

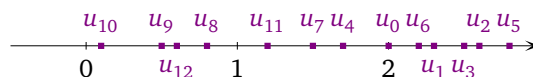
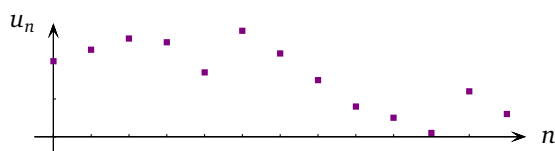
# LIMITE D'UNE SUITE

## 1 GÉNÉRALITÉS SUR LES SUITES RÉELLES

**Définition (Suite réelle)** On appelle *suite (réelle)* toute fonction  $u$  de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{R}$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on préfère noter  $u_n$  le réel  $u(n)$ , et  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ou  $(u_n)_{n \geq 0}$  la suite  $u$ .

### 📖 Explication 📖

- On travaillera seulement dans ce chapitre avec des suites définies sur tout  $\mathbb{N}$ , mais on pourrait bien sûr travailler avec des suites définies sur des ensembles de la forme  $\llbracket n_0, +\infty \llbracket$  avec  $n_0 \in \mathbb{N}$ .
- Il existe au moins deux manières courantes de représenter une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  :
  - soit comme une fonction de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{R}$ , c'est-à-dire de manière plane avec  $\mathbb{N}$  en abscisse et  $\mathbb{R}$  en ordonnée,
  - soit comme un ensemble de points le long d'un axe.



**Définition (Vocabulaire usuel sur les suites réelles)** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle.

- On dit que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est *majorée* si  $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  est une partie majorée de  $\mathbb{R}$ , i.e. si :  $\exists M \in \mathbb{R} / \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$ . Un tel  $M$  est appelé UN *majorant* de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . On dit aussi que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est *majorée par  $M$*  ou que  $M$  *major*e  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . On dispose bien sûr d'une définition analogue des suites *minorées*.
- On dit que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est *bornée* si elle est à la fois majorée et minorée, i.e. si :  $\exists K \in \mathbb{R}_+ / \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq K$ .
- On dit que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est *positive* si elle est minorée par 0, i.e. si pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $u_n \geq 0$ . On dispose bien sûr d'une définition analogue des suites *néglatives*.
- On dit que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est *croissante* (resp. *strictement croissante*) si pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $u_n \leq u_{n+1}$  (resp.  $u_n < u_{n+1}$ ). On dispose bien sûr de définitions analogues des suites *décroissantes* et *strictement décroissantes*.
- On dit que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est *monotone* (resp. *strictement monotone*) si elle est croissante ou décroissante (resp. strictement croissante ou strictement décroissante).

**✗ ATTENTION ! ✗** Une suite majorée ne possède JAMAIS UN SEUL MAJORANT. Une suite majorée par 2 l'est aussi par 3,  $\pi$ ,  $\sqrt{15}$ ... Par ailleurs :

Les majorants d'une suite sont par définition des constantes. Une majoration de  $u_n$  par un réel QUI DÉPEND DE  $n$  NE MONTRE PAS que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est majorée.

**📖 En pratique 📖** Pour montrer qu'une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est monotone, deux méthodes courantes :

- étudier le signe de  $u_{n+1} - u_n$ ,
- SI  $u_n > 0$  POUR TOUT  $n \in \mathbb{N}$  : étudier la position de  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$  par rapport à 1 — méthode intéressante surtout lorsque  $u_n$  est défini par des produits et des quotients et qu'on peut espérer des simplifications.

**Exemple** Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose :  $u_n = \frac{2^n}{n+1}$ . La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante.

**Démonstration** Les deux méthodes de différence et quotient sont envisageables ici. Au choix, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

• **Différence** :  $u_{n+1} - u_n = \frac{2^{n+1}}{n+2} - \frac{2^n}{n+1} = \frac{2^n}{(n+1)(n+2)} (2(n+1) - (n+2)) = \frac{2^n n}{(n+1)(n+2)} \geq 0$ .

• **Quotient** :  $u_n > 0$  ET  $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}}{n+2} \times \frac{n+1}{2^n} = \frac{2(n+1)}{n+2} = \frac{(n+2)+n}{n+2} = 1 + \frac{n}{n+2} \geq 1$ .

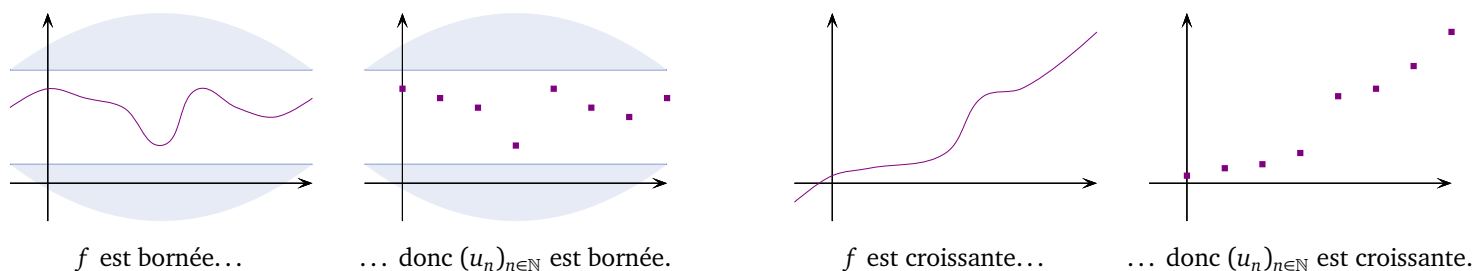
**Définition (Propriété vraie à partir d'un certain rang)** Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite et  $\mathcal{P} = (\mathcal{P}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de propositions portant sur  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . On dit que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifie la propriété  $\mathcal{P}$  à partir d'un certain rang s'il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \geq N$ , la proposition  $\mathcal{P}_n$  soit vraie.

🐇 **Explication** 🐇 Ce qu'une suite a d'intéressant, ce ne sont pas ses premiers termes mais son comportement « à l'infini ». Si par exemple tous ses termes sont majorés par 1 sauf les 30 premiers, on a bien envie de dire que la suite est « presque » majorée par 1. Pour être exact, on dit qu'elle est majorée par 1 à partir d'un certain rang.

🐇 **Explication** 🐇 On peut définir une suite principalement de deux façons — soit explicitement, soit implicitement par récurrence. Ceci ne veut pas dire qu'il y a deux sortes de suites, ce sont là seulement deux manières de les définir. Une suite géométrique, par exemple, peut être définie aussi bien explicitement («  $u_n = q^n u_0$  ») que par récurrence («  $u_{n+1} = q u_n$  »).

- **Suites définies explicitement** : Définir une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  explicitement, c'est la définir à l'aide d'une certaine fonction  $f$  par une expression «  $u_n = f(n)$  ». Avec une telle définition il n'est pas difficile de calculer  $u_{1000}$ , on calcule directement  $f(1000)$ .

De nombreuses propriétés de  $f$  se transmettent alors telles quelles à  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , qui n'est après tout que la restriction de  $f$  à  $\mathbb{N}$  — ainsi la monotonie, le signe et le caractère majoré/minoré/borné.



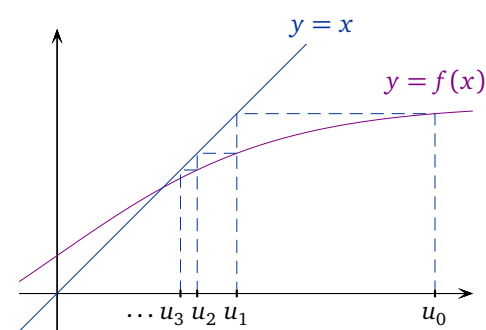
- **Suites récurrentes définies par une relation** «  $u_{n+1} = f(u_n)$  » : On peut définir une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par récurrence par la donnée de son premier terme  $u_0$  et d'une relation «  $u_{n+1} = f(u_n)$  » où  $f$  est une fonction. Une telle définition présente un énorme inconvénient, on est obligé pour calculer  $u_{1000}$  de calculer les uns après les autres  $u_1, \dots, u_{999}, u_{1000}$ .

✗ **ATTENTION !** ✗

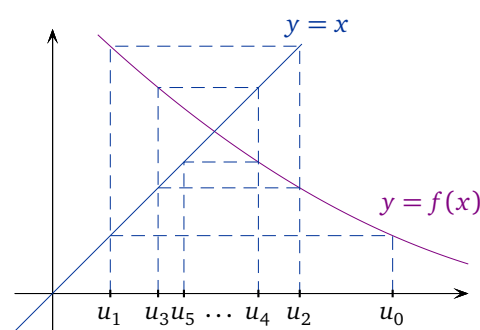
Pour une suite récurrente  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par une relation «  $u_{n+1} = f(u_n)$  » :

$f$  est croissante ✗  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante.

$f$  est décroissante ✗  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante.



$f$  est croissante MAIS  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  décroissante.



$f$  est décroissante MAIS  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  n'est même pas monotone.

Nous reviendrons plus longuement dans un prochain paragraphe sur les suites récurrentes «  $u_{n+1} = f(u_n)$  ».

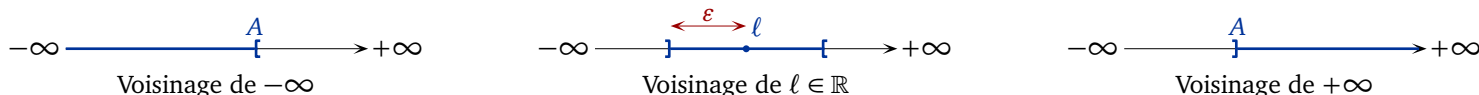
## 2 LIMITE D'UNE SUITE RÉELLE DANS $\overline{\mathbb{R}}$

La notion de *voisinage*, issue d'une partie des mathématiques appelée *topologie*, n'est pas au programme de MPSI mais elle facilite grandement la compréhension des limites. Je ne vous en donne ci-dessous qu'une **DÉFINITION SIMPLIFIÉE**.

**Définition (Voisinage d'un point dans  $\mathbb{R}$ , définition simplifiée)** Soit  $l \in \overline{\mathbb{R}}$ . On appelle *voisinage de  $l$  (dans  $\mathbb{R}$ )* :

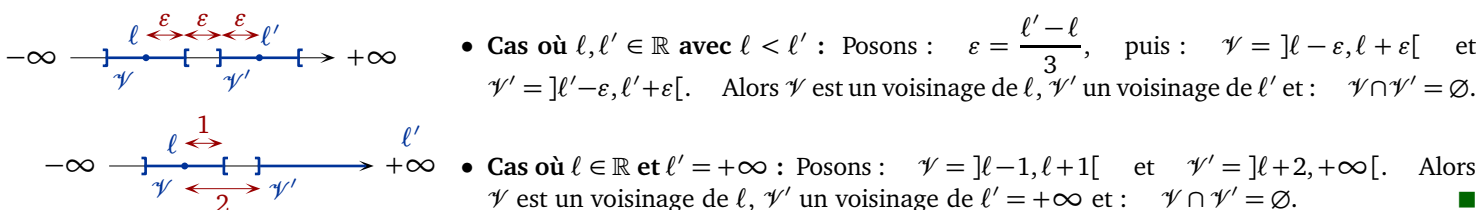
- si :  $l \in \mathbb{R}$ , tout intervalle de la forme  $]l - \varepsilon, l + \varepsilon[$  avec  $\varepsilon > 0$ ,
- si :  $l = +\infty$ , tout intervalle de la forme  $]A, +\infty[$  avec  $A \in \mathbb{R}$ ,
- si :  $l = -\infty$ , tout intervalle de la forme  $] -\infty, A[$  avec  $A \in \mathbb{R}$ .

