Limites d'une fonction

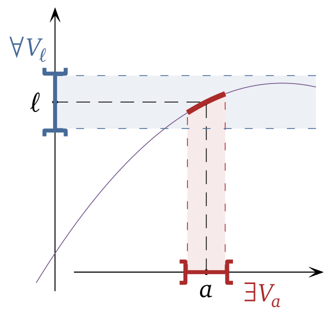
Les fonctions qu'on étudie en analyse sont généralement définies sur des intervalles ou des réunions d'intervalles comme $\mathbb{R}^*$ ou $[0,1[\cup[2,3]$, voire $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[+\pi\mathbb{Z}$. Dans ce chapitre, les lettres $D, E\ldots$ qui nous serviront d'ensembles de définition désigneront cependant des parties quelconques de $\mathbb{R}$.

1 Définitions de la limite d'une fonction

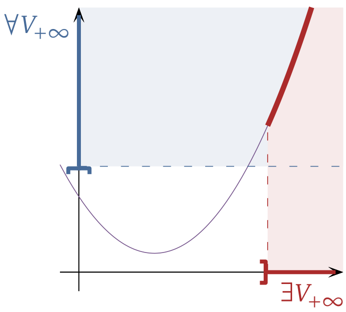
1.1 Limite d'une fonction en un point

Définition (Limite d'une fonction en un point) Soient $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à D et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. On dit que f *admet ℓ pour limite en a* si :

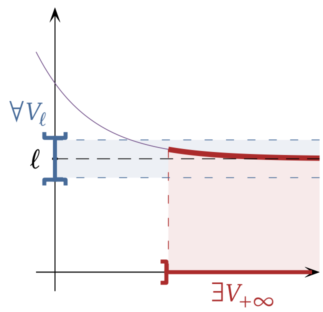
$$\forall V_\ell \in \mathscr{V}_\ell(\mathbb{R}), \quad \exists V_a \in \mathscr{V}_a(\mathbb{R}), \quad \forall x \in D \cap V_a, \quad f(x) \in V_\ell.$$



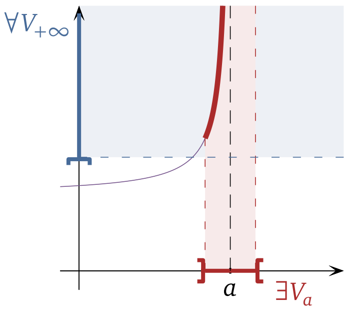
$\lim_a f = \ell$ avec $\ell \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$



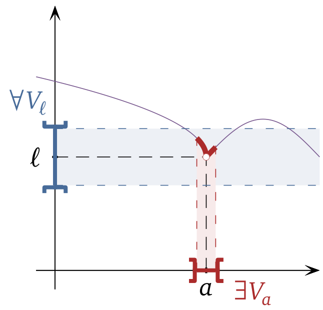
$\lim_{+\infty} f = +\infty$



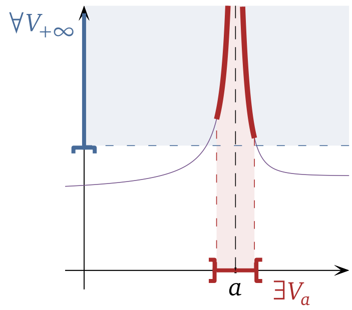
$\lim_{+\infty} f = \ell$ avec $\ell \in \mathbb{R}$



$\lim_a f = +\infty$ avec $a \in \mathbb{R}$



$\lim_a f = \ell$ avec $\ell \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$



$\lim_a f = +\infty$

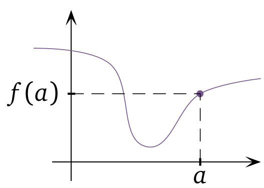
Théorème (Unicité de la limite) Soient $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $a \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à D.

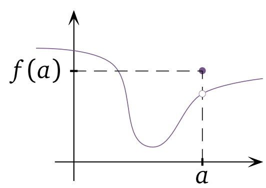
(i) Si f possède une limite en a, cette limite est unique et notée $\lim_a f$ ou $\lim_{x\to a} f(x)$.
Pour tout $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, la relation $\lim_a f = \ell$ est souvent notée : $\quad f \underset{a}{\longrightarrow} \ell \quad$ ou $\quad f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$.

(ii) Dans le cas particulier où f EST DÉFINIE EN a et y possède une limite : $\quad \lim_a f = f(a)$.

Pour l'assertion (ii) :

f est définie en a et $\lim_a f = f(a)$.





f est définie en a mais $\lim_a f$ n'existe pas.

Nous verrons cela dit que $\lim_{a^-} f = \lim_{a^+} f$.

Démonstration

(i) Par l'absurde, faisons l'hypothèse que f possède deux limites ℓ et ℓ' DISTINCTES. Il existe alors un voisinage V_ℓ de ℓ et un voisinage $V_{\ell'}$ de ℓ' DISJOINTS. Or par hypothèse sur f, il existe deux voisinages V_a et V'_a de a pour lesquels : $\forall x \in D \cap V_a,\ f(x) \in V_\ell$ et : $\forall x \in D \cap V'_a,\ f(x) \in V_{\ell'}$.

Pourtant, a est adhérent à D et $V_a \cap V'_a$ est un voisinage de a, donc $D \cap V_a \cap V'_a \neq \varnothing$, et pour tout $x \in D \cap V_a \cap V'_a$: $f(x) \in V_\ell \cap V_{\ell'} = \varnothing$ — contradiction !

(ii) Faisons l'hypothèse que f est définie en a et possède une limite ℓ en a. Pour tout voisinage V_ℓ de ℓ, il existe alors un voisinage V_a de a pour lequel $f(x) \in V_\ell$ pour tout $x \in D \cap V_a$. En particulier, f étant définie en a, ceci indique $f(a)$ appartient à TOUT voisinage de ℓ.

Il en découle que $\ell \in \mathbb{R}$ car $\left]f(a), +\infty\right[$ et $\left]-\infty, f(a)\right[$ sont des voisinages de $+\infty$ et $-\infty$ respectivement ne contenant pas $f(a)$. Finalement, pour tout $\varepsilon > 0$: $f(a) \in \left]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon\right[$, donc $\ell = f(a)$. Si vous n'êtes pas convaincus, supposez $\ell \neq f(a)$ et choisissez $\varepsilon = \dfrac{1}{2}\left|f(a) - \ell\right| > 0$. ■

Définition (Les 9 limites) Soient $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à D et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

- **Cas où $\ell \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$:**
$$\lim_a f = \ell \iff \forall \varepsilon > 0,\quad \exists \alpha > 0,\quad \forall x \in D,\quad |x - a| < \alpha \implies \left|f(x) - \ell\right| < \varepsilon.$$
- **Cas où $\ell = +\infty$ et $a = +\infty$:**
$$\lim_{+\infty} f = +\infty \iff \forall A > 0,\quad \exists B > 0,\quad \forall x \in D,\quad x > B \implies f(x) > A.$$
- **Cas où $\ell = -\infty$ et $a = +\infty$:**
$$\lim_{+\infty} f = -\infty \iff \forall A < 0,\quad \exists B > 0,\quad \forall x \in D,\quad x > B \implies f(x) < A.$$
- **Cas où $\ell = +\infty$ et $a = -\infty$:**
$$\lim_{-\infty} f = +\infty \iff \forall A > 0,\quad \exists B < 0,\quad \forall x \in D,\quad x < B \implies f(x) > A.$$
- **Cas où $\ell = -\infty$ et $a = -\infty$:**
$$\lim_{-\infty} f = -\infty \iff \forall A < 0,\quad \exists B < 0,\quad \forall x \in D,\quad x < B \implies f(x) < A.$$
- **Cas où $\ell \in \mathbb{R}$ et $a = +\infty$:**
$$\lim_{+\infty} f = \ell \iff \forall \varepsilon > 0,\quad \exists B > 0,\quad \forall x \in D,\quad x > B \implies \left|f(x) - \ell\right| < \varepsilon.$$
- **Cas où $\ell \in \mathbb{R}$ et $a = -\infty$:**
$$\lim_{-\infty} f = \ell \iff \forall \varepsilon > 0,\quad \exists B < 0,\quad \forall x \in D,\quad x < B \implies \left|f(x) - \ell\right| < \varepsilon.$$
- **Cas où $\ell = +\infty$ et $a \in \mathbb{R} \setminus D$:**
$$\lim_a f = +\infty \iff \forall A > 0,\quad \exists \alpha > 0,\quad \forall x \in D,\quad |x - a| < \alpha \implies f(x) > A.$$
- **Cas où $\ell = -\infty$ et $a \in \mathbb{R} \setminus D$:**
$$\lim_a f = -\infty \iff \forall A < 0,\quad \exists \alpha > 0,\quad \forall x \in D,\quad |x - a| < \alpha \implies f(x) < A.$$

J'utiliserai généralement des inégalités strictes, mais vous avez le droit de préférer les inégalités larges.

Exemple $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x+2}{\sqrt{x-1}} = +\infty.$

Démonstration Montrons que : $\forall A > 0,\quad \exists \alpha > 0,\quad \forall x \in \left]1, +\infty\right[,\quad |x - 1| < \alpha \implies \dfrac{x+2}{\sqrt{x-1}} > A.$

Soit $A > 0$. Pour tout $x \in \left]1, +\infty\right[$, minorons : $\dfrac{x+2}{\sqrt{x-1}} \geqslant \dfrac{3}{\sqrt{x-1}} \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}.$

On minore en SIMPLIFIANT et en vérifiant que ce par quoi on minore TEND TOUJOURS VERS $+\infty$ quand x tend vers 1.

On arrête de minorer quand on se sent capable de trouver α.

Or : $\dfrac{1}{\sqrt{x-1}} > A \iff \sqrt{x-1} < \dfrac{1}{A} \iff |x - 1| < \dfrac{1}{A^2}.$ Posons $\alpha = \dfrac{1}{A^2}.$

D'après ce qui précède : $\forall x \in \left]1, +\infty\right[,\quad |x - 1| < \alpha \implies \dfrac{1}{\sqrt{x-1}} > A.$

Exemple $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2+1}=1.$

Démonstration Montrons que : $\forall \varepsilon>0,\quad \exists B>0,\quad \forall x\in\mathbb{R},\quad x>B \implies \left|\dfrac{x^2}{x^2+1}-1\right|<\varepsilon.$

Soit $\varepsilon>0$. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, majorons : $\left|\dfrac{x^2}{x^2+1}-1\right|=\dfrac{1}{x^2+1}\leqslant\dfrac{1}{x^2}.$

On majore en **SIMPLIFIANT** et en vérifiant que ce par quoi on majore **TEND TOUJOURS VERS** 0 quand x tend vers $+\infty$.

On arrête de majorer quand on se sent capable de trouver B.

Or pour tout $x>0$: $\dfrac{1}{x^2}<\varepsilon \iff x>\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}.$ Posons $B=\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}.$

D'après ce qui précède : $\forall x\in\mathbb{R},\quad x>B\implies \left|\dfrac{x^2}{x^2+1}-1\right|<\varepsilon.$

Exemple $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(x^2-x\right)=+\infty.$

Démonstration Montrons que : $\forall A>0,\quad \exists B>0,\quad \forall x\in\mathbb{R},\quad x>B \implies x^2-x>A.$

Soit $A>0$. Pour tout $x\geqslant 2$: $x-1\geqslant 1$, donc $x^2-x=x(x-1)\geqslant x.$

On minore en **SIMPLIFIANT** et en vérifiant que ce par quoi on minore **TEND TOUJOURS VERS** $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$.

On arrête de minorer quand on se sent capable de trouver B.

Posons $B=\max\left\{2,A\right\}$. D'après ce qui précède : $\forall x\in\mathbb{R},\quad x>B\implies x^2-x>A.$

Théorème (Limite finie et caractère localement borné) Soient $f:D\longrightarrow\mathbb{R}$ et $a\in\overline{\mathbb{R}}$ adhérent à D.
Si f possède une limite **FINIE** en a, f est bornée au voisinage de a.

Démonstration Par hypothèse, il existe un voisinage V_a de a sur lequel $\left|f(x)-\ell\right|<1$. Il en découle que f est bornée sur $D\cap V_a$ car pour tout $x\in D\cap V_a$: $\left|f(x)\right|=\left|f(x)-\ell+\ell\right|\leqslant\left|f(x)-\ell\right|+|\ell|\leqslant|\ell|+1.$

1.2 LIMITE À GAUCHE/À DROITE D'UNE FONCTION EN UN POINT

Définition-théorème (Limite à gauche/à droite d'une fonction) Soient $f:D\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction et $a\in\mathbb{R}$.

- **Limite à gauche :** Si a est adhérent à $D\cap\left]-\infty,a\right[$, on dit que f *possède une limite à gauche en a* si $f|_{D\cap]-\infty,a[}$ possède une limite en a. Cette limite est notée $\lim\limits_{a^-}f$, $\lim\limits_{x\to a^-}f(x)$ ou encore $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x<a}}f(x)$.
  Pour tout $\ell\in\overline{\mathbb{R}}$, dire que $\ell=\lim\limits_{a^-}f\in\overline{\mathbb{R}}$ revient donc à dire que :
$$\begin{cases}\forall\varepsilon>0,\quad\exists\alpha>0,\quad\forall x\in D,\quad a-\alpha<x<a\implies\left|f(x)-\ell\right|<\varepsilon & \text{si } \ell\in\mathbb{R}\\ \forall A>0,\quad\exists\alpha>0,\quad\forall x\in D,\quad a-\alpha<x<a\implies f(x)>A & \text{si } \ell=+\infty\\ \forall A<0,\quad\exists\alpha>0,\quad\forall x\in D,\quad a-\alpha<x<a\implies f(x)<A & \text{si } \ell=-\infty.\end{cases}$$
- **Limite à droite :** On définit de même la notion de *limite à droite* à partir de la fonction restreinte $f|_{D\cap]a,+\infty[}$ si a est adhérent à $D\cap\left]a,+\infty\right[$. En termes de quantificateurs, remplacez simplement $a-\alpha<x<a$ par $a<x<a+\alpha$.

Les limites à gauche/à droite ne sont jamais que des limites au sens initial du chapitre mais appliquées à des restrictions. Cela justifie leur unicité et la possibilité que nous avons de leur accorder une notation.

Exemple $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty.$

Démonstration Soit $A>0$. Nous cherchons un réel $\alpha>0$ pour lequel pour tout $x\in\left]0,\alpha\right[$: $\dfrac{1}{x}>A.$

Or pout tout $x>0$: $\dfrac{1}{x}>A \iff x<\dfrac{1}{A}.$ Nous pouvons donc choisir $\alpha=\dfrac{1}{A}.$

On montre de même que $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty$. En revanche, d'après le théorème qui suit, la limite $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}$ **N'EXISTE PAS !**

Théorème **(Caractérisation de la limite à l'aide des limites à gauche/à droite)** Soient $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction, $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ et $a \in \mathbb{R}$ adhérent à $D \cap]-\infty, a[$ et à $D \cap]a, +\infty[$.

(i) Si f est définie en a : $\lim\limits_a f = \ell \iff \lim\limits_{a^-} f = \lim\limits_{a^+} f = \ell$ $\boxed{\text{ET} \quad \ell = f(a).}$

(ii) Si f **N'est PAS** définie en a : $\lim\limits_a f = \ell \iff \lim\limits_{a^-} f = \lim\limits_{a^+} f = \ell.$

Pour bien comprendre la condition « et $\ell = f(a)$ » de l'assertion (i), jetez un œil aux deux figures de la fin de la page 1.

Démonstration Montrons seulement (i).

- Si $\lim\limits_a f = \ell$, nous savons déjà que $\ell = f(a)$. On obtient ensuite les égalités $\lim\limits_{a^-} f = \lim\limits_{a^+} f = \ell$ par simple restriction du domaine à $D \cap]-\infty, a[$ et $D \cap]a, +\infty[$ dans la définition de la limite $\lim\limits_a f = \ell$.
- Réciproquement, faisons l'hypothèse que $\lim\limits_{a^-} f = \lim\limits_{a^+} f = \ell = f(a)$. En particulier $\ell \in \mathbb{R}$ et nous voulons montrer que $\lim\limits_a f = \ell$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe des réels $\alpha^- > 0$ et $\alpha^+ > 0$ pour lesquels pour tout $x \in D$: $a-\alpha^- < x < a \Longrightarrow \left|f(x)-\ell\right| < \varepsilon$ et : $a < x < a+\alpha^+ \Longrightarrow \left|f(x)-\ell\right| < \varepsilon$. Posons $\alpha = \min\left\{\alpha^-, \alpha^+\right\}$. Comme $f(a) = \ell$, il est aussitôt clair que pour tout $x \in D$: $|x-a| < \alpha \Longrightarrow \left|f(x)-\ell\right| < \varepsilon$.

Exemple Si on note f la fonction $x \longmapsto \begin{cases} e^x & \text{si } x \geqslant 0 \\ 1-x & \text{si } x < 0 \end{cases}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, alors $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$.

Démonstration Trois raisons : $\lim\limits_{x\to 0^-}(1-x) = 1$, $\lim\limits_{x\to 0^+} e^x = 1$ et $f(0) = 1$.

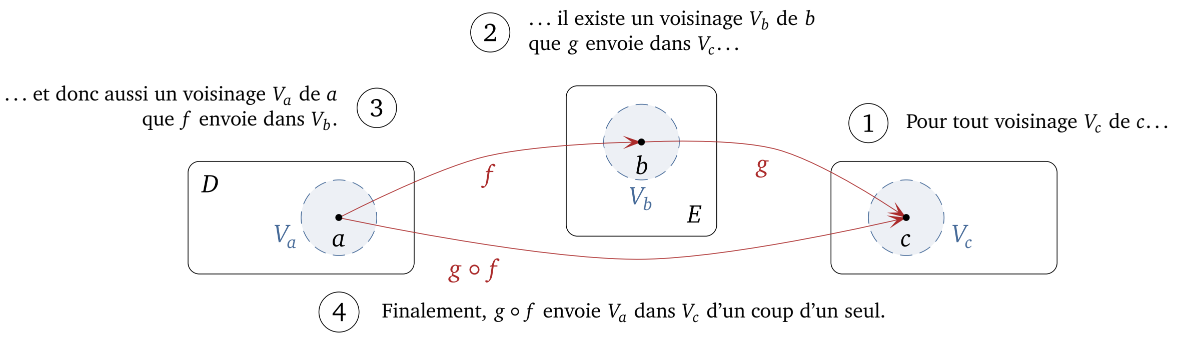
2 MANIPULATION DES LIMITES

2.1 OPÉRATIONS SUR LES LIMITES

Il se passe avec les fonctions la même chose qu'avec les suites pour les opérations de somme, produit, multiplication par un scalaire et inverse — en particulier, mêmes formes indéterminées. Refaites un tour du côté des suites !

Théorème **(Composition de limites)** Soient $f : D \longrightarrow E$ et $g : E \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à D, $b \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à E et $c \in \overline{\mathbb{R}}$. Si $\lim\limits_a f = b$ et $\lim\limits_b g = c$, alors $\lim\limits_a g \circ f = c$.

Démonstration Soit V_c un voisinage de c.
Comme $\lim\limits_b g = c$, il existe un voisinage V_b de b pour lequel $g(x) \in V_c$ pour tout $x \in E \cap V_b$, et comme $\lim\limits_a f = b$, il existe un voisinage V_a de a pour lequel $f(x) \in V_b$ pour tout $x \in D \cap V_a$.
Par composition : $\forall x \in D \cap V_a, \quad g \circ f(x) \in V_c$, donc en effet $\lim\limits_a g \circ f = c$.



Exemple $\lim_{x\to+\infty} \ln \frac{e^{-2x}+1}{(e^{-x}+1)^2} = 0.$

Démonstration Simple composition des trois limites : $\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$, $\lim_{y\to 0} \frac{y^2+1}{(y+1)^2} = 1$ et $\lim_{z\to 1} \ln z = 0$.

✖ Attention ! Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$, on ne peut pas affirmer SANS PREUVE que $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x+f(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x+\ell}$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)^x = \lim_{x\to+\infty} \ell^x$. La première égalité est vraie, mais comment le justifier sans calculer explicitement $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x+f(x)}$? Quant à la deuxième, elle est fausse si $\ell = 1$ — forme indéterminée $1^{+\infty}$. En résumé :

> Quand on passe à la limite, on NE peut JAMAIS le faire « par morceaux » en remplaçant tel morceau par sa limite et en laissant le reste intact.

2.2 Passage à la limite dans une inégalité et opération inverse

Théorème (Limites et inégalités strictes) Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à D, $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction possédant une limite ℓ en a et $m, M \in \mathbb{R}$.

(i) Si $\ell < M$, alors $f(x) < M$ au voisinage de a.

(ii) Si $\ell > m$, alors $f(x) > m$ au voisinage de a.

Démonstration Prouvons (ii). Si $\ell = +\infty$, il existe un voisinage V_a de a sur lequel $f(x) \in]m, +\infty[$. Si $\ell \in \mathbb{R}$, sachant que $\ell - m > 0$, il existe un voisinage V_a de a sur lequel $f(x) \in]\ell-(\ell-m), \ell+(\ell-m)[\subset]m, +\infty[$. Dans les deux cas $f(x) > m$ au voisinage de a.

Théorème (Limites et inégalités larges) Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à D et $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions possédant une limite finie en a. Si $f(x) \leqslant g(x)$ au voisinage de a, alors $\lim_a f \leqslant \lim_a g$.

Ce résultat est utilisé le plus souvent lorsque l'une des deux fonctions est constante.

✖ Attention ! C'est faux avec des inégalités STRICTES ! Pour tout $x > 0$: $\frac{1}{x} > 0$ mais $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$.

Démonstration Par l'absurde, si $\lim_a (g - f) < 0$, le théorème précédent montre que $g(x) - f(x) < 0$ au voisinage de a — contradiction.

2.3 Caractérisation séquentielle de la limite d'une fonction

Le théorème qui suit contient en particulier le théorème « Composition à gauche par une fonction » de notre précédent chapitre « Limite d'une suite ». Nous l'utilisons jusqu'ici sans l'avoir démontré.

Théorème (Caractérisation séquentielle de la limite d'une fonction) Soient $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à D et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $\lim_a f = \ell$.

(ii) Pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de limite a à valeurs dans D, la suite $\big(f(u_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite ℓ.

Démonstration

(i) $\Longrightarrow$ (ii) On suppose que $\lim_a f = \ell$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de limite a à valeurs dans D. Pour montrer que $\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = \ell$, donnons-nous un voisinage V_ℓ de ℓ. Comme $\lim_a f = \ell$, il existe un voisinage V_a de a sur lequel $f(x) \in V_\ell$. Or $\lim_{n\to+\infty} u_n = a$, donc $u_n \in V_a$ à partir d'un certain rang N. Finalement $u_n \in D \cap V_a$ pour tout $n \geqslant N$, donc $f(u_n) \in V_\ell$. Conclusion : $\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = \ell$.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) Au lieu de travailler avec des voisinages, travaillons pour changer dans le cas particulier où $a, \ell \in \mathbb{R}$. Par contraposition, supposons que f n'admet pas ℓ pour limite. Il existe alors un réel $\varepsilon_0 > 0$ pour lequel :

$$\forall \alpha > 0, \quad \exists x \in D, \qquad |x-a| < \alpha \quad \text{et} \quad \big|f(x)-\ell\big| \geqslant \varepsilon_0 \qquad \bigstar.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, utilisons $\bigstar$ avec la valeur $\alpha = \dfrac{1}{n}$. Cela nous donne un élément $u_n \in D$ pour lequel $|u_n - a| < \dfrac{1}{n}$ et $\big|f(u_n)-\ell\big| \geqslant \varepsilon_0$. Ce procédé de construction nous fournit comme voulu une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de limite a à valeurs dans D pour laquelle $\big(f(u_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ n'admet pas ℓ pour limite.

Exemple $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n! = +\infty$, donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \ln(n!) = +\infty$.

Exemple La fonction sinus n'a pas de limite en $+\infty$.

Démonstration $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n\pi = \lim_{n\to+\infty}\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = +\infty$, mais :

$$\sin(n\pi) = 0 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \qquad \text{et} \qquad \sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1, \qquad \text{et bien sûr } 1 \neq 0.$$

3 Théorèmes d'existence de limite

3.1 Théorèmes d'encadrement/minoration/majoration

Théorème Soient $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $m : D \longrightarrow \mathbb{R}$ et $M : D \longrightarrow \mathbb{R}$ trois fonctions, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à D et $\ell \in \mathbb{R}$.

(i) **Théorème d'encadrement :**
Si $\lim_a m = \lim_a M = \ell$ et si $m(x) \leqslant f(x) \leqslant M(x)$ au voisinage de a, $\lim_a f$ EXISTE et vaut ℓ.

(ii) **Théorème de minoration :**
Si $\lim_a m = +\infty$ et si $f(x) \geqslant m(x)$ au voisinage de a, $\lim_a f$ EXISTE et vaut $+\infty$.

(iii) **Théorème de majoration :**
Si $\lim_a M = -\infty$ et si $f(x) \leqslant M(x)$ au voisinage de a, $\lim_a f$ EXISTE et vaut $-\infty$.

Démonstration Pour l'assertion (i), soit $\varepsilon > 0$. Il existe un voisinage V_a de a sur lequel $m(x) \leqslant f(x) \leqslant M(x)$, un voisinage V'_a sur lequel $m(x) > \ell - \varepsilon$ et un voisinage V''_a sur lequel $M(x) < \ell + \varepsilon$. En notant V^0_a le voisinage $V_a \cap V'_a \cap V''_a$: $\quad \ell - \varepsilon < m(x) \leqslant f(x) \leqslant M(x) < \ell + \varepsilon \quad$ pour tout $x \in D \cap V^0_a$, donc $\big|f(x)-\ell\big| < \varepsilon$.

Le théorème d'encadrement est souvent utilisé sous la forme suivante.

Théorème **(Produit d'une fonction bornée par une fonction de limite nulle)** Soient $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ et $\varepsilon : D \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions et $a \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à D. Si f est bornée au voisinage de a avec $\lim_a \varepsilon = 0$, alors $\displaystyle\lim_{x\to a} \varepsilon(x)f(x) = 0$.

3.2 Théorème de la limite monotone

Théorème **(Théorème de la limite monotone)** Toute fonction monotone possède une limite à gauche et une limite à droite en tout point en lequel cela a un sens.

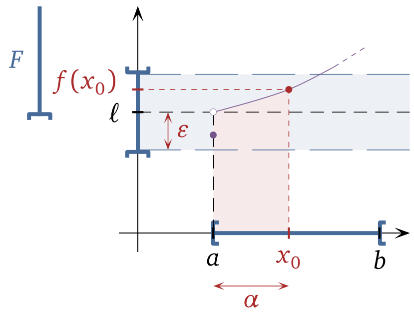
Afin de bien le comprendre, précisons cet énoncé dans un cas particulier d'une fonction $f : [a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ croissante avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in]a,+\infty]$. Le théorème de la limite monotone affirme que :

— la limite $\lim_{a^+} f$ EXISTE et elle est forcément FINIE car $f(a) \leqslant \lim_{a^+} f$ par passage à la limite,

— pour tout $c \in]a,b[$, les limites $\lim_{c^-} f$ et $\lim_{c^+}$ EXISTENT et elles sont forcément FINIES car $\lim_{c^-} f \leqslant f(c) \leqslant \lim_{c^+} f$,

— la limite $\lim_b f$ EXISTE et elle est soit finie, soit égale à $+\infty$.

Démonstration Nous nous contenterons de démontrer l'existence de $\lim_{a^+} f$ dans le cadre proposé ci-dessus.



Posons $F = f\big(]a,b[\big)$. Par croissance de f, F est une partie non vide de $\mathbb{R}$ minorée par $f(a)$, donc possède une borne inférieure (FINIE) ℓ d'après la propriété de la borne inférieure. En outre $f(a) \leqslant \ell$.

Montrons que $\lim_{a^+} f = \ell$. Soit $\varepsilon > 0$. Le réel $\ell + \varepsilon$ ne minore pas F car ℓ en est le plus grand minorant, donc $f(x_0) < \ell + \varepsilon$ pour un certain $x_0 \in]a,b[$. Posons $\alpha = x_0 - a > 0$. Pour tout $x \in]a, a+\alpha[$:

$$\ell - \varepsilon < \ell \leqslant f(x) \leqslant f(x_0) = y_0 < \ell + \varepsilon,$$

car d'une part f est croissante, et d'autre part $\ell = \inf F$.

Conclusion : $\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \alpha > 0, \quad \forall x \in]a, a+\alpha[, \quad \big|f(x) - \ell\big| < \varepsilon,$ autrement dit $\lim_{a^+} f = \ell$.

4 Extension aux fonctions complexes

Définition **(Fonction bornée)** Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction. On dit que f est *bornée* s'il existe un réel $K \geqslant 0$ pour lequel pour tout $x \in D$: $\big|f(x)\big| \leqslant K$.

Définition-théorème **(Limite d'une fonction complexe en un point)** Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à D et $\ell \in \mathbb{C}$. On dit que f *admet ℓ pour limite en a* si :

$$\forall V_\ell \in \mathscr{V}_\ell(\mathbb{C}), \quad \exists V_a \in \mathscr{V}_a(\mathbb{R}), \quad \forall x \in D \cap V_a, \quad f(x) \in V_\ell.$$

i.e. si $\lim_{x \to a} \big|f(x) - \ell\big| = 0$, ou encore :

$$\begin{cases} \forall \varepsilon > 0, \quad \exists \alpha > 0, \quad \forall x \in D, \quad |x-a| < \alpha \implies \big|f(x) - \ell\big| < \varepsilon & \text{si } a \in \mathbb{R} \\ \forall \varepsilon > 0, \quad \exists B > 0, \quad \forall x \in D, \quad x > B \implies \big|f(x) - \ell\big| < \varepsilon & \text{si } a = +\infty \\ \forall \varepsilon > 0, \quad \exists B < 0, \quad \forall x \in D, \quad x < B \implies \big|f(x) - \ell\big| < \varepsilon & \text{si } a = -\infty. \end{cases}$$

Le théorème d'unicité de la limite est encore valable — ce qui autorise les notations $\lim_a f$ et $\lim_{x \to a} f(x)$.

Théorème **(Caractérisation de la limite par les parties réelle et imaginaire)** Soient $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à D et $\ell \in \mathbb{C}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $\lim_a f = \ell$. (ii) $\lim_a \mathrm{Re}(f) = \mathrm{Re}(\ell)$ et $\lim_a \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(\ell)$.

Démonstration

(i) $\Longrightarrow$ (ii) Pour tout $z \in \mathbb{C}$: $\big|\mathrm{Re}(z)\big| \leqslant |z|$ et $\big|\mathrm{Im}(z)\big| \leqslant |z|$, donc...

(ii) $\Longrightarrow$ (i) Pour tout $z \in \mathbb{C}$: $|z| = \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2}$, donc...

Une fonction qui possède une limite en un point est bornée au voisinage de ce point — attention, pas de $\pm\infty$ dans $\mathbb{C}$!

Les notions de limite à gauche et à droite, ainsi que la caractérisation de la limite en termes de limite à gauche et à droite, sont maintenues pour les fonctions complexes. La caractérisation séquentielle de la limite est également maintenue, de même que les résultats sur les opérations d'addition, produit, multiplication par un scalaire et inverse, à ceci près que les symboles $\pm\infty$ sont bannis.

Les grands théorèmes d'existence de limite — théorèmes d'encadrement/minoration/majoration et théorème de la limite monotone — n'ont pas de sens dans le cas complexe car ils utilisent de façon essentielle la relation d'ordre $\leqslant$ sur $\mathbb{R}$.