LIMITES D'UNE FONCTION

Les fonctions qu'on étudie en analyse sont souvent définies sur des intervalles, mais souvent aussi sur des réunions d'intervalles comme $\mathbb{R}^*$ ou $[0,1[\cup[2,3]$. Dans ce chapitre, pour simplifier, les lettres $D, E\dots$ désigneront toujours des réunions finies d'intervalles — mais on pourrait généraliser à certaines réunions infinies d'intervalles comme $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[+ \pi\mathbb{Z}$.

Définition **(Adhérence d'une partie dans $\overline{\mathbb{R}}$)** On appelle *adhérence de D dans* $\overline{\mathbb{R}}$ et on note $\overline{D}$ l'ensemble des éléments de $\overline{\mathbb{R}}$ qui sont la limite d'une suite d'éléments de D.

Explication $\overline{D}$ n'est jamais que l'ensemble D auquel on a ajouté ses « bornes », sa « frontière ».

Exemple $\overline{[0,1[} = [0,1]$, $\overline{]0,+\infty[} = [0,+\infty]$, $\overline{\mathbb{R}^*} = \overline{\mathbb{R}}$ et $\overline{]0,1]\cup]2,3[} = [0,1]\cup[2,3]$.

Définition **(Propriété vraie au voisinage d'un point)** Soient $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $a \in \overline{D}$. On dit que f vérife une certaine propriété $\mathscr{P}$ *au voisinage de a* si f vérifie la propriété $\mathscr{P}$ sur $D \cap \mathscr{V}$ pour un certain voisinage $\mathscr{V}$ de a.

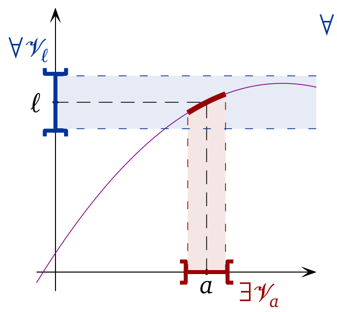
Exemple La fonction sinus est croissante au voisinage de 0 et la fonction cosinus minorée par $\frac{1}{2}$ au voisinage de 0.

1 DÉFINITIONS DE LA LIMITE D'UNE FONCTION

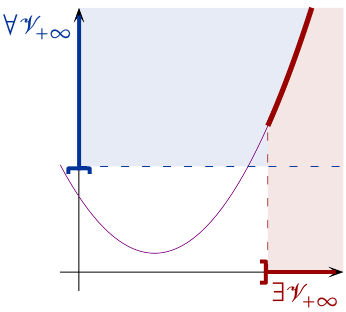
1.1 LIMITE D'UNE FONCTION EN UN POINT

Définition **(Limite d'une fonction en un point)** Soient $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction, $a \in \overline{D}$ et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. On dit que f *admet ℓ pour limite en a* si :

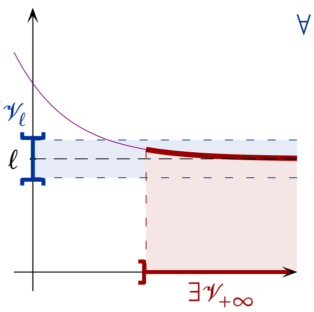
$$\boxed{\text{pour tout voisinage } \mathscr{V}_\ell \text{ de } \ell, \text{ il existe un voisinage } \mathscr{V}_a \text{ de } a \text{ sur lequel : } \quad f(x) \in \mathscr{V}_\ell.}$$



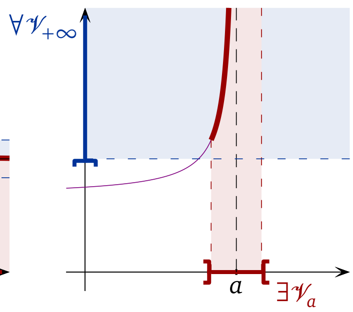
$\lim\limits_a f = \ell$ avec $\ell \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$



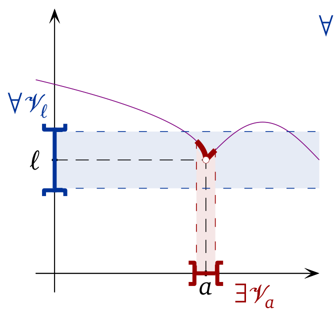
$\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$



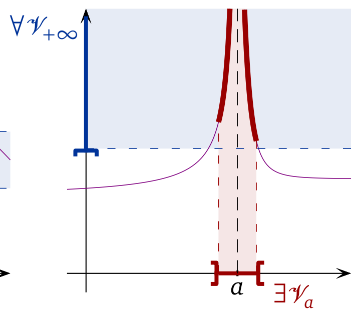
$\lim\limits_{+\infty} f = \ell$ avec $\ell \in \mathbb{R}$



$\lim\limits_a f = +\infty$ avec $a \in \mathbb{R}$



$\lim\limits_a f = \ell$ avec $\ell \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$



$\lim\limits_a f = +\infty$

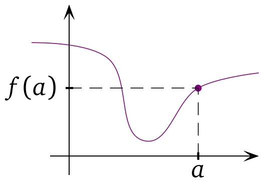
Théorème **(Unicité de la limite)** Soient $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $a \in \overline{D}$.

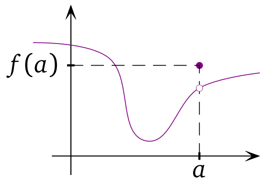
(i) Si f possède une limite en a, elle est unique et notée : $\lim_a f$ ou $\lim_{x\to a} f(x)$.
Pour tout $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, la relation : $\lim_a f = \ell$ est souvent notée : $f \underset{a}{\longrightarrow} \ell$ ou $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$.

(ii) $\boxed{\textbf{Si } a \in D}$ et si f possède une limite en a, alors : $\lim_a f = f(a)$.

✌ **Explication** ✌ Pour l'assertion (ii) :

f est définie en a et : $\lim_a f = f(a)$.





f est définie en a mais $\lim_a f$ n'existe pas.

Nous verrons cela dit que : $\lim_{a^-} f = \lim_{a^+} f$.

Démonstration

(i) Par l'absurde, faisons l'hypothèse que f possède deux limites ℓ et ℓ' DISTINCTES. Il existe alors un voisinage $\mathscr{V}_\ell$ de ℓ et un voisinage $\mathscr{V}_{\ell'}$ de ℓ' DISJOINTS. Or par hypothèse sur f, il existe deux voisinages $\mathscr{V}_a$ et $\mathscr{V}'_a$ de a pour lesquels : $\forall x \in D \cap \mathscr{V}_a,\ f(x) \in \mathscr{V}_\ell$ et $\forall x \in D \cap \mathscr{V}'_a,\ f(x) \in \mathscr{V}_{\ell'}$.
Or : $D \cap \mathscr{V}_a \cap \mathscr{V}'_a \neq \varnothing$, et pour tout $x \in D \cap \mathscr{V}_a \cap \mathscr{V}'_a$: $f(x) \in \mathscr{V}_\ell \cap \mathscr{V}_{\ell'}$ alors que nous avons choisi $\mathscr{V}_\ell$ et $\mathscr{V}_{\ell'}$ disjoints — contradiction !

(ii) Faisons l'hypothèse que f est définie en a, i.e. que : $a \in D$, et possède une limite ℓ en a.
Peut-on avoir : $\ell = +\infty$? Il existerait alors un voisinage $\mathscr{V}_a$ de a sur lequel : $f(x) \in \left]f(a), +\infty\right[$. Pour $x = a$, on aurait en particulier : $f(a) \in \left]f(a), +\infty\right[$ — contradiction. On pourrait montrer de même que : $\ell \neq -\infty$. Conclusion : $\ell \in \mathbb{R}$.
Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe ainsi par hypothèse un voisinage $\mathscr{V}'_a$ de a sur lequel : $f(x) \in \left]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon\right[$. En particulier, pour $x = a$: $\forall \varepsilon > 0,\ \left|f(a) - \ell\right| < \varepsilon$. Sous l'hypothèse que : $\ell \neq f(a)$, ce résultat est contradictoire pour : $\varepsilon = \dfrac{\left|f(a) - \ell\right|}{2}$, donc forcément : $\ell = f(a)$. ■

Définition **(Les 9 limites)** Soient $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction, $a \in \overline{D}$ et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

- **Cas où $\ell \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$:**
$$\lim_a f = \ell \iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists\, \alpha > 0 /\ \forall x \in D,\quad |x - a| < \alpha \implies \left|f(x) - \ell\right| < \varepsilon.$$
- **Cas où $\ell = +\infty$ et $a = +\infty$:**
$$\lim_{+\infty} f = +\infty \iff \forall A > 0,\ \exists\, B > 0 /\ \forall x \in D,\quad x > B \implies f(x) > A.$$
- **Cas où $\ell = -\infty$ et $a = +\infty$:**
$$\lim_{+\infty} f = -\infty \iff \forall A < 0,\ \exists\, B > 0 /\ \forall x \in D,\quad x > B \implies f(x) < A.$$
- **Cas où $\ell = +\infty$ et $a = -\infty$:**
$$\lim_{-\infty} f = +\infty \iff \forall A > 0,\ \exists\, B < 0 /\ \forall x \in D,\quad x < B \implies f(x) > A.$$
- **Cas où $\ell = -\infty$ et $a = -\infty$:**
$$\lim_{-\infty} f = -\infty \iff \forall A < 0,\ \exists\, B < 0 /\ \forall x \in D,\quad x < B \implies f(x) < A.$$
- **Cas où $\ell \in \mathbb{R}$ et $a = +\infty$:**
$$\lim_{+\infty} f = \ell \iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists\, B > 0 /\ \forall x \in D,\quad x > B \implies \left|f(x) - \ell\right| < \varepsilon.$$
- **Cas où $\ell \in \mathbb{R}$ et $a = -\infty$:**
$$\lim_{-\infty} f = \ell \iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists\, B < 0 /\ \forall x \in D,\quad x < B \implies \left|f(x) - \ell\right| < \varepsilon.$$
- **Cas où $\ell = +\infty$ et $a \in \mathbb{R}, a \notin D$:**
$$\lim_a f = +\infty \iff \forall A > 0,\ \exists\, \alpha > 0 /\ \forall x \in D,\quad |x - a| < \alpha \implies f(x) > A.$$
- **Cas où $\ell = -\infty$ et $a \in \mathbb{R}, a \notin D$:**
$$\lim_a f = -\infty \iff \forall A < 0,\ \exists\, \alpha > 0 /\ \forall x \in D,\quad |x - a| < \alpha \implies f(x) < A.$$

En pratique Inégalités STRICTES ou inégalités LARGES, choisissez ce que vous préférez.

Exemple $\lim_{x\to 1} \frac{x+2}{\sqrt{x-1}} = +\infty$.

Démonstration Montrons que : $\forall A > 0, \quad \exists\, \alpha > 0 / \quad \forall x \in]1, +\infty[, \quad |x-1| < \alpha \implies \frac{x+2}{\sqrt{x-1}} > A$.

Soit $A > 0$. Pour tout $x \in]1, +\infty[$, minorons : $\frac{x+2}{\sqrt{x-1}} \geqslant \frac{3}{\sqrt{x-1}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{x-1}}$.

On minore en SIMPLIFIANT et en vérifiant que ce par quoi on minore TEND TOUJOURS VERS $+\infty$ quand x tend vers 1.

On arrête de minorer quand on se sent capable de trouver α.

Or : $\frac{1}{\sqrt{x-1}} > A \iff \sqrt{x-1} < \frac{1}{A} \iff |x-1| < \frac{1}{A^2}$. Posons donc : $\alpha = \frac{1}{A^2}$.

D'après ce qui précède : $\forall x \in]1, +\infty[, \quad |x-1| < \alpha \implies \frac{1}{\sqrt{x-1}} > A$.

Exemple $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2+1} = 1$.

Démonstration Montrons que : $\forall \varepsilon > 0, \quad \exists\, B > 0 / \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad x > B \implies \left|\frac{x^2}{x^2+1} - 1\right| < \varepsilon$.

Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, majorons : $\left|\frac{x^2}{x^2+1} - 1\right| = \frac{1}{x^2+1} \leqslant \frac{1}{x^2}$.

On majore en SIMPLIFIANT et en vérifiant que ce par quoi on majore TEND TOUJOURS VERS 0 quand x tend vers $+\infty$.

On arrête de majorer quand on se sent capable de trouver B.

Or pour tout $x > 0$: $\frac{1}{x^2} < \varepsilon \iff x > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$. Posons donc : $B = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$.

D'après ce qui précède : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x > B \implies \left|\frac{x^2}{x^2+1} - 1\right| < \varepsilon$.

Exemple $\lim_{x\to+\infty} \left(x^2 - x\right) = +\infty$.

Démonstration Montrons que : $\forall A > 0, \quad \exists\, B > 0 / \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad x > B \implies x^2 - x > A$.

Soit $A > 0$. Pour tout $x \geqslant 2$, comme $x - 1 \geqslant 1$: $x^2 - x = x(x-1) \geqslant x$.

On minore en SIMPLIFIANT et en vérifiant que ce par quoi on minore TEND TOUJOURS VERS $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$.

On arrête de majorer quand on se sent capable de trouver B.

Posons donc : $B = \max\left\{2, A\right\}$. D'après ce qui précède : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x > B \implies x^2 - x > A$.

Théorème (Limite finie et caractère localement borné) Soient $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \overline{D}$.
Si f possède une limite FINIE en a, alors f est bornée au voisinage de a.

Démonstration Par hypothèse, il existe un voisinage $\mathscr{V}_a$ de a sur lequel : $\left|f(x) - \ell\right| < 1$. En particulier : $\left|f(x)\right| = \left|\left(f(x) - \ell\right) + \ell\right| \leqslant \left|f(x) - \ell\right| + |\ell| \leqslant |\ell| + 1$, donc f est bornée sur $D \cap \mathscr{V}_a$. ■

1.2 Limites d'une fonction à gauche/à droite en un point

Définition-théorème **(Limite d'une fonction à gauche/à droite en un point)** Soient $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction, $a \in \overline{D}$ et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. On suppose f définie au voisinage de a à gauche et à droite.

- On dit que f *admet ℓ pour limite à gauche en a* si $f\big|_{D\cap]-\infty,a[}$ admet ℓ pour limite en a. En tant que limite, la limite de f en a à gauche, si elle existe, est unique et notée : $\lim\limits_{a^-} f$ ou $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ ou $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)$.

  Plus concrètement : $\lim\limits_{a^-} f = \ell$ si :
  - **Cas où $\ell \in \mathbb{R}$:** $\forall \varepsilon > 0, \quad \exists\, \alpha > 0/ \quad \forall x \in D, \quad a - \alpha < x < a \implies \big|f(x) - \ell\big| < \varepsilon.$
  - **Cas où $\ell = +\infty$:** $\forall A > 0, \quad \exists\, \alpha > 0/ \quad \forall x \in D, \quad a - \alpha < x < a \implies f(x) > A.$
  - **Cas où $\ell = -\infty$:** $\forall A < 0, \quad \exists\, \alpha > 0/ \quad \forall x \in D, \quad a - \alpha < x < a \implies f(x) < A.$
- On définit de même la notion de *limite à droite*. Par exemple, dans le cas où $\ell \in \mathbb{R}$: $\lim\limits_{a^+} f = \ell$ si :
$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists\, \alpha > 0/ \quad \forall x \in D, \quad a < x < a + \alpha \implies \big|f(x) - \ell\big| < \varepsilon.$$

Exemple $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty.$

Démonstration Soit $A > 0$. Nous cherchons un réel $\alpha > 0$ pour lequel : $\forall x \in\,]0, \alpha[, \quad \dfrac{1}{x} > A.$
Or pout tout $x > 0$: $\dfrac{1}{x} > A \iff x < \dfrac{1}{A}.$ Nous pouvons donc choisir : $\alpha = \dfrac{1}{A}.$

Théorème **(Caractérisation de la limite à l'aide des limites à gauche/à droite)** Soient $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction, $a \in \overline{D}$ et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. On suppose f définie au voisinage de a à gauche et à droite.

(i) Si $a \in D$: $\quad \lim\limits_{a} f = \ell \iff \lim\limits_{a^-} f = \lim\limits_{a^+} f = \ell$ $\boxed{\text{et} \quad \ell = f(a).}$

(ii) Si $a \notin D$: $\quad \lim\limits_{a} f = \ell \iff \lim\limits_{a^-} f = \lim\limits_{a^+} f = \ell.$

✌ **Explication** ✌ Pour bien comprendre la condition « et $\ell = f(a)$ », jetez un œil aux deux figures de la page 2.

Démonstration Montrons seulement (i).

- Si : $\lim\limits_{a} f = \ell$, nous savons déjà que : $\ell = f(a)$. On obtient le résultat : $\lim\limits_{a^-} f = \lim\limits_{a^+} f = \ell$ par simple restriction du domaine à $D\cap\,]-\infty, a[$ et $D \cap\,]a, +\infty[$ dans la définition de la limite : $\lim\limits_{a} f = \ell$.
- Réciproquement, supposons qu'on ait : $\lim\limits_{a^-} f = \lim\limits_{a^+} f = \ell = f(a)$ — en particulier : $\ell \in \mathbb{R}$. Nous voulons montrer que : $\lim\limits_{a} f = \ell$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\alpha^- > 0$ et $\alpha^+ > 0$ tels que pour tout $x \in D$:
$$\Big(a - \alpha^- < x < a \implies \big|f(x) - \ell\big| < \varepsilon\Big) \quad \text{et} \quad \Big(a < x < a + \alpha^+ \implies \big|f(x) - \ell\big| < \varepsilon\Big).$$
Posons : $\alpha = \min\big\{\alpha^-, \alpha^+\big\}$. En n'oubliant pas que : $f(a) = \ell$, et donc : $\big|f(a) - \ell\big| < \varepsilon$, il est aussitôt clair que pour tout $x \in D$: $|x - a| < \alpha \implies \big|f(x) - \ell\big| < \varepsilon$. ■

Exemple On note f la fonction $x \longmapsto \begin{cases} e^x & \text{si } x \geqslant 0 \\ 1 - x & \text{si } x < 0 \end{cases}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Alors : $\lim\limits_{0} f = 1.$

Démonstration $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$ pour trois raisons : $\lim\limits_{x\to 0^-} (1 - x) = 1$, $\lim\limits_{x\to 0^+} e^x = 1$, <u>ET</u> : $f(0) = 1$.

2 Manipulation des limites

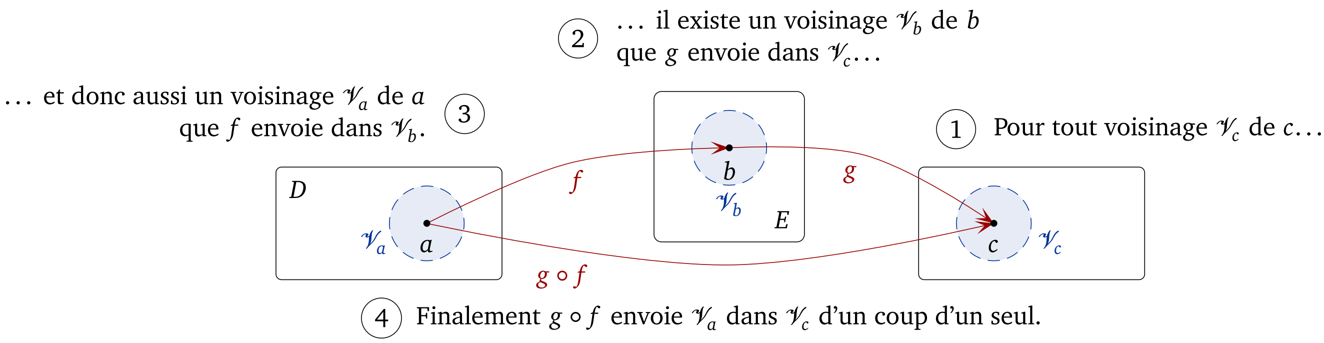
2.1 Opérations sur les limites

Il se passe avec les fonctions la même chose qu'avec les suites pour les opérations de somme, produit, multiplication par un scalaire et inverse — en particulier, mêmes formes indéterminées. Pour ne pas perdre de temps inutilement, nous ne nous arrêterons pas davantage sur ces résultats, refaites un tour du côté des suites.

Théorème (Composition de limites) Soient $f : D \longrightarrow E$ et $g : E \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions, $a \in \overline{D}$, $b \in \overline{E}$ et $c \in \overline{\mathbb{R}}$.

$$\text{Si :}\quad \lim_a f = b \quad \text{et si :}\quad \lim_b g = c, \quad \text{alors :}\quad \lim_a g \circ f = c.$$

Démonstration Soit $\mathscr{V}_c$ un voisinage de c.
Comme : $\lim_b g = c$, il existe un voisinage $\mathscr{V}_b$ de b pour lequel : $\forall x \in E \cap \mathscr{V}_b,\ g(x) \in \mathscr{V}_c$, et comme : $\lim_a f = b$, il existe un voisinage $\mathscr{V}_a$ de a pour lequel : $\forall x \in D \cap \mathscr{V}_a,\ f(x) \in \mathscr{V}_b$.
Par composition : $\forall x \in D \cap \mathscr{V}_a,\ g \circ f(x) \in \mathscr{V}_c$. Comme voulu : $\lim_a g \circ f = c$. ■



Exemple $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \ln \frac{e^{-2x}+1}{(e^{-x}+1)^2} = 0.$

Démonstration Au brouillon : $x \longmapsto e^{-x} = y \longmapsto \dfrac{y^2+1}{(y+1)^2} = z \longmapsto \ln z$. Une fois qu'on a fait ça, c'est facile, on n'a plus qu'à remarquer que : $\displaystyle \lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$, $\displaystyle \lim_{y\to 0} \frac{y^2+1}{(y+1)^2} = 1$ et $\displaystyle \lim_{z \to 1} \ln z = 0$.

2.2 Passage à la limite dans les inégalités

Théorème (Limites et inégalités strictes) Soient $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction, $a \in \overline{D}$ et $m, M \in \mathbb{R}$.

(i) Si : $\lim_a f < M$, alors : $f(x) < M$ au voisinage de a.

(ii) Si : $\lim_a f > m$, alors : $f(x) > m$ au voisinage de a.

Démonstration Nous prouverons seulement (ii). Posons : $\ell = \lim_a f$. Si : $\ell = +\infty$, il existe un voisinage $\mathscr{V}_a$ de a sur lequel : $f(x) \in \,]m, +\infty[$. Si au contraire $\ell \in \mathbb{R}$, sachant que : $\ell - m > 0$ par hypothèse, il existe un voisinage $\mathscr{V}_a$ de a sur lequel : $f(x) \in \,]\ell - (\ell - m), \ell + (\ell - m)[\, \subset \,]m, +\infty[$. Dans les deux cas : $f(x) > m$ au voisinage de a. ■

Théorème (Limites et inégalités larges) Soient $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions et $a \in \overline{D}$. On suppose que f et g possèdent des limites finies en a.

$$\text{Si :} \quad f(x) \leqslant g(x) \quad \text{au voisinage de } a, \text{ alors :} \quad \lim_a f \leqslant \lim_a g.$$

Ce résultat est utilisé le plus souvent lorsque l'une des deux fonctions est constante.

✖ **Attention !** ✖ C'est faux avec des inégalités **STRICTES** ! Ainsi : $\dfrac{1}{x} > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, mais : $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$.

Démonstration Raisonnons par l'absurde en supposant : $\lim_a (g - f) < 0$. Le théorème précédent affirme alors que : $g(x) - f(x) < 0$ au voisinage de a — contradiction. ■

2.3 Caractérisation séquentielle de la limite d'une fonction

« Caractérisation *séquentielle* » signifie « caractérisation en termes de suites ». Le théorème suivant contient en particulier le résultat que nous avons appelé « Composition à gauche par une fonction » dans notre chapitre « Limite d'une suite ». Nous l'utilisions jusqu'ici sans l'avoir démontré.

Théorème (Caractérisation séquentielle de la limite d'une fonction) Soient $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction, $a \in \overline{D}$ et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $\lim_a f = \ell$.

(ii) Pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de limite a à valeurs dans D, la suite $\big(f(u_n)\big)_{n \in \mathbb{N}}$ a pour limite ℓ.

Démonstration

(i) $\Longrightarrow$ (ii) On suppose que : $\lim_a f = \ell$. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de limite a à valeurs dans D. Pour montrer que : $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} f(u_n) = \ell$, donnons-nous un voisinage $\mathscr{V}_\ell$ de ℓ. Comme : $\lim_a f = \ell$, il existe un voisinage $\mathscr{V}_a$ de a sur lequel : $f(x) \in \mathscr{V}_\ell$. Or : $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} u_n = a$, donc : $u_n \in \mathscr{V}_a$ à partir d'un certain rang N. Finalement, pour tout $n \geqslant N$: $u_n \in D \cap \mathscr{V}_a$ donc : $f(u_n) \in \mathscr{V}_\ell$. Conclusion : $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} f(u_n) = \ell$.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) Au lieu de travailler avec des voisinages, travaillons pour changer dans le cas particulier où $a, \ell \in \mathbb{R}$. Par contraposition, supposons que f n'admet pas ℓ pour limite. Il existe alors $\varepsilon_0 > 0$ tel que :

$$\forall \alpha > 0, \quad \exists\, x \in D / \quad |x - a| < \alpha \ \text{ et } \ \big|f(x) - \ell\big| \geqslant \varepsilon_0 \qquad \bigstar.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, utilisons $\bigstar$ avec la valeur : $\alpha = \dfrac{1}{n}$. Cela nous donne un élément $u_n \in D$ pour lequel : $|u_n - a| < \dfrac{1}{n}$ et $\big|f(u_n) - \ell\big| \geqslant \varepsilon_0$. Ce procédé de construction nous fournit bien une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de limite a à valeurs dans D pour laquelle $\big(f(u_n)\big)_{n \in \mathbb{N}}$ n'admet pas ℓ pour limite. ■

Exemple Puisque : $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} n! = +\infty$, alors : $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \ln(n!) = +\infty$.

Exemple La fonction sinus n'a pas de limite en $+\infty$.

Démonstration Pour commencer : $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} n\pi = \lim_{n \to +\infty} \left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = +\infty$. Pourtant : $\sin(n\pi) = 0 \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\sin\left(2n\pi + \dfrac{\pi}{2}\right) = 1 \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1$, et bien sûr : $1 \neq 0$. On conclut grâce à la caractérisation séquentielle de la limite.

3 Théorèmes d'existence de limite

3.1 Théorèmes d'encadrement/minoration/majoration

Théorème Soient $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $m : D \longrightarrow \mathbb{R}$ et $M : D \longrightarrow \mathbb{R}$ trois fonctions, $a \in \overline{D}$ et $\ell \in \mathbb{R}$.

(i) **Théorème d'encadrement :**

Si : $\lim_a m = \lim_a M = \ell$ et si : $m(x) \leqslant f(x) \leqslant M(x)$ au voisinage de a, alors $\lim_a f$ **EXISTE** et vaut ℓ.

(ii) **Théorème de minoration :**

Si : $\lim_a m = +\infty$ et si : $f(x) \geqslant m(x)$ au voisinage de a, alors $\lim_a f$ **EXISTE** et vaut $+\infty$.

(iii) **Théorème de majoration :**

Si : $\lim_a M = -\infty$ et si : $f(x) \leqslant M(x)$ au voisinage de a, alors $\lim_a f$ **EXISTE** et vaut $-\infty$.

Démonstration Pour l'assertion (i), soit $\varepsilon > 0$. Il existe un voisinage $\mathscr{V}_a$ de a sur lequel : $m(x) \leqslant f(x) \leqslant M(x)$, un voisinage $\mathscr{V}_a'$ sur lequel : $m(x) > \ell - \varepsilon$ et un voisinage $\mathscr{V}_a''$ sur lequel : $M(x) < \ell + \varepsilon$. Posons : $\mathscr{V}_a^0 = \mathscr{V}_a \cap \mathscr{V}_a' \cap \mathscr{V}_a''$ — un voisinage de a. Pour tout $x \in D \cap \mathscr{V}_a^0$: $\ell - \varepsilon < m(x) \leqslant f(x) \leqslant M(x) < \ell + \varepsilon$, donc : $\left|f(x) - \ell\right| < \varepsilon$. ■

Le théorème d'encadrement est souvent utilisé sous la forme suivante.

Théorème **(Produit d'une fonction bornée par une fonction de limite nulle)** Soient $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ et $\varepsilon : D \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions et $a \in \overline{D}$. Si f est bornée au voisinage de a et si : $\lim_a \varepsilon = 0$, alors : $\lim_{x \to a} \varepsilon(x) f(x) = 0$.

3.2 Théorème de la limite monotone

Théorème **(Théorème de la limite monotone)** Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ avec : $a < b$ et $f : [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante.

(i) La limite $\lim_{a^+} f$ **EXISTE** et est **FINIE**. Plus précisément : $f(a) \leqslant \lim_{a^+} f$.

(ii) Pour tout $c \in]a, b[$, $\lim_{c^-} f$ et $\lim_{c^+}$ **EXISTENT** et sont **FINIES**. Plus précisément : $\lim_{c^-} f \leqslant f(c) \leqslant \lim_{c^+} f$.

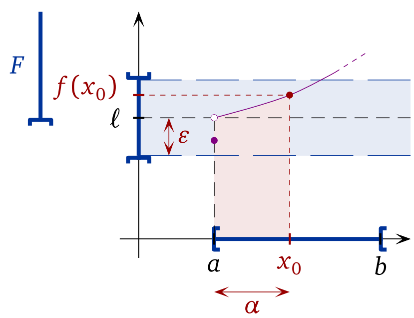
(iii) La limite $\lim_b f$ **EXISTE** et est soit finie, soit égale à $+\infty$.

On dispose de résultats analogues pour les formes d'intervalles autres que $[a, b[$ ainsi que pour les fonctions décroissantes.

✌ **Explication** ✌ En résumé : Si f est monotone, elle possède des limites à gauche et à droite en tout point où cela peut avoir un sens.

Démonstration Nous montrerons seulement l'assertion (i).

- Posons : $F = f\big(]a, b[\big)$. La fonction f étant croissante et définie au voisinage de a à droite, F est une partie non vide de $\mathbb{R}$ minorée par $f(a)$, donc possède une borne inférieure (**FINIE**) ℓ d'après la propriété de la borne inférieure. En outre : $f(a) \leqslant \ell$.



- Montrons que : $\lim\limits_{a^+} f = \ell$. Soit $\varepsilon > 0$. Le réel $\ell + \varepsilon$ ne minore pas F car ℓ en est le plus grand minorant, donc : $f(x_0) < \ell + \varepsilon$ pour un certain $x_0 \in]a, b[$. Posons : $\alpha = x_0 - a > 0$. Pour tout $x \in]a, a+\alpha[$: $\ell - \varepsilon < \ell \leqslant f(x) \leqslant f(x_0) = y_0 < \ell + \varepsilon$, car d'une part f est croissante, et d'autre part : $\ell = \inf F$.
Conclusion : $\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \alpha > 0 / \quad \forall x \in]a, a+\alpha[, \quad \left|f(x) - \ell\right| < \varepsilon$, i.e. : $\lim\limits_{a^+} f = \ell$. ■

4 Extension aux fonctions complexes

✖ **Attention !** ✖ Pas d'inégalités dans $\mathbb{C}$, donc pas de fonctions complexes majorées/minorées/monotones ! Hélas !

Définition (Fonction bornée) Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction. On dit que f est *bornée* s'il existe $K \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\forall x \in D, \quad \left|f(x)\right| \leqslant K.$$

Définition-théorème (Limite d'une fonction complexe en un point) Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction, $a \in \overline{D}$ et $\ell \in \mathbb{C}$. On dit que f *admet ℓ pour limite en a* si :

pour tout voisinage $\mathscr{V}_\ell$ de ℓ, il existe un voisinage $\mathscr{V}_a$ de a pour lequel : $\forall x \in D \cap \mathscr{V}_a, \quad f(x) \in \mathscr{V}_\ell$.

Cela revient à dire que : $\lim\limits_{x \to a} \left|f(x) - \ell\right| = 0$, ce qui nous ramène au cas des limites de fonctions réelles :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \alpha > 0 / \quad \forall x \in D, \qquad |x - a| < \alpha \implies \left|f(x) - \ell\right| < \varepsilon.$$

Le théorème d'unicité de la limite est encore valable — ainsi que les notations $\lim\limits_a f$ et $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, du coup.

Théorème (Caractérisation de la limite par les parties réelle et imaginaire) Soient $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$, $a \in \overline{D}$ et $\ell \in \mathbb{C}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $\lim\limits_a f = \ell$. (ii) $\lim\limits_a \mathrm{Re}(f) = \mathrm{Re}(\ell)$ et $\lim\limits_a \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(\ell)$.

Exemple $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{ix}}{1 + x^2} = 0$ car : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\cos x}{1 + x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sin x}{1 + x^2} = 0$.

Une fonction possédant une limite en un point est bornée au voisinage de ce point — attention, pas de $\pm\infty$ dans $\mathbb{C}$!

Les notions de limite à gauche et à droite, ainsi que la caractérisation de la limite en termes de limite à gauche et à droite, sont maintenues pour les fonctions complexes. La caractérisation séquentielle de la limite est également maintenue, de même que les résultats sur les opérations d'addition, produit, multiplication par un scalaire et inverse, à ceci près que les symboles $\pm\infty$ sont bannis.

Les grands théorèmes d'existence de limite — théorèmes d'encadrement/minoration/majoration et théorème de la limite monotone — n'ont pas de sens dans le cas complexe car ils utilisent de façon essentielle la relation d'ordre $\leqslant$ sur $\mathbb{R}$.