**Explication** L'idée, c'est qu'un voisinage de  $l$  contient tous les réels « à proximité immédiate » de  $l$ .



**Théorème (Deux points distincts ont des voisinages disjoints)** Soient  $l, l' \in \overline{\mathbb{R}}$ . Si :  $l \neq l'$ , il existe un voisinage  $\mathcal{V}$  de  $l$  et un voisinage  $\mathcal{V}'$  de  $l'$  pour lesquels :  $\mathcal{V} \cap \mathcal{V}' = \emptyset$ .

**Démonstration** Nous ne traiterons que deux cas caractéristiques, les autres se traitent de la même manière.



La définition suivante est l'objet central de ce chapitre.

**Définition (Limite d'une suite)** Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite et  $l \in \overline{\mathbb{R}}$ .

- **Définition générale** : On dit que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  *admet  $l$  pour limite* si tout voisinage de  $l$  contient tous les  $u_n$  à partir d'un certain rang, i.e. si :

pour tout voisinage  $\mathcal{V}$  de  $l$ ,  $u_n$  appartient à  $\mathcal{V}$  à partir d'un certain rang.

- **Cas d'une limite finie** : Lorsque :  $l \in \mathbb{R}$ , on dit que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  *admet  $l$  pour limite* si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \implies |u_n - l| < \varepsilon,$$

ou bien de manière plus concise, si :  $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} / \forall n \geq N, |u_n - l| < \varepsilon$ .

- **Cas de la limite  $+\infty$**  : On dit que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  *admet  $+\infty$  pour limite* si :

$$\forall A > 0, \exists N \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \implies u_n > A,$$

ou bien de manière plus concise, si :  $\forall A > 0, \exists N \in \mathbb{N} / \forall n \geq N, u_n > A$ .

- **Cas de la limite  $-\infty$**  : On dit que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  *admet  $-\infty$  pour limite* si :

$$\forall A < 0, \exists N \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \implies u_n < A,$$

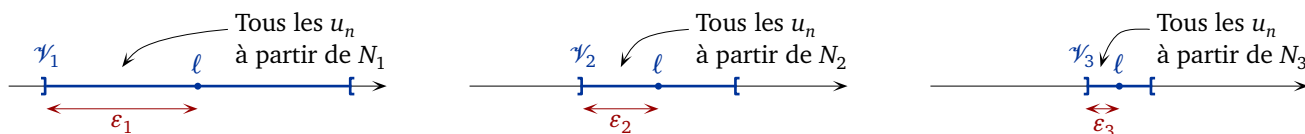
ou bien de manière plus concise, si :  $\forall A < 0, \exists N \in \mathbb{N} / \forall n \geq N, u_n < A$ .

**En pratique** On peut montrer que les inégalités strictes :  $|u_n - \ell| < \varepsilon$ ,  $u_n > A$  et  $u_n < A$  peuvent être remplacées par des inégalités larges :  $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$ ,  $u_n \geq A$  et  $u_n \leq A$ , cela n'affecte pas la notion de limite. Pour une raison qui dépasse ce cours, les mathématiciens considèrent que les inégalités strictes sont plus adaptées, mais les inégalités larges vous sembleront peut-être plus facile à manipuler.

Inégalités STRICTES ou inégalités LARGES, choisissez ce que vous préférez.

**Explication** Ces définitions un peu obscures au premier abord satisfont en réalité parfaitement l'intuition que nous avons des limites. Nous nous contenterons de trois remarques en guise d'explication.

- Trois voisinages  $\mathcal{V}_1$ ,  $\mathcal{V}_2$  et  $\mathcal{V}_3$  ne suffisent pas à forcer  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  à tendre vers  $\ell$ . Il est essentiel que la définition de la limite commence par : « POUR TOUT voisinage  $\mathcal{V}$  de  $\ell$  ».

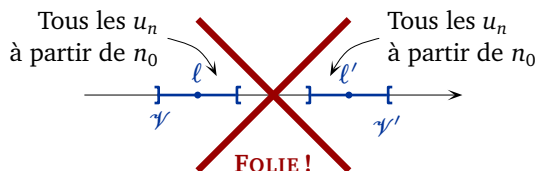


Ces figures illustrent le cas d'une limite  $\ell$  finie mais le principe est le même dans les cas infinis.

- Intuitivement, les premiers termes de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ne doivent pas compter quand on s'intéresse à sa limite. C'est pour cela que la définition de la limite piège  $u_n$  dans des voisinages de  $\ell$  À PARTIR D'UN CERTAIN RANG.
- Intuitivement, plus le voisinage  $\mathcal{V}$  est petit, plus le rang  $N$  est grand.

**Théorème (Unicité de la limite)** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite. Si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  possède une limite, elle est unique et notée  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ .  
 Pour tout  $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ , la relation :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$  est souvent notée :  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$ .

**Démonstration** Soient  $\ell, \ell' \in \overline{\mathbb{R}}$ . On veut montrer, sous l'hypothèse que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  admet  $\ell$  et  $\ell'$  pour limites, que :  $\ell = \ell'$ . Supposons par l'absurde que :  $\ell \neq \ell'$ . Il existe alors un voisinage  $\mathcal{V}$  de  $\ell$  et un voisinage  $\mathcal{V}'$  de  $\ell'$  pour lesquels :  $\mathcal{V} \cap \mathcal{V}' = \emptyset$ . Or, par hypothèse :  $u_n \in \mathcal{V}$  à partir d'un certain rang  $N$  et :  $u_n \in \mathcal{V}'$  à partir d'un certain rang  $N'$ . Si nous posons :  $n_0 = \max\{N, N'\}$ , alors :  $u_{n_0} \in \mathcal{V} \cap \mathcal{V}' = \emptyset$  — contradiction !



**Explication** Il y a une idée importante dans cette preuve que nous allons retrouver tout au long du chapitre. Si une certaine propriété  $\mathcal{P}_1$  est vraie à partir d'un rang  $N_1$ , une certaine propriété  $\mathcal{P}_2$  vraie à partir d'un rang  $N_2$ ... et enfin une certaine propriété  $\mathcal{P}_k$  vraie à partir d'un rang  $N_k$ , les propriétés  $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_k$  sont TOUTES vraies en même temps à partir du rang  $\max\{N_1, \dots, N_k\}$ .

**Définition (Convergence/divergence)** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite. On dit que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est *convergente* ou qu'elle *converge* si elle possède une limite FINIE. On dit sinon qu'elle est *divergente* ou qu'elle *diverge*.

**ATTENTION !** « Converger » n'est pas « avoir une limite » mais « avoir une limite FINIE ». « Diverger » n'est pas « avoir  $\pm\infty$  pour limite », mais éventuellement « ne pas avoir de limite ».

Limite finie	Limite $\pm\infty$	Pas de limite
Convergence		Divergence

**Théorème (Convergence et caractère borné)** Toute suite convergente est bornée.

**Démonstration** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite convergente, disons de limite  $\ell \in \mathbb{R}$ . Pour  $\varepsilon = 1$ , la définition de la limite affirme que l'inégalité :  $|u_n - \ell| < 1$  est vraie à partir d'un certain rang  $N$ . Ainsi pour tout  $n \geq N$  :

$$|u_n| = |(u_n - \ell) + \ell| \leq |u_n - \ell| + |\ell| \leq 1 + |\ell| \quad \text{d'après l'inégalité triangulaire.}$$

Posons :  $K = \max\{|u_0|, |u_1|, \dots, |u_{N-1}|, |\ell| + 1\}$ . Alors  $K$  est plus grand que  $|u_0|, \dots, |u_{N-1}|$ , mais aussi que  $|u_n|$  pour tout  $n \geq N$ . Conclusion :  $|u_n| \leq K$  pour TOUT  $n \in \mathbb{N}$ , autrement dit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée. ■

**✘ ATTENTION ! ✘**

- La réciproque est fautive, la suite de terme général  $(-1)^n$  est bornée (entre  $-1$  et  $1$ ) sans être convergente.
- Une suite non bornée n'admet pas forcément  $+\infty$  ou  $-\infty$  pour limite. La suite de terme général  $(-1)^n n$ , par exemple, n'est pas bornée et n'a pas de limite — que dire en effet de ses termes d'indice pair/impair ?

**En pratique** La manipulation des définitions de la limite n'est pas trop difficile si l'on veut bien se conformer aux recommandations qui suivent. Imprégné(e)-vous-en comme jamais, sans quoi vous serez vite perdus.

- Supposons dans un premier temps que :  $\ell \in \mathbb{R}$ . Pour montrer que :  $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} / \forall n \geq N, |u_n - \ell| < \varepsilon$ , on commence sans réfléchir par : « Soit  $\varepsilon > 0$ . » Ensuite, pour trouver un rang  $N$  à partir duquel :  $|u_n - \ell| < \varepsilon$ , on essaie de MAJORER  $|u_n - \ell|$  EN RESPECTANT DEUX RÈGLES :
  - La majoration obtenue doit TENDRE VERS 0 QUAND  $n$  TEND VERS  $+\infty$ . Sans cela nous ne pourrions pas trouver un rang  $N$  à partir duquel :  $|u_n - \ell| < \varepsilon$  quand  $\varepsilon$  est trop petit.
  - La majoration obtenue doit ÊTRE SIMPLE VIS-À-VIS DE LA RECHERCHE DU RANG  $N$ . Par exemple, la majoration :  $|u_n - \ell| \leq \frac{1}{n}$  peut être considérée simple car on peut dans ce cas choisir :  $N = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 1$ .
- Dans le cas où :  $\ell = +\infty$ , on s'adapte. Pour montrer que :  $\forall A > 0, \exists N \in \mathbb{N} / \forall n \geq N, u_n > A$ , on commence sans réfléchir par : « Soit  $A > 0$ . » Ensuite, pour trouver un rang  $N$  à partir duquel :  $u_n > A$ , on essaie de MINORER  $u_n$  EN RESPECTANT DEUX RÈGLES :
  - La minoration obtenue doit TENDRE VERS  $+\infty$  QUAND  $n$  TEND VERS  $+\infty$ .
  - La minoration obtenue doit ÊTRE SIMPLE VIS-À-VIS DE LA RECHERCHE DU RANG  $N$ . Par exemple, la minoration :  $u_n \geq n^2$  peut être considérée simple car on peut dans ce cas choisir :  $N = \lceil \sqrt{A} \rceil + 1$ .

**Exemple**  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n \sin n}{n^2 + 2} = 0$ .

**Démonstration** Nous devons montrer que :  $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} / \forall n \geq N, \left| \frac{n \sin n}{n^2 + 2} \right| < \varepsilon$ .

Soit  $\varepsilon > 0$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , majorons :  $\left| \frac{n \sin n}{n^2 + 2} \right| = \frac{n |\sin n|}{n^2 + 2} \leq \frac{n}{n^2 + 2} \leq \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$ .

On majore en SIMPLIFIANT et en vérifiant que ce par quoi on majore TEND TOUJOURS VERS 0.

On arrête de majorer quand on se sent capable de trouver le rang  $N$  cherché.

Posons donc :  $N = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 1$ . À partir de  $N$ , l'inégalité :  $\frac{1}{n} < \varepsilon$  est vraie, donc aussi l'inégalité :  $\left| \frac{n \sin n}{n^2 + 2} \right| < \varepsilon$ .

**Exemple**  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2 + (-1)^n n) = +\infty$ .

**Démonstration** Nous devons montrer que :  $\forall A > 0, \exists N \in \mathbb{N} / \forall n \geq N, n^2 + (-1)^n n > A$ .

Soit  $A > 0$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , minorons :  $n^2 + (-1)^n n \geq n^2 - n = n(n-1) \geq (n-1)^2$ .

On minore en SIMPLIFIANT et en vérifiant que ce par quoi on minore TEND TOUJOURS VERS  $+\infty$ .

On arrête de minorer quand on se sent capable de trouver le rang  $N$  cherché.

