Matrices et systèmes linéaires

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ est l'un des ensembles $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et les lettres $n, p, q\ldots$ désignent des entiers naturels non nuls.

1 Matrices et opérations sur les matrices

1.1 Matrices, addition matricielle et multiplication par un scalaire

Dans le titre de ce paragraphe, le mot *scalaire* signifie « nombre réel ou complexe ». Nous l'utiliserons quotidiennement dans quelques temps quand nous ferons de l'*algèbre linéaire*.

Définition (Matrice, coefficients, lignes, colonnes, matrice nulle)

- **Matrice :** On appelle *matrice de taille $n \times p$ à coefficients dans $\mathbb{K}$* toute famille A de np éléments de $\mathbb{K}$ présentée comme un tableau $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$ noté aussi $\left(a_{ij}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}}$, où $a_{ij} \in \mathbb{K}$ pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$.

  Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, le scalaire a_{ij} est appelé *coefficient de A de position (i,j)*, la matrice $\begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$ est appelée la *$j^{\text{ème}}$ colonne de A* et la matrice $\begin{pmatrix} a_{i1} & \cdots & a_{ip} \end{pmatrix}$ est appelée sa *$i^{\text{ème}}$ ligne*.
- **Formes particulières :** L'ensemble des matrices de taille $n \times p$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
  — Pour $n = p$, on parle de *matrices carrées de taille n* et la notation simplifiée $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est alors préférée. La famille $(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$ est alors appelée *diagonale de A*.
  — Pour $p = 1$, on parle de *matrices colonnes de taille n*, et pour $n = 1$, de *matrices lignes de taille p*.
- **Matrice nulle :** La matrice de taille $n \times p$ dont tous les coefficients sont nuls est appelée la *matrice nulle de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$* et notée 0 — parfois $0_{n,p}$ quand on veut être précis.

À vrai dire, une matrice M de taille $n \times p$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ n'est jamais qu'un élément de $\mathbb{K}^{[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$, i.e. une famille $(m_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$ d'éléments de $\mathbb{K}$ indexée par $[\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, c'est-à-dire encore une application $(i,j) \longmapsto m_{ij}$ de $[\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$ dans $\mathbb{K}$. En résumé $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) = \mathbb{K}^{[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$.

L'usage veut qu'on utilise le plus possible la lettre i pour indice des lignes et la lettre j pour indice des colonnes. En outre, par convention dans ce cours, si A (majuscule) est une matrice de taille $n \times p$, nous noterons généralement a_{ij} (minuscule) le coefficient de A de position (i,j) — mais parfois aussi A_{ij}.

Exemple La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ est réelle de taille 3×2, la matrice $\begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 2 & 3+\mathrm{i} \end{pmatrix}$ est carrée complexe de taille 2.

Définition (Addition matricielle et multiplication par un scalaire) Pour tous $A, B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, on note $\lambda A + \mu B$ la matrice :

$$\lambda A + \mu B = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} + \mu b_{11} & \cdots & \lambda a_{1p} + \mu b_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{n1} + \mu b_{n1} & \cdots & \lambda a_{np} + \mu b_{np} \end{pmatrix}, \qquad \text{appelée une } \textit{combinaison linéaire de } A \textit{ et } B.$$

Exemple $3\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$.

Définition (Matrices élémentaires) Pour tous $i, j \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, on note souvent E_{ij} la matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls à l'exception du coefficient de position (i,j), égal à 1. Ces matrices sont appelées les *matrices élémentaires* (de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$).

Les matrices élémentaires de $\mathscr{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ sont :

$$E_{11}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad E_{21}=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},\quad E_{12}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad E_{22}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},\quad E_{13}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad E_{23}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Il est assez clair que toute matrice $M\in\mathscr{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ est combinaison linéaires de matrices élémentaires :

$$M=\begin{pmatrix}m_{11}&m_{12}&m_{13}\\m_{21}&m_{22}&m_{23}\end{pmatrix}=m_{11}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}+m_{21}\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}+m_{12}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}+\ldots=\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant 2\\1\leqslant j\leqslant 3}}m_{ij}E_{ij}.$$

Plus généralement, pour toute matrice $M\in\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$: $\quad M=\displaystyle\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}m_{ij}E_{ij}$.

1.2 Produit matriciel

Définition (Produit matriciel) Pour tous $A\in\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $B\in\mathscr{M}_{q,r}(\mathbb{K})$, on note $A\times B$ ou AB la matrice $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{q}a_{ik}b_{kj}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\1\leqslant j\leqslant r}}$ de taille $p\times r$.

Produit et somme

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix}b_{11}&\cdots&b_{1r}\\\vdots&&\vdots\\b_{q1}&\cdots&b_{qr}\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1q}\\\vdots&&\vdots\\a_{p1}&\cdots&a_{pq}\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}\displaystyle\sum_{k=1}^{q}a_{1k}b_{k1}&\cdots&\displaystyle\sum_{k=1}^{q}a_{1k}b_{kr}\\\vdots&&\vdots\\\displaystyle\sum_{k=1}^{q}a_{pk}b_{k1}&\cdots&\displaystyle\sum_{k=1}^{q}a_{pk}b_{kr}\end{pmatrix}\end{array}$$

Exemple $\begin{pmatrix}2&1\\1&3\\2&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&0&1\\2&-1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&-1&5\\7&-3&10\\2&0&2\end{pmatrix}$.

Attention !

- Le produit de deux matrices n'est pas défini en général s'il n'y a pas, comme on dit, *compatibilité des formats* :

  Matrice de taille $p\times q$ $\quad\times\quad$ Matrice de taille $q\times r$ $\quad=\quad$ Matrice de taille $p\times r$

  Cas particulier remarquable, le monde $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ des matrices carrées de taille n est *stable par produit* :

  Le produit de deux matrices carrées de taille n est encore une matrice carrée de taille n.

- Le produit matriciel n'est pas commutatif — même en cas de compatibilité des formats ! Par exemple :

$$\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}.$$

- Un produit de matrices peut être nul sans qu'aucune d'entre elles le soit. Exemple : $\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$.

Théorème (Produit matriciel et lignes/colonnes) Soient $A\in\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $i\in[\![1,n]\!]$ et $j\in[\![1,p]\!]$.

$A\times\begin{pmatrix}0\\\vdots\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}$ est la $j^{\text{ème}}$ colonne de A. $\qquad$ $\begin{pmatrix}0&\cdots&1&\cdots&0\end{pmatrix}\times A$ est la $i^{\text{ème}}$ ligne de A.

Position j $\qquad$ Position i

Plus généralement, pour tout $X\in\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$, en notant $C_1,\ldots,C_p$ les colonnes de A : $\quad AX=\displaystyle\sum_{j=1}^{p}x_jC_j$. $\quad$ **Essentiel !**

Démonstration Simple calcul ! Il faut que ce petit résultat coule dans vos veines.

Par convention, quand une matrice contient beaucoup de zéros, on omet souvent de les noter par souci de lisibilité.

Théorème (Propriétés du produit matriciel, matrice identité)

- **Associativité :** Pour tous $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{r,s}(\mathbb{K})$: $(AB)C = A(BC)$.
- **Bilinéarité :** Pour tous $A, B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $C, D \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$:
$$(\lambda A + \mu B)C = \lambda AC + \mu BC \qquad \text{et} \qquad B(\lambda C + \mu D) = \lambda BC + \mu BD.$$
- **Élément neutre :** On appelle *matrice identité* (*de taille* n) la matrice carrée de taille n : $I_n = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$.
Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$: $I_n A = A I_p = A$.

Démonstration Pour l'associativité, soit $(i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,s]\!]$.
$$\big((AB)C\big)_{ij} = \sum_{l=1}^{r} (AB)_{il}\, c_{lj} = \sum_{l=1}^{r} \left(\sum_{k=1}^{q} a_{ik} b_{kl} \right) c_{lj} = \sum_{l=1}^{r} \sum_{k=1}^{q} a_{ik} b_{kl} c_{lj} = \sum_{k=1}^{q} \sum_{l=1}^{r} a_{ik} b_{kl} c_{lj}$$
$$= \sum_{k=1}^{q} a_{ik} \left(\sum_{l=1}^{r} b_{kl} c_{lj} \right) = \sum_{k=1}^{q} a_{ik}\, (BC)_{kj} = \big(A(BC)\big)_{ij}.$$

Exemple Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si on note s la somme de tous les éléments de A et J la matrice carrée de taille n dont tous les coefficients sont égaux à 1, un simple calcul montre que $JAJ = sJ$.

