel est la limite d'une suite d'éléments de A. Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que : $x < y$. Nous voulons montrer que l'intervalle ouvert non vide $]x, y[$ contient un élément de A, or son centre $\dfrac{x+y}{2}$ est la limite d'une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A. À partir d'un certain rang, du coup : $\left|a_n - \dfrac{x+y}{2}\right| < \dfrac{y-x}{2}$, donc : $x < a_n < y$ comme voulu. ■

Définition (Nombre décimal) On appelle *décimal* tout rationnel de la forme $\dfrac{p}{10^n}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$.

✌ **Explication** ✌ On peut aussi dire qu'un décimal est un réel dont le développement décimal est fini, i.e. un réel qui, en base 10, n'a qu'un nombre fini de chiffres après la virgule.

Théorème (Densité des décimaux dans $\mathbb{R}$)

- L'ensemble des décimaux est dense dans $\mathbb{R}$.
- Précisément, pour tout $x \in \mathbb{R}$, si on note $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $a_n = \dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$ et $b_n = a_n + \dfrac{1}{10^n}$, alors $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes, à valeurs décimales et de limite commune x. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_n est appelé la *valeur décimale approchée de x par défaut à 10^{-n} près* et b_n sa *valeur décimale approchée par excès à 10^{-n} près*.

✌ **Explication** ✌

- Tout décimal est rationnel mais la réciproque est fausse, par exemple $\dfrac{1}{3}$ est rationnel mais non décimal. En montrant que tout réel est la limite d'une suite de décimaux, on montre donc en particulier que tout réel est la limite d'une suite de rationnels — on redémontre donc la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.
- Sur l'exemple de $x = \pi = 3,141592653589793\ldots$, calculons les premiers termes des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$a_0 = 3, \quad a_1 = \frac{31}{10} = 3,1, \quad a_2 = \frac{314}{100} = 3,14, \quad a_3 = \frac{3141}{1000} = 3,141, \quad a_4 = \frac{31415}{10000} = 3,1415\ldots$$

$$\text{et} \quad b_0 = 4, \quad b_1 = \frac{32}{10} = 3,2, \quad b_2 = \frac{315}{100} = 3,15, \quad b_3 = \frac{3142}{1000} = 3,142, \quad b_4 = \frac{31416}{10000} = 3,1416\ldots$$

Démonstration Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $10^n x - 1 < \lfloor 10^n x \rfloor \leqslant 10^n x$ donc : $x - \dfrac{1}{10^n} < a_n \leqslant x$, donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = x$ par encadrement, et du coup bien sûr : $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = x$. La densité de l'ensemble des décimaux dans $\mathbb{R}$ est ainsi établie. Il nous reste à montrer l'adjacence des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

- Tout d'abord : $b_n - a_n = \dfrac{1}{10^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
- Pour la croissance de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et la décroissance de $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, partons de l'inégalité, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$10^n a_n = \lfloor 10^n x \rfloor \leqslant 10^n x < \lfloor 10^n x \rfloor + 1 = 10^n b_n,$$

puis multiplions-la par 10 : $10^{n+1} a_n \leqslant 10^{n+1} x < 10^{n+1} b_n$. Par définition de la partie entière, sachant que $10^{n+1} a_n$ et $10^{n+1} b_n$ sont des ENTIERS, il en découle que : $10^{n+1} a_n \leqslant \lfloor 10^{n+1} x \rfloor = 10^{n+1} a_{n+1}$ et $10^{n+1} b_n \geqslant \lfloor 10^{n+1} x \rfloor + 1 = 10^{n+1} a_{n+1} + 1 = 10^{n+1} b_{n+1}$. On divise enfin par 10^{n+1} : $a_n \leqslant a_{n+1}$ et $b_n \geqslant b_{n+1}$. ■

✌ **Explication** ✌ Le résultat précédent peut être reformulé en termes de *développement décimal illimité*. Nous venons de montrer que tout réel x peut être écrit sous la forme : $\lfloor x \rfloor + \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{a_k}{10^k}$ pour une certaine suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'entiers compris entre 0 et 9. C'est cela qu'on appelle un *développement décimal illimité*. Reprenons l'exemple de π :

$$\pi = 3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \frac{5}{10^4} + \frac{9}{10^5} + \frac{2}{10^6} + \ldots$$

La question de l'unicité d'un tel développement se pose naturellement, et hélas non, il n'y a pas unicité en général. On peut montrer cependant que :