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :  $(n-1)^2 > A \iff n > \sqrt{A} + 1$ . Posons donc :  $N = \lceil \sqrt{A} \rceil + 2$ . À partir de  $N$ , l'inégalité :  $(n-1)^2 > A$  est vraie, donc aussi l'inégalité :  $n^2 + (-1)^n n > A$ .

**Définition** (Notation  $\sum_{k=0}^{+\infty}$ ) Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite. Si elle **EXISTE** et est **FINIE**, la limite :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n u_k$  est notée  $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ .

✘ **ATTENTION !** ✘ Une somme infinie de réels cache toujours une limite dont l'**EXISTENCE** et la **FINITUDE** doivent être justifiées avant utilisation ! Dans l'exemple qui suit, on les justifie par une simplification préalable. La flèche «  $\xrightarrow{n \rightarrow +\infty}$  » de passage à la limite n'est employée qu'à la fin du calcul quand plus aucune difficulté ne subsiste.

**Exemple**  $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1.$

**Démonstration** Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=0}^n \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$

### 3 MANIPULATION DES LIMITES

#### 3.1 OPÉRATIONS SUR LES LIMITES

Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites réelles,  $l, l' \in \mathbb{R}$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ . On suppose dans tout ce paragraphe que les limites  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$  **EXISTENT**. Dans les tableaux ci-dessous, le symbole **???** ne signifie pas une absence de limite mais une **indétermination** — précisions plus loin.

<b>SOMME</b>	$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	$l$	$l$ ou $+\infty$	$l$ ou $-\infty$	$+\infty$
	$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	$l'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
	$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n)$	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$	<b>???</b>

<b>PRODUIT</b>	$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	$l$	$l > 0$ ou $+\infty$	$l < 0$ ou $-\infty$	$l > 0$ ou $+\infty$	$l < 0$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
	$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	$l'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$0$
	$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n v_n)$	$ll'$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	<b>???</b>

<b>MULTIPLICATION PAR UN RÉEL</b>		$\lambda > 0$		$\lambda = 0$	$\lambda < 0$			
	$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	$+\infty$	$l$	$-\infty$	peu importe	$+\infty$	$l$	$-\infty$
	$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\lambda u_n)$	$+\infty$	$\lambda l$	$-\infty$	$0$	$-\infty$	$\lambda l$	$+\infty$

<b>INVERSE</b>			$u_n > 0$ à partir d'un certain rang	$u_n < 0$ à partir d'un certain rang	sinon	
	$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	$l \neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	$0$	$0$	$0$
	$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{u_n}$	$\frac{1}{l}$	$0$	$+\infty$	$-\infty$	<b>???</b>

📖 **Explication** 📖 On pourrait bien sûr construire un tableau « quotient » à partir des tableaux « produit » et « inverse ». On y découvrirait de nouveaux cas d'indétermination :  $\frac{1}{0}$  et  $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ . Mais qu'est-ce au fond qu'une *forme indéterminée* ? C'est une « forme à déterminer ». Dans les tableaux précédents, le symbole ??? signifie qu'en effectuant une opération  $(+\infty) - (+\infty)$  ou  $0 \times (+\infty)$ , on peut tomber a priori sur N'IMPORTE QUEL RÉSULTAT.

• **Cas de la forme indéterminée  $(+\infty) - (+\infty)$  :**

- On peut obtenir n'importe quel réel  $\ell$  :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n+\ell) = +\infty$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$ , mais :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} ((n+\ell) - n) = \ell$ .
- On peut obtenir  $\pm\infty$  :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2n = +\infty$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$ , mais :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (2n - n) = +\infty$ .
- On peut ne pas obtenir de limite :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n + (-1)^n) = +\infty$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$ ,  
mais  $(n + (-1)^n) - n = (-1)^n$  n'a pas de limite.

• **Cas de la forme indéterminée  $0 \times (+\infty)$  :**

- On peut obtenir n'importe quel réel  $\ell$  :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ell}{n} = 0$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$ , mais :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ell}{n} \times n\right) = \ell$ .
- On peut obtenir  $\pm\infty$  :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$ , mais :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} \times n^2\right) = +\infty$ .
- On peut ne pas obtenir de limite :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$ ,  
mais  $\frac{(-1)^n}{n} \times n = (-1)^n$  n'a pas de limite.

**Démonstration** Nous nous contentons de démontrer quelques-uns des résultats des tableaux précédents.

- **Somme de deux limites finies** : On suppose que :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell'$ . Soit  $\varepsilon > 0$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , d'après l'inégalité triangulaire :  $\left| (u_n + v_n) - (\ell + \ell') \right| = \left| (u_n - \ell) + (v_n - \ell') \right| \leq |u_n - \ell| + |v_n - \ell'|$ .

Ici, **SIMPLIFIER**, c'est faire apparaître les quantités  $|u_n - \ell|$  et  $|v_n - \ell'|$  de l'hypothèse.

On majore en **SIMPLIFIANT** et en vérifiant que ce par quoi on majore **TEND TOUJOURS VERS 0**.

Or par hypothèse :  $|u_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$  à partir d'un certain rang  $N$  et :  $|v_n - \ell'| < \frac{\varepsilon}{2}$  à partir d'un certain rang  $N'$ . Posons :  $n_0 = \max\{N, N'\}$ . Pour tout  $n \geq n_0$  :  $\left| (u_n + v_n) - (\ell + \ell') \right| \leq |u_n - \ell| + |v_n - \ell'| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ .

- **Somme d'une limite finie et d'une limite  $+\infty$**  : On suppose que :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$ . Soit  $A > 0$ . Par hypothèse :  $|u_n - \ell| < 1$  à partir d'un certain rang  $N$ , donc en particulier :  $u_n > \ell - 1$ , et :  $v_n > A - \ell + 1$  à partir d'un certain rang  $N'$ . Posons :  $n_0 = \max\{N, N'\}$ . Pour tout  $n \geq n_0$  :  $u_n + v_n > (\ell - 1) + (A - \ell + 1) = A$ .

- **Somme de deux limites  $+\infty$**  : On suppose que :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$ . Soit  $A > 0$ . Par hypothèse :  $u_n > A$  à partir d'un certain rang  $N$  et :  $v_n > 0$  à partir d'un certain rang  $N'$ . Posons :  $n_0 = \max\{N, N'\}$ . Pour tout  $n \geq n_0$  :  $u_n + v_n > A + 0 = A$ .

- **Produit de deux limites finies** : On suppose que :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell'$ . Soit  $\varepsilon > 0$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  d'après l'inégalité triangulaire :  $\left| u_n v_n - \ell \ell' \right| = \left| (u_n - \ell)v_n + \ell(v_n - \ell') \right| \leq |u_n - \ell| \cdot |v_n| + |\ell| \cdot |v_n - \ell'|$ .

À présent,  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente donc bornée, disons par  $K$  en valeur absolue. En outre :  $|u_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{2K}$  à partir d'un certain rang  $N$  et :  $|v_n - \ell'| < \frac{\varepsilon}{2(|\ell| + 1)}$  à partir d'un certain rang  $N'$ . Posons donc :  $n_0 = \max\{N, N'\}$ . Pour tout  $n \geq n_0$  :

$$\left| u_n v_n - \ell \ell' \right| \leq |u_n - \ell| \cdot |v_n| + |\ell| \cdot |v_n - \ell'| < \frac{\varepsilon}{2K} K + |\ell| \frac{\varepsilon}{2(|\ell| + 1)} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

- **Produit  $\ell \times (+\infty)$  avec  $\ell \in \mathbb{R}_+^*$**  : On suppose que :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \in \mathbb{R}_+^*$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$ . Soit  $A > 0$ . Par hypothèse :  $|u_n - \ell| < \frac{\ell}{2}$  à partir d'un certain rang  $N$ , donc en particulier :  $u_n > \ell - \frac{\ell}{2} = \frac{\ell}{2} > 0$ ,

et :  $v_n > \frac{2A}{\ell} > 0$  à partir d'un certain rang  $N'$ . Posons :  $n_0 = \max\{N, N'\}$ . Pour tout  $n \geq n_0$  :  
 $u_n v_n > \frac{\ell}{2} \times \frac{2A}{\ell} = A$ .

• **Produit de deux limites  $+\infty$**  : On suppose que :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$ . Soit  $A > 0$ .  
 Par hypothèse :  $u_n > A$  à partir d'un certain rang  $N$  et :  $v_n > 1$  à partir d'un certain rang  $N'$ . Posons :  
 $n_0 = \max\{N, N'\}$ . Pour tout  $n \geq n_0$  :  $u_n v_n > A \times 1 = A$ .

• **Inverse d'une limite finie non nulle** : On suppose que :  $u_n \neq 0$  à partir d'un certain rang  $N$  et que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \neq 0. \text{ Soit } \varepsilon > 0. \text{ Pour tout } n \geq N : \left| \frac{1}{u_n} - \frac{1}{\ell} \right| = \frac{|u_n - \ell|}{|u_n| \cdot |\ell|}.$$

Par hypothèse :  $|u_n - \ell| < \min\left\{\frac{|\ell|}{2}, \frac{\varepsilon|\ell|^2}{2}\right\}$  à partir d'un certain rang  $N'$ , donc d'après l'inégalité triangulaire :

$$|\ell| - |u_n| \leq |u_n - \ell| < \frac{|\ell|}{2}, \text{ d'où : } |u_n| > |\ell| - \frac{|\ell|}{2} = \frac{|\ell|}{2}. \text{ Posons : } n_0 = \max\{N, N'\}. \text{ Pour tout}$$

$$n \geq n_0 : \left| \frac{1}{u_n} - \frac{1}{\ell} \right| = \frac{|u_n - \ell|}{|u_n| \cdot |\ell|} < \frac{\frac{\varepsilon|\ell|^2}{2}}{\frac{|\ell|}{2} \times |\ell|} = \varepsilon.$$

• **Inverse d'une limite  $+\infty$**  : On suppose que :  $u_n \neq 0$  à partir d'un certain rang  $N$  et que :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ .

Soit  $\varepsilon > 0$ . Par hypothèse :  $u_n > \frac{1}{\varepsilon}$  à partir d'un certain rang  $N'$ . Posons :  $n_0 = \max\{N, N'\}$ . Pour tout

$$n \geq n_0 : \left| \frac{1}{u_n} \right| = \frac{1}{u_n} < \varepsilon.$$

• **Inverse d'une limite nulle de suite strictement positive** : On suppose que :  $u_n > 0$  à partir d'un certain rang  $N$  et que :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ . Soit  $A > 0$ . Par hypothèse :  $|u_n| < \frac{1}{A}$  à partir d'un certain rang  $N'$ . Posons :

$$n_0 = \max\{N, N'\}. \text{ Pour tout } n \geq n_0 : \frac{1}{u_n} = \frac{1}{|u_n|} > A. \quad \blacksquare$$

Le résultat suivant est momentanément admis car il requiert la notion de limite d'une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  — notion connue intuitivement, mais qui ne sera définie proprement que plus tard dans l'année.

**Théorème (Composition à gauche par une fonction)** Soient  $I$  un intervalle,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction,  $\ell$  un élément de  $I$  ou une borne de  $I$ ,  $L \in \overline{\mathbb{R}}$  et  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite.

$$\text{Si : } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \text{ et } \lim_{x \rightarrow \ell} f(x) = L, \text{ alors : } \lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = L.$$

**Exemple** Pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :  $e^x = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ . **RÉSULTAT À CONNAÎTRE !**

**Démonstration** Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :  $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^{n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)}$ . Or :  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = \ln'(1) = 1$ , donc

par composition :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)}{\frac{x}{n}} = 1$ , ou encore :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) = x$ . On achève le travail en

composant ce résultat avec la limite :  $\lim_{t \rightarrow x} e^t = e^x$ .