À présent, pour une simple raison de compatibilité des formats, une matrice ne peut être multipliée avec elle-même que si elle est carrée. Pour une telle matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on peut ainsi parler des *puissances de* A :
$$A^k = \underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{k \text{ fois}} \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N}^* \qquad \text{et} \qquad A^0 = I_n.$$

Exemple Si on note J la matrice $\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ carrée de taille n, alors pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $J^k = n^{k-1} J$.

Démonstration Remarquer d'abord que $J^2 = nJ$, puis raisonner par récurrence.

Définition (Matrice nilpotente) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est *nilpotente* si $A^p = 0$ pour un certain $p \in \mathbb{N}^*$. Le plus petit entier p pour laquelle cette identité est vraie est appelé l'*indice de nilpotence de* A.

Exemple La matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est nilpotente car $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. A fortiori, pour tout $k \geqslant 2$: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Théorème (Formule du binôme et formule $A^k - B^k$) Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que A et B COMMUTENT, i.e. que $AB = BA$.
$$(A+B)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} A^i B^{k-i} \quad (\textit{formule du binôme}) \qquad \text{et} \qquad A^k - B^k = (A-B) \sum_{i=0}^{k-1} A^i B^{k-i-1}.$$

Démonstration Même preuve qu'en début d'année avec des nombres complexes.

Attention ! L'hypothèse selon laquelle A et B commutent est essentielle, c'est déjà très clair pour $k = 2$:
$$(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2 \overset{AB=BA}{=} A^2 + 2AB + B^2 \qquad \text{et} \qquad (A+B)(A-B) = A^2 - AB + BA - B^2 \overset{AB=BA}{=} A^2 - B^2.$$

Exemple On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$: $A^k = \begin{pmatrix} 1 & k & 2k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Démonstration Écrivons $A = I_3 + N$ avec $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Les matrices I_3 et N commutent car I_3 commute avec toute matrice carrée de taille 3. En outre, N est nilpotente car $N^2 = 0$, donc $N^i = 0$ pour tout $i \geqslant 2$. Finalement, pour tout $k \in \mathbb{N}$: $A^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} I_3^i N^{k-i} = I_3 + kN = \begin{pmatrix} 1 & k & 2k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Théorème **(Produit par blocs)** Soient $A, B, C, D, A', B', C', D'$ des MATRICES à coefficients dans $\mathbb{K}$ de tailles indiquées ci-dessous.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} q & q' \end{array} \\ \begin{array}{c} p \\ p' \end{array} & \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} \end{array} \times \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} r & r' \end{array} \\ \begin{array}{c} q \\ q' \end{array} & \begin{pmatrix} A' & C' \\ B' & D' \end{pmatrix} \end{array} = \begin{pmatrix} AA'+CB' & AC'+CD' \\ BA'+DB' & BC'+DD' \end{pmatrix}$$

En résumé, tout se passe avec les blocs comme si chacun d'entre eux était un scalaire.

1.3 Transposition

Définition **(Transposée)** Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle *transposée de A* la matrice $(a_{ji})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p \\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ de $\mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, notée $A^\top$ ou ${}^tA$.

Exemple $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 7 \end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 2 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$ et pour tous $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$: $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$.

Théorème **(Propriétés de la transposition)**

- **Linéarité :** Pour tous $A, B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$: $(\lambda A + \mu B)^\top = \lambda A^\top + \mu B^\top$.
- **Involutivité :** Pour tous $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$: $\left(A^\top\right)^\top = A$.
- **Effet sur un produit :** Pour tous $A \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_{q,r}(\mathbb{K})$: $(AB)^\top = B^\top A^\top$.

Démonstration Seule l'assertion sur le produit mérite une preuve. Pour tout $(i,j) \in [\![1,r]\!] \times [\![1,p]\!]$:

$$\left((AB)^\top\right)_{ij} = (AB)_{ji} = \sum_{k=1}^q a_{jk} b_{ki} = \sum_{k=1}^q b_{ki} a_{jk} = \sum_{k=1}^q \left(B^\top\right)_{ik} \left(A^\top\right)_{kj} = \left(B^\top A^\top\right)_{ij}.$$

Définition **(Matrice symétrique/antisymétrique)** Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est *symétrique* si $A^\top = A$ et *antisymétrique* si $A^\top = -A$.

L'ensemble des matrices symétriques (resp. antisymétriques) de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est noté $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ (resp. $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$).

Exemple $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ est symétrique et $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -5 \\ -1 & 0 & 2 \\ 5 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ est antisymétrique.

Diagonale nulle
car tout coefficient diagonal est égal à son opposé.

1.4 Matrices diagonales et triangulaires

Définition **(Matrice diagonale, matrice scalaire, matrice triangulaire)**

- **Matrice diagonale :** Une matrice carrée est dite *diagonale* si tous ses coefficients non diagonaux sont nuls.
  En particulier, les matrices λI_n, λ décrivant $\mathbb{K}$, sont appelées *matrices scalaires*.
- **Matrice triangulaire :** Une matrice carrée est dite *triangulaire supérieure* (resp. *inférieure*) si ses coefficients situés strictement au-dessous (resp. strictement au-dessus) de la diagonale sont nuls.

Matrice triangulaire supérieure $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}$ $\qquad$ $\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ Matrice triangulaire inférieure

Les matrices diagonales sont exactement les matrices à la fois triangulaires supérieures ET triangulaires inférieures.

Pour tous $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$, on note souvent $\mathrm{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ la matrice $\begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n \end{pmatrix}$. Par exemple : $I_n = \mathrm{diag}(1, \ldots, 1)$. Avec cette notation, pour tous $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n, \lambda \in \mathbb{K}$:

$$\lambda\, \mathrm{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) + \mathrm{diag}(\beta_1, \ldots, \beta_n) = \mathrm{diag}(\lambda\alpha_1 + \beta_1, \ldots, \lambda\alpha_n + \beta_n)$$
$$\text{et} \qquad \mathrm{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \times \mathrm{diag}(\beta_1, \ldots, \beta_n) = \mathrm{diag}(\alpha_1\beta_1, \ldots, \alpha_n\beta_n).$$

Ces identités se généralisent aux matrices triangulaires supérieures (resp. inférieures) de la façon suivante.

Théorème (Combinaisons linéaires et produit de matrices triangulaires) Soient donc $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ triangulaires supérieures (resp. inférieures) et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Les matrices $\lambda A + \mu B$ et AB sont alors triangulaires supérieures (resp. inférieures). En outre, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$: $\quad (AB)_{ii} = a_{ii} b_{ii}$.

Démonstration Supposons A et B triangulaires supérieures — le cas inférieur s'en déduit par transposition. Les matrices $\lambda A + \mu B$ et AB sont triangulaires supérieures car pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$ pour lesquels $i > j$:

$$(\lambda A + \mu B)_{ij} = \lambda \underbrace{a_{ij}}_{=0} + \mu \underbrace{b_{ij}}_{=0} = 0 \qquad \text{et} \qquad (AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^{i-1} \underbrace{a_{ik}}_{=0} b_{kj} + \sum_{k=i}^{n} a_{ik} \underbrace{b_{kj}}_{=0} = 0.$$

Enfin, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, d'après le même calcul : $\quad (AB)_{ii} = \sum_{k=1}^{i-1} \underbrace{a_{ik}}_{=0} b_{ki} + a_{ii} b_{ii} + \sum_{k=i+1}^{n} a_{ik} \underbrace{b_{ki}}_{=0} = a_{ii} b_{ii}$.

1.5 Trace d'une matrice carrée

La notion de *trace* vous paraîtra anecdotique pour le moment mais c'est en fait un outil intéressant, alors autant l'introduire tout de suite.

Définition-théorème (Trace d'une matrice carrée) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle *trace de A* et on note $\mathrm{tr}(A)$ ou $\mathrm{Tr}(A)$ la somme des éléments diagonaux de A.

(i) **Linéarité :** Pour tous $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$: $\quad \mathrm{tr}(\lambda A + \mu B) = \lambda \mathrm{tr}(A) + \mu \mathrm{tr}(B)$.