— l'unicité est garantie pour les réels NON décimaux,

— mais que tout décimal possède exactement deux développements décimaux illimités. On le comprend facilement sur un exemple : $12,584 = 12 + \frac{5}{10} + \frac{8}{10^2} + \frac{4}{10^3} = 12 + \frac{5}{10} + \frac{8}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \frac{9}{10^4} + \frac{9}{10^5} + \frac{9}{10^6} + \frac{9}{10^7} + \ldots,$ et pour plus de généralité, l'essentiel est dit dans le calcul suivant :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{9}{10^k} = \frac{9}{10} \times \frac{1 - \frac{1}{10^n}}{1 - \frac{1}{10}} = 1 - \frac{1}{10^n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1, \qquad \text{c'est-à-dire en résumé :} \quad 0,999999\ldots = 1.$$

Le développement décimal illimité : $12,584000\ldots$ est dit *propre*, tandis que le développement décimal illimité : $12,583999\ldots$ est dit *impropre*.

7 Extension aux suites complexes

Il s'agit d'étendre aux suites complexes les définitions et résultats que nous avons développés pour les suites réelles.

Définition (Suite complexe) On appelle *suite complexe* toute fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{C}$.

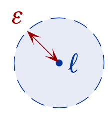
✖ Attention ! ✖ Pas d'inégalités dans $\mathbb{C}$, donc pas de suites complexes majorées/minorées/monotones ! Hélas !

La notion de suite bornée a quant à elle toujours un sens.

Définition (Suite bornée) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite complexe.
On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est *bornée* s'il existe $K \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $|u_n| \leqslant K$.

Pour une suite complexe, la notion de limite infinie n'a aucun sens car il sont où $-\infty$ et $+\infty$ dans $\mathbb{C}$?

Définition (Voisinage dans $\mathbb{C}$, définition simplifiée) Soit $\ell \in \mathbb{C}$.
On appelle *voisinage de ℓ (dans $\mathbb{C}$)* tout disque ouvert de centre ℓ, c'est-à-dire tout ensemble de la forme $\left\{ z \in \mathbb{C} / \quad |z - \ell| < \varepsilon \right\}$ pour un certain $\varepsilon > 0$.



Définition (Limite d'une suite complexe) Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite complexe et $\ell \in \mathbb{C}$. On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *admet ℓ pour limite* si tout voisinage de ℓ contient tous les u_n à partir d'un certain rang, i.e. si :

pour tout voisinage $\mathscr{V}$ de ℓ, u_n appartient à $\mathscr{V}$ à partir d'un certain rang.

Cela revient à dire que : $\lim\limits_{n \to +\infty} |u_n - \ell| = 0$, ce qui nous ramène au cas des limites de suites réelles :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists\, N \in \mathbb{N} / \quad \forall n \geqslant N, \quad |u_n - \ell| < \varepsilon.$$

Le théorème d'unicité de la limite est encore valable — ainsi que la notation $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$, du coup.

✌ Explication ✌ Même définition que dans le cas réel. La seule modification, c'est l'allure des voisinages.

Exemple Pour tout $z \in \mathbb{C}$, si : $|z| < 1$, alors : $\lim\limits_{n \to +\infty} z^n = 0$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$.

Démonstration Montrer que : $\lim\limits_{n \to +\infty} z^n = 0$ revient comme dans le cas réel à montrer que : $\lim\limits_{n \to +\infty} \left|z^n\right| = 0$, or nous savons très bien que : $\lim\limits_{n \to +\infty} |z|^n = 0$ quand : $|z| < 1$. Le calcul de la somme est identique.

Théorème **(Caractérisation de la limite par les parties réelle et imaginaire)** Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe et $\ell \in \mathbb{C}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$. (ii) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathrm{Re}(u_n) = \mathrm{Re}(\ell)$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathrm{Im}(u_n) = \mathrm{Im}(\ell)$.

Démonstration

(i) $\Longrightarrow$ (ii) Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\big|\mathrm{Re}(u_n) - \mathrm{Re}(\ell)\big| = \big|\mathrm{Re}(u_n - \ell)\big| \leqslant |u_n - \ell|$, or : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} |u_n - \ell| = 0$, donc : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathrm{Re}(u_n) = \mathrm{Re}(\ell)$ par encadrement. Attention, on vient d'appliquer le théorème d'encadrement à des suites **RÉELLES**.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) Si : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathrm{Re}(u_n) = \mathrm{Re}(\ell)$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathrm{Im}(u_n) = \mathrm{Im}(\ell)$, alors par de simples opérations : $|u_n - \ell| = \sqrt{\Big(\mathrm{Re}(u_n) - \mathrm{Re}(\ell)\Big)^2 + \Big(\mathrm{Im}(u_n) - \mathrm{Im}(\ell)\Big)^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sqrt{0^2 + 0^2} = 0$, donc : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$. ■

Exemple $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathrm{Arctan}\, n = \frac{\pi}{2}$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, donc : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n} + \mathrm{i}\,\mathrm{Arctan}\, n\right) = \frac{\mathrm{i}\pi}{2}$.