**✗ ATTENTION ! ✗** Cet exemple prouve qu'on peut avoir :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$  sans avoir :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n^n = 1$ . On peut résumer cela en disant que  $1^{+\infty}$  est une nouvelle forme indéterminée.

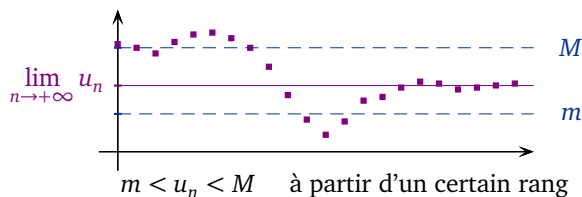


### 3.2 PASSAGE À LA LIMITE DANS LES INÉGALITÉS

**Théorème (Limites et inégalités strictes)** Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle possédant une limite et  $m, M \in \mathbb{R}$ .

(i) Si :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n < M$ , alors :  $u_n < M$  à partir d'un certain rang.

(ii) Si :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n > m$ , alors :  $u_n > m$  à partir d'un certain rang.



**Démonstration** Prouvons seulement (i). Posons :  $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ . Si :  $\ell = -\infty$ , tous les  $u_n$  sont dans le voisinage  $]-\infty, M[$  de  $\ell$  à partir d'un certain rang. Si au contraire :  $\ell \in \mathbb{R}$ , sachant que :  $M - \ell > 0$  par hypothèse, tous les  $u_n$  sont tous dans le voisinage  $]\ell - (M - \ell), \ell + (M - \ell)[ \subset ]-\infty, M[$  de  $\ell$  à partir d'un certain rang. Dans les deux cas :  $u_n < M$  à partir d'un certain rang. ■

**Théorème (Limites et inégalités larges)** Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites réelles possédant une limite finie.

$$\text{Si : } u_n \leq v_n \text{ à partir d'un certain rang, alors : } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n.$$

Ce résultat est utilisé le plus souvent lorsque l'une des deux suites est constante.

✘ **ATTENTION !** ✘ C'est faux avec des inégalités STRICTES ! Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :  $\frac{1}{n} > 0$ , mais :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ .

**Démonstration** Raisonnons par l'absurde en supposant que :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) < 0$ . Le théorème précédent affirme alors que :  $v_n - u_n < 0$  à partir d'un certain rang — contradiction. ■

### 3.3 EXTRACTION DE SUITES

**Définition (Suite extraite)** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite. On appelle *suite extraite de*  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  toute suite de la forme  $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  où  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  est une fonction strictement croissante.

🦋 **Explication** 🦋

- La fonction  $\varphi$  n'est jamais qu'une suite strictement croissante d'entiers naturels utilisés comme de nouveaux indices. Par exemple, si :  $\varphi = (2, 4, 5, 8, 24, 59, \dots)$ , la suite  $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  est la suite  $(u_2, u_4, u_5, u_8, u_{24}, u_{59}, \dots)$ .
- La suite extraite  $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  n'est jamais que la COMPOSÉE  $u \circ \varphi$ . En particulier, si on en extrait une nouvelle suite à partir d'une fonction  $\psi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  strictement croissante, le résultat est :  $u \circ \varphi \circ \psi = (u_{\varphi \circ \psi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  **ET NON PAS** :  $u \circ \psi \circ \varphi = (u_{\psi \circ \varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ .

**Exemple**

- Les suites  $(\sqrt{2^n + 4n})_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont deux suites extraites de la suite de terme général  $\sqrt{n}$ , associées respectivement aux fonctions  $n \mapsto 2^n + 4n$  et  $n \mapsto n^2$  strictement croissantes de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{N}$ .
- Les suites constantes égales à 1 et  $-1$  respectivement sont deux suites extraites de la suite de terme général  $(-1)^n$ .

✘ **ATTENTION !** ✘ Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , le terme qui vient après  $u_{2k}$  dans la suite  $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  est :  $u_{2(k+1)} = u_{2k+2}$  **ET NON PAS**  $u_{2k+1}$ . De même, le terme qui vient après  $u_{2k+1}$  dans la suite  $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  est :  $u_{2(k+1)+1} = u_{2k+3}$  **ET NON PAS**  $u_{2k+2}$ .

**Théorème** Soit  $\varphi$  une fonction strictement croissante de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{N}$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $\varphi(n) \geq n$ .

**Démonstration Initialisation** : Comme  $\varphi(0) \in \mathbb{N}$  :  $\varphi(0) \geq 0$ .

**Hérédité** : Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On suppose que :  $\varphi(n) \geq n$ . Alors par stricte croissance de  $\varphi$  :  $\varphi(n+1) > \varphi(n) \geq n$ . Or  $\varphi(n+1)$  est un ENTIER, donc :  $\varphi(n+1) \geq n+1$ . ■

**Théorème (Limites de suites extraites)** Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite et  $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ .

(i) Si :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ , alors :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{\varphi(n)} = \ell$  pour toute fonction  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  strictement croissante.

(ii) Si :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n+1} = \ell$ , alors :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ .

### Démonstration



(i) Sous l'hypothèse que :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ , soit  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  strictement croissante. Nous voulons montrer que :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{\varphi(n)} = \ell$ . Soit  $\mathcal{V}$  un voisinage de  $\ell$ . À partir d'un certain rang  $N$  :  $u_n \in \mathcal{V}$ . Or pour tout  $n \geq N$ , par croissance de  $\varphi$  et d'après le lemme :  $\varphi(n) \geq \varphi(N) \geq N$ , donc enfin :  $u_{\varphi(n)} \in \mathcal{V}$ .

(ii) Sous l'hypothèse que :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n+1} = \ell$ , montrons que :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ . Soit  $\mathcal{V}$  un voisinage de  $\ell$ . Alors :  $u_{2n} \in \mathcal{V}$  à partir d'un certain rang  $N$  et :  $u_{2n+1} \in \mathcal{V}$  à partir d'un certain rang  $N'$ . Posons :  $n_0 = \max\{2N, 2N' + 1\}$  et donnons-nous  $n \geq n_0$  quelconque.

— Si  $n$  est pair :  $n = 2p$  avec  $p \in \mathbb{N}$ , alors :  $2p = n \geq n_0 \geq 2N$  donc :  $p \geq N$ , donc :  $u_n = u_{2p} \in \mathcal{V}$ .

— Si  $n$  est impair :  $n = 2p + 1$  avec  $p \in \mathbb{N}$ , alors :  $2p + 1 = n \geq n_0 \geq 2N' + 1$  donc :  $p \geq N'$ , donc :  $u_n = u_{2p+1} \in \mathcal{V}$ .

Dans les deux cas :  $u_n \in \mathcal{V}$ . ■

 **En pratique**  Ce théorème est souvent utilisé pour montrer qu'une suite N'A PAS DE LIMITE. Il suffit pour cela d'en exhiber deux suites extraites n'ayant pas la même limite.

**Exemple** La suite de terme général  $(-1)^n$  n'a pas de limite car :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^{2n} = 1$  alors que :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^{2n+1} = -1$ .

**Exemple** Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose :  $u_n = \frac{n}{9} - \left\lfloor \frac{\sqrt{n}}{3} \right\rfloor^2$ . La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  n'a pas de limite car :  $u_{9n^2} = 0 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$   
alors que :  $u_{(3n+1)^2} = \frac{(3n+1)^2}{9} - \left\lfloor \frac{3n+1}{3} \right\rfloor^2 = \left( n^2 + \frac{6n+1}{9} \right) - n^2 = \frac{6n+1}{9} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ .

## 4 THÉORÈMES D'EXISTENCE DE LIMITE

L'existence d'une limite n'est jamais acquise. Dans les paragraphes qui précèdent, l'existence de certaines limites a été établie — somme, produit, suites extraites, etc. On omet généralement de voir ces résultats comme des théorèmes d'EXISTENCE pour les voir seulement, en pratique, comme des théorèmes de CALCUL, de manipulation des limites. Les théorèmes qui suivent, au contraire, gagnent à être conçus comme de vrais théorèmes d'existence. Ce qu'ils nous fournissent de façon essentielle, ce n'est pas tant la VALEUR d'une limite que son EXISTENCE.

## 4.1 THÉORÈMES D'ENCADREMENT/MINORATION/MAJORATION

**Théorème** Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(m_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$  trois suites réelles et  $\ell \in \mathbb{R}$ .

(i) **Théorème d'encadrement :**

Si :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} m_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} M_n = \ell$  et si :  $m_n \leq u_n \leq M_n$  à partir d'un certain rang,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  EXISTE et vaut  $\ell$ .

(ii) **Théorème de minoration :**

Si :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} m_n = +\infty$  et si :  $u_n \geq m_n$  à partir d'un certain rang,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  EXISTE et vaut  $+\infty$ .

(iii) **Théorème de majoration :**

Si :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} M_n = -\infty$  et si :  $u_n \leq M_n$  à partir d'un certain rang,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  EXISTE et vaut  $-\infty$ .

### Démonstration

(i) Soit  $\varepsilon > 0$ . Par hypothèse :  $m_n \leq u_n \leq M_n$  à partir d'un certain rang  $N$ ,  $m_n > \ell - \varepsilon$  à partir d'un certain rang  $N'$  et :  $M_n < \ell + \varepsilon$  à partir d'un certain rang  $N''$ . Alors pour tout  $n \geq \max\{N, N', N''\}$  :  $\ell - \varepsilon < m_n \leq u_n \leq M_n < \ell + \varepsilon$ , donc :  $|u_n - \ell| < \varepsilon$ .

(ii) Soit  $A > 0$ . Par hypothèse :  $u_n \geq m_n$  à partir d'un certain rang  $N$  et :  $m_n > A$  à partir d'un certain rang  $N'$ . Alors pour tout  $n \geq \max\{N, N'\}$  :  $u_n \geq m_n > A$ , donc :  $u_n > A$ . ■

✗ **ATTENTION !** ✗ Ne prenez pas le théorème d'encadrement pour un simple passage à la limite dans des inégalités larges. Quand on passe à la limite dans une inégalité, on sait déjà que son membre de gauche et son membre de droite ont une limite. Dans le théorème d'encadrement au contraire, seules les limites  $\lim_{n \rightarrow +\infty} m_n$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} M_n$  sont réputées exister au départ et l'existence de  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  en découle.

**Exemple**  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n! = +\infty$  par minoration, car pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $n! \geq n$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$ .

Le théorème d'encadrement est souvent utilisé sous la forme suivante :

**Théorème (Produit d'une suite bornée par une suite de limite nulle)** Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites. Si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée et si :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_n = 0$ , alors :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_n u_n = 0$ .

**Démonstration** Par hypothèse, il existe  $K \geq 0$  tel que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $|u_n| \leq K$ . Multiplions par  $\varepsilon_n$  :  $0 \leq |\varepsilon_n u_n| \leq K|\varepsilon_n|$ . Aussitôt :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} |\varepsilon_n u_n| = 0$  par encadrement, donc :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_n u_n = 0$ . ■

**Exemple**  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$  car la suite  $(\sin n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée et :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ .

**Théorème (Limite d'une suite géométrique)** Pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

	$x > 1$	$x = 1$	$ x  < 1$	$x \leq -1$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} x^n$	$+\infty$	1	0	Pas de limite

### Démonstration

- **Cas où  $x > 1$  :**  $x^n = (1+(x-1))^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (x-1)^k = 1+n(x-1) + \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} (x-1)^k \geq n(x-1)$  pour tout  $n \geq 2$ . Or :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n(x-1) = +\infty$  car :  $x > 1$ , donc :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$  par minoration.
- **Cas où  $|x| < 1$  :**  $\frac{1}{|x|} > 1$ , donc :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{|x|}\right)^n = +\infty$  d'après le cas précédent, puis :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} |x^n| = 0$  par passage à l'inverse, et enfin :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x^n = 0$ .

