Limite d'une suite

1 Un peu de vocabulaire

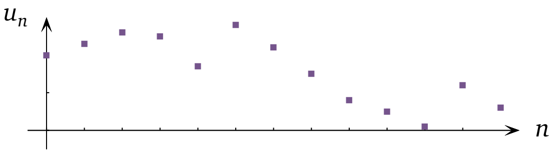
Définition (Suite réelle) On appelle *suite* (*réelle*) toute fonction u de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on préfère noter u_n le réel $u(n)$, et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite u.

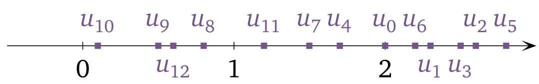
On travaillera seulement avec des suites définies sur tout $\mathbb{N}$, mais on pourrait bien sûr travailler avec des suites définies sur $[\![n_0, +\infty[\![$ avec $n_0 \in \mathbb{N}$.

Il existe au moins deux manières courantes de représenter une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

— soit comme une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire de manière plane avec $\mathbb{N}$ en abscisse et $\mathbb{R}$ en ordonnée,

— soit comme un ensemble de valeurs le long d'un axe.





Définition (Vocabulaire usuel des suites réelles) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est :

— *majorée* si l'ensemble $\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est une partie majorée de $\mathbb{R}$, i.e. si : $\exists M \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant M$.
Un tel M est appelé **un** *majorant* de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On dit alors que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *majorée par M* ou que M *majore* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

— *positive* (resp. *strictement positive*) si pout tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad u_n \geqslant 0 \quad$ (resp. $u_n > 0$).

— *croissante* (resp. *strictement croissante*) si pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad u_n \leqslant u_{n+1} \quad$ (resp. $u_n < u_{n+1}$).

On dispose bien sûr de définitions analogues des suites *minorées*, (*strictement*) *négatives* et (*strictement*) *décroissantes*. On dit enfin que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est :

— *bornée* si elle est à la fois majorée et minorée, i.e. si : $\exists K \geqslant 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leqslant K$.

— *monotone* (resp. *strictement monotone*) si elle est (resp. strictement) croissante ou (resp. strictement) décroissante.

Pour montrer qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone, deux méthodes courantes :

— étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$,

— si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **strictement positive**, étudier la position de $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ par rapport à 1. Cette méthode est intéressante surtout lorsque u_n est défini par des produits et des quotients et qu'on peut espérer des simplifications.

Attention ! Une suite majorée ne possède **jamais un seul majorant**, une suite majorée par 2 l'est aussi par 3. Par ailleurs :

> Les majorants d'une suite sont par définition des constantes. Une majoration de u_n par un réel **qui dépend de** n ne montre pas que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.

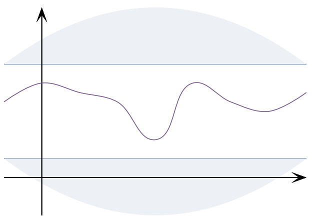
Ce qu'une suite a d'intéressant pour nous dans ce chapitre, ce ne sont pas ses premiers termes mais son comportement *asymptotique*, i.e. à l'infini. Si par exemple tous ses termes sont majorés par 1 sauf les 30 premiers, on a bien envie de dire que la suite est « presque » majorée par 1. On dit qu'elle est majorée par 1 *à partir d'un certain rang*.

Définition (Suite de propositions vraie à partir d'un certain rang) Soit $\mathscr{P} = (\mathscr{P}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de propositions. On dit que $\mathscr{P}$ (ou $\mathscr{P}_n$ par abus de langage) est *vraie à partir d'un certain rang* si : $\exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant N, \quad \mathscr{P}_n$.

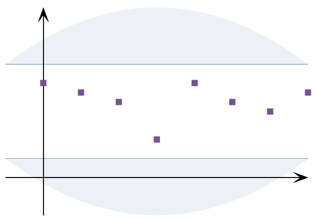
On peut définir une suite principalement de deux façons — soit explicitement, soit implicitement par récurrence. Ceci ne veut pas dire qu'il y a deux sortes de suites, ce sont là seulement deux manières de les définir. Une suite géométrique, par exemple, peut être définie aussi bien explicitement : $\quad u_n = q^n u_0 \quad$ que par récurrence : $\quad u_{n+1} = q u_n$.

- **Suites définies explicitement :** Définir une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ explicitement, c'est la définir à l'aide d'une certaine fonction f par une relation $u_n = f(n)$. Il n'est alors pas difficile de calculer u_{1000}, on calcule directement $f(1000)$.

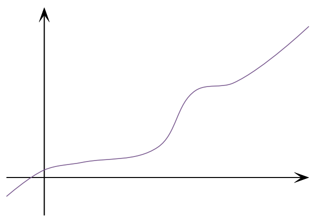
  De nombreuses propriétés de f — monotonie, signe, caractère majoré/minoré/borné — se transmettent alors telles quelles à $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, qui n'est après tout que la restriction de f à $\mathbb{N}$.



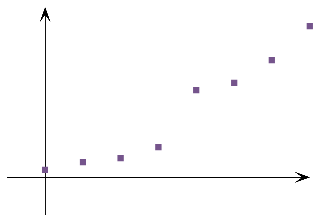
f est bornée...



... donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.



f est croissante...



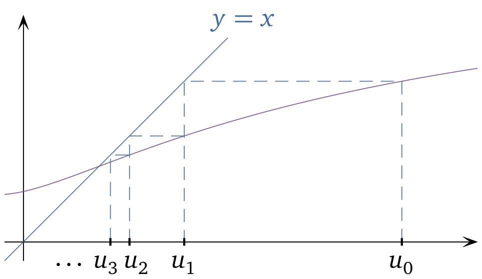
... donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

- **Suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$:** On peut définir une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par récurrence par la donnée de son premier terme u_0 et d'une relation $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est une fonction fixée. Une telle définition présente un énorme inconvénient, on est obligé pour calculer u_{1000} de calculer les uns après les autres $u_1, \ldots, u_{999}, u_{1000}$.

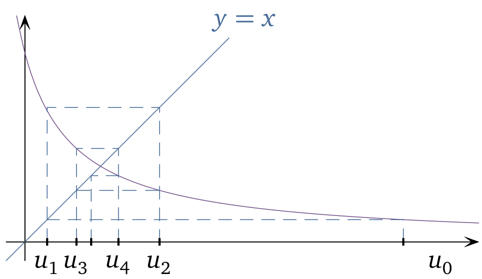
Attention ! Pour une suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$:

f est croissante $\cancel{\Longrightarrow}$ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

f est décroissante $\cancel{\Longrightarrow}$ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.



f est croissante MAIS $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante.



f est décroissante MAIS $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est même pas monotone.

2 Limite d'une suite réelle dans $\overline{\mathbb{R}}$

2.1 Définition

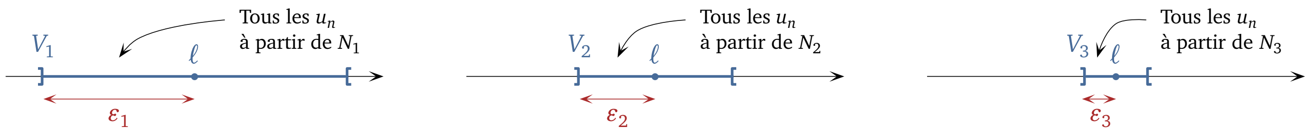
Définition **(Limite d'une suite)** Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

- **Définition générale :** On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *admet ℓ pour limite* si tout voisinage de ℓ contient tous les u_n à partir d'un certain rang, i.e. si :
$$\forall V_\ell \in \mathscr{V}_\ell(\mathbb{R}), \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant N, \quad u_n \in V_\ell.$$
- **Cas particulier d'une limite finie :** Si $\ell \in \mathbb{R}$, on dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *admet ℓ pour limite* si :
$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad n \geqslant N \implies |u_n - \ell| < \varepsilon,$$
ou bien de manière plus concise, si : $\quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant N, \quad |u_n - \ell| < \varepsilon.$
- **Cas particulier de la limite $+\infty$:** On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *admet $+\infty$ pour limite* si :
$$\forall A > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad n \geqslant N \implies u_n > A,$$
ou bien de manière plus concise, si : $\quad \forall A > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant N, \quad u_n > A.$
- **Cas particulier de la limite $-\infty$:** On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *admet $-\infty$ pour limite* si :
$$\forall A < 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad n \geqslant N \implies u_n < A,$$
ou bien de manière plus concise, si : $\quad \forall A < 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant N, \quad u_n < A.$

On peut montrer que les inégalités strictes : $|u_n - \ell| < \varepsilon$, $u_n > A$ et $u_n < A$ peuvent être remplacées par des inégalités larges : $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$, $u_n \geqslant A$ et $u_n \leqslant A$, cela n'affecte pas la notion de limite. J'utiliserai généralement des inégalités strictes, mais choisissez ce que vous préférez.

Obscures au premier abord, ces définitions satisfont en réalité parfaitement l'intuition que nous avons des limites.

— Trois voisinages V_1, V_2 et V_3 ne suffisent pas à forcer $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à tendre vers ℓ. Il est essentiel que la définition de la limite commence par « **POUR TOUT** voisinage V_ℓ de ℓ ».

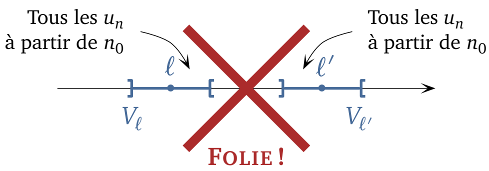


— Les premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne comptent pas quand on s'intéresse à sa limite, raison pour laquelle la définition de la limite piège $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans un voisinage de ℓ **À PARTIR D'UN CERTAIN RANG**.

— Intuitivement, plus le voisinage V_ℓ est petit, plus le rang N est grand.