(ii) **Effet sur un produit :** Pour tous $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$: $\quad \mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

Démonstration

(i) $\quad \mathrm{tr}(\lambda A + \mu B) = \sum_{k=1}^{n} (\lambda a_{kk} + \mu b_{kk}) = \lambda \sum_{k=1}^{n} a_{kk} + \mu \sum_{k=1}^{n} b_{kk} = \lambda \mathrm{tr}(A) + \mu \mathrm{tr}(B)$.

(ii) La matrice AB est carrée de taille n alors que BA est carrée de taille p, mais ces matrices ont même trace car : $\quad \mathrm{tr}(AB) = \sum_{k=1}^{n} (AB)_{kk} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{p} a_{kl} b_{lk} = \sum_{l=1}^{p} \sum_{k=1}^{n} b_{lk} a_{kl} = \sum_{l=1}^{p} (BA)_{ll} = \mathrm{tr}(BA)$.

Exemple L'équation matricielle $AB - BA = I_n$ d'inconnue $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ n'a pas de solution car pour toutes matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: $\quad \mathrm{tr}(AB - BA) = \mathrm{tr}(AB) - \mathrm{tr}(BA) = 0 \neq n = \mathrm{tr}(I_n)$.

2 Systèmes linéaires

2.1 Interprétation géométrique et importance de la linéarité

Tout système linéaire peut être écrit sous forme matricielle. Par exemple, pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & y & - & 3z & = & 3 \\ & & 5y & + & z & = & 2 \\ 9x & + & 10y & + & 2z & = & 1 \end{array} \right. \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & 1 \\ 9 & 10 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Nous aurons désormais tendance à identifier toute famille de n éléments de $\mathbb{K}$ à une COLONNE, i.e. à considérer que $\mathbb{K}^n = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Plus généralement, pour tous $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathbb{K}^n = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système linéaire :

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1p}x_p & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2p}x_p & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{np}x_p & = & b_n, \end{array} \right.$$

d'inconnue $X \in \mathbb{K}^p = \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ peut être écrit matriciellement $AX = B$. On appelle alors A la *matrice* du système et B son *second membre*, et on dit que le système est *homogène* si $B = 0$, i.e. si $b_1 = \ldots = b_n = 0$.

Pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, l'application $X \longmapsto AX$ de $\mathbb{K}^p = \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}^n = \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est *linéaire*, ce qui signifie que pour tous $X, Y \in \mathbb{K}^p$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$: $A(\lambda X + \mu Y) = \lambda(AX) + \mu(AY)$. De la linéarité découle le résultat suivant, à la fois trivial et fondamental.

Théorème (Structure de l'ensemble des solutions d'un système linéaire) Soient $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathbb{K}^n$. On s'intéresse au système linéaire $AX = B$ d'inconnue $X \in \mathbb{K}^p$. Deux situations peuvent se présenter :

- soit ce système n'a pas de solution, on dit qu'il est *incompatible*,
- soit il en a, on dit qu'il est *compatible*. Les solutions obéissent dans ce cas au principe suivant :

Solution quelconque du système complet	=	Solution particulière du système complet	+	Solution quelconque du sytème HOMOGÈNE

Démonstration Dans le cas où le système étudié possède une solution X_{part}, alors pour tout $X \in \mathbb{K}^p$:

$$\begin{aligned} AX = B \quad &\Longleftrightarrow \quad AX = AX_{\text{part}} \quad \Longleftrightarrow \quad A\big(X - X_{\text{part}}\big) = 0 \quad \text{par linéarité} \\ &\Longleftrightarrow \quad X - X_{\text{part}} \text{ est une solution du système HOMOGÈNE associé} \\ &\Longleftrightarrow \quad X \text{ est la somme de la solution particulière } X_{\text{part}} \\ &\qquad\qquad \text{et d'une solution du système HOMOGÈNE associé.} \end{aligned}$$

Exemple Le système linéaire $\left\{\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 1 \\ x & + & y & = & 0 \end{array}\right.$ d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ n'a pas de solution.

Définition (Notation Vect) Soient $X_1, \ldots, X_r \in \mathbb{K}^n$. L'ensemble des combinaisons linéaires de $X_1, \ldots, X_n$ est noté $\text{Vect}(X_1, \ldots, X_r)$. Concrètement : $\text{Vect}(X_1, \ldots, X_r) = \big\{\lambda_1 X_1 + \ldots + \lambda_r X_r \mid \lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{K}\big\}$.

Exemple Dans $\mathbb{R}^2$: $\text{Vect}\big((2,3)\big) = \big\{(2x, 3x) \mid x \in \mathbb{R}\big\}$ et $\text{Vect}\big((1,0),(0,1)\big) = \big\{x\,(1,0) + y\,(0,1) \mid x, y \in \mathbb{R}\big\}$
$= \big\{(x,y) \mid x, y \in \mathbb{R}\big\} = \mathbb{R}^2$.

Dans $\mathbb{R}^3$: $\text{Vect}\big((1,2,0),(1,0,1)\big) = \big\{x\,(1,2,0) + y\,(1,0,1) \mid x, y \in \mathbb{R}\big\} = \big\{(x+y, 2x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\big\}$.

Raisonnons maintenant dans l'autre sens. Dans $\mathbb{R}^3$:

$$\big\{(x+y-z, 2x-y, x+3y+z) \mid x,y,z \in \mathbb{R}\big\} = \big\{x\,(1,2,1) + y\,(1,-1,3) + z\,(-1,0,1) \mid x,y,z \in \mathbb{R}\big\} = \text{Vect}\big((1,2,1),(1,-1,3),(-1,0,1)\big).$$

Dans $\mathbb{R}^2$: $\big\{(2x+y+2, y-x+1) \mid x, y \in \mathbb{R}\big\} = \big\{(2,1) + x\,(2,-1) + y\,(1,1) \mid x, y \in \mathbb{R}\big\} = (2,1) + \text{Vect}\big((2,-1),(1,1)\big)$,
et enfin dans $\mathbb{R}^3$: $\big\{(x+3, 3x+7, 2x+1) \mid x \in \mathbb{R}\big\} = \big\{(3,7,1) + x\,(1,3,2) \mid x \in \mathbb{R}\big\} = (3,7,1) + \text{Vect}\big((1,3,2)\big)$.

La notation Vect permet une expression agréable de l'ensemble des solutions d'un système linéaire. Désormais, c'est ainsi et ainsi seulement que je veux vous voir conclure vos résolutions de systèmes linéaires — par la donnée d'un Vect.

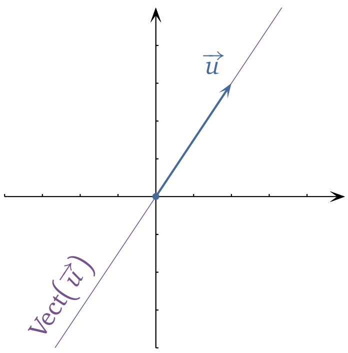
Exemple Les solutions du système linéaire $\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & - & z & = & 1 \\ 2x & + & 5y & + & z & = & 2 \end{array}\right.$ d'inconnue $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ sont tous les triplets $(7\lambda + 1, -3\lambda, \lambda)$, λ décrivant $\mathbb{R}$, dont l'ensemble gagne à être noté : $\underbrace{(1,0,0)}_{\substack{\text{Solution} \\ \text{particulière}}} + \underbrace{\text{Vect}\big((7,-3,1)\big)}_{\substack{\text{Ensemble} \\ \text{des solutions de} \\ \text{l'équation homogène}}}$.

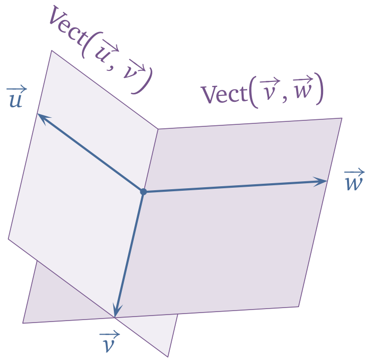
Démonstration Pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & - & z & = & 1 \\ 2x & + & 5y & + & z & = & 2 \end{array}\right. \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & - & z & = & 1 \\ & & y & + & 3z & = & 0 \end{array}\right. \quad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$$

$$\Longleftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{ccccc} x & = & 1 & + & 7z \\ y & = & & & -3z. \end{array}\right.$$

Les Vect ont une interprétation géométrique très naturelle et deux exemples vaudront ici mieux qu'un long discours.