- **Cas où  $x = -1$**  : Le cas de la suite  $\left((-1)^n\right)_{n \in \mathbb{N}}$  a déjà été traité dans le paragraphe sur les suites extraites.
- **Cas où  $x < -1$**  :  $x^2 > 1$ , donc :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x^{2n} = +\infty$  d'après le premier cas, puis :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x^{2n+1} = -\infty$ . Les suites extraites  $\left(x^{2n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $\left(x^{2n+1}\right)_{n \in \mathbb{N}}$  n'ayant pas même limite,  $\left(x^n\right)_{n \in \mathbb{N}}$  n'a pas de limite. ■

**Exemple** Pour tout  $x \in ]-1, 1[$  :  $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ .

**Démonstration** Par hypothèse sur  $x$  :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x^n = 0$ , donc :  $\sum_{k=0}^n x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1-x}$ .

**Exemple** Pour tout  $x \in ]-1, 1[$  :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x^{2^n} = 0$ .

On remarquera bien que la suite  $\left(x^{2^n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$  n'est PAS géométrique,  $x^{2^n}$  et  $\left(x^2\right)^n = x^{2n}$  n'ont rien de commun.

**Démonstration** Tout simplement,  $\left(x^{2^n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite extraite de  $\left(x^n\right)_{n \in \mathbb{N}}$  — qui converge vers 0.

**Exemple** Soient  $\left(u_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite strictement positive et  $\eta \in ]0, 1[$ . On suppose que :  $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \eta$  à partir d'un certain rang  $N$ . Alors :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ .

**Démonstration** Pour tout  $n \geq N$  :  $u_{n+1} \leq \eta u_n$ , donc :  $\frac{u_{n+1}}{\eta^{n+1}} \leq \frac{u_n}{\eta^n}$ , donc la suite  $\left(\frac{u_n}{\eta^n}\right)_{n \geq N}$  est décroissante, et donc bornée car positive. Or :  $\eta \in ]0, 1[$ , donc :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \eta^n = 0$ . Par produit d'une suite bornée et d'une suite convergente de limite nulle :  $u_n = \frac{u_n}{\eta^n} \times \eta^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .

**Théorème (Comparaison exponentielles/factorielle)** Pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$ .

**Démonstration** Si :  $x \neq 0$ , posons :  $u_n = \frac{|x|^n}{n!} > 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , de sorte que :  $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{|x|}{n+1}$ . L'égalité :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0$  montre que :  $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1}{2}$  à partir d'un certain rang. Ainsi, d'après l'exemple précédent :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ . ■

## 4.2 THÉORÈME DE LA LIMITE MONOTONE

Le théorème de la limite monotone est LE théorème d'EXISTENCE par excellence.

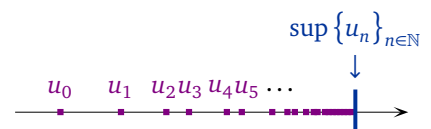
**Théorème (Théorème de la limite monotone)** Soit  $\left(u_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle.

Si  $\left(u_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$  est monotone, alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  EXISTE.

Plus précisément, si  $\left(u_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante majorée, alors  $\left(u_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$  converge, et si  $\left(u_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante NON majorée :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ . On dispose bien sûr d'un résultat analogue sur les suites décroissantes.

🦋 **Explication** 🦋 En fait, si  $\left(u_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \sup \{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$

avec une borne supérieure DANS  $\overline{\mathbb{R}}$  — éventuellement  $+\infty$ . Si de plus  $\left(u_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$  est majorée, on voit sur la figure ci-contre que les  $u_n$  viennent s'écraser contre leur « sup » fini.



**Démonstration** Nous traiterons seulement le cas d'une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  croissante.

- Supposons  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  majorée. L'ensemble  $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  est alors une partie non vide majorée de  $\mathbb{R}$ , donc possède une borne supérieure  $\ell$  DANS  $\mathbb{R}$  d'après la propriété de la borne supérieure.  
 Montrons que :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ . Soit  $\varepsilon > 0$ . Par définition de  $\ell$ ,  $\ell - \varepsilon$  ne majore pas  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  donc :  $u_N > \ell - \varepsilon$  pour un certain  $N \in \mathbb{N}$ . Du coup, pour tout  $n \geq N$  :  $u_n \geq u_N > \ell - \varepsilon$  car  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante, mais donc aussi :  $\ell - \varepsilon < u_n \leq \ell < \ell + \varepsilon$ , ou encore :  $|u_n - \ell| < \varepsilon$ .
- Supposons  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  NON majorée. Soit  $A > 0$ . Comme  $A$  ne majore pas  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  :  $u_N > A$  pour un certain  $N \in \mathbb{N}$ , donc pour tout  $n \geq N$ ,  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  étant croissante :  $u_n \geq u_N > A$ , donc :  $u_n > A$ . Comme voulu :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ . ■

✘ ATTENTION ! ✘

Une suite croissante majorée par  $M$  converge...  
 MAIS PAS FORCÉMENT VERS  $M$ , qui n'est qu'UN majorant parmi d'autres !

**Exemple** Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose :  $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{\lfloor 2^k \sqrt{2} \rfloor}{3^k}$ . La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente.

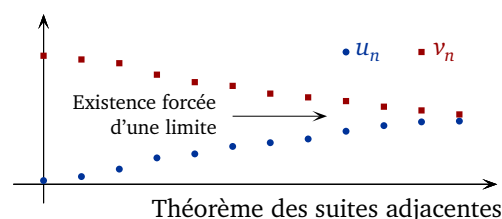
**Démonstration** Il nous suffit, d'après le théorème de la limite monotone, de montrer que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante et majorée. Or  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante car pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $u_{n+1} - u_n = \frac{\lfloor 2^{n+1} \sqrt{2} \rfloor}{3^{n+1}} \geq 0$ , et majorée car pour

$$\text{tout } n \in \mathbb{N} : u_n \leq \sum_{k=0}^n \frac{2^k \sqrt{2}}{3^k} = \sqrt{2} \sum_{k=0}^n \left(\frac{2}{3}\right)^k = \sqrt{2} \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{2}{3}} \leq \frac{\sqrt{2}}{1 - \frac{2}{3}} = 3\sqrt{2}.$$

### 4.3 THÉORÈME DES SUITES ADJACENTES

**Définition (Suites adjacentes)** Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites réelles. On dit que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont *adjacentes* si l'une de ces suites est croissante, l'autre décroissante et :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0$ .

✂ **Explication** ✂ Deux suites adjacentes sont deux suites qui viennent à la rencontre l'une de l'autre, l'une en croissant, l'autre en décroissant, et qui finissent par s'écraser l'une contre l'autre. « Il faut bien qu'elles s'écrasent QUELQUE PART ! » nous dit le théorème des suites adjacentes — théorème d'EXISTENCE.



**Théorème (Théorème des suites adjacentes)** Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites réelles. Si elles sont adjacentes, alors  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont toutes deux convergentes de même limite  $\ell$ .

Précisément, si c'est  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  qui est croissante et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  qui est décroissante, alors pour tous  $m, n \in \mathbb{N}$  :  $u_m \leq \ell \leq v_n$ .

**Démonstration** Supposons  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  croissante et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  décroissante.

- Montrons d'abord que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $u_n \leq v_n$  en supposant par l'absurde que pour un certain  $N \in \mathbb{N}$  :  $u_N > v_N$ , i.e. :  $u_N - v_N > 0$ . Pour tout  $n \geq N$ , sachant que par croissance :  $u_N \leq u_n$ , et par décroissance :  $v_n \leq v_N$ , alors :  $u_n - v_n \geq u_N - v_N$ . Faisons finalement tendre  $n$  vers  $+\infty$  :  $0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) \geq u_N - v_N > 0$ . Conclusion :  $0 \geq u_N - v_N > 0$ . Contradiction !
- Montrons ensuite que pour tous  $m, n \in \mathbb{N}$  :  $u_m \leq v_n$ . Soient  $m, n \in \mathbb{N}$ . Si  $m \leq n$  :  $u_m \leq u_n \leq v_n$  par croissance de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et d'après le premier point, et si  $m > n$  :  $u_m \leq v_m \leq v_n$  par décroissance de  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et d'après le premier point. Dans les deux cas :  $u_m \leq v_n$ .

- La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante et majorée (par  $v_0$ ), donc convergente de limite un certain réel  $\ell_u$  en vertu du théorème de la limite monotone. De même, la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante et minorée (par  $u_0$ ), donc convergente de limite un certain réel  $\ell_v$ . L'égalité :  $\ell_u = \ell_v$  découle de ce que :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0$ .
- Pour tous  $m, n \in \mathbb{N}$ , l'inégalité :  $u_m \leq \ell_u = \ell_v \leq v_n$  exprime simplement le fait que la suite croissante  $(u_m)_{m \in \mathbb{N}}$  est majorée par sa limite et la suite décroissante  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  minorée par la sienne. ■

**Exemple** Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose :  $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$ . La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente. On peut montrer que :  $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = e$ .

**Démonstration** Posons :  $v_n = u_n + \frac{1}{n \cdot n!}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et montrons que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  sont adjacentes. En particulier,  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  sera alors convergente d'après le théorème des suites adjacentes.

— Tout d'abord :  $v_n - u_n = \frac{1}{n \cdot n!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .

— Ensuite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est croissante car pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :  $u_{n+1} - u_n = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = \frac{1}{(n+1)!} \geq 0$ .

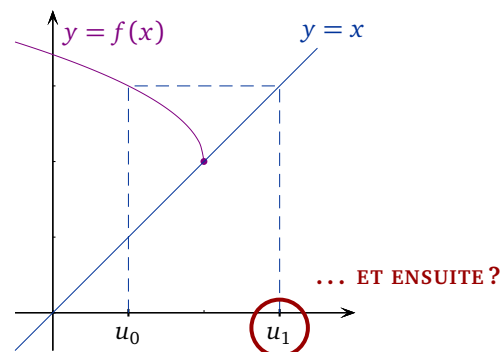
— Enfin  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est décroissante car pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= (u_{n+1} - u_n) + \frac{1}{(n+1) \cdot (n+1)!} - \frac{1}{n \cdot n!} = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1) \cdot (n+1)!} - \frac{1}{n \cdot n!} \\ &= \frac{1}{n(n+1) \cdot (n+1)!} (n(n+1) + n - (n+1)^2) = \frac{-1}{n(n+1) \cdot (n+1)!} \leq 0. \end{aligned}$$

## 5 SUITES RÉCURRENTES DÉFINIES PAR UNE RELATION « $u_{n+1} = f(u_n)$ »

Les exercices qu'on vous a proposés jusqu'ici ont pu vous donner l'impression que pour définir une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par récurrence, il suffit de se donner une fonction  $f$  quelconque et un  $u_0$  dans le domaine de définition de  $f$ , et de décrire simplement que «  $u_{n+1} = f(u_n)$  ». Quelle illusion !

Notons par exemple  $f$  la fonction  $x \mapsto 2 + \sqrt{2-x}$  définie sur  $]-\infty, 2]$  et posons :  $u_0 = 1$ . Comme :  $f(u_0) = f(1) = 3$ , on peut poser :  $u_1 = 3$ . Mais ensuite  $f(3)$  ? Aucun sens ! Quelle valeur pour  $u_2$  ? La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  n'est ici pas définie. Mais comment différencier alors les exemples qui marchent de ceux qui ne marchent pas ?



**Définition (Partie stable par une fonction)** Soient  $E$  un ensemble,  $f : E \rightarrow E$  une fonction et  $D$  une partie de  $E$ . On dit que  $D$  est *stable par  $f$*  si :  $f(D) \subset D$ , i.e. si pour tout  $x \in D$  :  $f(x) \in D$ .