On définit comme avant les notions de convergence et divergence. Il est toujours vrai qu'une suite convergente est bornée.

Les opérations d'addition, produit, multiplication par un scalaire et inverse sur les limites donnent lieu aux mêmes résultats que dans le cas réel, à ceci près que les symboles $+\infty$ et $-\infty$ sont bannis.

Le paragraphe sur les suites extraites est intégralement maintenu.

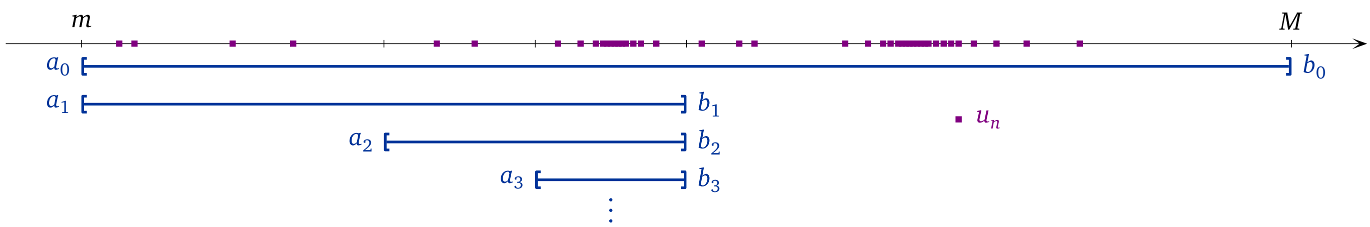
Les grands théorèmes d'existence de limite en revanche — théorèmes d'encadrement/minoration/majoration, théorème de la limite monotone et théorème des suites adjacentes — n'ont pas de sens dans le cas complexe car ils utilisent de façon essentielle la relation $\leqslant$ sur $\mathbb{R}$. C'est assez terrible en un sens, car nous passons notre temps à nous y référer pour étudier les suites réelles. Sous ce rapport, le paragraphe suivant doit être vu comme une lueur d'espoir.

8 Le théorème de Bolzano-Weierstrass

Ce théorème subtil et important aura pour nous un intérêt surtout théorique dans certaines preuves à venir en cours d'année. Il établit une sorte de réciproque — mais pas jusqu'au bout — au résultat selon lequel toute suite convergente est bornée.

Théorème **(Théorème de Bolzano-Weierstrass)** De toute suite complexe bornée on peut extraire une suite convergente.

✌ **Explication** ✌ Ce théorème d'**EXISTENCE** est d'un genre particulier. Il n'affirme pas que toute suite bornée est convergente — on a vu que c'est faux — mais qu'une suite bornée possède toujours une suite **EXTRAITE** convergente. Intuitivement, cela revient à dire que les valeurs d'une suite bornée sont forcées de s'accumuler **QUELQUE PART**, i.e. autour d'**AU MOINS UN** point.



Démonstration

- **Cas d'une suite réelle :** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite **RÉELLE** bornée, disons entre m et M avec : $m \leqslant M$. Nous cherchons une fonction $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante pour laquelle $\big(u_{\varphi(n)}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. Nous allons construire une telle φ pas à pas au moyen d'un algorithme appelé *dichotomie*.

  On commence en posant : $a_0 = m$, $b_0 = M$ et $\varphi(0) = 0$. Soit ensuite $n \in \mathbb{N}$. Supposons construits $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, $b_0, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$ et $\varphi(0), \ldots, \varphi(n) \in \mathbb{N}$ tels que :

(i) $a_0 \leqslant a_1 \leqslant \ldots \leqslant a_n$ et $b_n \leqslant b_{n-1} \leqslant \ldots \leqslant b_0$,

(ii) pour tout $k \in [\![0, n]\!]$: $b_k - a_k = \dfrac{M-m}{2^k}$,

(iii) l'ensemble d'indices $\left\{i \in \mathbb{N}/ \quad u_i \in [a_k, b_k]\right\}$ est infini pour tout $k \in [\![0, n]\!]$,

(iv) pour tout $k \in [\![0, n]\!]$: $a_k \leqslant u_{\varphi(k)} \leqslant b_k$,

(v) $\varphi(0) < \varphi(1) < \ldots < \varphi(n)$.

Il nous faut maintenant construire trois réels a_{n+1}, b_{n+1} et $\varphi(n+1)$ rendant vraies les assertions (i) à (v) au rang $n+1$. Remarquons dans ce but qu'au moins l'un des ensembles $\left\{i \in \mathbb{N}/ \quad u_i \in \left[a_n, \dfrac{a_n+b_n}{2}\right]\right\}$ et $\left\{i \in \mathbb{N}/ \quad u_i \in \left[\dfrac{a_n+b_n}{2}, b_n\right]\right\}$ est infini, car si les deux étaient finis, leur réunion $\left\{i \in \mathbb{N}/ \quad u_i \in [a_n, b_n]\right\}$ le serait aussi et cela contredirait (iii).

Du coup, posons : $\begin{cases} a_{n+1} = a_n \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \dfrac{a_n+b_n}{2} & \text{si } \left\{i \in \mathbb{N}/ \quad u_i \in \left[a_n, \dfrac{a_n+b_n}{2}\right]\right\} \text{ est infini (cas } \spadesuit) \\ a_{n+1} = \dfrac{a_n+b_n}{2} \quad \text{et} \quad b_{n+1} = b_n & \text{sinon (cas } \clubsuit). \end{cases}$

Par construction, l'ensemble d'indices $\left\{i \in \mathbb{N}/ \quad u_i \in [a_{n+1}, b_{n+1}]\right\}$ est infini, donc également l'ensemble $\left\{i \in \mathbb{N}/ \quad i > \varphi(n) \text{ et } u_i \in [a_{n+1}, b_{n+1}]\right\}$ — le même ensemble à ceci près qu'on a ôté les éléments inférieurs ou égaux à $\varphi(n)$, en nombre fini. Sélectionnons alors simplement dans cet ensemble un élément quelconque $\varphi(n+1)$.

Assertion (i) **au rang** $n+1$ **:** Comme $a_n \leqslant b_n$ d'après (ii) : $a_n \leqslant \dfrac{a_n+b_n}{2} \leqslant b_n$ donc : $a_n \leqslant a_{n+1}$ et $b_{n+1} \leqslant b_n$, que l'on soit dans le cas $\spadesuit$ ou dans le cas $\clubsuit$.

Assertion (ii) **au rang** $n+1$ **:** $b_{n+1} - a_{n+1} = \begin{cases} \dfrac{a_n+b_n}{2} - a_n = \dfrac{b_n-a_n}{2} \overset{\text{(ii)}}{=} \dfrac{M-m}{2^{n+1}} & \text{(cas } \spadesuit) \\ b_n - \dfrac{a_n+b_n}{2} = \dfrac{b_n-a_n}{2} \overset{\text{(ii)}}{=} \dfrac{M-m}{2^{n+1}} & \text{(cas } \clubsuit). \end{cases}$

Assertion (iii) **au rang** $n+1$ **:** Déjà fait.

Assertions (iv) **et** (v) **au rang** $n+1$ **:** Vraies par définition de $\varphi(n+1)$.

Ouf ! Fin de la construction. Les deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi construites sont adjacentes en vertu des assertions (i) et (ii), donc convergentes de limite commune un certain ℓ d'après le théorème des suites adjacentes. Or par ailleurs : $a_n \leqslant u_{\varphi(n)} \leqslant b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ par encadrement.

- **Cas général :** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe bornée, disons par K en module. Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\left|\mathrm{Re}(u_n)\right| \leqslant |u_n| \leqslant K$ et $\left|\mathrm{Im}(u_n)\right| \leqslant |u_n| \leqslant K$, donc $\left(\mathrm{Re}(u_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\mathrm{Im}(u_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites **RÉELLES** bornées.

  D'apès le théorème de Bolzano-Weierstrass **RÉEL**, $\left(\mathrm{Re}\left(u_{\varphi(n)}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, disons vers a, pour une certaine fonction $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante.

  La suite $\left(\mathrm{Im}\left(u_{\varphi(n)}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a hélas aucune raison de converger elle aussi mais elle est toujours bornée. D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass **RÉEL**, $\left(\mathrm{Im}\left(u_{\varphi\circ\psi(n)}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc, disons vers b, pour une nouvelle fonction $\psi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante.

  Finalement : $u_{\varphi\circ\psi(n)} = \mathrm{Re}\left(u_{\varphi\circ\psi(n)}\right) + \mathrm{i}\ \mathrm{Im}\left(u_{\varphi\circ\psi(n)}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a + \mathrm{i}b$. Comme voulu, nous avons réussi à extraire une suite convergente de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. ■