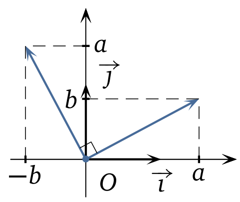


Arrêtons-nous maintenant un instant sur les droites d'un plan quelconque muni d'un repère orthonormal $\left(O,\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$.

> Dans le plan, toute droite possède une équation de la forme $ax+by+c=0$ avec $a,b,c\in\mathbb{R}$ et $(a,b)\neq(0,0)$.

Le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées (a,b) est alors **VECTEUR NORMAL** d'une telle droite $\mathscr{D}$. En effet, si nous notons A un point de $\mathscr{D}$ de coordonnées (x_A,y_A), alors pour tout point M de coordonnées (x,y) :

$$\begin{array}{rclcl} M\in\mathscr{D} & \Longleftrightarrow & ax+by+c=0 & \overset{ax_A+by_A+c=0}{\Longleftrightarrow} & a\left(x-x_A\right)+b\left(y-y_A\right)=0 \\ & \Longleftrightarrow & \begin{pmatrix} a\\ b\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x-x_A\\ y-y_A\end{pmatrix}=0 & \Longleftrightarrow & \vec{n}\cdot\overrightarrow{AM}=0 \\ & \Longleftrightarrow & \text{M appartient à la droite passant par A orthogonale à $\vec{n}$.} & & \end{array}$$



Rappelons maintenant ci-contre un petit principe important de géométrie analytique plane. D'après ce principe, la droite $\mathscr{D}$, **ORTHOGONALE** au vecteur $\vec{n}$ de coordonnées (a,b), est en revanche **DIRIGÉE** par le vecteur de coordonnées $(-b,a)$.

L'ensemble des solutions d'un système linéaire $\left\{\begin{array}{rcrcl} ax & + & by & = & c \\ a'x & + & b'y & = & c'\end{array}\right.$ avec $a,b,c,a',b',c'\in\mathbb{R}$ et $(a,b)\neq(0,0)$ et $(a',b')\neq(0,0)$ est géométriquement l'intersection de deux droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$, i.e. :

— soit une droite si $\mathscr{D}=\mathscr{D}'$,

— soit l'ensemble vide si $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont parallèles sans être confondues,

— soit un point sinon, i.e. si $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont sécantes.

Le même travail peut être effectué avec les plans de l'espace, lequel est muni d'un repère orthonormal $\left(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$.

> Dans l'espace, tout plan possède une équation de la forme $ax+by+cz+d=0$ avec $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ et $(a,b,c)\neq(0,0,0)$.

Le vecteur de coordonnées (a,b,c) est **VECTEUR NORMAL** d'un tel plan pour une raison analogue à celle que nous avons vue pour les droites dans le plan.

L'ensemble des solutions d'un système linéaire $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} ax & + & by & + & cz & = & d \\ a'x & + & b'y & + & c'z & = & d'\end{array}\right.$ avec $a,b,c,d,a',b',c',d'\in\mathbb{R}$ et $(a,b,c)\neq(0,0,0)$ et $(a',b',c')\neq(0,0,0)$ est géométriquement l'intersection de deux plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$, i.e. :

— soit un plan si $\mathscr{P}=\mathscr{P}'$,

— soit l'ensemble vide si $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont parallèles sans être confondus,

— soit une droite sinon, i.e. si $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont sécants.

Si on ajoute une troisième équation $a''x+b''y+c''z=d''$ au système, une nouvelle possibilité apparaît, celle d'un point — intersection de trois plans en position générale.

Exemple Les solutions du système linéaire $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & + & z & = & 5 \\ 3x & + & y & - & 2z & = & 0\end{array}\right.$ d'inconnue $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ sont tous les triplets $(-1+\lambda,3-\lambda,\lambda)$, λ décrivant $\mathbb{R}$, dont l'ensemble gagne à être noté de la façon suivante : $\underbrace{(-1,3,0)}_{\text{Solution particulière}}+\underbrace{\mathrm{Vect}\big((1,-1,1)\big)}_{\text{Ensemble des solutions de l'équation homogène}}$.

Géométriquement, cet ensemble est la droite de l'espace passant par le point de coordonnées $(-1,3,0)$ et dirigée par le vecteur de coordonnées $(1,-1,1)$.

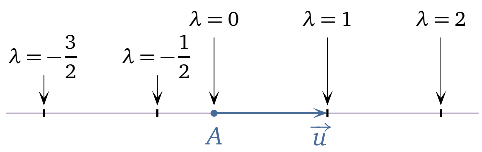
Démonstration Pour tout $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & z & = & 5 \\ 3x & + & y & - & 2z & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & z & = & 5 \\ & & 5y & + & 5z & = & 15 \end{array}\right. \quad L_2 \leftarrow 3L_1 - L_2$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & z & = & 5 \\ & & y & + & z & = & 3 \end{array}\right. \quad L_2 \leftarrow \frac{1}{5}L_2$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcr} x & = & -1 & + & z \\ y & = & 3 & - & z. \end{array}\right.$$

Géométriquement, les solutions cherchées sont ainsi les points de l'espace de coordonnées $(\lambda-1,-\lambda+3,\lambda)$, λ décrivant $\mathbb{R}$. Ces points décrivent l'ensemble $(-1,3,0)+\mathrm{Vect}\big((1,-1,1)\big)$, i.e. la droite passant par A dirigée par $\vec{u}$ si nous notons A le point de coordonnées $(-1,3,0)$ et $\vec{u}$ le vecteur de coordonnées $(1,-1,1)$. On illustre ci-contre la signification géométrique du paramètre λ.



2.2 Opérations élémentaires et algorithme du pivot

Définition-théorème (Opérations élémentaires sur les lignes) Soient $i,j\in\mathbb{N}^*$ et $\lambda\in\mathbb{K}$. On appelle *opération élémentaire* (*sur les lignes* d'un système linéaire) les opérations suivantes :

— permutation des $i^{\text{ème}}$ et $j^{\text{ème}}$ lignes, notée : $L_i \longleftrightarrow L_j$,

— multiplication de la $i^{\text{ème}}$ ligne par $\lambda\neq 0$, notée : $L_i \leftarrow \lambda L_i$,

— addition de la $j^{\text{ème}}$ ligne multipliée par λ à la $i^{\text{ème}}$ ligne (avec $i\neq j$), notée : $L_i \leftarrow L_i+\lambda L_j$.

Remarque fondamentale : Transformer un système linéaire donné par des opérations élémentaires SUR LES LIGNES ne modifie pas l'ensemble de ses solutions.

Les opérations élémentaires préservent les équivalences, donc ne modifient pas l'ensemble des solutions d'un système linéaire, car on peut toujours les défaire. L'opération $L_1 \longleftrightarrow L_2$ se défait elle-même par exemple, l'opération $L_1 \leftarrow 2L_1$ est défaite par l'opération $L_1 \leftarrow \dfrac{1}{2}L_1$ et l'opération $L_2 \leftarrow L_2+L_1$ par l'opération $L_2 \leftarrow L_2-L_1$.

Attention ! Pour résoudre un système linéaire, C'EST FINI LES SUBSTITUTIONS ! Plus jamais !

Nous résoudrons désormais tous nos systèmes linéaires au moyen d'un algorithme appelé l'*algorithme du pivot*. Vous ne l'aimerez peut-être pas trop au début — conservateurs que vous êtes — mais vous comprendrez vite à l'usage que les substitutions sont une mauvaise méthode de résolution.

Je présenterai l'algorithme sous forme figurée en partant d'un système quelconque : $\left\{\begin{array}{ccccccc} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \end{array}\right.$

Le nombre d'équations et le nombre d'inconnues n'ont pas d'importance, c'est le principe de l'algorithme qu'il faut comprendre et retenir. Chaque point « • » représente un coefficient du système, éventuellement 0. Nous allons faire disparaître progressivement ces coefficients en les annulant et obtenir finalement une nouvelle forme dite *échelonnée* du système étudié.

- **Étape 1 :** On choisit dans le système un coefficient non nul $\checkmark$ appelé *pivot* — bien sûr, si tous les coefficients sont nuls, le système est résolu ! S'il n'y est pas déjà, on peut toujours placer ce pivot en position $(1,1)$ en permutant deux équations et/ou deux inconnues. Le système initial :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ \bullet & \checkmark & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \end{array}\right. \quad \text{devient :} \quad \left\{\begin{array}{ccccccc} \overset{\text{Le pivot}}{\checkmark} & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \end{array}\right.$$

  après une éventuelle opération $L_i \longleftrightarrow L_j$ et un éventuel échange d'inconnues. Dans la mesure du possible, privilégiez un coefficient de pivot de valeur 1, vos calculs ultérieurs s'en trouveront simplifiés.

- **Étape 2 :** Grâce au pivot, on annule par des opérations $L_i \leftarrow L_i+\lambda_i L_1$ tous les coefficients de la première colonne sous le pivot. Si une ligne nulle apparaît à cette étape, on la supprime sans ménagement. Résultat :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} \checkmark & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \end{array}\right.$$

- **Reprise des étapes 1 et 2 :** On reprend les étapes 1 et 2 avec le sous-système obtenu par oubli de la ligne 1. Le système :

Le nouveau pivot

$$\left\{\begin{array}{cccccccc} \checkmark & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ & \bullet & \bullet & \bullet & \checkmark & = & \bullet \end{array}\right. \quad \text{devient donc :} \quad \left\{\begin{array}{cccccccc} \checkmark & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ & \checkmark & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \end{array}\right. \quad \text{puis :} \quad \left\{\begin{array}{cccccccc} \checkmark & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ & \checkmark & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ & & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \end{array}\right.$$

et on recommence. Le résultat final est appelé une *forme échelonnée* du système : $\left\{\begin{array}{cccccccc} \checkmark & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ & \checkmark & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ & & \checkmark & \bullet & \bullet & = & \bullet \end{array}\right.$

- **Remontée :** On annule à présent tous les coefficients situés au-dessus des symboles $\checkmark$. La méthode est la même que précédemment, on utilise les pivots et des opérations $L_i \leftarrow L_i + \lambda_i L_j$. Le système échelonné :

$$\left\{\begin{array}{cccccccc} \checkmark & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ & \checkmark & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ & & \checkmark & \bullet & \bullet & = & \bullet \end{array}\right. \quad \text{devient :} \quad \left\{\begin{array}{cccccccc} \checkmark & \bullet & & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ & \checkmark & & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ & & \checkmark & \bullet & \bullet & = & \bullet \end{array}\right. \quad \text{puis :} \quad \left\{\begin{array}{cccccccc} \checkmark & & & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ & \checkmark & & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ & & \checkmark & \bullet & \bullet & = & \bullet \end{array}\right.$$

Et c'est fini ! Sur l'exemple choisi, on peut exprimer les inconnues 1, 2 et 3 en fonction des inconnues 4 et 5, ce qui achève la résolution du système.

Exemple Les solutions du système linéaire $\left\{\begin{array}{ccccccccc} x & - & y & + & z & + & t & = & 2 \\ 2x & - & y & + & 3z & + & t & = & 3 \\ x & - & 2y & + & 3z & - & t & = & 0 \end{array}\right.$ d'inconnue $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$ sont tous les quadruplets $(3-2\lambda, 0, -1+\lambda, \lambda)$, λ décrivant $\mathbb{R}$, dont l'ensemble est $(3,0,-1,0) + \mathrm{Vect}\big((-2,0,1,1)\big)$.

Démonstration Pour tout $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$:

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x & - & y & + & z & + & t & = & 2 \\ 2x & - & y & + & 3z & + & t & = & 3 \\ x & - & 2y & + & 3z & - & t & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccccccccc} x & - & y & + & z & + & t & = & 2 \\ & & y & + & z & - & t & = & -1 \\ & - & y & + & 2z & - & 2t & = & -2 \end{array}\right. \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}$$

$$\iff \left\{\begin{array}{ccccccccc} x & - & y & + & z & + & t & = & 2 \\ & & y & + & z & - & t & = & -1 \\ & & & & z & - & t & = & -1 \end{array}\right. \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{3} L_3 + \frac{1}{3} L_2 \end{array} \iff \left\{\begin{array}{ccccccccc} x & - & y & & & + & 2t & = & 3 \\ & & y & & & & & = & 0 \\ & & & & z & - & t & = & -1 \end{array}\right. \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \\ \\ \end{array}$$

$$\iff \left\{\begin{array}{ccccc} x & = & 3 & - & 2t \\ y & = & 0 & & \\ z & = & -1 & + & t. \end{array}\right.$$

Exemple Les solutions du système $\left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & 2y & + & z & + & 3t & = & 1 \\ x & & & + & z & + & t & = & 3 \\ & & y & & & + & t & = & -1 \\ x & + & y & + & z & + & 2t & = & 2 \end{array}\right.$ d'inconnue $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$ sont tous les quadruplets $(3-\lambda-\mu, -1-\mu, \lambda, \mu)$, λ et μ décrivant $\mathbb{R}$, dont l'ensemble est $(3,-1,0,0) + \mathrm{Vect}\big((-1,0,1,0), (-1,-1,0,1)\big)$.

Démonstration Pour tout $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$:

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & 2y & + & z & + & 3t & = & 1 \\ x & & & + & z & + & t & = & 3 \\ & & y & & & + & t & = & -1 \\ x & + & y & + & z & + & 2t & = & 2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & 2y & + & z & + & 3t & = & 1 \\ & & y & & & + & t & = & -1 \\ & & y & & & + & t & = & -1 \\ & & y & & & + & t & = & -1 \end{array}\right. \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{2} L_1 - \frac{1}{2} L_2 \\ \\ L_4 \leftarrow L_1 - L_4 \end{array}$$

$$\iff \left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & 2y & + & z & + & 3t & = & 1 \\ & & y & & & + & t & = & -1 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{ccccccccc} x & & & + & z & + & t & = & 3 \\ & & y & & & + & t & = & -1 \end{array}\right. \quad L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2$$

$$\iff \left\{\begin{array}{ccccccc} x & = & 3 & - & z & - & t \\ y & = & -1 & & & - & t. \end{array}\right.$$

3 Matrices inversibles

3.1 Motivation par les systèmes linéaires

Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, vous savez depuis le collège que : $\left\{x \in \mathbb{R} \mid \quad ax = b\right\} = \begin{cases} \left\{\dfrac{b}{a}\right\} & \text{si } a \neq 0 \\ \mathbb{R} & \text{si } a = b = 0 \\ \varnothing & \text{si } a = 0 \text{ mais } b \neq 0. \end{cases}$

Et au fond, la question principale est simple — peut-on diviser par a ou pas ? La même question se pose à nous dans ce chapitre car nous pouvons écrire tout système linéaire sous forme matricielle $AX = B$. Une division matricielle est-elle possible dans ce cadre ? Dans $\mathbb{R}$, tout réel x **autre que 0** possède un inverse $\dfrac{1}{x}$ défini par les relations $x \times \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{x} \times x = 1$. Nous allons voir que le monde des matrices offre plus de diversité que le monde des réels, mais que ces mondes sont tout de même ressemblants.

Définition-théorème (Matrice inversible, inverse, groupe linéaire) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est *inversible* s'il existe une matrice $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ pour laquelle $AB = BA = I_n$.

Si elle existe, une telle matrice B est unique, notée A^{-1} et appelée l'*inverse de A*.

L'ensemble des matrices inversibles de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est noté $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et appelé le *groupe linéaire de degré n sur $\mathbb{K}$*.

Démonstration Si B et B' sont deux inverses de A : $B = BI_n = B(AB') = (BA)B' = I_nB' = B'$.

Une remarque en passant. Pourquoi oblige-t-on par définition les matrices inversibles à être carrées ? Qu'est-ce qui empêche une matrice $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ avec $n \neq p$ de posséder un inverse, i.e. une matrice $B \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ pour laquelle $AB = I_n$ et $BA = I_p$? Nous y reviendrons longuement dans les prochains mois, mais une première réponse simple peut être donnée tout de suite : $n = \mathrm{tr}(I_n) = \mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA) = \mathrm{tr}(I_p) = p$.

Définition-théorème (Système de Cramer) Un système linéaire est dit *de Cramer* si sa matrice est inversible — donc **carrée**, en particulier.

Pour tous $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathbb{K}^n$, le système de Cramer $AX = B$ d'inconnue $X \in \mathbb{K}^n$ possède une et une seule solution, à savoir $A^{-1}B$.

Démonstration Pour tout $X \in \mathbb{K}^n$: $AX = B \iff X = A^{-1}B$ — on a simplement multiplié par A^{-1} à gauche pour passer de gauche à droite, et par A à gauche pour passer de droite à gauche.

L'analogie des équations $ax = b$ et $AX = B$ est confortée, mais deux questions se posent naturellement :

— qui sont concrètement les matrices inversibles ?

— comment calcule-t-on l'inverse d'une matrice inversible ?

Exemple La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible d'inverse $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ -1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ comme on le vérifie aisément. S'il existe une formule générale de calcul de l'inverse, on ne peut pas dire qu'elle saute aux yeux...

Théorème (Une condition suffisante de non-inversibilité) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Si l'une des colonnes (resp. lignes) de A est combinaison linéaire de ses autres colonnes (resp. lignes), alors A **n'est pas** inversible.

En réalité, la condition proposée est à la fois nécessaire et suffisante, mais son caractère nécessaire demande plus de travail et nous l'établirons bien plus tard.

Démonstration Notons $L_1, \ldots, L_n$ les lignes de A et faisons par exemple l'hypothèse, pour y voir plus clair, que L_1 est combinaison linéaire des lignes $L_2, \ldots, L_n$: $L_1 = \lambda_2 L_2 + \ldots + \lambda_n L_n$. Dans ces conditions :

$$\begin{pmatrix} 1 & -\lambda_1 & \cdots & -\lambda_n \end{pmatrix} A = L_1 - \lambda_2 L_2 - \ldots - \lambda_n L_n = 0 = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Or si A est inversible, on peut multiplier cette égalité par A^{-1} à droite : $\begin{pmatrix} 1 & -\lambda_1 & \cdots & -\lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$, mais il en découle que $1 = 0$. Conclusion : A n'est pas inversible.

Exemple La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ possède une colonne nulle, donc n'est pas inversible. La matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible car sa deuxième ligne est égale à la somme des deux autres.

Attention ! Dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$, 0 est le seul objet par lequel la division est impossible. Dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ au contraire, l'exemple qui précède montre qu'une matrice non nulle peut ne pas être inversible.

Exemple Que dire de l'inversibilité d'une matrice diagonale ? Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$.

$$\mathrm{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \text{ est inversible si et seulement si } \alpha_k \neq 0 \text{ pour tout } k \in [\![1, n]\!],$$

et dans ce cas : $\mathrm{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)^{-1} = \mathrm{diag}\big(\alpha_1^{-1}, \ldots, \alpha_n^{-1}\big)$.

Démonstration Si $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sont tous non nuls : $\mathrm{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \times \mathrm{diag}\big(\alpha_1^{-1}, \ldots, \alpha_n^{-1}\big) = \mathrm{diag}(1, \ldots, 1) = I_n$ et $\mathrm{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \times \mathrm{diag}\big(\alpha_1^{-1}, \ldots, \alpha_n^{-1}\big) = I_n$, donc $\mathrm{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ est inversible d'inverse $\mathrm{diag}\big(\alpha_1^{-1}, \ldots, \alpha_n^{-1}\big)$. Réciproquement, si l'un des nombres $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ est nul, la matrice $\mathrm{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ n'est pas inversible car l'une de ses colonnes est nulle.

Théorème (Caractérisation des matrices inversibles en termes de systèmes linéaires) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. La matrice A est inversible si et seulement si pour tout second membre $Y \in \mathbb{K}^n$, le système linéaire $Y = AX$ d'inconnue $X \in \mathbb{K}^n$ possède une et une seule solution.

Démonstration

- Si A est inversible, le système $Y = AX$ d'inconnue $X \in \mathbb{K}^n$ est un système de Cramer pour tout $Y \in \mathbb{K}^n$, donc possède une et une seule solution.
- Réciproquement, faisons l'hypothèse que le système linéaire $Y = AX$ d'inconnue $X \in \mathbb{K}^n$ possède une et une seule solution pour tout $Y \in \mathbb{K}^n$.
  - Notons $Y_1, \ldots, Y_n$ les colonnes de la matrice I_n. Par hypothèse, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, le système $Y_i = AX$ d'inconnue $X \in \mathbb{K}^n$ possède une solution B_i. Si nous notons B la matrice carrée de colonnes $B_1, \ldots, B_n$, il est alors immédiat que $AB = I_n$.
  - A-t-on pour autant aussi $BA = I_n$? En tout cas : $A(BA - I_n) = (AB)A - A = I_nA - A = 0$, donc en lisant cette égalité colonne par colonne, on voit que les colonnes de $BA - I_n$ sont toutes solutions du système homogène $AX = 0$ d'inconnue $X \in \mathbb{K}^n$. Comme 0 en est évidemment une autre et comme ce système ne possède qu'une solution par hypothèse, les colonnes de $BA - I_n$ sont finalement toutes nulles, donc $BA - I_n = 0$, i.e. $BA = I_n$. Comme voulu, A est inversible.

Le théorème précédent va nous permettre à la fois de savoir si oui ou non une matrice est inversible et, le cas échéant, de calculer son inverse. Le mot d'ordre est simple — résoudre un système linéaire !

Exemple La matrice $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible d'inverse $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 5 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Démonstration Pour tous $(x, y, z), (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$:

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} 2x & + & 3y & + & z & = & a \\ x & + & y & + & 2z & = & b \\ x & + & y & + & z & = & c \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & 2z & = & b \\ 2x & + & 3y & + & z & = & a \\ x & + & y & + & z & = & c \end{array}\right. \quad L_2 \leftrightarrow L_1 \quad \text{(choix d'un pivot simple de valeur 1)}$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} x + y + 2z = b \\ y - 3z = a - 2b \\ z = b - c \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_1 - L_3 \end{array}$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} x + y = -b + 2c \\ y = a + b - 3c \\ z = b - c \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + 3L_3 \\ \end{array}$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} x = -a - 2b + 5c \\ y = a + b - 3c \\ z = b - c. \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ \\ \end{array}$$

Nous avons ainsi réussi à résoudre le système linéaire initial POUR TOUT SECOND MEMBRE (a, b, c). Cela prouve que la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et son inverse $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 5 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ apparaît naturellement en fin de résolution.

Exemple La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible.

Démonstration Pour tous $(x,y,z),(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & & & - & z & = & a \\ x & + & 2y & + & z & = & b \\ -x & + & 4y & + & 5z & = & c \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} x & & & - & z & = & a & \\ & & 2y & + & 2z & = & -a+b & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ & & 4y & + & 4z & = & a+c & L_3 \leftarrow L_1 + L_3 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} x & & & - & z & = & a & \\ & & 2y & + & 2z & = & -a+b & \\ & & & & 0 & = & 3a-2b+c & L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2. \end{array}\right.$$

Pour $a=1$ et $b=c=0$, le système obtenu n'a pas de solution à cause de sa troisième ligne, donc la matrice étudiée n'est pas inversible.

3.2 MATRICES INVERSIBLES DE TAILLE 2

Pour les matrices carrées de taille 2, il est facile de trouver une condition nécessaire et suffisante simple d'inversibilité ainsi qu'une formule pour le calcul de l'inverse le cas échéant. Nous verrons plus tard dans l'année qu'une généralisation de ces résultats est possible pour les matrices de taille quelconque, mais au prix d'un travail important.

Définition-théorème (Déterminant, inversibilité et inverse d'une matrice carrée de taille 2) Soient $a,b,c,d \in \mathbb{K}$. On appelle *déterminant de* $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, noté $\det\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ ou $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$, le scalaire $ad-bc$.

La matrice $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ est inversible si et seulement si $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} \neq 0$. Dans ce cas : $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$.

Démonstration Par un simple calcul : $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = (ad-bc)I_2$.

- Si $ad-bc \neq 0$, $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ est inversible par définition de l'inversibilité, d'inverse $\dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$.
- Pour la réciproque, supposons par l'absurde que $ad-bc=0$ ET que $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ est inversible. Alors :

$$\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} = I_2 \times \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}^{-1} \times \underbrace{(ad-bc)}_{=0} I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

donc $a=b=c=d=0$. La matrice $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est ainsi NON inversible — contradiction.

Pour les systèmes linéaires de deux équations à deux inconnues, les *formules de Cramer* suivantes sont bien pratiques.

Théorème (Formules de Cramer pour les systèmes 2×2) Soient $a,b,c,a',b',c' \in \mathbb{C}$. Si $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \neq 0$, la solution (x,y) du système de Cramer $\left\{\begin{array}{rcrcl} ax & + & by & = & c \\ a'x & + & b'y & = & c' \end{array}\right.$ est donnée par : $x = \dfrac{\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}}$ et $y = \dfrac{\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}}$.

Au dénominateur, qu'il s'agisse de x ou de y, c'est toujours le déterminant $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$ qu'on trouve. Au numérateur de la PREMIÈRE inconnue x, on trouve aussi ce déterminant, mais dans lequel on a remplacé la PREMIÈRE colonne par le second membre $\begin{pmatrix} c \\ c' \end{pmatrix}$. Pour la DEUXIÈME inconnue y, même principe sauf qu'on remplace la DEUXIÈME colonne.

Démonstration Si $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \neq 0$, la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}$ est inversible, donc le système étudié est de Cramer et son unique solution vaut : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} c \\ c' \end{pmatrix} = \dfrac{1}{ab'-ba'}\begin{pmatrix} b' & -b \\ -a' & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c \\ c' \end{pmatrix} = \dfrac{1}{ab'-ba'}\begin{pmatrix} cb'-bc' \\ ac'-ca' \end{pmatrix}$.

3.3 Opérations sur les matrices inversibles et opérations élémentaires

Théorème (Opérations sur les matrices inversibles) Soient $A, B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ — donc INVERSIBLES.

(i) **Inversibilité de l'inverse :** A^{-1} est inversible et : $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$.

(ii) **Inversibilité d'un produit :** AB est inversible et : $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

(iii) **Inversibilité d'une puissance :** Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, A^k est inversible et : $\left(A^k\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^k$.

(iv) **Inversibilité de la transposée :** $A^\top$ est inversible et : $\left(A^\top\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^\top$.

Attention ! Dans l'assertion (ii), si A et B ne commutent pas, il est faux que $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$. Rappelez-vous l'histoire du trésor du chapitre « Injections, surjections, bijections » !

Démonstration

(i) $A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = I_n$, donc par définition de l'inversibilité, A^{-1} est inversible d'inverse A.

(ii) $AB \times B^{-1}A^{-1} = A \times BB^{-1} \times A^{-1} = A \times I_n \times A^{-1} = AA^{-1} = I_n$ et $B^{-1}A^{-1} \times AB = I_n$, donc AB est inversible d'inverse $B^{-1}A^{-1}$.

(iii) Par récurrence à partir de l'assertion (ii).

(iv) $A^\top\left(A^{-1}\right)^\top = \left(A^{-1}A\right)^\top = I_n^\top = I_n$ et $\left(A^{-1}\right)^\top A^\top = I_n$, donc $A^\top$ est inversible d'inverse $\left(A^{-1}\right)^\top$.

Les opérations élémentaires sur les lignes que nous avons définies pour les systèmes linéaires sont définies de la même manière pour les matrices et notées aussi : $L_i \longleftrightarrow L_j$, $L_i \leftarrow \lambda L_i$ et $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$, mais des opérations sur les COLONNES sont utilisées également, notées : $C_i \longleftrightarrow C_j$, $C_j \leftarrow \lambda C_j$ et $C_j \leftarrow C_j + \lambda C_i$.

$$\begin{array}{r} \\ \\ \\ i \rightarrow \\ \\ \\ \\ j \rightarrow \\ \\ \\ \\ \end{array}
\begin{pmatrix}
1 &&&&&&&&&& \\
& \ddots &&&&&&&&& \\
&& 1 &&&&&&&& \\
&&& 0 &&&& 1 &&& \\
&&&& 1 &&&&&& \\
&&&&& \ddots &&&&& \\
&&&&&& 1 &&&& \\
&&& 1 &&&& 0 &&& \\
&&&&&&&& 1 && \\
&&&&&&&&& \ddots & \\
&&&&&&&&&& 1
\end{pmatrix}$$

Exemple Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $i, j \in [\![1, n]\!]$. Notons P la grosse matrice ci-contre obtenue par application de l'opération élémentaire $L_i \longleftrightarrow L_j$ à la matrice I_n. Cette matrice est inversible car d'inverse elle-même comme on le vérifie aisément.

Un simple calcul montre ensuite que le produit PA n'est autre que la matrice A à laquelle on a fait subir l'opération élémentaire $L_i \longleftrightarrow L_j$.

À présent, si on choisit i et j dans $[\![1, p]\!]$ et non dans $[\![1, n]\!]$ et si on note P la grosse matrice ci-contre obtenue par application de l'opération élémentaire $C_i \longleftrightarrow C_j$ à la matrice I_p, un simple calcul montre cette fois que le produit AP n'est autre que la matrice A à laquelle on a fait subir l'opération élémentaire $C_i \longleftrightarrow C_j$.

$$\begin{array}{r} \\ \\ \\ i \rightarrow \\ \\ \\ \\ \end{array}
\begin{pmatrix}
1 &&&&&& \\
& \ddots &&&&& \\
&& 1 &&&& \\
&&& \lambda &&& \\
&&&& 1 && \\
&&&&& \ddots & \\
&&&&&& 1
\end{pmatrix}$$

Exemple Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $i \in [\![1, n]\!]$ et $\lambda \in \mathbb{K}^*$. Notons P la matrice ci-contre obtenue par application de l'opération élémentaire $L_i \leftarrow \lambda L_i$ à la matrice I_n. Cette matrice est inversible car diagonale à coefficients diagonaux non nuls.

Un simple calcul montre ensuite que le produit PA n'est autre que la matrice A à laquelle on a fait subir l'opération élémentaire $L_i \leftarrow \lambda L_i$.

À présent, si on choisit i dans $[\![1, p]\!]$ et non dans $[\![1, n]\!]$ et si on note P la matrice ci-contre obtenue par application de l'opération élémentaire $C_i \leftarrow \lambda C_i$ à la matrice I_p, un simple calcul montre cette fois que le produit AP n'est autre que la matrice A à laquelle on a fait subir l'opération élémentaire $C_i \leftarrow \lambda C_i$.

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccccc} & & j & & & & \\ & & \downarrow & & & & \end{array} \\
\begin{array}{r} \\ \\ \\ \\ i \rightarrow \\ \\ \\ \end{array} &
\begin{pmatrix}
1 &&&&&& \\
& \ddots &&&&& \\
&& 1 &&&& \\
&&& \ddots &&& \\
&& \lambda && 1 && \\
&&&&& \ddots & \\
&&&&&& 1
\end{pmatrix}
\end{array}$$

Exemple Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $i, j \in [\![1, n]\!]$ avec $i \neq j$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Notons P la matrice ci-contre obtenue par application de l'opération élémentaire $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ à la matrice I_n. Cette matrice est inversible d'inverse la « même » matrice dans laquelle on a remplacé λ par $-\lambda$.

Un simple calcul montre ensuite que le produit PA n'est autre que la matrice A à laquelle on a fait subir l'opération élémentaire $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$.

À présent, si on choisit i et j dans $[\![1, p]\!]$ et non dans $[\![1, n]\!]$ et si on note P la matrice ci-contre obtenue par application de l'opération élémentaire $C_j \leftarrow C_j + \lambda C_i$ à la matrice I_p, un simple calcul montre cette fois que le produit AP n'est autre que la matrice A à laquelle on a fait subir l'opération élémentaire $C_j \leftarrow C_j + \lambda C_i$.

Que faut-il finalement retenir de ces trois exemples ? Essentiellement ceci :

Opération élémentaire sur les **LIGNES**	=	Multiplication à **GAUCHE** par une matrice inversible
Opération élémentaire sur les **COLONNES**	=	Multiplication à **DROITE** par une matrice inversible

Les résultats accumulés dans ce paragraphe nous permettent d'envisager une alternative à la résolution d'un système linéaire pour savoir si une matrice est inversible ou non et calculer son inverse le cas échéant. Fondamentalement, on va faire la même chose, mais présentée autrement. Fixons $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice dont nous voulons savoir si elle est inversible ou non et, le cas échéant, calculer son inverse.

— Effectuer des opérations élémentaires sur A, on l'a vu, revient à la multiplier par des matrices inversibles, et si A est elle-même inversible, le résultat de ces multiplications sera toujours une matrice inversible. Si donc à un moment on obtient une matrice **NON** inversible en cours de calcul, c'est le signe certain que A **N'était PAS** inversible.

— À présent, faisons l'hypothèse que nous avons réussi à transformer A en I_n par des opérations élémentaires $P_1, \ldots, P_r$ sur les **LIGNES**, dans cet ordre. Matriciellement, cela revient à dire que $P_r \ldots P_1 A = I_n$ — multiplications à **GAUCHE**. Or les matrices $P_1, \ldots, P_r$ sont inversibles, donc $A = P_1^{-1} \ldots P_r^{-1}$, et ainsi A est inversible. Que vaut son inverse ? Tout simplement : $\quad A^{-1} = P_r \ldots P_1 = P_r \ldots P_1 I_n$. $\quad$ Conclusion inattendue : les mêmes opérations qui ont transformé A en I_n permettent de transformer I_n en A^{-1}.

— Ci-dessus, on a travaillé **SEULEMENT SUR LES LIGNES** de A, mais on aurait pu travailler **SEULEMENT SUR SES COLONNES**. Choisissez ce que vous préférez, mais gardez le cap.

Pour toutes matrices $A, B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on notera finalement $A \underset{\mathrm{L}}{\sim} B$ la proposition « On peut passer de A à B par des opérations sur les lignes seulement », $A \underset{\mathrm{C}}{\sim} B$ la proposition analogue sur les colonnes seulement, et $A \sim B$ la proposition « On peut passer de A à B par des opérations faites indifféremment sur les lignes et les colonnes ».

Exemple La matrice $A = \begin{pmatrix}1&3&1\\1&2&2\\1&2&1\end{pmatrix}$ est inversible d'inverse $\begin{pmatrix}-2&-1&4\\1&0&-1\\0&1&-1\end{pmatrix}$.

Démonstration Dans cet exemple, on va tâcher de comprendre en quoi notre nouvelle méthode d'inversibilité n'est qu'une reformulation de la précédente en termes de systèmes linéaires. Sur une copie, concrètement, choisissez la méthode que vous préférez. Pour tous $(x,y,z),(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$:

$$\overbrace{\begin{pmatrix}1&3&1\\1&2&2\\1&2&1\end{pmatrix}}^{A} \qquad \left\{\begin{array}{rcl} x+3y+z &=& a\\ x+2y+2z &=& b\\ x+2y+z &=& c\end{array}\right. \qquad \overbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}}^{I_3}$$

$$\begin{pmatrix}1&3&1\\0&1&-1\\0&1&0\end{pmatrix} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \left\{\begin{array}{rcl} x+3y+z &=& a\\ y-z &=& a-b\\ y &=& a-c\end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_1 - L_2\\ L_3 \leftarrow L_1 - L_3\end{array} \qquad \begin{pmatrix}1&0&0\\1&-1&0\\1&0&-1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&3&1\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \left\{\begin{array}{rcl} x+3y+z &=& a\\ y-z &=& a-b\\ z &=& b-c\end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_2\end{array} \qquad \begin{pmatrix}1&0&0\\1&-1&0\\0&1&-1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&3&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \left\{\begin{array}{rcl} x+3y &=& a-b+c\\ y &=& a-c\\ z &=& b-c\end{array}\right. \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_3\\ L_2 \leftarrow L_2 + L_3\\ \\ \end{array} \qquad \begin{pmatrix}1&-1&1\\1&0&-1\\0&1&-1\end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}}_{I_3} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \left\{\begin{array}{rcl} x &=& -2a-b+4c\\ y &=& a-c\\ z &=& b-c.\end{array}\right. \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - 3L_2\\ \\ \\ \end{array} \qquad \underbrace{\begin{pmatrix}-2&-1&4\\1&0&-1\\0&1&-1\end{pmatrix}}_{A^{-1}}$$

Transformation de A en I_3
par des opérations élémentaires
SUR LES LIGNES.

Transformation de I_3 en A^{-1}
par report des mêmes opérations élémentaires
qui ont changé A en I_3.

Sur une copie, on rédige ainsi la première partie du calcul de A vers I_3 :

$$A = \begin{pmatrix}1&3&1\\1&2&2\\1&2&1\end{pmatrix} \underset{\mathrm{L}}{\sim} \begin{pmatrix}1&3&1\\0&1&-1\\0&1&0\end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_1 - L_2\\ L_3 \leftarrow L_1 - L_3\end{array} \quad \underset{\mathrm{L}}{\sim} \begin{pmatrix}1&3&1\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \quad \underset{\mathrm{L}}{\sim} \begin{pmatrix}1&3&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_3\\ L_2 \leftarrow L_2 + L_3\end{array}$$

$$\underset{\mathrm{L}}{\sim} \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} = I_3 \quad L_1 \leftarrow L_1 - 3L_2,$$

puis on reporte les opérations effectuées sur I_3, dans le même ordre, pour obtenir A^{-1} :

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = A^{-1}.$$

Exemple La matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible car :

$$B \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow L_1 + L_2 \quad \underset{L}{\sim} \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}^{\text{Non inversible}} \quad L_3 \leftarrow L_2 + 3L_3.$$

Tout produit de matrices inversibles est une matrice inversible, donc si on obtient une matrice **NON** inversible après avoir multiplié B par des matrices inversibles, c'est que B **N'**est **PAS** inversible.

3.4 MATRICES TRIANGULAIRES INVERSIBLES

L'inversibilité des matrices diagonales était facile à étudier. Qu'en est-il plus généralement des matrices triangulaires ?

Théorème **(Inversibilité et inverse d'une matrice triangulaire)** Une matrice triangulaire A est inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux sont tous non nuls. Dans ce cas, A^{-1} est elle aussi triangulaire de même type et ses coefficients diagonaux sont exactement les inverses des coefficients diagonaux de A.

Démonstration Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ & & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ triangulaire supérieure.

Nous allons tâcher de transformer A en I_n grâce à des opérations élémentaires sur les colonnes, que nous reporterons au fur et à mesure sur I_n pour la voir devenir peu à peu A^{-1} lorsque A est inversible.

- Si a_{11} est nul, la première colonne de A est nulle, donc A n'est pas inversible. Dans le cas contraire, l'opération $C_1 \leftarrow \dfrac{1}{a_{11}} C_1$ transforme le coefficient a_{11} en 1 et on peut annuler ensuite tous les coefficients de A situés à droite de ce 1 grâce à des opérations élémentaires sur les colonnes en l'utilisant comme pivot. Les matrices A et I_n deviennent :
$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad I'_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_{11}} & \times & \cdots & \times \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}.$$
- On continue. Si a_{22} est nul, la deuxième colonne de A' est nulle, donc A' n'est pas inversible, donc A ne l'est pas non plus. Dans le cas contraire, l'opération $C_2 \leftarrow \dfrac{1}{a_{22}} C_2$ transforme le coefficient a_{22} en 1 et on peut annuler ensuite tous les coefficients de A' situés à droite de ce 1 grâce à des opérations élémentaires sur les colonnes en l'utilisant comme pivot. Les matrices A' et I'_n deviennent :
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \begin{pmatrix} \frac{1}{a_{11}} & \times & \times & \cdots & \times \\ & \frac{1}{a_{22}} & \times & \cdots & \times \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}.$$
- Et ainsi de suite. Finalement, si l'un des coefficients diagonaux de A est nul, la démarche algorithmique qui précède montre que A n'est pas inversible, et si au contraire tous sont non nuls, A est inversible et son inverse A^{-1} est une matrice triangulaire supérieure de coefficients diagonaux les inverses de ceux de A.
- Et si A est triangulaire inférieure ? Dans ce cas, $A^\top$ est triangulaire supérieure, donc inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux sont tous non nuls. Or A et $A^\top$ ont les mêmes coefficients diagonaux, et A est inversible si et seulement si $A^\top$ l'est, donc A est inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux sont tous non nuls. Le cas échéant : $\left(A^{-1}\right)^\top = \left(A^\top\right)^{-1}$, donc $A^{-1} = \left(\left(A^\top\right)^{-1}\right)^\top$, or nous venons de voir que $\left(A^\top\right)^{-1}$ est triangulaire supérieure, donc sa transposée A^{-1} est triangulaire inférieure.

Un système linéaire est dit *triangulaire* si sa matrice l'est. Le théorème qui suit découle directement du précédent.

Théorème **(Système triangulaire à coefficients diagonaux non nuls)** Tout système triangulaire à coefficients diagonaux non nuls possède une et une seule solution.