### Exemple

- L'intervalle  $\mathbb{R}_+^*$  est stable par la fonction inverse  $x \mapsto \frac{1}{x}$  car pour tout  $x > 0$  :  $\frac{1}{x} > 0$ .
- L'intervalle  $[0, 1]$  est stable par la fonction  $x \mapsto \sqrt{1-x}$  car pour tout  $x \in [0, 1]$  :  $0 \leq \sqrt{1-x} \leq 1$ .

**Théorème (Existence de suites récurrentes définies par une relation «  $u_{n+1} = f(u_n)$  »)** Soient  $D$  une partie de  $\mathbb{R}$  et  $f : D \rightarrow D$  une fonction — ainsi  $D$  est stable par  $f$ .

- Pour tout  $\delta \in D$ , il existe une et une seule suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  pour laquelle :  $u_0 = \delta$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $u_{n+1} = f(u_n)$ .
- Cette suite, par ailleurs, est à valeurs dans  $D$ .

📖 **Explication** 📖 Idée toute simple ! Pour définir  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , on a besoin de composer et re-composer  $f$  par elle-même autant de fois qu'on veut et c'est précisément ce que la stabilité de  $D$  par  $f$  garantit :  $u_n = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{n \text{ fois}}(u_0)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**En pratique** Le fait que la suite du théorème soit à valeurs dans  $D$  est très pratique pour montrer qu'une suite est minorée/majorée/bornée. Par exemple, si l'intervalle  $[1, 3]$  est stable par une fonction  $f$ , la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :  $u_0 = 2 \in [1, 3]$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $u_{n+1} = f(u_n)$  est à valeurs dans  $[1, 3]$ , donc bornée entre 1 et 3.

**Exemple** Il existe une et une seule suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :  $u_0 = 2$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $u_{n+1} = \ln(1 + \sqrt{u_n})$ .

**Démonstration** D'une part :  $2 \in \mathbb{R}_+$ , d'autre part l'intervalle  $\mathbb{R}_+$  est stable par la fonction  $x \mapsto \ln(1 + \sqrt{x})$  car pour tout  $x \in \mathbb{R}_+$  :  $1 + \sqrt{x} \geq 1$  donc :  $\ln(1 + \sqrt{x}) \in \mathbb{R}_+$ .

On s'intéresse à présent à la convergence des suites récurrentes définies par une relation «  $u_{n+1} = f(u_n)$  », et pour cela, on commence par deux exemples simples.

**Exemple** La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :  $u_0 = 0$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $u_{n+1} = u_n + e^{u_n}$  diverge vers  $+\infty$ .

**Démonstration** Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $u_{n+1} - u_n = e^{u_n} \geq 0$ , donc  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante, donc possède une limite  $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  d'après le théorème de la limite monotone. Par l'absurde, faisons l'hypothèse que :  $\ell \in \mathbb{R}$ . Or :  $\lim_{x \rightarrow \ell} e^x = e^\ell$ , donc :  $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + e^{u_n}) = \ell + e^\ell$ , donc :  $e^\ell = 0$  — contradiction ! Il en découle que  $\ell$  n'est pas un réel, donc :  $\ell = +\infty$ .

**Exemple** La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :  $u_0 = 1$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + u_n^2}$  converge vers 0.

**Démonstration** L'intervalle  $\mathbb{R}_+^*$  est stable par la fonction  $x \mapsto \frac{x}{1 + x^2}$  et :  $u_0 = 1 \in \mathbb{R}_+^*$ , donc :  $u_n > 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Du coup :  $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n}{1 + u_n^2} - u_n = -\frac{u_n^3}{1 + u_n^2} \leq 0$ . Décroissante et positive,  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  se trouve donc converger d'après le théorème de la limite monotone, disons vers  $\ell$ .

Aussitôt :  $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{1 + u_n^2} = \frac{\ell}{1 + \ell^2}$ , donc :  $\ell - \frac{\ell}{1 + \ell^2} = \frac{\ell^3}{1 + \ell^2} = 0$ . Enfin :  $\ell = 0$ .

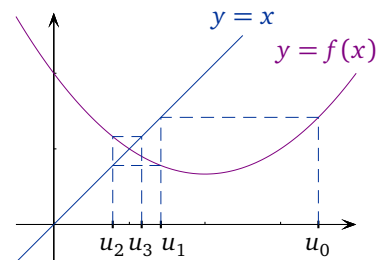
En vue d'exemples plus sophistiqués, on démontre à présent deux petits théorèmes bien pratiques sur les suites définies par récurrence «  $u_{n+1} = f(u_n)$  », l'un sur la monotonie d'une telle suite, l'autre sur la valeur de sa limite éventuelle.

**Théorème (Monotonie d'une suite récurrente définie par une relation «  $u_{n+1} = f(u_n)$  »)** Soient  $D$  une partie de  $\mathbb{R}$ ,  $u_0 \in D$  et  $f : D \rightarrow D$  une fonction — ainsi  $D$  est stable par  $f$ . On note  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie pour tout  $n \in \mathbb{N}$  par :  $u_{n+1} = f(u_n)$ .

- (i) Si :  $f(x) \geq x$  pour tout  $x \in D$ , alors  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante, et si :  $f(x) \leq x$  pour tout  $x \in D$ , alors  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante. Le signe de la fonction  $x \mapsto f(x) - x$  nous renseigne donc sur la monotonie de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .
- (ii) Si  $f$  est croissante,  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est monotone. Son sens de variation dépend de la position de  $u_0$  par rapport à  $u_1$ .
- (iii) Si  $f$  est décroissante,  $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  sont monotones de sens contraires. Leurs sens de variation dépendent de la position de  $u_0$  et  $u_2$ .

**ATTENTION !**

- Les assertions (i), (ii) et (iii) ne peuvent être utilisées que sur un domaine  $D$  STABLE PAR  $f$ . Sur la figure ci-contre,  $f$  est croissante sur  $[2, +\infty[$  et :  $u_0 \in [2, +\infty[$ , mais  $[2, +\infty[$  n'est PAS stable par  $f$ . On voit dans cet exemple  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  quitter le domaine  $[2, +\infty[$ . La croissance de  $f$  sur  $[2, +\infty[$  n'a ainsi aucun impact sur  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dès lors que ses termes vivent leur vie ailleurs.
- Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f(u_{2n})$  vaut  $u_{2n+1}$  et non pas  $u_{2n+2}$ . Par contre :  $u_{2n+2} = f \circ f(u_{2n})$ , donc LA SUITE  $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  EST RÉCURRENTE ASSOCIÉE À LA FONCTION  $f \circ f$ . Même chose pour  $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ .



**Démonstration**

- (i) Si :  $f(x) \geq x$  pour tout  $x \in D$ , alors :  $u_{n+1} = f(u_n) \geq u_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , donc  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante.
- (ii) Supposons  $f$  croissante et montrons que, si :  $u_0 \leq u_1$ , alors  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante — on montrerait de même que si  $u_1 \leq u_0$ , alors  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante. **Initialisation** :  $u_0 \leq u_1$  par hypothèse. **Hérédité** : Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Si :  $u_n \leq u_{n+1}$ , alors par croissance de  $f$  :  $u_{n+1} = f(u_n) \leq f(u_{n+1}) = u_{n+2}$ .



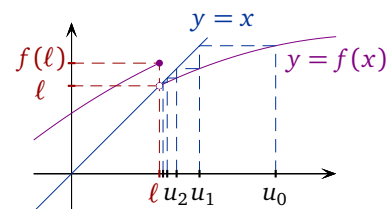
- (iii) Supposons  $f$  décroissante avec :  $u_0 \leq u_2$ . Alors  $f \circ f$  est croissante et :  $u_{2n+2} = f \circ f(u_{2n})$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , donc  $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante d'après (i). Il en découle que  $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante car pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , par décroissance de  $f$  :  $u_{2n+1} = f(u_{2n}) \geq f(u_{2n+2}) = u_{2n+3}$ . ■

**Théorème (Limite d'une suite récurrente convergente définie par une relation «  $u_{n+1} = f(u_n)$  »)** Soient  $D$  une partie de  $\mathbb{R}$ ,  $u_0 \in D$  et  $f : D \rightarrow D$  une fonction — ainsi  $D$  est stable par  $f$ . On note  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie pour tout  $n \in \mathbb{N}$  par :  $u_{n+1} = f(u_n)$ .

Si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  CONVERGE vers  $l \in D$  et si  $f$  est CONTINUE en  $l$ , alors  $l$  est un point fixe de  $f$ , i.e. :  $f(l) = l$ .

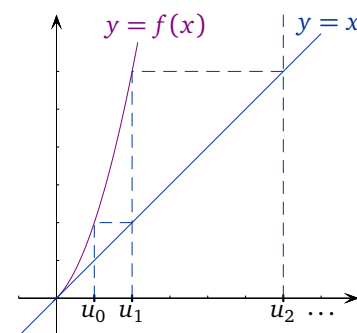
✗ **ATTENTION !** ✗ L'hypothèse de continuité n'est vraiment pas là pour décorer. Sur la figure ci-contre :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$  mais :  $f(l) \neq l$ .

**Démonstration** Comme  $f$  est continue en  $l$  :  $\lim_{x \rightarrow l} f(x) = f(l)$ . Composons avec la limite  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$  :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(l)$ . Or :  $u_{n+1} = f(u_n)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  avec :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = l$ , donc en effet :  $f(l) = l$ . ■



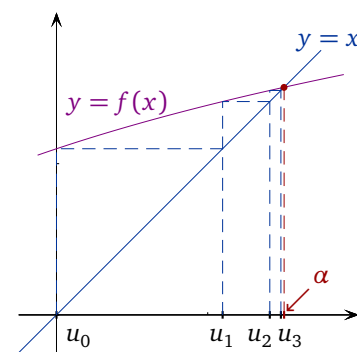
**Exemple** On note  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par :  $u_0 = 1$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $u_{n+1} = u_n^2 + u_n$  et  $f$  la fonction  $x \mapsto x^2 + x$ .

- Comme  $[1, +\infty[$  est stable par  $f$  et :  $u_0 \in [1, +\infty[$ , la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bien définie et minorée par 1.
- Comme :  $f(x) \geq x$  pour tout  $x \in [1, +\infty[$ ,  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante donc possède une limite  $l$  d'après le théorème de la limite monotone.
- Supposons par l'absurde que :  $l \in \mathbb{R}$ . Alors :  $f(l) = l$  puisque  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ , i.e. :  $l^2 + l = l$ , i.e. :  $l = 0$ . Or  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante et :  $u_0 = 1$ , donc :  $l \geq 1$  — contradiction !
- Conclusion :  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  croît vers  $+\infty$ .



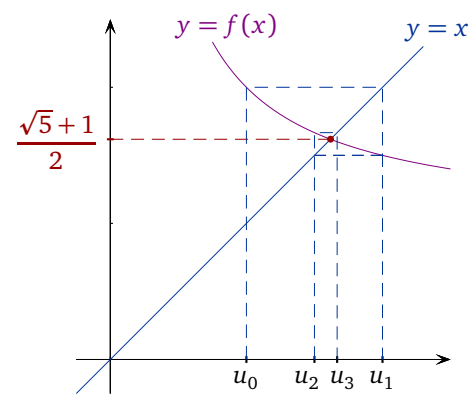
**Exemple** On note  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par :  $u_0 = 0$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $u_{n+1} = \ln(u_n + 3)$  et  $f$  la fonction  $x \mapsto \ln(x + 3)$  sur  $] -3, +\infty[$ .