Théorème **(Unicité de la limite)** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.
Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède une limite, celle-ci est unique et notée $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.
Pour tout $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, la relation $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ est souvent notée : $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

Démonstration Soient $\ell, \ell' \in \overline{\mathbb{R}}$. On veut montrer, sous l'hypothèse que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet ℓ et ℓ' pour limites, que $\ell = \ell'$. Supposons par l'absurde $\ell \neq \ell'$. Il existe alors un voisinage V_ℓ de ℓ et un voisinage $V_{\ell'}$ de ℓ' pour lesquels $V_\ell \cap V_{\ell'} = \varnothing$. Or, par hypothèse, $u_n \in V_\ell$ à partir d'un certain rang N et $u_n \in V_{\ell'}$ à partir d'un certain rang N'. Ainsi, pour $n_0 = \max\{N, N'\}$: $u_{n_0} \in V_\ell \cap V_{\ell'} = \varnothing$ — contradiction !



Cette preuve illustre une idée importante que nous retrouverons souvent. Si une suite de propositions $\mathscr{P}_1$ est vraie à partir d'un rang N_1, une suite de propositions $\mathscr{P}_2$ vraie à partir d'un rang N_2... et enfin une suite de propositions $\mathscr{P}_k$ vraie à partir d'un rang N_k, les suites de propositions $\mathscr{P}_1, \ldots, \mathscr{P}_k$ sont alors **TOUTES** vraies en même temps à partir du rang $\max\{N_1, \ldots, N_k\}$.

Et maintenant, deux exemples concrets qui n'ont qu'un seul intérêt, vous aider à bien comprendre la définition de la limite. En pratique, on ne revient pas à la définition quand on a une limite à calculer, on applique les théorèmes du chapitre.

Exemple $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n \sin n}{n^2+2} = 0$.

Démonstration Nous devons montrer que : $\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant N, \quad \left|\dfrac{n \sin n}{n^2+2}\right| < \varepsilon$.

Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, majorons : $\left|\dfrac{n \sin n}{n^2+2}\right| = \dfrac{n\,|\sin n|}{n^2+2} \leqslant \dfrac{n}{n^2+2} \leqslant \dfrac{n}{n^2} = \dfrac{1}{n}$.

On majore en **SIMPLIFIANT** et en vérifiant que ce par quoi on majore **TEND TOUJOURS VERS** 0.

On arrête de majorer quand on se sent capable de trouver le rang N cherché.

Posons $N = \left\lfloor \dfrac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$. À partir de N, l'inégalité $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$ est vraie, donc l'inégalité $\left|\dfrac{n \sin n}{n^2+2}\right| < \varepsilon$ aussi.

Exemple $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(n^2 + (-1)^n n\right) = +\infty$.

Démonstration Nous devons montrer que : $\forall A > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant N, \quad n^2 + (-1)^n n > A$.

Soit $A > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, minorons : $n^2 + (-1)^n n \geqslant n^2 - n = n(n-1) \geqslant (n-1)^2$.

On minore en **SIMPLIFIANT** et en vérifiant que ce par quoi on minore **TEND TOUJOURS VERS** $+\infty$.

On arrête de minorer quand on se sent capable de trouver le rang N cherché.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $(n-1)^2 > A \iff n > \sqrt{A} + 1$. Posons $N = \lfloor \sqrt{A} \rfloor + 2$. À partir de N, l'inégalité $(n-1)^2 > A$ est vraie, donc l'inégalité $n^2 + (-1)^n n > A$ aussi.

Définition (Convergence/divergence) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *convergente* ou qu'elle *converge* si elle possède une limite **FINIE**. On dit sinon qu'elle est *divergente* ou qu'elle *diverge*.

Attention ! Converger, ce n'est pas avoir une limite mais avoir une limite **FINIE**. Diverger, ce n'est pas avoir $\pm\infty$ pour limite, mais éventuellement **NE PAS AVOIR DE LIMITE**.

Limite finie	Limite $\pm\infty$	Pas de limite
Convergence	Divergence	

Théorème (Convergence et caractère borné) Toute suite convergente est bornée.

Démonstration Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente, disons de limite ℓ. Pour $\varepsilon = 1$, la définition de la limite affirme que l'inégalité $|u_n - \ell| < 1$ est vraie à partir d'un certain rang N. Ainsi pour tout $n \geqslant N$, d'après l'inégalité triangulaire : $|u_n| = \big|(u_n - \ell) + \ell\big| \leqslant |u_n - \ell| + |\ell| \leqslant |\ell| + 1$.

Posons $K = \max\left\{|u_0|, |u_1|, \ldots, |u_{N-1}|, |\ell| + 1\right\}$. Le réel K est alors plus grand que $|u_0|, \ldots, |u_{N-1}|$, mais aussi que $|u_n|$ pour tout $n \geqslant N$. Finalement $|u_n| \leqslant K$ pour **TOUT** $n \in \mathbb{N}$, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. ■

Attention !

- La réciproque est fausse, la suite $\big((-1)^n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée sans être convergente.
- Une suite non bornée n'admet pas forcément $+\infty$ ou $-\infty$ pour limite. Par exemple, la suite $\big((-1)^n n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée et n'a pas de limite — que dire en effet de ses termes d'indice pair/impair ?

2.2 Opérations sur les limites

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles, $\ell, \ell' \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On suppose dans tout ce paragraphe que les limites $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ **EXISTENT**. Dans les tableaux ci-dessous, le symbole **???** ne signifie pas une absence de limite mais une *indétermination*, i.e. une impossibilité de conclure en toute généralité, qui nécessite donc un traitement au cas par cas.

SOMME

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	ℓ / $+\infty$	ℓ / $-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n)$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	**???**

PRODUIT

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	$\ell > 0$ ou $+\infty$	$\ell < 0$ ou $-\infty$	$\ell > 0$ ou $+\infty$	$\ell < 0$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n v_n)$	$\ell\ell'$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	**???**

MULTIPLICATION PAR UN RÉEL

	$\lambda > 0$			$\lambda = 0$	$\lambda < 0$		
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	$+\infty$	ℓ	$-\infty$	peu importe	$+\infty$	ℓ	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} (\lambda u_n)$	$+\infty$	$\lambda\ell$	$-\infty$	0	$-\infty$	$\lambda\ell$	$+\infty$

INVERSE

			$u_n > 0$ à partir d'un certain rang	$u_n < 0$ à partir d'un certain rang	sinon
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	$\ell \neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	0	0	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_n}$	$\dfrac{1}{\ell}$	0	$+\infty$	$-\infty$	**???**

Mais finalement, c'est quoi une *forme indéterminée* ? C'est une forme À déterminer. Le symbole ??? signifie qu'en effectuant une opération $(+\infty)-(+\infty)$ ou $0\times(+\infty)$, on peut tomber a priori sur **N'IMPORTE QUEL RÉSULTAT**.

- **Cas de la forme indéterminée** $(+\infty)-(+\infty)$ **:**
  — On peut obtenir n'importe quel réel ℓ : $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+\ell)=+\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n=+\infty$, mais $\lim\limits_{n\to+\infty}\big((n+\ell)-n\big)=\ell$.
  — On peut obtenir $\pm\infty$: $\lim\limits_{n\to+\infty} 2n=+\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n=+\infty$, mais $\lim\limits_{n\to+\infty}(2n-n)=+\infty$.
  — On peut ne pas obtenir de limite : $\lim\limits_{n\to+\infty}\big(n+(-1)^n\big)=+\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n=+\infty$,
  mais $\big(n+(-1)^n\big)-n=(-1)^n$ n'a pas de limite.
- **Cas de la forme indéterminée** $0\times(+\infty)$ **:**
  — On peut obtenir n'importe quel réel ℓ : $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\ell}{n}=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n=+\infty$, mais $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{\ell}{n}\times n\right)=\ell$.
  — On peut obtenir $\pm\infty$: $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2=+\infty$, mais $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{n}\times n^2\right)=+\infty$.
  — On peut ne pas obtenir de limite : $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n=+\infty$,
  mais $\dfrac{(-1)^n}{n}\times n=(-1)^n$ n'a pas de limite.

Démonstration Nous ne démontrerons pas tous les résultats des tableaux précédents.

- **Somme de deux limites finies :** On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\ell$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=\ell'$. Soit $\varepsilon>0$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, d'après l'inégalité triangulaire : $\big|(u_n+v_n)-(\ell+\ell')\big|=\big|(u_n-\ell)+(v_n-\ell')\big|\leqslant|u_n-\ell|+|v_n-\ell'|$.

  Ici, **SIMPLIFIER**, c'est faire apparaître les quantités $|u_n-\ell|$ et $|v_n-\ell'|$ de l'hypothèse.

  On majore en **SIMPLIFIANT** et en vérifiant que ce par quoi on majore **TEND TOUJOURS VERS** 0.

  Or par hypothèse, $|u_n-\ell|<\dfrac{\varepsilon}{2}$ à partir d'un certain rang N et $|v_n-\ell'|<\dfrac{\varepsilon}{2}$ à partir d'un certain rang N', donc pour tout $n\geqslant\max\{N,N'\}$: $\big|(u_n+v_n)-(\ell+\ell')\big|\leqslant|u_n-\ell|+|v_n-\ell'|<\dfrac{\varepsilon}{2}+\dfrac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$.
- **Somme d'une limite finie et d'une limite** $+\infty$ **:** On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\ell$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=+\infty$. Soit $A>0$. Par hypothèse, $|u_n-\ell|<1$ à partir d'un certain rang N, donc $u_n>\ell-1$, et $v_n>A-\ell+1$ à partir d'un certain rang N', donc pour tout $n\geqslant\max\{N,N'\}$: $u_n+v_n>(\ell-1)+(A-\ell+1)=A$.
- **Somme de deux limites** $+\infty$ **:** On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=+\infty$. Soit $A>0$. Par hypothèse, $u_n>A$ à partir d'un certain rang N et $v_n>0$ à partir d'un certain rang N', donc pour tout $n\geqslant\max\{N,N'\}$: $u_n+v_n>A+0=A$.
- **Produit de deux limites finies :** On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\ell$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=\ell'$. Soit $\varepsilon>0$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, d'après l'inégalité triangulaire : $\big|u_nv_n-\ell\ell'\big|=\big|(u_n-\ell)\,v_n+\ell\,(v_n-\ell')\big|\leqslant|u_n-\ell|.|v_n|+|\ell|.|v_n-\ell'|$.
  Or $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente donc bornée, disons par K en valeur absolue. En outre, $|u_n-\ell|<\dfrac{\varepsilon}{2K}$ à partir d'un certain rang N et $|v_n-\ell'|<\dfrac{\varepsilon}{2\big(|\ell|+1\big)}$ à partir d'un certain rang N', donc pour tout $n\geqslant\max\{N,N'\}$:
  $\big|u_nv_n-\ell\ell'\big|\leqslant|u_n-\ell|.|v_n|+|\ell|.|v_n-\ell'|<\dfrac{\varepsilon}{2K}\times K+|\ell|\times\dfrac{\varepsilon}{2\big(|\ell|+1\big)}\leqslant\dfrac{\varepsilon}{2}+\dfrac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$.
- **Produit** $\ell\times(+\infty)$ **avec** $\ell\in\mathbb{R}_+^*$ **:** On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\ell\in\mathbb{R}_+^*$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=+\infty$. Soit $A>0$. Par hypothèse, $|u_n-\ell|<\dfrac{\ell}{2}$ à partir d'un certain rang N, donc $u_n>\ell-\dfrac{\ell}{2}=\dfrac{\ell}{2}>0$, et $v_n>\dfrac{2A}{\ell}>0$ à partir d'un certain rang N', donc pour tout $n\geqslant\max\{N,N'\}$: $u_nv_n>\dfrac{\ell}{2}\times\dfrac{2A}{\ell}=A$.
- **Produit de deux limites** $+\infty$ **:** On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=+\infty$. Soit $A>0$. Par hypothèse, $u_n>A$ à partir d'un certain rang N et $v_n>1$ à partir d'un certain rang N', donc pour tout $n\geqslant\max\{N,N'\}$: $u_nv_n>A\times1=A$.

- **Inverse d'une limite finie non nulle :** On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \neq 0$. Ainsi, $u_n \neq 0$ à partir d'un certain rang N. Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $n \geqslant N$: $\left|\dfrac{1}{u_n} - \dfrac{1}{\ell}\right| = \dfrac{|u_n - \ell|}{|u_n|.|\ell|}$. Or par hypothèse, $|u_n - \ell| < \dfrac{|\ell|}{2}$ à partir d'un certain rang N', donc : $|u_n| = \big|(u_n - \ell) + \ell\big| \geqslant |\ell| - |u_n - \ell| > |\ell| - \dfrac{|\ell|}{2} = \dfrac{|\ell|}{2}$ d'après l'inégalité triangulaire, donc pour tout tout $n \geqslant \max\{N, N'\}$: $\left|\dfrac{1}{u_n} - \dfrac{1}{\ell}\right| \leqslant \dfrac{2}{|\ell|^2}\,|u_n - \ell|$. Mais comme $|u_n - \ell| < \dfrac{|\ell|^2}{2}\,\varepsilon$ à partir d'un certain rang N'', pour tout $n \geqslant \max\{N, N', N''\}$: $\left|\dfrac{1}{u_n} - \dfrac{1}{\ell}\right| < \varepsilon$.

- **Inverse d'une limite $+\infty$:** On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. Ainsi $u_n \neq 0$ à partir d'un certain rang N. Soit $\varepsilon > 0$. Par hypothèse, $u_n > \dfrac{1}{\varepsilon}$ à partir d'un certain rang N', donc pour tout $n \geqslant \max\{N, N'\}$: $\left|\dfrac{1}{u_n}\right| = \dfrac{1}{u_n} < \varepsilon$.

- **Inverse d'une limite nulle de suite strictement positive :** On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ avec $u_n > 0$ à partir d'un certain rang N. Soit $A > 0$. Par hypothèse, $|u_n| < \dfrac{1}{A}$ à partir d'un certain rang N', donc pour tout $n \geqslant \max\{N, N'\}$: $\dfrac{1}{u_n} = \dfrac{1}{|u_n|} > A$.

Le résultat suivant est momentanément admis car il requiert la notion de limite d'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ — que vous connaissez intuitivement, mais qui ne sera définie proprement que dans quelques mois.

Théorème (Composition à gauche par une fonction) Soient I un intervalle, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction, $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à I, $L \in \overline{\mathbb{R}}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans I. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ et $\lim\limits_{x\to\ell} f(x) = L$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = L$.

Exemple Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\boxed{\mathrm{e}^x = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n.}$ Résultat à connaître !

Démonstration On peut supposer $x \neq 0$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n = \mathrm{e}^{n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}$. Or $\lim\limits_{t\to0} \dfrac{\ln(1+t)}{t} = \ln'(1) = 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}{\frac{x}{n}} = 1$ par composition, i.e. $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln\left(1 + \dfrac{x}{n}\right) = x$, et on compose enfin avec la limite $\lim\limits_{t\to x} \mathrm{e}^t = \mathrm{e}^x$.

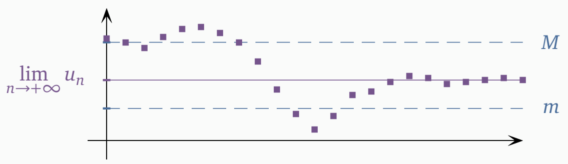
Attention ! $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1 \;\not\Longrightarrow\; \lim\limits_{n\to+\infty} u_n^n = 1.}$ En résumé, $1^{+\infty}$ EST UNE NOUVELLE FORME INDÉTERMINÉE.

2.3 Passage à la limite dans une inégalité et opération inverse

Théorème (Limites et inégalités strictes) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle possédant une limite ℓ et $m, M \in \mathbb{R}$.

(i) Si $\ell < M$, alors $u_n < M$ à partir d'un certain rang.

(ii) Si $\ell > m$, alors $u_n > m$ à partir d'un certain rang.



$m < u_n < M$ à partir d'un certain rang

Démonstration Prouvons (i). Si $\ell = -\infty$, les u_n sont tous dans le voisinage $]-\infty, M[$ de ℓ à partir d'un certain rang. Si $\ell \in \mathbb{R}$, sachant que $M - \ell > 0$ par hypothèse, les u_n sont tous dans $\big]\ell - (M - \ell), \ell + (M - \ell)\big[\subset]-\infty, M[$ à partir d'un certain rang. Dans les deux cas, $u_n < M$ à partir d'un certain rang.

Théorème (Limites et inégalités larges) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles possédant une limite finie. Si $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.
Ce résultat est souvent utilisé lorsque l'une des deux suites est constante.

Attention ! C'est faux avec des inégalités STRICTES ! Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\frac{1}{n} > 0$, mais $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Démonstration Par l'absurde, si $\lim\limits_{n \to +\infty} (v_n - u_n) < 0$, le théorème précédent montre que $v_n - u_n < 0$ à partir d'un certain rang — contradiction.

2.4 Extraction de suites

Définition (Suite extraite, valeur d'adhérence) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

- **Suite extraite :** On appelle *suite extraite* (ou *sous-suite*) *de* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ toute suite de la forme $\big(u_{\varphi(n)}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ où $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ est une fonction strictement croissante appelée parfois *fonction d'extraction*.
- **Valeur d'adhérence :** On appelle *valeur d'adhérence de* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ toute limite FINIE d'une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

La fonction φ n'est jamais qu'une suite strictement croissante d'entiers naturels utilisés comme de nouveaux indices. Par exemple, si $\varphi = (2, 4, 5, 8, 24, 59, \ldots)$, la suite $\big(u_{\varphi(n)}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite $(u_2, u_4, u_5, u_8, u_{24}, u_{59}, \ldots)$.

La suite extraite $\big(u_{\varphi(n)}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est jamais que la COMPOSÉE $u \circ \varphi$. Si on en extrait une nouvelle suite à partir d'une fonction $\psi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante, le résultat est $u \circ \varphi \circ \psi = \big(u_{\varphi\circ\psi(n)}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ et non pas $u \circ \psi \circ \varphi = \big(u_{\psi\circ\varphi(n)}\big)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemple

- Les suites $\big(\sqrt{2^n + 4n}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites extraites de la suite $\big(\sqrt{n}\big)_{n\in\mathbb{N}}$, associées respectivement aux fonctions d'extraction $n \longmapsto 2^n + 4n$ et $n \longmapsto n^2$ strictement croissantes de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.
- Les suites constantes égales à 1 et -1 respectivement sont deux suites extraites de la suite $\big((-1)^n\big)_{n\in\mathbb{N}}$. Les réels 1 et -1 sont donc deux valeurs d'adhérence de cette suite.

Attention ! Pour tout $k \in \mathbb{N}$, le terme qui vient après u_{2k} dans la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est $u_{2(k+1)} = u_{2k\boxed{+2}}$ et non pas u_{2k+1}. De même, le terme qui vient après u_{2k+1} dans la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est $u_{2(k+1)+1} = u_{2k\boxed{+3}}$ et non pas u_{2k+2}.

Théorème Soit φ une fonction strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\varphi(n) \geqslant n$.

Démonstration Pour tout $k \in \mathbb{N}$: $\varphi(k+1) - \varphi(k) > 0$, mais φ est à valeurs entières, donc $\varphi(k+1) - \varphi(k) \geqslant 1$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\varphi(n) = \varphi(0) + \sum\limits_{k=0}^{n-1} \big(\varphi(k+1) - \varphi(k)\big) \geqslant 0 + \sum\limits_{k=0}^{n-1} 1 = n$.

Théorème (Limites de suites extraites) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

(i) Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$, alors pour toute fonction $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{\varphi(n)} = \ell$.
En particulier, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, sa limite est sa seule valeur d'adhérence.

(ii) Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{2n} = \lim\limits_{n \to +\infty} u_{2n+1} = \ell$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$.

Démonstration

(i) Sous l'hypothèse que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$, soit $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante. Nous voulons montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{\varphi(n)} = \ell$. Soit V un voisinage de ℓ. À partir d'un certain rang N : $u_n \in V$. Or pour tout $n \geqslant N$, par croissance de φ et d'après le lemme : $\varphi(n) \geqslant \varphi(N) \geqslant N$, donc enfin $u_{\varphi(n)} \in V$.

(ii) Faisons l'hypothèse que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{2n} = \lim\limits_{n \to +\infty} u_{2n+1} = \ell$ et montrons que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$. Soit V un voisinage de ℓ. Aussitôt, $u_{2n} \in V$ à partir d'un certain rang N et $u_{2n+1} \in V$ à partir d'un certain rang N'. Posons $n_0 = \max\big\{2N, 2N' + 1\big\}$ et donnons-nous $n \geqslant n_0$ quelconque.

— Si $n = 2p$ est pair avec $p \in \mathbb{N}$: $2p = n \geqslant n_0 \geqslant 2N$, donc $p \geqslant N$, donc $u_n = u_{2p} \in V$.

— Si $n = 2p+1$ est impair avec $p \in \mathbb{N}$: $2p + 1 = n \geqslant n_0 \geqslant 2N' + 1$, donc $p \geqslant N'$, donc $u_n = u_{2p+1} \in V$.

Dans les deux cas : $u_n \in V$.

Ce théorème est souvent utilisé pour montrer qu'une suite **N'A PAS DE LIMITE**. Il suffit pour cela d'en exhiber deux suites extraites n'ayant pas la même limite.

Exemple La suite $\left((-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite car $\lim\limits_{n\to+\infty} (-1)^{2n} = 1$ alors que $\lim\limits_{n\to+\infty} (-1)^{2n+1} = -1$.

Exemple Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \dfrac{n}{9} - \left\lfloor \dfrac{\sqrt{n}}{3} \right\rfloor^2$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite car : $u_{9n^2} = 0 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ alors que : $u_{(3n+1)^2} = \dfrac{(3n+1)^2}{9} - \left\lfloor \dfrac{3n+1}{3} \right\rfloor^2 = \left(n^2 + \dfrac{6n+1}{9}\right) - n^2 = \dfrac{6n+1}{9} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

3 THÉORÈMES D'EXISTENCE DE LIMITE

L'existence d'une limite n'est jamais acquise. Dans les paragraphes qui précèdent, l'existence de certaines limites a été établie — somme, produit, suites extraites, etc. On omet généralement de voir ces résultats comme des théorèmes d'**EXISTENCE** pour les voir seulement, en pratique, comme des théorèmes de **CALCUL**, de manipulation des limites. Les théorèmes qui suivent gagnent au contraire à être conçus comme de vrais théorèmes d'existence. Ce qu'ils nous fournissent de façon essentielle, ce n'est pas tant la **VALEUR** d'une limite que son **EXISTENCE**.

3.1 THÉORÈMES D'ENCADREMENT/MINORATION/MAJORATION

Théorème Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites réelles et $\ell \in \mathbb{R}$.

(i) **Théorème d'encadrement :**
Si $\lim\limits_{n\to+\infty} m_n = \lim\limits_{n\to+\infty} M_n = \ell$ et si $m_n \leqslant u_n \leqslant M_n$ à partir d'un certain rang, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

(ii) **Théorème de minoration :**
Si $\lim\limits_{n\to+\infty} m_n = +\infty$ et si $u_n \geqslant m_n$ à partir d'un certain rang, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

(iii) **Théorème de majoration :**
Si $\lim\limits_{n\to+\infty} M_n = -\infty$ et si $u_n \leqslant M_n$ à partir d'un certain rang, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Démonstration

(i) Soit $\varepsilon > 0$. Par hypothèse, $m_n \leqslant u_n \leqslant M_n$ à partir d'un certain rang N, $m_n > \ell - \varepsilon$ à partir d'un rang N' et $M_n < \ell + \varepsilon$ à partir d'un rang N'', donc pour tout $n \geqslant \max\left\{N, N', N''\right\}$: $\ell - \varepsilon < m_n \leqslant u_n \leqslant M_n < \ell + \varepsilon$, et enfin $|u_n - \ell| < \varepsilon$.

(ii) Soit $A > 0$. Par hypothèse, $u_n \geqslant m_n$ à partir d'un certain rang N et $m_n > A$ à partir d'un certain rang N', donc pour tout $n \geqslant \max\left\{N, N'\right\}$: $u_n \geqslant m_n > A$, et enfin $u_n > A$.

Attention ! Le théorème d'encadrement n'est pas un simple théorème de passage à la limite dans des inégalités larges. Quand on passe à la limite dans une inégalité, **ON SAIT DÉJÀ** que son membre de gauche et son membre de droite ont une limite. Dans le théorème d'encadrement au contraire, seules les limites $\lim\limits_{n\to+\infty} m_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} M_n$ sont réputées exister au départ. L'existence de $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ en découle.

Exemple $\lim\limits_{n\to+\infty} n! = +\infty$ par minoration car $n! \geqslant n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$.

Le théorème d'encadrement est souvent utilisé sous la forme suivante :

Théorème (Produit d'une suite bornée et d'une suite de limite nulle) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n u_n = 0$.

Démonstration Par hypothèse, il existe un réel $K \geqslant 0$ pour lequel $|u_n| \leqslant K$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Multiplions par ε_n : $0 \leqslant |\varepsilon_n u_n| \leqslant K|\varepsilon_n|$. Aussitôt $\lim\limits_{n\to+\infty} |\varepsilon_n u_n| = 0$ par encadrement, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n u_n = 0$.

Exemple $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sin n}{n} = 0$ car la suite $(\sin n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

Théorème (Limite d'une suite géométrique) Soit $x \in \mathbb{R}$.

	$x > 1$	$x = 1$	$\lvert x\rvert < 1$	$x \leqslant -1$
$\lim\limits_{n\to+\infty} x^n$	$+\infty$	1	0	Pas de limite

Démonstration

- **Cas où $x > 1$:** $x^n = \big(1+(x-1)\big)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (x-1)^k \overset{x\geqslant 1}{\geqslant} \overbrace{n(x-1)}^{k=1}$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} x^n = +\infty$ par minoration car $x > 1$.
- **Cas où $|x| < 1$:** $\dfrac{1}{|x|} > 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{|x|}\right)^n = +\infty$ d'après le cas précédent, puis $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|x^n\right| = 0$ par passage à l'inverse, et enfin $\lim\limits_{n\to+\infty} x^n = 0$.
- **Cas où $x = -1$:** Déjà été traité dans le paragraphe sur les suites extraites.
- **Cas où $x < -1$:** Comme $x^2 > 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} x^{2n} = +\infty$ d'après le premier cas, puis $\lim\limits_{n\to+\infty} x^{2n+1} = -\infty$. Les suites extraites $\left(x^{2n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(x^{2n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ n'ayant pas même limite, $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite.

Exemple Pour tout $x \in]-1,1[$: $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, car $\lim\limits_{n\to+\infty} x^n = 0$, donc : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{1-x}$.

Exemple Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite strictement positive et $\eta \in]0,1[$. Si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \eta$ à partir d'un certain rang N, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$. En quelque sorte, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive et « mieux que décroissante », elle converge vers 0.
En particulier, si $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Démonstration Pour tout $n \geqslant N$: $u_{n+1} \leqslant \eta u_n$, donc $\dfrac{u_{n+1}}{\eta^{n+1}} \leqslant \dfrac{u_n}{\eta^n}$, donc la suite $\left(\dfrac{u_n}{\eta^n}\right)_{n\geqslant N}$ est décroissante, et donc bornée car positive. Or $\eta \in]0,1[$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \eta^n = 0$. Par produit d'une suite bornée et d'une suite convergente de limite nulle : $u_n = \dfrac{u_n}{\eta^n} \times \eta^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Théorème (Comparaison exponentielles/factorielle) Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x^n}{n!} = 0$.

Démonstration Pour $x \neq 0$, posons pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = \dfrac{|x|^n}{n!} > 0$. Aussitôt : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{|x|}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ d'après l'exemple précédent.

3.2 Théorème de la limite monotone

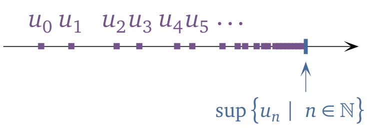
Le théorème de la limite monotone est LE théorème d'EXISTENCE par excellence.

Théorème (Théorème de la limite monotone) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède une limite.

Plus précisément, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante majorée, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, et si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante NON majorée : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. On dispose bien sûr d'un résultat analogue sur les suites décroissantes.

En fait, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \sup\left\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\right\}$ avec une borne supérieure DANS $\overline{\mathbb{R}}$ — éventuellement $+\infty$.



Démonstration Traitons le cas d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante.

- Supposons $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ majorée. L'ensemble $\left\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\right\}$ est alors une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$, donc possède une borne supérieure ℓ DANS $\mathbb{R}$ d'après la propriété de la borne supérieure.
  Montrons que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$. Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de ℓ, $\ell-\varepsilon$ ne majore pas $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donc $u_N > \ell-\varepsilon$ pour un certain $N \in \mathbb{N}$. Ainsi, pour tout $n \geqslant N$: $u_n \geqslant u_N > \ell-\varepsilon$ par croissance, donc $\ell-\varepsilon < u_n \leqslant \ell < \ell+\varepsilon$, i.e. $|u_n-\ell| < \varepsilon$.

- Supposons $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ NON majorée. Soit $A > 0$. Comme A ne majore pas $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $u_N > A$ pour un certain $N \in \mathbb{N}$, donc pour tout $n \geqslant N$: $\quad u_n > A \quad$ par croissance. Comme voulu $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Attention ! Une suite croissante majorée par M converge... MAIS PAS FORCÉMENT VERS M, qui n'est qu'UN majorant parmi d'autres !

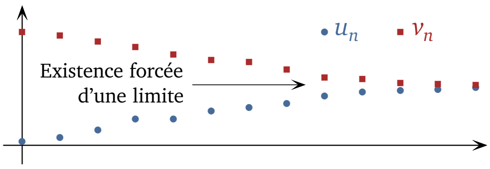
Exemple On pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\lfloor \mathrm{e}^k \rfloor}{3^k}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Démonstration D'après le théorème de la limite monotone, il nous suffit de montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée. Or $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante car pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad u_{n+1} - u_n = \dfrac{\lfloor \mathrm{e}^{n+1} \rfloor}{3^{n+1}} \geqslant 0, \quad$ et majorée car pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad u_n \leqslant \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{\mathrm{e}}{3}\right)^k = \frac{3}{3-\mathrm{e}}\left(1 - \left(\frac{\mathrm{e}}{3}\right)^{n+1}\right) \leqslant \frac{3}{3-\mathrm{e}}$.

3.3 THÉORÈME DES SUITES ADJACENTES

Définition (Suites adjacentes) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont *adjacentes* si l'une de ces suites est croissante, l'autre décroissante et si $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = 0$.

Deux suites adjacentes viennent à la rencontre l'une de l'autre, l'une en croissant, l'autre en décroissant, et finissent par s'écraser l'une contre l'autre. « Il faut bien qu'elles s'écrasent QUELQUE PART ! » nous dit le théorème des suites adjacentes — théorème d'EXISTENCE.



Théorème (Théorème des suites adjacentes) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. Si elles sont adjacentes, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont toutes deux convergentes de même limite ℓ.
Précisément, si c'est $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui est croissante et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui est décroissante, alors pour tous $m, n \in \mathbb{N}$: $\quad u_m \leqslant \ell \leqslant v_n$.

Démonstration Supposons $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante.

- Montrons que $u_k \leqslant v_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Soit $k \in \mathbb{N}$. Pour tout $n \geqslant k$, $u_k \leqslant u_n$ par croissance et $v_n \leqslant v_k$ par décroissance, donc $v_k - u_k \geqslant v_n - u_n$, et ainsi $v_k - u_k \geqslant 0$ par passage à la limite.
- En retour, pour tout $k \in \mathbb{N}$: $\quad u_0 \leqslant u_k \leqslant v_k \leqslant v_0 \quad$ par croissance de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et décroissance de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones bornées, donc convergentes d'après le théorème de la limite monotone, disons de limites respectives ℓ_u et ℓ_v. L'égalité $\ell_u = \ell_v$ découle de ce que $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = 0$.

Exemple Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. On peut montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = \mathrm{e}$.

Démonstration Posons $v_n = u_n + \dfrac{1}{n \times n!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et montrons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes. En particulier, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sera alors convergente d'après le théorème des suites adjacentes.

— Tout d'abord : $\quad v_n - u_n = \dfrac{1}{n.n!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

— Ensuite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante car pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\quad u_{n+1} - u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \frac{1}{(n+1)!} \geqslant 0$.

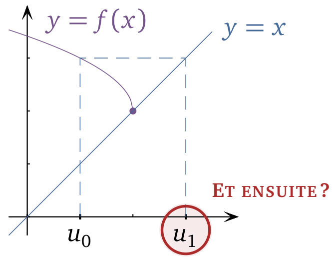
— Enfin $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante car pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n = \left(u_{n+1} - u_n\right) + \frac{1}{(n+1).(n+1)!} - \frac{1}{n \times n!} &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)\times(n+1)!} - \frac{1}{n \times n!} \\ &= \frac{n(n+1) + n - (n+1)^2}{n(n+1)\times(n+1)!} = -\frac{1}{n(n+1)\times(n+1)!} \leqslant 0. \end{aligned}$$

4 Suites récurrentes $u_{n+1}=f(u_n)$

Les exercices qu'on vous a proposés jusqu'ici ont pu vous donner l'impression que pour définir une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par récurrence, il suffit de se donner une fonction f quelconque et un u_0 dans le domaine de définition de f, puis de décréter simplement que $u_{n+1}=f(u_n)$. Quelle illusion !

Notons par exemple f la fonction $x\longmapsto 2+\sqrt{2-x}$ définie sur $]-\infty,2]$ et posons $u_0=1$. Comme $f(u_0)=f(1)=3$, on peut poser $u_1=3$. Mais ensuite $f(3)$? Aucun sens ! Quelle valeur pour u_2 ? La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas définie. Mais alors comment différencier les situations qui marchent de celles qui ne marchent pas ?



Théorème (Existence de suites récurrentes $u_{n+1}=f(u_n)$) Soient D une partie de $\mathbb{R}$ et $f:D\longrightarrow D$ une fonction — ainsi D est stable par f.

Pour tout $\delta\in D$, il existe une et une seule suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour laquelle $u_0=\delta$ et $u_{n+1}=f(u_n)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

En outre, cette suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans D.

Idée toute simple ! Pour définir $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a besoin de composer et re-composer f par elle-même autant de fois qu'on veut et c'est précisément ce que la stabilité de D par f garantit. Pour tout $n\in\mathbb{N}$: $u_n=\underbrace{f\circ\ldots\circ f}_{n\text{ termes}}(u_0)$.

La conclusion selon laquelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans D est très utile quand on veut montrer qu'une suite est minorée/majorée/bornée. Par exemple, si $[1,3]$ est stable par une fonction f, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0=2$ et $u_{n+1}=f(u_n)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ est bornée entre 1 et 3. Pas de récurrence, juste un petit argument de stabilité !

Exemple Il existe une et une seule suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0=2$ et $u_{n+1}=\ln\left(1+\sqrt{u_n}\right)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Démonstration D'une part $2\in\mathbb{R}_+$, d'autre part l'intervalle $\mathbb{R}_+$ est stable par la fonction $x\longmapsto\ln\left(1+\sqrt{x}\right)$ car $1+\sqrt{x}\geqslant 1$ pour tout $x\in\mathbb{R}_+$, donc $\ln\left(1+\sqrt{x}\right)\in\mathbb{R}_+$.

On s'intéresse à présent à la convergence des suites récurrentes $u_{n+1}=f(u_n)$ sur deux premiers exemples simples.

Exemple La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0=0$ et $u_{n+1}=u_n+e^{u_n}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ diverge vers $+\infty$.

Démonstration Pour tout $n\in\mathbb{N}$: $u_{n+1}-u_n=e^{u_n}\geqslant 0$, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, donc possède une limite $\ell\in\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ d'après le théorème de la limite monotone. Par l'absurde, si $\ell\in\mathbb{R}$:

$$\ell=\lim_{n\to+\infty}u_{n+1}=\lim_{n\to+\infty}\left(u_n+e^{u_n}\right)=\ell+e^{\ell}\qquad\text{car }\lim_{x\to\ell}e^x=e^{\ell},$$

donc $e^{\ell}=0$ — contradiction ! Conclusion : $\ell=+\infty$.

Exemple La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0=1$ et $u_{n+1}=\dfrac{u_n}{1+u_n^2}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ converge vers 0.

Démonstration L'intervalle $\mathbb{R}_+^*$ est stable par la fonction $x\longmapsto\dfrac{x}{1+x^2}$ et $u_0=1\in\mathbb{R}_+^*$, donc $u_n>0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, puis $u_{n+1}-u_n=\dfrac{u_n}{1+u_n^2}-u_n=-\dfrac{u_n^3}{1+u_n^2}\leqslant 0$. Décroissante et positive, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ainsi d'après le théorème de la limite monotone, disons vers ℓ.

Aussitôt : $\ell=\lim\limits_{n\to+\infty}u_{n+1}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_n}{1+u_n^2}=\dfrac{\ell}{1+\ell^2}$, donc $\ell-\dfrac{\ell}{1+\ell^2}=\dfrac{\ell^3}{1+\ell^2}=0$, i.e. $\ell=0$.

En vue d'exemples plus fins, on démontre ci-dessous deux petits théorèmes bien pratiques sur les suites récurrentes $u_{n+1}=f(u_n)$, l'un sur la monotonie d'une telle suite, l'autre sur la valeur de sa limite éventuelle.

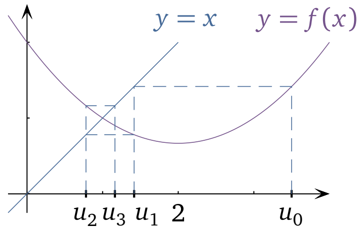
Théorème (Monotonie d'une suite récurrente $u_{n+1}=f(u_n)$) Soient D une partie de $\mathbb{R}$ et $f:D\longrightarrow D$ une fonction — ainsi D est stable par f. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite pour laquelle $u_0\in D$ et $u_{n+1}=f(u_n)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

(i) Si $f(x)\geqslant x$ pour tout $x\in D$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, et si $f(x)\leqslant x$ pour tout $x\in D$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Le signe de la fonction $x\longmapsto f(x)-x$ nous renseigne donc sur la monotonie de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(ii) Si f est croissante sur D, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone. Son sens de variation dépend de la position de u_0 par rapport à u_1.

(iii) Si f est décroissante sur D, $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones de sens contraires. Leurs sens de variation dépendent de la position de u_0 et u_2.

Attention ! Une information comme « $f(x) \geqslant x$ » ou « f est (dé)croissante » ne peut être exploitée QUE SUR UN DOMAINE STABLE PAR f.



Comment exploiter les propriétés de f sur D si u_n n'appartient pas à D pour tout $n \in \mathbb{N}$? La stabilité sert justement à piéger les valeurs de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Sur la figure ci-contre, f est croissante sur $[2, +\infty[$ et $u_0 \in [2, +\infty[$, mais $[2, +\infty[$ N'est PAS stable par f et on voit bien qu'ici $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ quitte le domaine $[2, +\infty[$. La croissance de f sur $[2, +\infty[$ n'a ainsi aucun impact sur $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dès lors que ses termes vivent leur vie ailleurs.

Autre remarque. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(u_{2n})$ vaut u_{2n+1} et non pas u_{2n+2}. Par contre $u_{2n+2} = f \circ f(u_{2n})$, donc LA SUITE $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ EST RÉCURRENTE ASSOCIÉE À LA FONCTION $\boxed{f \circ f}$. Même chose pour $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.

Démonstration La stabilité de D par f montre que $u_n \in D$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Nous allons donc pouvoir exploiter les propriétés de f sur D.

(i) Si $f(x) \geqslant x$ pour tout $x \in D$, alors $u_{n+1} = f(u_n) \geqslant u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

(ii) Supposons f croissante avec $u_0 \leqslant u_1$ et montrons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante — on montrerait de même que si $u_1 \leqslant u_0$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. **Initialisation :** $u_0 \leqslant u_1$ par hypothèse.

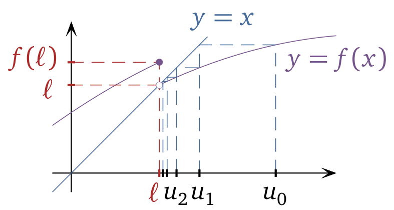
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Si $u_n \leqslant u_{n+1}$, alors par croissance de f : $u_{n+1} = f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) = u_{n+2}$.

(iii) Supposons f décroissante avec $u_0 \leqslant u_2$. Alors $f \circ f$ est croissante et $u_{2n+2} = f \circ f(u_{2n})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante d'après (ii). Il en découle que $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante car pour tout $n \in \mathbb{N}$, par décroissance de f : $u_{2n+1} = f(u_{2n}) \geqslant f(u_{2n+2}) = u_{2n+3}$.

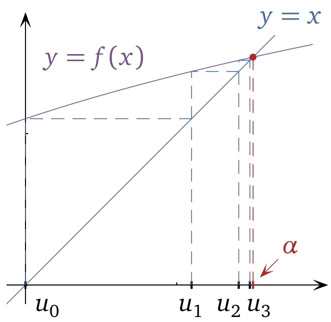
Théorème (Limite d'une suite récurrente convergente $u_{n+1} = f(u_n)$) Soient D une partie de $\mathbb{R}$ et $f : D \longrightarrow D$ une fonction — ainsi D est stable par f. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite pour laquelle $u_0 \in D$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in D$ et si f est CONTINUE en ℓ, alors ℓ est un point fixe de f, autrement dit $f(\ell) = \ell$.

Attention ! L'hypothèse de continuité n'est pas là pour décorer.
Sur la figure ci-contre : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ mais $f(\ell) \neq \ell$.

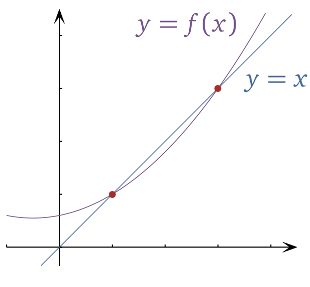


Démonstration $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ et $\lim\limits_{x\to\ell} f(x) = f(\ell)$ par continuité de f en ℓ, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\ell)$ par composition. Pour finir $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $f(\ell) = \ell$.



Exemple On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \ln(u_n + 3)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et f la fonction $x \longmapsto \ln(x+3)$ sur $]-3, +\infty[$.

- La fonction $x \overset{g}{\longmapsto} f(x) - x$ est à la fois continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$ avec $g(0) = \ln 3$ et $\lim\limits_{+\infty} g = -\infty$, donc d'après le TVI strictement monotone, g s'annule une et une seule fois sur $\mathbb{R}_+$, disons en α — l'unique point fixe de f sur $\mathbb{R}_+$.
- Montrons que l'intervalle $[0, \alpha]$ est stable par f. Pour tout $x \in [0, \alpha]$, la croissance de f montre que $0 \leqslant \ln 3 = f(0) \leqslant f(x) \leqslant f(\alpha) = \alpha$, donc $f(x) \in [0, \alpha]$.
- À présent, comme $[0, \alpha]$ est stable par f et comme $u_0 = 0 \in [0, \alpha]$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et à valeurs dans $[0, \alpha]$. Or g est positive ou nulle sur $[0, \alpha]$, donc $f(x) \geqslant x$ pour tout $x \in [0, \alpha]$, donc $u_{n+1} = f(u_n) \geqslant u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Conclusion : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Majorée par α, elle est finalement convergente d'après le théorème de la limite monotone, et comme f est continue sur $[0, \alpha]$, sa limite est un point fixe de f — forcément α. Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$.



Exemple Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite pour laquelle $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 + u_n + 3}{5}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On veut connaître la nature de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et sa limite éventuelle, qui dépendent a priori de u_0. On note f la fonction $x \longmapsto \dfrac{x^2 + x + 3}{5}$ sur $\mathbb{R}$.

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(x) - x = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{5} = \dfrac{(x-1)(x-3)}{5}$, donc f admet 1 et 3 pour points fixes et son graphe est au-dessus de la droite d'équation $y = x$ sur $]-\infty, 1]$ et sur $[3, +\infty[$, et en-dessous sur $[1, 3]$.

Si $u_0 < 0$, alors $u_1 = f(u_0) \geqslant 0$, donc comme $\mathbb{R}_+$ est stable par f, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est piégée dans $\mathbb{R}_+$ à partir du rang 1, raison pour laquelle on étudie essentiellement ci-dessous le cas d'un réel u_0 positif.

Les distinctions qui suivent reposent sur le fait que les ensembles $[0,1]$, $]1,3[$, $\{3\}$ et $]3,+\infty[$ sont **STABLES PAR** f. Il est essentiel de le préciser si on veut pouvoir y exploiter la monotonie de f ou le signe de $x \longmapsto f(x)-x$.

- **Cas où $u_0 \in [0,1]$:** $[0,1]$ est stable par f et $f(x) \geqslant x$ pour tout $x \in [0,1]$, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à la fois croissante et bornée entre 0 et 1, donc convergente d'après le théorème de la limite monotone. Notons ℓ sa limite, qui appartient à $[0,1]$. Ainsi, par continuité de f, ℓ est un point fixe de f dans $[0,1]$, donc vaut 1. Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.
- **Cas où $u_0 \in]1,3[$:** $]1,3[$ est stable par f et $f(x) \leqslant x$ pour tout $x \in]1,3[$, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à la fois décroissante et bornée entre 1 et 3, donc convergente d'après le théorème de la limite monotone. Notons ℓ sa limite, qui appartient à $[1,3[$ par décroissance de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — fermé en 1 mais pas en 3, attention. Ainsi, par continuité de f, ℓ est un point fixe de f dans $[1,3[$, donc vaut 1. Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.
- **Cas où $u_0 = 3$:** Cette fois, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante de valeur 3, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$.
- **Cas où $u_0 > 3$:** $]3,+\infty[$ est stable par f et $f(x) \geqslant x$ pour tout $x > 3$, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, donc possède une limite ℓ d'après le théorème de la limite monotone. En l'occurrence $\ell > 3$ par croissance. Comme f ne possède pas de point fixe dans $]3,+\infty[$, il en découle que $\ell = +\infty$. Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
- **Conclusion :** En résumé : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \begin{cases} 1 & \text{si } u_0 \in [0,3[\\ 3 & \text{si } u_0 = 3 \\ +\infty & \text{si } u_0 > 3. \end{cases}$

En outre, nous avons déjà observé que si $u_0 < 0$, alors $u_1 = f(u_0) \geqslant 0$, mais dans quel intervalle précis u_1 atterrit-il parmi $[0,3[$, $\{3\}$ et $]3,+\infty[$? Pour tout $x < 0$: $f(x) - 3 = \dfrac{x^2+x-12}{5} = \dfrac{(x+4)(x-3)}{12}$, donc :

— si $u_0 < -4$, alors $u_1 = f(u_0) > 3$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$,

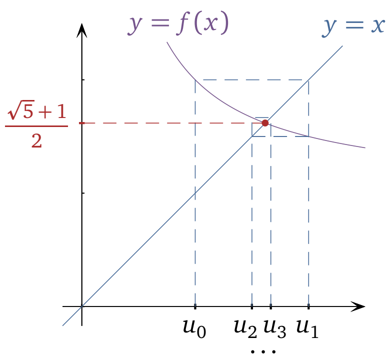
— si $u_0 = -4$, alors $u_1 = f(u_0) = 3$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$,

— si $u_0 \in]-4,0[$, alors $u_1 = f(u_0) < 3$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

Exemple On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et f la fonction $x \longmapsto 1 + \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

- L'intervalle $[1,2]$ est stable par f et $u_0 \in [1,2]$, donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et bornée entre 1 et 2.
- Ensuite, f est décroissante sur le domaine stable $[1,2]$, donc $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones de sens contraires. Bornées, ces deux suites sont ainsi convergentes, disons de limites respectives ℓ et ℓ'.

  Notez que le sens de variation précis des suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ ne nous intéresse pas ici. Pour l'obtenir, il nous suffirait cela dit de comparer u_0 et u_2. En l'occurrence $u_2 \geqslant u_0$, donc $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante.



- À présent, les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ étant récurrentes associées à la fonction continue $f \circ f$, leurs limites ℓ et ℓ' sont des points fixes de $f \circ f$, mais nous allons voir que f possède exactement un point fixe, à savoir $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$. Il en découlera que $\ell = \ell' = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$, puis que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$.

  En effet, pour tout $x \in [1,2]$: $f \circ f(x) = x \iff 1 + \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}} = x \iff x^2 - x - 1 = 0 \overset{x\in[1,2]}{\iff} x = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$.

5 LE COIN DES GROSSES ERREURS

Attention !

- Les inégalités strictes deviennent **LARGES** à la limite.
- Un majorant **NE** dépend **JAMAIS** de n, c'est toujours une constante.
- Une suite croissante majorée par M converge, mais **PAS FORCÉMENT** vers M.
- Il **NE** doit **JAMAIS** rester de n à la limite.

Ce dernier interdit mérite de plus amples explications. Passer à la limite revient en quelque sorte à évaluer en $+\infty$, et quand on évalue, la variable disparaît tout à fait. Par exemple, si $\lim\limits_{n\in+\infty} u_n = \ell \in \mathbb{R}$, il n'a aucun sens d'écrire que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n^n = \ell^n$ ou $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{n+u_n} = \dfrac{n}{n+\ell}$. Une limite qui dépend de n ?

Plus subtil maintenant. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \in \mathbb{R}$, on ne peut pas affirmer **SANS PREUVE** que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{n+u_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{n+\ell}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n^n = \lim\limits_{n\to+\infty} \ell^n$. La première égalité est vraie, mais comment le justifier sans calculer explicitement $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{n+u_n}$? Quant à la deuxième, elle est fausse si $\ell = 1$ — forme indéterminée $1^{+\infty}$. En résumé :

Quand on passe à la limite, on **NE** peut **JAMAIS** le faire « par morceaux » en remplaçant tel morceau par sa limite et en laissant le reste intact.

6 Bornes supérieures/inférieures, densité et limites

Dans ce paragraphe, « caractérisation séquentielle » veut dire « caractérisation en termes de suites ».

Théorème (Caractérisation séquentielle de la borne supérieure/inférieure) Soient A une partie non vide de $\mathbb{R}$ et $M \in \mathbb{R}$.

(i) $M = \sup A$ si et seulement si M est à la fois un majorant de A et la limite d'une suite d'éléments de A.

(ii) A n'est pas majorée si et seulement s'il existe une suite d'éléments de A de limite $+\infty$.

On dispose bien sûr de résultats analogues pour les bornes inférieures et les parties non minorées.

Démonstration

(i) Supposons d'abord que A admet M pour borne supérieure. Dans ce cas, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, comme $M - \dfrac{1}{n}$ ne majore pas A, A contient au moins un élément a_n supérieur ou égal à $M - \dfrac{1}{n}$. La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est par ailleurs majorée par M, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = M$ par encadrement.

Réciproquement, faisons l'hypothèse que M majore A et est la limite d'une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A. Pour tout majorant M' de A : $\quad a_n \leqslant M' \quad$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $M \leqslant M'$ par passage à la limite, ce qui montre bien que M est le plus petit majorant de A, i.e. que $M = \sup A$.

(ii) Supposons d'abord A non majorée. Dans ce cas, pour tout $n \in \mathbb{N}$, comme n ne majore pas A, A contient au moins un élément a_n supérieur ou égal à n, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ par minoration.

Réciproque évidente.

Exemple Si on note A l'ensemble $\left\{ \dfrac{q}{2^p+q} \;\middle|\; p,q \in \mathbb{N}^* \right\}$, alors $\inf A = 0$ et $\sup A = 1$.

Démonstration Pour tous $p,q \in \mathbb{N}^*$: $\quad 0 \leqslant \dfrac{q}{2^p+q} \leqslant 1, \quad$ donc A est minoré par 0 et majoré par 1. Ensuite $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2^n+1} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{2+n} = 1$ avec pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad \dfrac{1}{2^n+1} \in A \quad$ et $\quad \dfrac{n}{2+n} \in A$.

Théorème (Caractérisation séquentielle des points adhérents) Soient A une partie de $\mathbb{R}$ et $x \in \overline{\mathbb{R}}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) x est adhérent à A. (ii) x est la limite d'une suite d'éléments de A.

Démonstration

(i) $\Longrightarrow$ (ii) Supposons x adhérent à A. Si $x \in \mathbb{R}$, le voisinage $\left]x - \dfrac{1}{n}, x + \dfrac{1}{n}\right[$ de x contient un élément a_n de A pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x car pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\quad |a_n - x| \leqslant \dfrac{1}{n}. \quad$ Si $x = +\infty$, le voisinage $]n, +\infty[$ de $+\infty$ contient un élément a_n de A pour tout $n \in \mathbb{N}$ et la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$ car $a_n \geqslant n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On raisonne de même si $x = -\infty$.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) Faisons l'hypothèse que x est la limite d'une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A. Soit V_x un voisinage de x. Par définition de la limite, $a_n \in V_x$ à partir d'un certain rang N, donc V_x contient un élément de A. Cela montre bien que tout voisinage de x contient un élément de A, i.e. x est adhérent à a.

Le théorème qui suit n'est qu'un particulier de celui qui précède si l'on veut bien se souvenir qu'une partie dense de $\mathbb{R}$ est une partie de $\mathbb{R}$ à laquelle tout réel est adhérent.

Théorème (Caractérisation séquentielle de la densité) Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) A est dense dans $\mathbb{R}$. (ii) Tout réel est la limite d'une suite d'éléments de A.

Nous avons déjà vu que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. Nous nous intéressons ci-dessous à une partie dense de $\mathbb{R}$ un peu plus petite, à savoir l'ensemble des *décimaux*.

Définition (Nombre décimal) On appelle *décimal* tout rationnel de la forme $\dfrac{p}{10^n}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$.

On peut aussi dire qu'un décimal est un réel dont le développement décimal est fini, i.e. un réel qui, en base 10, n'a qu'un nombre fini de chiffres après la virgule.

Théorème (Densité de l'ensemble des décimaux) L'ensemble des décimaux est dense dans $\mathbb{R}$.

Plus précisément, pour tout $x \in \mathbb{R}$, si on pose $a_n = \dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$ et $b_n = a_n + \dfrac{1}{10^n}$, les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes, à valeurs décimales et de limite commune x. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_n est appelé la *valeur décimale approchée de x par défaut à 10^{-n} près* et b_n sa *valeur décimale approchée par excès à 10^{-n} près*.

Tout décimal est rationnel mais la réciproque est fausse, par exemple $\dfrac{1}{3}$ est rationnel mais non décimal. En montrant que tout réel est la limite d'une suite de décimaux, on montre donc en particulier que tout réel est la limite d'une suite de rationnels — on redémontre donc la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.

Pour $x = \pi = 3,141592653589793\dots$: $a_0 = 3$, $a_1 = \dfrac{31}{10} = 3,1$, $a_2 = \dfrac{314}{100} = 3,14$, $a_3 = \dfrac{3141}{1000} = 3,141$ tandis que $b_0 = 4$, $b_1 = \dfrac{32}{10} = 3,2$, $b_2 = \dfrac{315}{100} = 3,15$, $b_3 = \dfrac{3142}{1000} = 3,142$.

Démonstration Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $10^n x - 1 < \lfloor 10^n x \rfloor \leqslant 10^n x$ donc $x - \dfrac{1}{10^n} < a_n \leqslant x$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = x$ par encadrement, et a fortiori $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = x$. La densité de l'ensemble des décimaux dans $\mathbb{R}$ est ainsi établie. Il nous reste à montrer l'adjacence des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

- Tout d'abord : $b_n - a_n = \dfrac{1}{10^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
- Pour la croissance de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et la décroissance de $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, partons de l'inégalité suivante pour tout $n \in \mathbb{N}$: $10^n a_n = \lfloor 10^n x \rfloor \leqslant 10^n x < \lfloor 10^n x \rfloor + 1 = 10^n b_n$, puis multiplions par 10 : $10^{n+1} a_n \leqslant 10^{n+1} x < 10^{n+1} b_n$. Par définition de la partie entière, sachant que $10^{n+1} a_n$ et $10^{n+1} b_n$ sont des **ENTIERS**, il en découle que : $10^{n+1} a_n \leqslant \lfloor 10^{n+1} x \rfloor = 10^{n+1} a_{n+1}$ et $10^{n+1} b_n \geqslant \lfloor 10^{n+1} x \rfloor + 1 = 10^{n+1} a_{n+1} + 1 = 10^{n+1} b_{n+1}$. On divise enfin par 10^{n+1} : $a_n \leqslant a_{n+1}$ et $b_n \geqslant b_{n+1}$.

Le résultat précédent peut être reformulé en termes de *développements décimaux illimités*. Comme on vient de le voir, tout réel x peut être écrit sous la forme $\lfloor x \rfloor + \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{10^k}$ pour une certaine suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ d'entiers compris entre 0 et 9. C'est cela qu'on appelle un *développement décimal illimité*. Par exemple : $\pi = 3 + \dfrac{1}{10} + \dfrac{4}{10^2} + \dfrac{1}{10^3} + \dfrac{5}{10^4} + \dfrac{9}{10^5} + \dfrac{2}{10^6} + \dots$

La question de l'unicité d'un tel développement se pose naturellement, et hélas non, il n'y a pas unicité en général. On peut montrer cependant que :

— l'unicité est garantie pour les réels **NON** décimaux,

— alors que tout décimal possède exactement deux développements décimaux illimités. L'essentiel est donné dans le calcul de somme géométrique suivant : $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{9}{10^k} = \frac{9}{1 - \frac{1}{10}} = 1$, i.e. en résumé : $0,999999\dots = 1$.

Par exemple : $12,584 = 12 + \dfrac{5}{10} + \dfrac{8}{10^2} + \dfrac{4}{10^3} = 12 + \dfrac{5}{10} + \dfrac{8}{10^2} + \dfrac{3}{10^3} + \dfrac{9}{10^4} + \dfrac{9}{10^5} + \dfrac{9}{10^6} + \dots = 12,583999\dots$ Le développement décimal illimité $12,584000\dots$ est dit *propre*, tandis que le développement décimal illimité $12,583999\dots$ est dit *impropre*.

7 Extension aux suites complexes

Définition **(Suite complexe)** On appelle *suite complexe* toute fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{C}$.

Dans quelle mesure les définitions et les théorèmes de ce chapitre peuvent-ils étendus aux suites complexes ? En tout cas, nous n'avons pas droit aux inégalités dans $\mathbb{C}$, donc une suite complexe ne peut pas être majorée, minorée ou motonone. C'est triste, mais c'est comme ça. Par bonheur, une suite complexe peut tout de même être bornée.

Définition **(Suite bornée)** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe.
On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *bornée* si : $\exists K \geqslant 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leqslant K$.

Définition **(Limite d'une suite complexe)** Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe et $\ell \in \mathbb{C}$. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *admet ℓ pour limite* si tout voisinage de ℓ contient tous les u_n à partir d'un certain rang, i.e. si :

$$\forall V_\ell \in \mathscr{V}_\ell(\mathbb{C}), \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant N, \quad u_n \in V_\ell.$$

Il est équivalent de dire que : $\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant N, \quad |u_n - \ell| < \varepsilon$.

Le théorème d'unicité de la limite est encore valable — ce qui autorise la notation $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Attention, la notion de limite infinie n'a aucun sens pour une suite complexe. Où sont $-\infty$ et $+\infty$ dans $\mathbb{C}$?

Notez bien par ailleurs que : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \iff \lim\limits_{n\to+\infty} |u_n - \ell| = 0$. La limite de gauche est calculée dans $\mathbb{C}$, celle de droite dans $\mathbb{R}$.

Exemple Pour tout $z \in \mathbb{C}$, si $|z| < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} z^n = 0$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$.

Démonstration Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} z^n = 0$ revient à montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} |z^n| = 0$, ce qui est vrai ici car $|z| < 1$.

Théorème **(Caractérisation de la limite par les parties réelle et imaginaire)** Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe et $\ell \in \mathbb{C}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$. (ii) $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{Re}(u_n) = \mathrm{Re}(\ell)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{Im}(u_n) = \mathrm{Im}(\ell)$.

Démonstration

(i) $\Longrightarrow$ (ii) Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\big|\mathrm{Re}(u_n) - \mathrm{Re}(\ell)\big| = \big|\mathrm{Re}(u_n - \ell)\big| \leqslant |u_n - \ell|$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n - \ell| = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{Re}(u_n) = \mathrm{Re}(\ell)$ par encadrement. Attention, on vient d'appliquer le théorème d'encadrement à des suites **RÉELLES**.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) Si $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{Re}(u_n) = \mathrm{Re}(\ell)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{Im}(u_n) = \mathrm{Im}(\ell)$, alors par de simples opérations :

$$|u_n - \ell| = \sqrt{\big(\mathrm{Re}(u_n) - \mathrm{Re}(\ell)\big)^2 + \big(\mathrm{Im}(u_n) - \mathrm{Im}(\ell)\big)^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sqrt{0^2 + 0^2} = 0, \quad \text{donc } \lim_{n\to+\infty} u_n = \ell.$$

Exemple $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{Arctan}\, n = \dfrac{\pi}{2}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{n} + \mathrm{i}\,\mathrm{Arctan}\, n\right) = \dfrac{\mathrm{i}\pi}{2}$.

On définit comme avant les notions de *convergence* et *divergence*. Il est toujours vrai qu'une suite convergente est bornée.

Les opérations d'addition, produit, multiplication par un scalaire et inverse sur les limites donnent lieu aux mêmes résultats que dans le cas réel, à ceci près que les symboles $+\infty$ et $-\infty$ sont bannis.

Le paragraphe sur les suites extraites est intégralement maintenu.

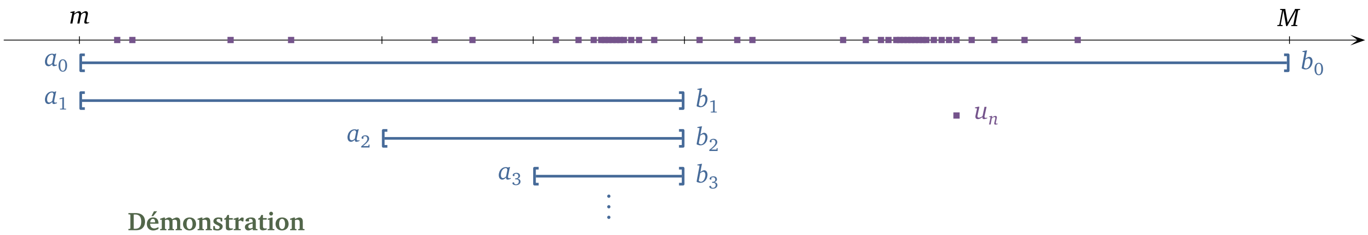
Les grands théorèmes d'existence de limite en revanche — théorèmes d'encadrement/minoration/majoration, théorème de la limite monotone et théorème des suites adjacentes — n'ont pas de sens dans le cas complexe car ils utilisent de façon essentielle la relation $\leqslant$ sur $\mathbb{R}$. Il faut bien reconnaître que cette perte est assez terrible, car nous passons notre temps à nous y référer pour étudier les suites réelles. Sous ce rapport, le paragraphe suivant doit être vu comme une lueur d'espoir.

8 LE THÉORÈME DE BOLZANO-WEIERSTRASS

Ce théorème subtil et important aura pour nous un intérêt surtout théorique en cours d'année. Il établit une sorte de réciproque — mais pas jusqu'au bout — au résultat selon lequel toute suite convergente est bornée.

Théorème (Théorème de Bolzano-Weierstrass) De toute suite complexe bornée, on peut extraire une suite convergente. En d'autres termes, toute suite complexe bornée possède une valeur d'adhérence.

Ce théorème d'**EXISTENCE** est d'un genre particulier. Il n'affirme pas que toute suite bornée est convergente — c'est faux — mais qu'une suite bornée possède toujours une suite **EXTRAITE** convergente. Intuitivement, cela revient à dire que les valeurs d'une suite bornée sont forcées de s'accumuler **QUELQUE PART**, i.e. autour d'**AU MOINS UN** point.



Démonstration

- **Cas d'une suite réelle :** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite **RÉELLE** bornée, disons entre m et M avec $m \leqslant M$. Nous cherchons une fonction $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante pour laquelle $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. Nous allons construire une telle φ pas à pas au moyen d'un algorithme appelé *dichotomie*.

  On pose d'abord : $a_0 = m$, $b_0 = M$ et $\varphi(0) = 0$. Ensuite, soit $n \in \mathbb{N}$. Faisons l'hypothèse qu'on a réussi à définir des réels $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, $b_0, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$ et des entiers $\varphi(0), \ldots, \varphi(n) \in \mathbb{N}$ pour lesquels :

  (i) $a_0 \leqslant a_1 \leqslant \ldots \leqslant a_n$ et $b_n \leqslant b_{n-1} \leqslant \ldots \leqslant b_0$,

  (ii) pour tout $k \in [\![0, n]\!]$: $b_k - a_k = \dfrac{M-m}{2^k}$,

  (iii) l'ensemble d'indices $\left\{i \in \mathbb{N} \mid \ u_i \in [a_k, b_k]\right\}$ est infini pour tout $k \in [\![0, n]\!]$,

  (iv) pour tout $k \in [\![0, n]\!]$: $a_k \leqslant u_{\varphi(k)} \leqslant b_k$,

  (v) $\varphi(0) < \varphi(1) < \ldots < \varphi(n)$.

  Sous cette hypothèse, nous allons tâcher de construire deux réels a_{n+1}, b_{n+1} et un entier $\varphi(n+1)$ qui rendent vraies les assertions (i) à (v) au rang $n+1$. Remarquons dans ce but qu'au moins l'un des ensembles $\left\{i \in \mathbb{N} \mid \ u_i \in \left[a_n, \dfrac{a_n+b_n}{2}\right]\right\}$ et $\left\{i \in \mathbb{N} \mid \ u_i \in \left[\dfrac{a_n+b_n}{2}, b_n\right]\right\}$ est infini, car si les deux étaient finis, leur réunion $\left\{i \in \mathbb{N} \mid \ u_i \in [a_n, b_n]\right\}$ le serait aussi et cela contredirait (iii).

  Posons donc : $\begin{cases} a_{n+1} = a_n \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \dfrac{a_n+b_n}{2} & \text{si } \left\{i \in \mathbb{N} \mid \ u_i \in \left[a_n, \dfrac{a_n+b_n}{2}\right]\right\} \text{ est infini (cas } \spadesuit) \\ a_{n+1} = \dfrac{a_n+b_n}{2} \quad \text{et} \quad b_{n+1} = b_n & \text{sinon (cas } \clubsuit). \end{cases}$

  Par construction, l'ensemble d'indices $\left\{i \in \mathbb{N} \mid \ u_i \in [a_{n+1}, b_{n+1}]\right\}$ est infini, donc également l'ensemble $\left\{i \in \mathbb{N} \mid \ i > \varphi(n) \ \text{ et } \ u_i \in [a_{n+1}, b_{n+1}]\right\}$ — le même ensemble à ceci près qu'on a ôté les éléments inférieurs ou égaux à $\varphi(n)$, en nombre fini. Sélectionnons finalement un élément quelconque $\varphi(n+1)$ dans cette partie de $\mathbb{N}$, par exemple le plus petit élément.

  Assertion (i) **au rang** $n+1$ **:** Comme $a_n \leqslant b_n$ d'après (ii) : $a_n \leqslant \dfrac{a_n+b_n}{2} \leqslant b_n$ donc $a_n \leqslant a_{n+1}$ et $b_{n+1} \leqslant b_n$, que l'on soit dans le cas $\spadesuit$ ou dans le cas $\clubsuit$.

  Assertion (ii) **au rang** $n+1$ **:** $b_{n+1} - a_{n+1} = \begin{cases} \dfrac{a_n+b_n}{2} - a_n = \dfrac{b_n-a_n}{2} \overset{\text{(ii)}}{=} \dfrac{M-m}{2^{n+1}} & (\text{cas } \spadesuit) \\ b_n - \dfrac{a_n+b_n}{2} = \dfrac{b_n-a_n}{2} \overset{\text{(ii)}}{=} \dfrac{M-m}{2^{n+1}} & (\text{cas } \clubsuit). \end{cases}$

  Assertion (iii) **au rang** $n+1$ **:** Déjà fait.

  Assertions (iv) **et** (v) **au rang** $n+1$ **:** Vraies par définition de $\varphi(n+1)$.

  Ouf ! Fin de la construction. Les deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi construites sont adjacentes en vertu des assertions (i) et (ii), donc convergentes de limite commune un certain ℓ d'après le théorème des suites adjacentes. Or par ailleurs $a_n \leqslant u_{\varphi(n)} \leqslant b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ par encadrement.

- **Cas général :** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe bornée, disons par K en module. Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\big|\mathrm{Re}(u_n)\big| \leqslant |u_n| \leqslant K$ et $\big|\mathrm{Im}(u_n)\big| \leqslant |u_n| \leqslant K$, donc $\big(\mathrm{Re}(u_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\big(\mathrm{Im}(u_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites **RÉELLES** bornées. D'apès le théorème de Bolzano-Weierstrass **RÉEL**, la suite $\Big(\mathrm{Re}\big(u_{\varphi(n)}\big)\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, disons vers a, pour une certaine fonction $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante.

  La suite $\Big(\mathrm{Im}\big(u_{\varphi(n)}\big)\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a hélas aucune raison de converger elle aussi mais elle est toujours bornée. D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass **RÉEL**, la suite $\Big(\mathrm{Im}\big(u_{\varphi\circ\psi(n)}\big)\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc, disons vers b, pour une nouvelle fonction $\psi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante.

  Finalement : $u_{\varphi\circ\psi(n)} = \mathrm{Re}\big(u_{\varphi\circ\psi(n)}\big) + \mathrm{i}\,\mathrm{Im}\big(u_{\varphi\circ\psi(n)}\big) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a + \mathrm{i}b$. Comme voulu, nous avons réussi à extraire une suite convergente de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. ■