- La fonction  $x \mapsto f(x) - x$  est à la fois continue et strictement décroissante sur  $\mathbb{R}_+$  avec :  $g(0) = \ln 3$  et :  $\lim_{+\infty} g = -\infty$ , donc d'après le TVI strictement monotone,  $g$  s'annule une et une seule fois sur  $\mathbb{R}_+$ , disons en  $\alpha$  — l'unique point fixe de  $f$  sur  $\mathbb{R}_+$ .
- Montrons que l'intervalle  $[0, \alpha]$  est stable par  $f$ . Pour tout  $x \in [0, \alpha]$ , la croissance de  $f$  montre que :  $0 \leq \ln 3 = f(0) \leq f(x) \leq f(\alpha) = \alpha$ , donc que :  $f(x) \in [0, \alpha]$ .
- À présent, comme  $[0, \alpha]$  est stable par  $f$  et comme :  $u_0 = 0 \in [0, \alpha]$ , la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bien définie et à valeurs dans  $[0, \alpha]$ . Or  $g$  est positive ou nulle sur  $[0, \alpha]$ , donc pour tout  $x \in [0, \alpha]$  :  $f(x) \geq x$ , donc pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $u_{n+1} = f(u_n) \geq u_n$ . Conclusion :  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante. Majorée par  $\alpha$ , elle est finalement convergente d'après le théorème de la limite monotone, et comme  $f$  est continue sur  $[0, \alpha]$ , sa limite est un point fixe de  $f$  — forcément  $\alpha$ . Conclusion :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha$ .



**Exemple** On note  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par :  $u_0 = 1$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n}$  et  $f$  la fonction  $x \mapsto 1 + \frac{1}{x}$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

- L'intervalle  $[1, 2]$  est clairement stable par  $f$  et :  $u_0 \in [1, 2]$ , donc la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bien définie et à valeurs dans  $[1, 2]$  — donc bornée.
- Or  $f$  est décroissante comme somme sur  $\mathbb{R}_+^*$  et :  $u_2 = \frac{3}{2} \geq u_0$ , donc  $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante et  $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  décroissante. Bornées, ces deux suites sont alors convergentes, disons de limites respectives  $l$  et  $l'$ .





- À présent,  $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  étant récurrentes associées à la fonction continue  $f \circ f$ ,  $\ell$  et  $\ell'$  sont points fixes de  $f \circ f$ . Or pour tout  $x \in [1, 2]$  :  $f \circ f(x) = x \iff 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = x \iff x^2 - x - 1 = 0 \stackrel{x \in [1, 2]}{\iff} x = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$ ,  
donc :  $\ell = \ell' = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$ . Comme :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n+1} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$ ,  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge enfin vers  $\frac{\sqrt{5} + 1}{2}$ .

## 6 BORNES SUPÉRIEURES/INFÉRIEURES, DENSITÉ ET LIMITES

🐇 **Explication** 🐇 Dans ce paragraphe, « caractérisation séquentielle » veut dire « caractérisation en termes de suites ».

**Théorème (Caractérisation séquentielle de la borne supérieure/inférieure)** Soient  $A$  une partie non vide de  $\mathbb{R}$  et  $M \in \mathbb{R}$ .

- (i)  $M = \sup A$  si et seulement si  $M$  majore  $A$  et est la limite d'une suite d'éléments de  $A$ .
- (ii)  $A$  n'est pas majorée si et seulement s'il existe une suite d'éléments de  $A$  de limite  $+\infty$ .

On dispose bien sûr de résultats analogues pour les bornes inférieures et les parties non minorées.

### Démonstration

- (i) Supposons d'abord que  $A$  admet  $M$  pour borne supérieure. Dans ce cas, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , comme  $M - \frac{1}{n}$  ne majore pas  $A$ ,  $A$  contient au moins un élément  $a_n$  supérieur ou égal à  $M - \frac{1}{n}$ . Comme par ailleurs la suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est majorée par  $M$  :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = M$  par encadrement.

Réciproquement, faisons l'hypothèse que  $M$  majore  $A$  et est la limite d'une suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $A$ . Soit  $M'$  un majorant de  $A$ . Alors :  $a_n \leq M'$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , donc :  $M \leq M'$  par passage à la limite, ce qui montre bien que  $M$  est le plus petit majorant de  $A$ , i.e. que :  $M = \sup A$ .

- (ii) Supposons d'abord  $A$  non majorée. Dans ce cas, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , comme  $n$  ne majore pas  $A$ ,  $A$  contient au moins un élément  $a_n$  supérieur ou égal à  $n$ , donc :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$  par minoration.

La réciproque est tout à fait évidente. ■

**Exemple** On note  $A$  l'ensemble  $\left\{ \frac{q}{2^p + q} \right\}_{p, q \in \mathbb{N}^*}$ . Alors :  $\inf A = 0$  et  $\sup A = 1$ .

**Démonstration** Pour tous  $p, q \in \mathbb{N}^*$  :  $0 \leq \frac{q}{2^p + q} \leq 1$ , donc  $A$  est minoré par 0 et majoré par 1. Ensuite :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n + 1} = 0$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{2 + n} = 1$  avec :  $\frac{1}{2^n + 1} \in A$  et  $\frac{n}{2 + n} \in A$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**Théorème (Caractérisation séquentielle de la densité)** Soit  $A$  une partie de  $\mathbb{R}$ . Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i)  $A$  est dense dans  $\mathbb{R}$ .
- (ii) Tout réel est la limite d'une suite d'éléments de  $A$ .

### Démonstration

- (i)  $\implies$  (ii) Supposons  $A$  dense dans  $\mathbb{R}$ . Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Nous voulons montrer que  $x$  est la limite d'une suite d'éléments de  $A$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , l'intervalle ouvert non vide  $\left] x, x + \frac{1}{n} \right[$  contient un élément  $a_n$  de  $A$  par hypothèse. Dans ces conditions :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = x$  par encadrement.

- (ii)  $\implies$  (i) Faisons l'hypothèse que tout réel est la limite d'une suite d'éléments de  $A$ . Soient  $x, y \in \mathbb{R}$  tels que :  $x < y$ . Nous voulons montrer que l'intervalle ouvert non vide  $]x, y[$  contient un élément de  $A$ , or son centre  $\frac{x+y}{2}$  est la limite d'une suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $A$ . À partir d'un certain rang, du coup :
- $$\left| a_n - \frac{x+y}{2} \right| < \frac{y-x}{2}, \quad \text{donc : } x < a_n < y \quad \text{comme voulu.} \quad \blacksquare$$

**Définition (Nombre décimal)** On appelle *décimal* tout rationnel de la forme  $\frac{p}{10^n}$  avec  $p \in \mathbb{Z}$  et  $n \in \mathbb{N}$ .

🦋 **Explication** 🦋 On peut aussi dire qu'un décimal est un réel dont le développement décimal est fini, i.e. un réel qui, en base 10, n'a qu'un nombre fini de chiffres après la virgule.

**Théorème (Densité des décimaux dans  $\mathbb{R}$ )**

- L'ensemble des décimaux est dense dans  $\mathbb{R}$ .
- Précisément, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , si on note  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  les suites définies pour tout  $n \in \mathbb{N}$  par :  $a_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$  et  $b_n = a_n + \frac{1}{10^n}$ , alors  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont adjacentes, à valeurs décimales et de limite commune  $x$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_n$  est appelé la *valeur décimale approchée de  $x$  par défaut* à  $10^{-n}$  près et  $b_n$  sa *valeur décimale approchée par excès* à  $10^{-n}$  près.

🦋 **Explication** 🦋

- Tout décimal est rationnel mais la réciproque est fautive, par exemple  $\frac{1}{3}$  est rationnel mais non décimal. En montrant que tout réel est la limite d'une suite de décimaux, on montre donc en particulier que tout réel est la limite d'une suite de rationnels — on redémontre donc la densité de  $\mathbb{Q}$  dans  $\mathbb{R}$ .
- Sur l'exemple de  $x = \pi = 3, 141592653589793 \dots$ , calculons les premiers termes des suites  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  :

$$a_0 = 3, \quad a_1 = \frac{31}{10} = 3,1, \quad a_2 = \frac{314}{100} = 3,14, \quad a_3 = \frac{3141}{1000} = 3,141, \quad a_4 = \frac{31415}{10000} = 3,1415 \dots$$

et

$$b_0 = 4, \quad b_1 = \frac{32}{10} = 3,2, \quad b_2 = \frac{315}{100} = 3,15, \quad b_3 = \frac{3142}{1000} = 3,142, \quad b_4 = \frac{31416}{10000} = 3,1416 \dots$$

**Démonstration** Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $10^n x - 1 < \lfloor 10^n x \rfloor \leq 10^n x$  donc :  $x - \frac{1}{10^n} < a_n \leq x$ , donc :

$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = x$  par encadrement, et du coup bien sûr :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = x$ . La densité de l'ensemble des décimaux dans  $\mathbb{R}$  est ainsi établie. Il nous reste à montrer l'adjacence des suites  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

- Tout d'abord :  $b_n - a_n = \frac{1}{10^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .
- Pour la croissance de  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et la décroissance de  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , partons de l'inégalité, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$10^n a_n = \lfloor 10^n x \rfloor \leq 10^n x < \lfloor 10^n x \rfloor + 1 = 10^n b_n,$$

puis multiplions-la par 10 :  $10^{n+1} a_n \leq 10^{n+1} x < 10^{n+1} b_n$ . Par définition de la partie entière, sachant que  $10^{n+1} a_n$  et  $10^{n+1} b_n$  sont des ENTIERS, il en découle que :  $10^{n+1} a_n \leq \lfloor 10^{n+1} x \rfloor = 10^{n+1} a_{n+1}$  et  $10^{n+1} b_n \geq \lfloor 10^{n+1} x \rfloor + 1 = 10^{n+1} a_{n+1} + 1 = 10^{n+1} b_{n+1}$ . On divise enfin par  $10^{n+1}$  :  $a_n \leq a_{n+1}$  et  $b_n \geq b_{n+1}$ .  $\blacksquare$

🦋 **Explication** 🦋 Le résultat précédent peut être reformulé en termes de *développement décimal illimité*. Nous venons de montrer que tout réel  $x$  peut être écrit sous la forme :  $\lfloor x \rfloor + \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{10^k}$  pour une certaine suite  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$  d'entiers compris entre 0 et 9. C'est cela qu'on appelle un *développement décimal illimité*. Reprenons l'exemple de  $\pi$  :

$$\pi = 3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \frac{5}{10^4} + \frac{9}{10^5} + \frac{2}{10^6} + \dots$$

La question de l'unicité d'un tel développement se pose naturellement, et hélas non, il n'y a pas unicité en général. On peut montrer cependant que :

— l'unicité est garantie pour les réels **NON** décimaux,

— mais que tout décimal possède exactement deux développements décimaux illimités. On le comprend facilement sur un exemple :  $12,584 = 12 + \frac{5}{10} + \frac{8}{10^2} + \frac{4}{10^3} = 12 + \frac{5}{10} + \frac{8}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \frac{9}{10^4} + \frac{9}{10^5} + \frac{9}{10^6} + \frac{9}{10^7} + \dots$ , et pour plus de généralité, l'essentiel est dit dans le calcul suivant :

$$\sum_{k=1}^n \frac{9}{10^k} = \frac{9}{10} \times \frac{1 - \frac{1}{10^n}}{1 - \frac{1}{10}} = 1 - \frac{1}{10^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1, \quad \text{c'est-à-dire en résumé : } 0,99999\dots = 1.$$

Le développement décimal illimité :  $12,584000\dots$  est dit *propre*, tandis que le développement décimal illimité :  $12,583999\dots$  est dit *impropre*.

## 7 EXTENSION AUX SUITES COMPLEXES

Il s'agit d'étendre aux suites complexes les définitions et résultats que nous avons développés pour les suites réelles.

**Définition (Suite complexe)** On appelle *suite complexe* toute fonction de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{C}$ .

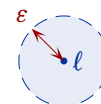
✘ **ATTENTION !** ✘ Pas d'inégalités dans  $\mathbb{C}$ , donc pas de suites complexes majorées/minorées/monotones ! Hélas !

La notion de suite bornée a quant à elle toujours un sens.

**Définition (Suite bornée)** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite complexe. On dit que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est *bornée* s'il existe  $K \in \mathbb{R}_+$  tel que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $|u_n| \leq K$ .

Pour une suite complexe, la notion de limite infinie n'a aucun sens car il sont où  $-\infty$  et  $+\infty$  dans  $\mathbb{C}$  ?

**Définition (Voisinage dans  $\mathbb{C}$ , définition simplifiée)** Soit  $\ell \in \mathbb{C}$ . On appelle *voisinage de  $\ell$*  (dans  $\mathbb{C}$ ) tout disque ouvert de centre  $\ell$ , c'est-à-dire tout ensemble de la forme  $\{z \in \mathbb{C} / |z - \ell| < \varepsilon\}$  pour un certain  $\varepsilon > 0$ .



**Définition (Limite d'une suite complexe)** Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite complexe et  $\ell \in \mathbb{C}$ . On dit que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  *admet  $\ell$  pour limite* si tout voisinage de  $\ell$  contient tous les  $u_n$  à partir d'un certain rang, i.e. si :

pour tout voisinage  $\mathcal{V}$  de  $\ell$ ,  $u_n$  appartient à  $\mathcal{V}$  à partir d'un certain rang.

Cela revient à dire que :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n - \ell| = 0$ , ce qui nous ramène au cas des limites de suites réelles :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} / \forall n \geq N, |u_n - \ell| < \varepsilon.$$

Le théorème d'unicité de la limite est encore valable — ainsi que la notation  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ , du coup.

🐇 **Explication** 🐇 Même définition que dans le cas réel. La seule modification, c'est l'allure des voisinages.

**Exemple** Pour tout  $z \in \mathbb{C}$ , si :  $|z| < 1$ , alors :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} z^n = 0$  et  $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$ .

**Démonstration** Montrer que :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} z^n = 0$  revient comme dans le cas réel à montrer que :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} |z^n| = 0$ , or nous savons très bien que :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} |z|^n = 0$  quand :  $|z| < 1$ . Le calcul de la somme est identique.

**Théorème (Caractérisation de la limite par les parties réelle et imaginaire)** Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite complexe et  $\ell \in \mathbb{C}$ . Les assertions suivantes sont équivalentes :

$$(i) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell. \qquad (ii) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \operatorname{Re}(u_n) = \operatorname{Re}(\ell) \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \operatorname{Im}(u_n) = \operatorname{Im}(\ell).$$

**Démonstration**

(i)  $\implies$  (ii) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $|\operatorname{Re}(u_n) - \operatorname{Re}(\ell)| = |\operatorname{Re}(u_n - \ell)| \leq |u_n - \ell|$ , or :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n - \ell| = 0$ , donc :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \operatorname{Re}(u_n) = \operatorname{Re}(\ell)$  par encadrement. Attention, on vient d'appliquer le théorème d'encadrement à des suites RÉELLES.

(ii)  $\implies$  (i) Si :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \operatorname{Re}(u_n) = \operatorname{Re}(\ell)$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \operatorname{Im}(u_n) = \operatorname{Im}(\ell)$ , alors par de simples opérations :  $|u_n - \ell| = \sqrt{(\operatorname{Re}(u_n) - \operatorname{Re}(\ell))^2 + (\operatorname{Im}(u_n) - \operatorname{Im}(\ell))^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sqrt{0^2 + 0^2} = 0$ , donc :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ . ■

**Exemple**  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \operatorname{Arctan} n = \frac{\pi}{2}$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ , donc :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{n} + i \operatorname{Arctan} n \right) = \frac{i\pi}{2}$ .

On définit comme avant les notions de convergence et divergence. Il est toujours vrai qu'une suite convergente est bornée.

Les opérations d'addition, produit, multiplication par un scalaire et inverse sur les limites donnent lieu aux mêmes résultats que dans le cas réel, à ceci près que les symboles  $+\infty$  et  $-\infty$  sont bannis.

Le paragraphe sur les suites extraites est intégralement maintenu.

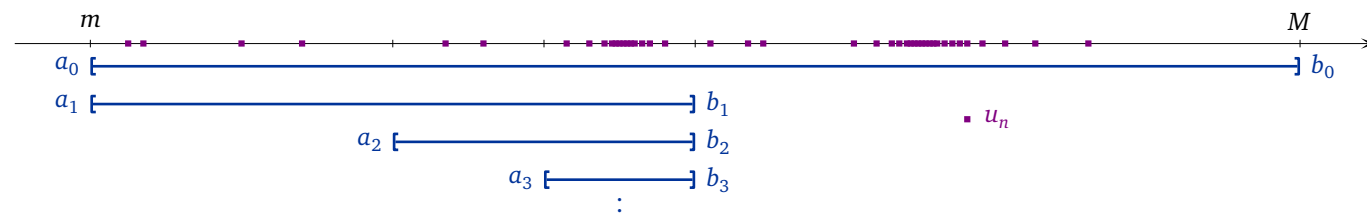
Les grands théorèmes d'existence de limite en revanche — théorèmes d'encadrement/minoration/majoration, théorème de la limite monotone et théorème des suites adjacentes — n'ont pas de sens dans le cas complexe car ils utilisent de façon essentielle la relation  $\leq$  sur  $\mathbb{R}$ . C'est assez terrible en un sens, car nous passons notre temps à nous y référer pour étudier les suites réelles. Sous ce rapport, le paragraphe suivant doit être vu comme une lueur d'espoir.

## 8 LE THÉORÈME DE BOLZANO-WEIERSTRASS

Ce théorème subtil et important aura pour nous un intérêt surtout théorique dans certaines preuves à venir en cours d'année. Il établit une sorte de réciproque — mais pas jusqu'au bout — au résultat selon lequel toute suite convergente est bornée.

**Théorème (Théorème de Bolzano-Weierstrass)** De toute suite complexe bornée on peut extraire une suite convergente.

🦋 **Explication** 🦋 Ce théorème d'EXISTENCE est d'un genre particulier. Il n'affirme pas que toute suite bornée est convergente — on a vu que c'est faux — mais qu'une suite bornée possède toujours une suite EXTRAITE convergente. Intuitivement, cela revient à dire que les valeurs d'une suite bornée sont forcées de s'accumuler QUELQUE PART, i.e. autour d'AU MOINS UN point.



**Démonstration**

- **Cas d'une suite réelle** : Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite RÉELLE bornée, disons entre  $m$  et  $M$  avec :  $m \leq M$ . Nous cherchons une fonction  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  strictement croissante pour laquelle  $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente. Nous allons construire une telle  $\varphi$  pas à pas au moyen d'un algorithme appelé *dichotomie*.

On commence en posant :  $a_0 = m$ ,  $b_0 = M$  et  $\varphi(0) = 0$ . Soit ensuite  $n \in \mathbb{N}$ . Supposons construits  $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ ,  $b_0, \dots, b_n \in \mathbb{R}$  et  $\varphi(0), \dots, \varphi(n) \in \mathbb{N}$  tels que :

- (i)  $a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_n$  et  $b_n \leq b_{n-1} \leq \dots \leq b_0$ ,
- (ii) pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$  :  $b_k - a_k = \frac{M - m}{2^k}$ ,
- (iii) l'ensemble d'indices  $\{i \in \mathbb{N} / u_i \in [a_k, b_k]\}$  est infini pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,
- (iv) pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$  :  $a_k \leq u_{\varphi(k)} \leq b_k$ ,
- (v)  $\varphi(0) < \varphi(1) < \dots < \varphi(n)$ .

Il nous faut maintenant construire trois réels  $a_{n+1}$ ,  $b_{n+1}$  et  $\varphi(n+1)$  rendant vraies les assertions (i) à (v) au rang  $n+1$ . Remarquons dans ce but qu'au moins l'un des ensembles  $\left\{i \in \mathbb{N} / u_i \in \left[a_n, \frac{a_n + b_n}{2}\right]\right\}$  et  $\left\{i \in \mathbb{N} / u_i \in \left[\frac{a_n + b_n}{2}, b_n\right]\right\}$  est infini, car si les deux étaient finis, leur réunion  $\{i \in \mathbb{N} / u_i \in [a_n, b_n]\}$  le serait aussi et cela contredirait (iii).

Du coup, posons : 
$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n & \text{et } b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} & \text{si } \left\{i \in \mathbb{N} / u_i \in \left[a_n, \frac{a_n + b_n}{2}\right]\right\} \text{ est infini (cas } \spadesuit) \\ a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} & \text{et } b_{n+1} = b_n & \text{sinon (cas } \clubsuit). \end{cases}$$

Par construction, l'ensemble d'indices  $\{i \in \mathbb{N} / u_i \in [a_{n+1}, b_{n+1}]\}$  est infini, donc également l'ensemble  $\{i \in \mathbb{N} / i > \varphi(n) \text{ et } u_i \in [a_{n+1}, b_{n+1}]\}$  — le même ensemble à ceci près qu'on a ôté les éléments inférieurs ou égaux à  $\varphi(n)$ , en nombre fini. Sélectionnons alors simplement dans cet ensemble un élément quelconque  $\varphi(n+1)$ .

**Assertion (i) au rang  $n+1$  :** Comme  $a_n \leq b_n$  d'après (ii) :  $a_n \leq \frac{a_n + b_n}{2} \leq b_n$  donc :  $a_n \leq a_{n+1}$  et  $b_{n+1} \leq b_n$ , que l'on soit dans le cas  $\spadesuit$  ou dans le cas  $\clubsuit$ .

**Assertion (ii) au rang  $n+1$  :** 
$$b_{n+1} - a_{n+1} = \begin{cases} \frac{a_n + b_n}{2} - a_n = \frac{b_n - a_n}{2} \stackrel{\text{(ii)}}{=} \frac{M - m}{2^{n+1}} & \text{(cas } \spadesuit) \\ b_n - \frac{a_n + b_n}{2} = \frac{b_n - a_n}{2} \stackrel{\text{(ii)}}{=} \frac{M - m}{2^{n+1}} & \text{(cas } \clubsuit). \end{cases}$$

**Assertion (iii) au rang  $n+1$  :** Déjà fait.

**Assertions (iv) et (v) au rang  $n+1$  :** Vraies par définition de  $\varphi(n+1)$ .

Ouf ! Fin de la construction. Les deux suites  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ainsi construites sont adjacentes en vertu des assertions (i) et (ii), donc convergentes de limite commune un certain  $\ell$  d'après le théorème des suites adjacentes. Or par ailleurs :  $a_n \leq u_{\varphi(n)} \leq b_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , donc  $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\ell$  par encadrement.

- **Cas général :** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite complexe bornée, disons par  $K$  en module. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $|\operatorname{Re}(u_n)| \leq |u_n| \leq K$  et  $|\operatorname{Im}(u_n)| \leq |u_n| \leq K$ , donc  $(\operatorname{Re}(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(\operatorname{Im}(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$  sont deux suites RÉELLES bornées.

D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass RÉEL,  $(\operatorname{Re}(u_{\varphi(n)}))_{n \in \mathbb{N}}$  converge, disons vers  $a$ , pour une certaine fonction  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  strictement croissante.

La suite  $(\operatorname{Im}(u_{\varphi(n)}))_{n \in \mathbb{N}}$  n'a hélas aucune raison de converger elle aussi mais elle est toujours bornée. D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass RÉEL,  $(\operatorname{Im}(u_{\varphi \circ \psi(n)}))_{n \in \mathbb{N}}$  converge donc, disons vers  $b$ , pour une nouvelle fonction  $\psi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  strictement croissante.

Finalement :  $u_{\varphi \circ \psi(n)} = \operatorname{Re}(u_{\varphi \circ \psi(n)}) + i \operatorname{Im}(u_{\varphi \circ \psi(n)}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a + ib$ . Comme voulu, nous avons réussi à extraire une suite convergente de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . ■