NOMBRES COMPLEXES ET TRIGONOMÉTRIE

1 PRÉSENTATION INFORMELLE DE L'EXPONENTIELLE COMPLEXE

Cette première partie du chapitre est plus un survol destiné à vous séduire et lever le voile sur certains phénomènes qu'un voyage sur la terre ferme au cours duquel on démontrerait tout.

Nous verrons plus tard dans l'année que pour tout $z \in \mathbb{C}$, la suite complexe $\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. Par définition, sa limite est notée e^z et appelée *exponentielle (de)* z.

$$e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Ne sommes-nous pas cependant en train de donner une deuxième signification à la notation e^x pour tout $x \in \mathbb{R}$ alors qu'elle en a déjà une ? Heureusement non, les deux exponentielles coïncident. Pour le comprendre, n'oubliez pas que la fonction exponentielle qu'on vous a introduite en Première est la seule fonction $f \in \mathscr{D}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ pour laquelle $f' = f$ et $f(0) = 1$. Or il se trouve que notre nouvelle exponentielle possède ces propriétés. En principe, une somme infinie ne se dérive pas comme une somme finie, mais on peut montrer que dans le cas qui nous occupe, les choses se passent bien. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\frac{d}{dx}\left(e^x\right) = \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}\right) \overset{\text{Gonflé !}}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d}{dx}\left(\frac{x^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{nx^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x \qquad \text{et} \qquad e^0 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{0^n}{n!} = 0^0 = 1.$$

Plus généralement, étant donnés un intervalle I et une fonction $\varphi \in \mathscr{D}(I,\mathbb{C})$, dérivons la fonction complexe e^φ :

$$\left(e^\varphi\right)' = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\varphi^n}{n!}\right)' \overset{\text{Gonflé !}}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n\varphi'\varphi^{n-1}}{n!} = \varphi' \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varphi^{n-1}}{(n-1)!} = \varphi' \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\varphi^k}{k!} = \varphi' e^\varphi.$$

Intéressons-nous à présent au produit de deux exponentielles et autorisons-nous à manipuler les sommes infinies avec légèreté. Nous verrons plus tard que les calculs qui suivent sont corrects, mais ça n'a rien d'évident. Pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} e^z e^{z'} &= \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{z^i}{i!} \times \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{z'^j}{j!} = \sum_{i,j\geqslant 0} \frac{z^i z'^j}{i!j!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{\substack{i,j\geqslant 0 \\ i+j=n}} \frac{z^i z'^j}{i!j!} \qquad \text{après regroupement des termes en fonction de } i+j \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{i=0}^{n} \frac{z^i z'^{n-i}}{i!(n-i)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} z^i z'^{n-i} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z+z')^n}{n!} = e^{z+z'}. \end{aligned}$$

Qui eût cru que la relation : $e^{z+z'} = e^z e^{z'}$ était une autre manière d'énoncer la formule du binôme ? En particulier, pour tout $z \in \mathbb{C}$: $e^z e^{-z} = e^0 = 1$, donc d'une part : $e^z \neq 0$, et d'autre part : $\frac{1}{e^z} = e^{-z}$.

Autre relation utile, pour tout $z \in \mathbb{C}$: $\overline{e^z} = \overline{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\overline{z}^n}{n!} = e^{\overline{z}}$. Il en découle que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\left|e^{ix}\right|^2 = e^{ix}\,\overline{e^{ix}} = e^{ix}\,e^{\overline{ix}} = e^{ix}\,e^{-ix} = e^{ix-ix} = e^0 = 1,$$

i.e. que e^{ix} appartient à l'ensemble $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module 1.

On définit finalement les fonctions cosinus et sinus à partir de l'exponentielle complexe en posant pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\cos x = \mathrm{Re}\left(e^{ix}\right) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin x = \mathrm{Im}\left(e^{ix}\right) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

Les fonctions ainsi définies sont de banales fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$: $e^{ix} = \cos x + i\sin x$. En termes de module, cette relation montre que : $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, et si nous la dérivons, que :

$$\cos'(x) + i\sin'(x) = \frac{d}{dx}\left(e^{ix}\right) = i \times e^{ix} = i \times (\cos x + i\sin x) = -\sin x + i\cos x,$$

donc par identification des parties réelle et imaginaire : $\cos' = -\sin$ et $\sin' = \cos$.

Dernier calcul essentiel, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \cos(x+y) + i\sin(x+y) &= e^{i(x+y)} = e^{ix}e^{iy} = (\cos x + i\sin x)(\cos y + i\sin y) \\ &= \big(\cos x\cos y - \sin x\sin y\big) + i\big(\sin x\cos y + \cos x\sin y\big), \end{aligned}$$

donc par identification des parties réelle et imaginaire : $\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y$

et : $\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y$. Beurk !

Je ne m'aventurerai pas plus loin sur ce sentier qui pose plus de questions qu'il n'apporte de réponses. Si on suivait la piste jusqu'au bout, on parviendrait à définir le nombre π lui-même à partir de l'exponentielle complexe en montrant que les solutions de l'équation $e^{ix} = 1$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ sont tous les multiples d'un certain réel positif, 2π par définition.

Mais trêve de bavardages ! Oubliez les détails qui précèdent et retenez ceci : **LA TRIGONOMÉTRIE EST FONDAMENTALEMENT UNE AFFAIRE DE NOMBRES COMPLEXES.** Au premier abord, $\mathbb{C}$ semble tout droit sorti du cerveau d'un matheux fou. Il est pourtant clair que la relation : $e^{i(x+y)} = e^{ix}\, e^{iy}$ est plus satisfaisante que les formules d'addition : $\cos(x+y) = \ldots$ et $\sin(x+y) = \ldots$! L'exponentielle complexe est au fond le thème de ce chapitre et le bon objet duquel nous partirions proprement si nous en avions les moyens. Nous ne les avons pas, c'est comme ça, mais vous en savez tout de même un peu plus à présent. Je m'appuierai désormais ci-dessous uniquement sur vos connaissances du lycée.

2 Fonctions cosinus, sinus et tangente

2.1 Relations de congruence

Définition (Relations de congruence, ensembles $\alpha\mathbb{Z}+\beta$) Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on dit que x *est congru à y modulo α*, ce qu'on note : $x \equiv y\ [\alpha]$, si pour un certain $k \in \mathbb{Z}$: $x = y + k\alpha$.

L'ensemble $\big\{x \in \mathbb{R} \mid\ x \equiv \beta\ [\alpha]\big\} = \big\{\beta + k\alpha \mid\ k \in \mathbb{Z}\big\}$ est généralement noté $\alpha\mathbb{Z}+\beta$ ou $\beta + \alpha\mathbb{Z}$.

Exemple

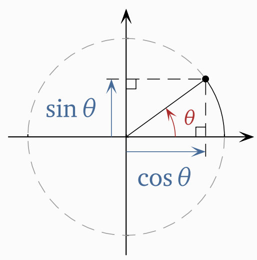
- Être pair c'est être congru à 0 modulo 2, être impair c'est être congru à 1 modulo 2. L'ensemble des entiers pairs est donc $2\mathbb{Z}$ tandis que l'ensemble des entiers impairs est $2\mathbb{Z}+1$.
- Les mesures d'angles orientés sont définies modulo 2π : $11\pi \equiv \pi\ [2\pi]$ et $-\dfrac{\pi}{2} \equiv \dfrac{3\pi}{2}\ [2\pi]$.
- On peut généraliser la notation « $\alpha\mathbb{Z}+\beta$ ». Par exemple, $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[+ \pi\mathbb{Z}$ est l'ensemble des réels de la forme $x + k\pi$, x décrivant $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ et k décrivant $\mathbb{Z}$. Dans ce cas particulier, il se trouve que : $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[+ \pi\mathbb{Z} = \mathbb{R} \setminus \left(\dfrac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$.

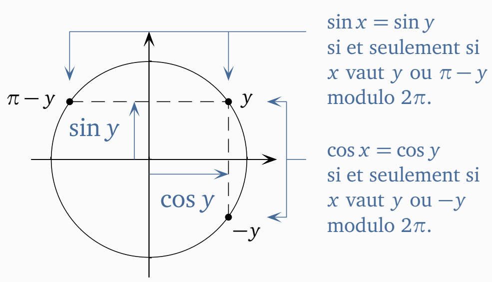
2.2 Fonctions cosinus et sinus

Définition-théorème (Fonctions cosinus et sinus, lien avec le cercle trigonométrique)

- **Lien avec le cercle trigonométrique :** Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$: $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$.

  Réciproquement, pour tout couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ pour lequel $x^2 + y^2 = 1$, il existe un réel θ, unique modulo 2π, pour lequel $(x, y) = (\cos\theta, \sin\theta)$. Géométriquement, ce résultat signifie que tout point du cercle trigonométrique a des coordonnées de la forme $(\cos\theta, \sin\theta)$.





- **Résolution d'équations :** Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \cos x = \cos y \iff x \equiv y\ [2\pi] \quad \text{ou} \quad x \equiv -y\ [2\pi]. \\ \sin x = \sin y \iff x \equiv y\ [2\pi] \quad \text{ou} \quad x \equiv \pi - y\ [2\pi]. \end{cases}$$

- **Transformations affines :** Les relations suivantes se lisent toutes sur le cercle trigonométrique. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$\sin(x+\pi) = -\sin x$	$\sin(\pi - x) = \sin x$	$\sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) = \cos x$	$\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$
$\cos(x+\pi) = -\cos x$	$\cos(\pi - x) = -\cos x$	$\cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) = -\sin x$	$\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$

D'après les relations : $\cos(x+\pi) = -\cos x$ et $\sin(x+\pi) = -\sin x$, ajouter π dans un cosinus ou un sinus revient à le multiplier par -1. Ajouter $k\pi = \pi + \ldots + \pi$ revient donc à multiplier par $(-1)\times\ldots\times(-1) = (-1)^k$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

En d'autres termes : $\boxed{\cos(x+k\pi) = (-1)^k \cos x \quad \text{et} \quad \sin(x+k\pi) = (-1)^k \sin x.}$ En particulier : $\cos(k\pi) = (-1)^k$ et : $\sin(k\pi) = 0$.

Attention ! $\boxed{\cos x = \cos y \quad \not\Longleftrightarrow \quad x = y.}$ À peine mieux : $\boxed{\cos x = \cos y \quad \not\Longleftrightarrow \quad x \equiv y\ [2\pi].}$

Exemple Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\sin x = \cos x \iff x \equiv \frac{\pi}{4}\ [\pi]$.

Démonstration Cette équivalence se lit bien sur le cercle trigonométrique, mais on peut aussi la démontrer par le calcul. Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\sin x = \cos x \iff \sin x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

$$\iff x \equiv \frac{\pi}{2} - x\ [2\pi] \ \text{ou}\ x \equiv \pi - \left(\frac{\pi}{2} - x\right)\ [2\pi] \iff 2x \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi] \ \text{ou}\ \overbrace{0 \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]}^{\text{Impossible}} \iff x \equiv \frac{\pi}{4}\ [\pi].$$

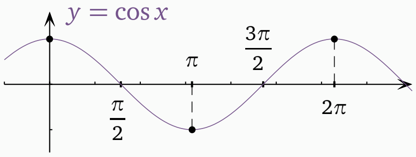
Les valeurs remarquables du cosinus, du sinus et de la tangente (paragraphe suivant) doivent être connues PAR CŒUR !

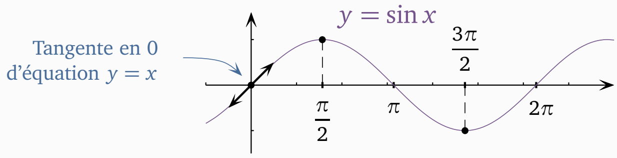
x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan x$	0	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$	

Définition-théorème (Fonctions cosinus et sinus, aspects fonctionnels)

- **Fonction cosinus :** La fonction cos est paire, 2π-périodique, indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$, et : $\cos' = -\sin$.
- **Fonction sinus :** La fonction sin est impaire, 2π-périodique, indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$, et : $\sin' = \cos$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $|\sin x| \leqslant |x|$. En outre : $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, autrement dit : $\sin x \approx x$ pour $x \approx 0$.





Démonstration La limite : $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ n'est rien de plus que le nombre dérivé de la fonction sin en 0. Ensuite, la fonction sin est concave sur $[0,\pi]$ car sa dérivée cos y est décroissante, donc pour tout $x \in [0,\pi]$: $|\sin x| = \sin x \leqslant \sin'(0)\,x + \sin 0 = 0$. A fortiori, pour tout $x \in [-\pi, 0]$: $|\sin x| = \big|\sin(-x)\big| \leqslant |-x| = |x|$. Enfin, l'inégalité est triviale pour $x > \pi$ et $x < \pi$: $|\sin x| \leqslant 1 \leqslant \pi \leqslant |x|$.

Théorème (Fonctions cosinus et sinus, formules d'addition et de produit) Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$
$$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$
$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$
$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}\Big(\cos(x-y) - \cos(x+y)\Big)$$
$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}\Big(\sin(x+y) + \sin(x-y)\Big)$$
$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}\Big(\cos(x+y) + \cos(x-y)\Big)$$

Pour $x = y$, ces relations s'appellent *formules de duplication* : $\sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}$, $\cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2}$,

$$\sin(2x) = 2\sin x \cos x \qquad \text{et} \qquad \cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x.$$

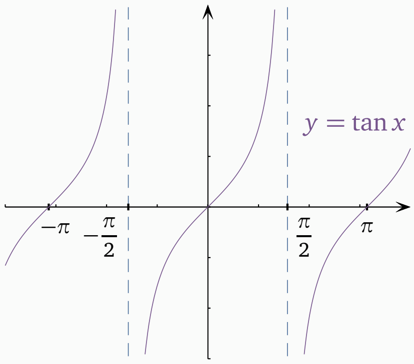
Les formules d'addition et de duplication doivent être connues PAR CŒUR — et ce même si les secondes découlent des premières. En revanche, vous devez juste savoir retrouver vite et bien les formules de produit, si possible de tête.

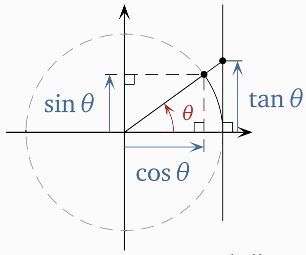
2.3 Fonction tangente

Définition-théorème (Fonction tangente)

- **Définition et régularité :** On appelle *fonction tangente* la fonction définie sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[+\pi\mathbb{Z}$ par : $\tan=\frac{\sin}{\cos}$. Impaire et π-périodique, tan est indéfiniment dérivable sur son ensemble de définition et :

$$\tan'=1+\tan^2=\frac{1}{\cos^2}.$$





Merci Thalès !
$$\frac{\text{grand}}{\text{petit}}=\frac{1}{\cos\theta}=\frac{\tan\theta}{\sin\theta}$$

- **Résolution d'équations :** Pour tous $x,y\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[+\pi\mathbb{Z}$: $\quad \tan x=\tan y \iff x\equiv y\ [\pi].$
- **Formules d'addition et de duplication :** Les formules suivantes sont vraies pour tous les réels x et y pour lesquels chaque terme est bien défini.

$$\tan(x+y)=\frac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\tan y},\qquad \tan(x-y)=\frac{\tan x-\tan y}{1+\tan x\tan y}\qquad\text{et}\qquad \tan(2x)=\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}.$$

- **Expression de $\cos x$, $\sin x$ et $\tan x$ en fonction de $\tan\frac{x}{2}$:** Pour tout $x\in]-\pi,\pi[+2\pi\mathbb{Z}$, si on pose $t=\tan\frac{x}{2}$:

$$\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\qquad \sin x=\frac{2t}{1+t^2}\qquad\text{et}\qquad \tan x=\frac{2t}{1-t^2}.$$

La relation : $\boxed{\tan'=1+\tan^2=\frac{1}{\cos^2}}$ ne sert pas tant à calculer $\tan'$ qu'à transformer cos en tan et vice versa. C'est comme ça qu'il faut la retenir !

Les expressions de $\cos x$, $\sin x$ et $\tan x$ en fonction de $\tan\frac{x}{2}$ ne sont pas à connaître par cœur, vous devez en revanche savoir qu'elles existent et savoir les retrouver rapidement en cas de besoin.

Démonstration

- **Définition :** La tangente est définie là où le cosinus ne s'annule pas, i.e. sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[+\pi\mathbb{Z}$.
- **Imparité :** Pour tout $x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[+\pi\mathbb{Z}$: $\quad \tan(-x)=\frac{\sin(-x)}{\cos(-x)}=\frac{-\sin x}{\cos x}=-\tan x.$
- **Périodicité :** Pour tout $x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[+\pi\mathbb{Z}$: $\quad \tan(x+\pi)=\frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)}=\frac{-\sin x}{-\cos x}=\frac{\sin x}{\cos x}=\tan x.$
  On comprend ici pourquoi la fonction tangente est π-périodique alors que sinus et cosinus ne sont que 2π-périodiques, deux signes « moins » se simplifient.
- **Dérivée :** $\quad \tan'=\frac{\sin'\times\cos-\sin\times\cos'}{\cos^2}=\frac{\cos^2+\sin^2}{\cos^2}$, $\quad$ donc : $\quad \tan'=\frac{1}{\cos^2}=1+\tan^2.$
- **Variations et limites :** Par imparité et π-périodicité, une étude sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ suffit. La fonction tangente est strictement croissante sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ car $\tan'=1+\tan^2>0$. En outre : $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\sin x=1$ et $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\cos x=0^+$, donc $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\tan x=+\infty$.
- **Équation $\tan x=\tan y$:**

$$\tan x=\tan y \iff \frac{\sin x}{\cos x}=\frac{\sin y}{\cos y} \iff \sin x\cos y-\cos x\sin y=0$$
$$\iff \sin(x-y)=0 \iff x-y\equiv 0\,[\pi] \iff x\equiv y\,[\pi].$$

- **Formule $\tan(x+y)$:**

$$\tan(x+y)=\frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)}=\frac{\sin x\cos y+\cos x\sin y}{\cos x\cos y-\sin x\sin y}=\frac{\cos x\cos y\left(\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\sin y}{\cos y}\right)}{\cos x\cos y\left(1-\frac{\sin x}{\cos x}\times\frac{\sin y}{\cos y}\right)}=\frac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\tan y}.$$

- **Expressions en fonction de** $t = \tan\frac{x}{2}$ **:** $\tan x = \tan\left(2 \times \frac{x}{2}\right) = \frac{t+t}{1-t^2} = \frac{2t}{1-t^2}$,

puis : $\sin x = \sin\left(2\times\frac{x}{2}\right) = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\tan\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2} = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}$

et enfin : $\cos x = \frac{\sin x}{\tan x} = \frac{\frac{2t}{1+t^2}}{\frac{2t}{1-t^2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$.

3 Fonctions arccosinus, arcsinus et arctangente

Périodiques, les fonctions cosinus, sinus et tangente ne sont pas injectives sur leurs ensembles de définition. Impossible de leur trouver une réciproque ! Par exemple, l'équation $\cos x = \frac{1}{2}$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ a **plein** de solutions, en l'occurrence tous les réels congrus à $\frac{\pi}{3}$ ou $-\frac{\pi}{3}$ modulo 2π, et aucun de ces réels n'est a priori plus recevable que les autres. Cela dit, il est intéressant d'observer que d'après le TVI strictement monotone :

— la restriction $\cos|_{[0,\pi]}$ est bijective de $[0,\pi]$ sur $[-1,1]$,

— la restriction $\sin|_{\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]}$ est bijective de $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ sur $[-1,1]$,

— la restriction $\tan|_{\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[}$ est bijective de $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$.

L'équation $\cos x = \frac{1}{2}$ d'inconnue $x \in [0,\pi]$ ne possède à présent plus qu'une seule solution, à savoir $\frac{\pi}{3}$. En restreignant le champ des possibles, nous avons créé de l'injectivité. On aurait bien sûr pu choisir d'autres domaines que $[0,\pi]$, mais ce choix arbitraire est désormais officiellement arrêté une fois pour toutes.

	cos	sin	tan
Domaine privilégié	$[0,\pi]$	$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$	$\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

Définition (Fonctions arccosinus, arcsinus et arctangente)

- **Arccosinus :** La fonction $\cos|_{[0,\pi]}$ est bijective de $[0,\pi]$ sur $[-1,1]$. Sa réciproque est appelée la fonction *arccosinus* et notée Arccos.

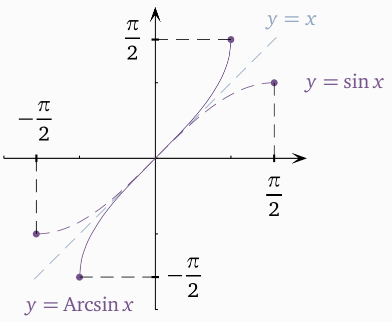
  Pour tout $x \in [-1,1]$, $\mathrm{Arccos}\,x$ est l'unique réel θ de $[0,\pi]$ pour lequel $\cos\theta = x$.

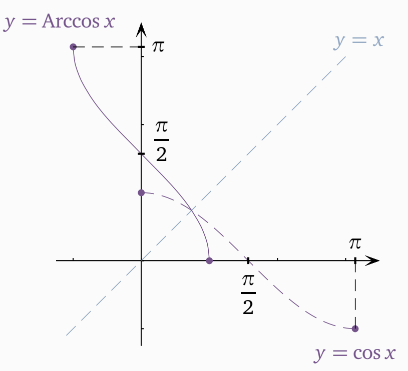
- **Arcsinus :** La fonction $\sin|_{\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]}$ est bijective de $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ sur $[-1,1]$.

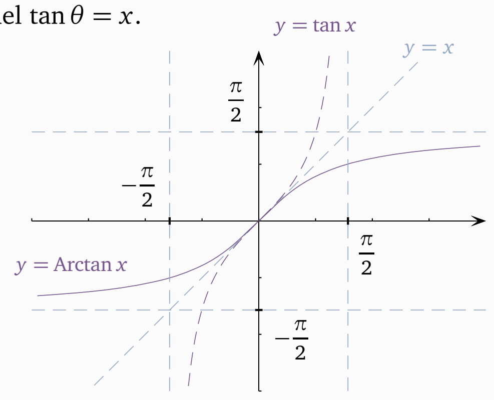
  Pour tout $x \in [-1,1]$, $\mathrm{Arcsin}\,x$ est l'unique réel θ de $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ pour lequel $\sin\theta = x$.

- **Arctangente :** La fonction $\tan|_{\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[}$ est bijective de $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$.

  Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{Arctan}\,x$ est l'unique réel θ de $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ pour lequel $\tan\theta = x$.







x	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\text{Arcsin}\, x$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\text{Arccos}\, x$	π	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$\text{Arctan}\, x$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$

✖ **Attention !** Arccos n'est pas la réciproque de la fonction cosinus, mais celle de $\cos_{|[0,\pi]}$ et ça change tout.

- Pour tout $x \in [-1,1]$, $\text{Arccos}\, x$ est l'unique réel $\theta \in [0,\pi]$ pour lequel $\cos\theta = x$, donc $\cos \text{Arccos}\, x = x$.
- En revanche, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\text{Arccos} \cos x$ est l'unique réel $\theta \in [0,\pi]$ pour lequel $\cos\theta = \cos x$. Ce n'est donc pas forcément x ! Question : x appartient-il au domaine privilégié $[0,\pi]$ ou non ?
  Par exemple : $\text{Arccos} \cos(2\pi) = \text{Arccos}\, 1 = 0 \neq 2\pi$.

Vrai : $\forall x \in [-1,1], \ \cos \text{Arccos}\, x = x$. **Faux :** $\forall x \cancel{\in \mathbb{R}}, \ \text{Arccos} \cos x = x$. **Vrai :** $\forall x \in [0,\pi], \ \text{Arccos} \cos x = x$.

Cette mise en garde est bien sûr valable, en l'adaptant, pour les fonctions Arcsin et Arctan.

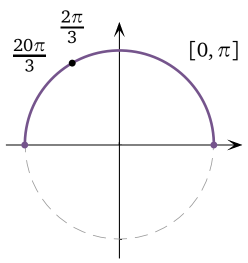
Exemple On veut résoudre l'équation $\cos x = \frac{1}{3}$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

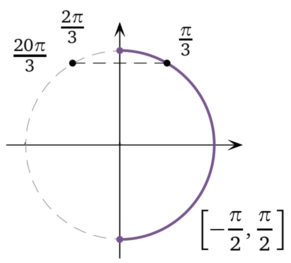
Démonstration Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\cos x = \frac{1}{3} \iff \cos x = \cos \text{Arccos} \frac{1}{3} \iff x \equiv \pm \text{Arccos} \frac{1}{3} \ [2\pi]$.
L'ensemble des solutions cherché est donc la réunion $\left(\text{Arccos} \frac{1}{3} + 2\pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(-\text{Arccos} \frac{1}{3} + 2\pi\mathbb{Z}\right)$.

Exemple $\text{Arccos} \cos \frac{20\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$ et $\text{Arcsin} \sin \frac{20\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$.

Démonstration Dans les deux cas, on commence par placer $\frac{20\pi}{3}$ sur le cercle trigonométrique ainsi que le domaine privilégié de la fonction sinus ou cosinus concernée.

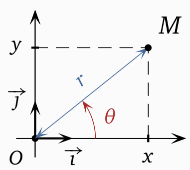
- **Arccosinus :** $\frac{20\pi}{3}$ appartient à 2π près au domaine privilégié du cosinus : $\frac{20\pi}{3} \in [0,\pi] + 2\pi\mathbb{Z}$. Il suffit donc d'ôter un certain nombre de fois 2π et c'est fini.
- **Arcsinus :** $\frac{20\pi}{3}$ N'appartient PAS au domaine privilégié du sinus : $\frac{20\pi}{3} \notin \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] + 2\pi\mathbb{Z}$, même à 2π près. Nous pouvons cependant nous y ramener À SINUS CONSTANT grâce à la relation : $\sin(\pi - x) = \sin x$.
  Par 2π-périodicité : $\sin \frac{20\pi}{3} = \sin \frac{2\pi}{3}$, puis : $\sin \frac{20\pi}{3} = \sin\left(\pi - \frac{2\pi}{3}\right) = \sin \frac{\pi}{3}$, et $\frac{\pi}{3} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.





Théorème (Lien entre les coordonnées cartésiennes et les coordonnées polaires) Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. Soit M un point de coordonnées cartésiennes (x,y) et de coordonnées polaires (r,θ).

(i) $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ et $r = \sqrt{x^2+y^2}$. (ii) $\theta \equiv \begin{cases} \text{Arctan}\, \frac{y}{x} \ [2\pi] & \text{si } x > 0 \\ \pi + \text{Arctan}\, \frac{y}{x} \ [2\pi] & \text{si } x < 0. \end{cases}$



Démonstration

(i) $\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} = r\left(\cos\theta\,\vec{\imath} + \sin\theta\,\vec{\jmath}\right)$, donc $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$ par identification des coordonnées. Enfin : $r = \left\|\overrightarrow{OM}\right\| = \sqrt{x^2+y^2}$.

(ii) **Cas où $x > 0$:** Pour un certain $k \in \mathbb{Z}$: $\theta - 2k\pi \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, or $\tan(\theta - 2k\pi) = \tan\theta = \frac{r\sin\theta}{r\cos\theta} = \frac{y}{x}$, donc $\theta - 2k\pi = \operatorname{Arctan}\frac{y}{x}$, et enfin $\theta \equiv \operatorname{Arctan}\frac{y}{x}\ [2\pi]$.

Cas où $x < 0$: Pour un certain $k \in \mathbb{Z}$: $\theta - 2k\pi \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$, donc $\theta - 2k\pi - \pi \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, or $\tan(\theta - \pi - 2k\pi) = \tan\theta = \frac{y}{x}$, donc $\theta \equiv \pi + \operatorname{Arctan}\frac{y}{x}\ [2\pi]$.

On a choisi d'exprimer θ comme une arctangente, mais on aurait pu l'exprimer comme un arccosinus ou un arcsinus, la stratégie est toujours la même. On place le point M dans l'un des quatre quadrants que le repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ délimite, puis selon qu'on souhaite atteindre un arccosinus ou un arcsinus, on ramène θ dans le domaine privilégié adapté.

Exemple Avec les notations du théorème, faisons l'hypothèse que $x > 0$ et $y < 0$. On peut donc choisir θ dans $\left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$, mais comment l'exprimer comme un arccosinus ou un arcsinus ?

Démonstration

- **Arccosinus :** θ n'appartient pas au domaine privilégié $[0,\pi]$, même à 2π près, mais nous pouvons l'y ramener **À COSINUS CONSTANT** grâce à la relation : $\cos(-x) = \cos x$. Ainsi $\cos(-\theta) = \cos\theta = \frac{x}{r}$, et comme $-\theta$ appartient à $[0,\pi]$: $-\theta = \operatorname{Arccos}\frac{x}{r}$, donc $\theta = -\operatorname{Arccos}\frac{x}{r}$.
- **Arcsinus :** θ appartient au domaine privilégié $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et $\sin\theta = \frac{y}{r}$, donc $\theta = \operatorname{Arcsin}\frac{y}{r}$.

Théorème (Propriétés des fonctions arccosinus, arcsinus et arctangente)

- **Une relation mixte :** Pour tout $x \in [-1,1]$: $\cos\operatorname{Arcsin} x = \sin\operatorname{Arccos} x = \sqrt{1-x^2}$.
- **Arccosinus :** Arccos est continue sur $[-1,1]$ **MAIS** dérivable seulement sur $]-1,1[$. Pour tout $x \in]-1,1[$:
$$\operatorname{Arccos}'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$
- **Arcsinus :** Arcsin est impaire et continue sur $[-1,1]$ **MAIS** dérivable seulement sur $]-1,1[$. Pour tout $x \in]-1,1[$:
$$\operatorname{Arcsin}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$
- **Arctangente :** Arctan est impaire et indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\operatorname{Arctan}'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

La non-dérivabilité d'Arccos et Arcsin en ± 1 s'explique bien géométriquement, les tangentes horizontales de sin et cos deviennent verticales quand on les symétrise par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Démonstration (Fonction arcsinus)

- **Continuité/imparité :** La fonction $\sin|_{\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]}$ est bijective de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $[-1,1]$ et continue/impaire, donc d'après le théorème de continuité/imparité d'une réciproque, sa réciproque $\operatorname{Arcsin} = \left(\sin|_{\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]}\right)^{-1}$ est continue/impaire sur $[-1,1]$.
- **Relation $\cos\operatorname{Arcsin} x$:** Pour tout $x \in [-1,1]$: $\operatorname{Arcsin} x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, donc $\cos\operatorname{Arcsin} x \geqslant 0$, donc :
$$\cos\operatorname{Arcsin} x = \left|\cos\operatorname{Arcsin} x\right| = \sqrt{1-\sin^2\operatorname{Arcsin} x} = \sqrt{1-x^2}.$$
- **Dérivabilité et dérivée :** La fonction $\sin|_{\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[}$ est bijective de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $]-1,1[$, dérivable, et sa dérivée $\sin' = \cos$ ne s'annule pas sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, donc d'après le théorème de dérivabilité d'une réciproque, Arcsin est dérivable sur $]-1,1[$ et pour tout $x \in]-1,1[$:
$$\operatorname{Arcsin}'(x) = \frac{1}{\sin' \circ \operatorname{Arcsin}(x)} = \frac{1}{\cos\operatorname{Arcsin} x} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$
Le théorème de dérivabilité ne nous dit rien de la dérivabilité d'Arcsin en ± 1 car $\cos'(0) = \cos'(\pi) = 0$, mais on peut montrer qu'Arcsin **N'est PAS** dérivable en ces points.

Démonstration **(Fonction arctangente)** Il s'agit là aussi essentiellement d'utiliser le théorème de dérivabilité/imparité d'une réciproque. La situation est cependant plus simple car $\tan'(x) = 1 + \tan^2 x \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Pas de tangente horizontale sur le graphe de la fonction tangente, donc pas de problème de dérivabilité pour Arctan. Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\quad \text{Arctan}'(x) = \dfrac{1}{\tan' \circ \text{Arctan}(x)} = \dfrac{1}{1+\tan^2 \text{Arctan}\, x} = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Exemple $\dfrac{3}{5}$ est l'unique solution de l'équation $\text{Arcsin}\, x = \text{Arccos}\, \dfrac{4}{5}$ d'inconnue $x \in [-1,1]$.

Démonstration Pour tous $x \in [-1,1]$ et $y \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$: $\quad y = \text{Arcsin}\, x \iff x = \sin y \quad$ par définition de l'arcsinus. Le point important qu'on oublie trop facilement, c'est que **LE RÉEL** y **DOIT APPARTENIR À** $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ pour que cette équivalence soit vraie. En l'occurrence, ici : $\quad \text{Arccos}\, \dfrac{4}{5} \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right] \quad$ car $\dfrac{4}{5} \in [0,1]$. Du coup, pour tout $x \in [-1,1]$:

$$\text{Arcsin}\, x = \text{Arccos}\, \frac{4}{5} \iff x = \sin \text{Arccos}\, \frac{4}{5} \iff x = \sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{3}{5}.$$

Exemple Pour tout $x \in [-1,1]$: $\quad \text{Arcsin}\, x + \text{Arccos}\, x = \dfrac{\pi}{2}$.

Démonstration Il s'agit de montrer que la fonction $x \overset{f}{\longmapsto} \text{Arcsin}\, x + \text{Arccos}\, x$ est constante sur $[-1,1]$ de valeur $\dfrac{\pi}{2}$. Or cette fonction est dérivable sur l'**INTERVALLE** ouvert $]-1,1[$ et sa dérivée est la fonction nulle, donc f est constante. Quelle valeur ? Nous pouvons la calculer en 0 par exemple : $\quad f(0) = \text{Arcsin}\, 0 + \text{Arccos}\, 0 = 0 + \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{2}$, et $f(1)$ et $f(-1)$ valent la même chose par continuité de f sur l'intervalle fermé $[-1,1]$.

Exemple Pour tout $x > 0$: $\quad \text{Arctan}\, x + \text{Arctan}\, \dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2} \quad$ et pour tout $x < 0$: $\quad \text{Arctan}\, x + \text{Arctan}\, \dfrac{1}{x} = -\dfrac{\pi}{2}$.

Démonstration La fonction $x \overset{f}{\longmapsto} \text{Arctan}\, x + \text{Arctan}\, \dfrac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \left(-\frac{1}{x^2}\right) \times \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0.$$

Comme $\mathbb{R}^* =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ **N'est PAS** un **INTERVALLE**, on ne peut pas en déduire que f est constante sur $\mathbb{R}^*$ tout entier, mais seulement qu'elle l'est sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$ indépendamment. Quelles valeurs ? Calculons $f(1)$: $f(1) = 2\,\text{Arctan}\, 1 = 2 \times \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2}$. $\quad$ Pour la valeur de f sur $\mathbb{R}_-^*$, remarquer simplement que f est impaire.

Exemple On veut résoudre l'équation $\text{Arccos}\, x = \text{Arcsin}\, x$ d'inconnue $x \in [-1,1]$.

Démonstration On a bien envie de passer au cosinus (ou au sinus) des deux côtés de l'équation, **MAIS** on modifie l'équation en faisant cela, on perd l'équivalence car en toute généralité : $\quad \cos x = \cos y \not\Longrightarrow x = y$, autrement dit la fonction cosinus **N'est PAS** injective sur $\mathbb{R}$. Elle l'est sur de plus petits domaines sur lesquels elle est strictement monotone, par exemple $[-\pi, , 0]$, $[0, \pi]$ ou $[\pi, 2\pi]$.

C'est parti. Pour tout $x \in [-1,1]$:

$$\begin{aligned} \text{Arccos}\, x = \text{Arcsin}\, x \quad &\overset{\bigstar}{\iff} \quad \cos \text{Arccos}\, x = \cos \text{Arcsin}\, x \quad \text{et} \quad \text{Arcsin}\, x \in [0, \pi] \\ &\qquad\qquad \text{Cette équivalence } \bigstar \text{ est LE passage délicat, justifié plus loin.} \\ &\iff \quad x = \sqrt{1-x^2} \quad \text{et} \quad x \in [0,1] \qquad \text{après contemplation du graphe de la fonction arcsinus} \\ &\iff \quad x^2 = 1 - x^2 \quad \text{et} \quad x \in [0,1] \quad \iff \quad x = \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Justification de l'équivalence $\bigstar$ **:** Cette équivalence est la seule difficulté de l'équation et on ne peut pas s'en tirer sans réfléchir. N'espérez pas « la méthode » qui vous évitera de réfléchir, il n'y en a pas.

— L'implication : $\quad \text{Arccos}\, x = \text{Arcsin}\, x \implies \cos \text{Arccos}\, x = \cos \text{Arcsin}\, x \quad$ est sans difficulté.

— Le retour n'est possible en revanche que si $\text{Arccos}\, x$ et $\text{Arcsin}\, x$ appartiennent à un même domaine d'injectivité de la fonction cosinus. Ici, $\text{Arccos}\, x$ appartient à $[0, \pi]$, mais $\text{Arcsin}\, x$ appartient a priori à $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ et non pas à $[0, \pi]$. En tout cas, l'implication suivante est correcte :
$$\cos \text{Arccos}\, x = \cos \text{Arcsin}\, x \quad \text{et} \quad \text{Arcsin}\, x \in [0, \pi] \implies \text{Arccos}\, x = \text{Arcsin}\, x.$$

— Mais l'implication : $\quad \text{Arccos}\, x = \text{Arcsin}\, x \implies \cos \text{Arccos}\, x = \cos \text{Arcsin}\, x \quad \text{et} \quad \text{Arcsin}\, x \in [0, \pi]$ l'est-elle ? C'est ce qu'il nous reste à comprendre. Et tout simplement, si $\text{Arccos}\, x = \text{Arcsin}\, x$, alors oui : $\text{Arcsin}\, x = \text{Arccos}\, x \in [0, \pi] \quad$ puisque tous les arccosinus sont dans $[0, \pi]$.

Finissons-en avec la trigonométrie sans complexes — et sans peur — au moyen d'un petit tableau récapitulatif.

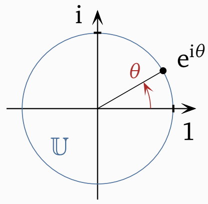
Fonction	Ensemble de définition	Ensemble de dérivabilité	Dérivée
$\sin x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\cos x$
$\cos x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$-\sin x$
$\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$	$\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[+ \pi\mathbb{Z}$	$\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[+ \pi\mathbb{Z}$	$1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
$\operatorname{Arcsin} x$	$[-1, 1]$	$]-1, 1[$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{Arccos} x$	$[-1, 1]$	$]-1, 1[$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{Arctan} x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\dfrac{1}{1+x^2}$

4 Exponentielle complexe et formes trigonométriques

4.1 Nombres complexes de module 1 et exponentielle imaginaire

Tout point du cercle trigonométrique a des coordonnées de la forme $(\cos\theta, \sin\theta)$ pour un certain $\theta \in \mathbb{R}$ unique à 2π près. Le théorème qui suit n'est que la traduction complexe de ce résultat.

Définition-théorème (Ensemble $\mathbb{U}$ et exponentielle imaginaire) On pose : $\mathbb{U} = \left\{z \in \mathbb{C} \mid \ |z| = 1\right\}$ — géométriquement le cercle trigonométrique — et pour tout $\theta \in \mathbb{R}$: $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$.



- **Paramétrisation de $\mathbb{U}$ par l'exponentielle imaginaire :** $\mathbb{U} = \left\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \mid \ \theta \in \mathbb{R}\right\}$
et pour tous $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$: $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'} \iff \theta \equiv \theta' \ [2\pi]$.

- **Propriétés algébriques de l'exponentielle imaginaire :** Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x+y)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}, \qquad \overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} = \frac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}},$$

$$\cos x = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2} \quad \text{et} \quad \sin x = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}} \qquad (\textit{formules d'Euler}),$$

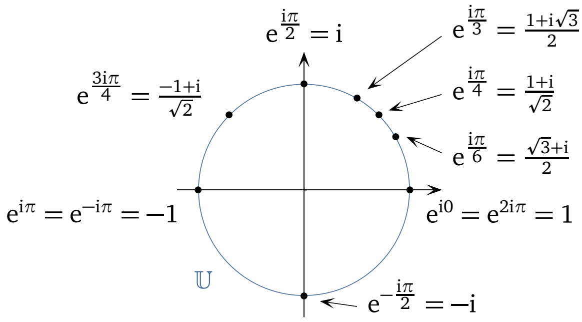
$$\cos(nx) = \mathrm{Re}\big((\cos x + \mathrm{i}\sin x)^n\big) \quad \text{et} \quad \sin(nx) = \mathrm{Im}\big((\cos x + \mathrm{i}\sin x)^n\big) \qquad (\textit{formules de Moivre}).$$

Démonstration Pour les formules d'Euler, n'oublions pas que : $\mathrm{Re}(z) = \dfrac{z+\overline{z}}{2}$ et $\mathrm{Im}(z) = \dfrac{z-\overline{z}}{2\mathrm{i}}$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Pour les formules de Moivre : $\cos(nx) + \mathrm{i}\sin(nx) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx} = \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\right)^n = (\cos x + \mathrm{i}\sin x)^n$. ∎

On l'a vu en début de chapitre, la relation : $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x+y)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}$ est équivalente aux formules d'addition du cosinus et du sinus par identification des parties réelle et imaginaire car elle s'écrit aussi :

$$\cos(x+y) + \mathrm{i}\sin(x+y) = (\cos x + \mathrm{i}\sin x)(\cos y + \mathrm{i}\sin y).$$

Séparément, cosinus et sinus sont pénibles et laids, mais leur association qu'est l'exponentielle imaginaire est un petit bijou.



Attention ! $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'} \not\Longleftrightarrow \theta = \theta'$.

Exemple Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$: $\quad e^{i\theta} = 1 \iff e^{i\theta} = e^{i0} \iff \theta \equiv 0\ [2\pi] \iff \theta \in 2\pi\mathbb{Z}$

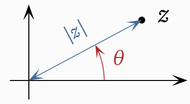
et : $\quad e^{i\theta} = i \iff e^{i\theta} = e^{\frac{i\pi}{2}} \iff \theta \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi] \iff \theta \in \frac{\pi}{2} + 2\pi\mathbb{Z}.$

4.2 Formes trigonométriques

Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$: $\quad \left|\frac{z}{|z|}\right| = \frac{|z|}{|z|} = 1$, $\quad$ donc $\frac{z}{|z|} \in \mathbb{U}$, donc $z = |z|\,e^{i\theta}$ pour un certain $\theta \in \mathbb{R}$ unique à 2π près.

Définition-théorème (Arguments et formes trigonométriques) Tout nombre complexe **non nul** peut être écrit sous *forme trigonométrique* : $\quad z = |z|\,e^{i\theta} \quad$ pour un certain $\theta \in \mathbb{R}$ unique à 2π près.

Tout réel θ de ce genre est appelé **un** *argument de z*, mais il en existe un et un seul dans $]-\pi, \pi]$ qu'on appelle **l'***argument (principal) de z* et qu'on note $\arg(z)$.



Tout comme on sait identifier les formes algébriques, on sait identifier les formes trigonométriques, **mais** avec une petite subtilité modulo 2π. Pour tous $r, r' > 0$ et $\theta, \theta \in \mathbb{R}$:

$$r\,e^{i\theta} = r'\,e^{i\theta'} \iff r = r' \quad \text{et} \quad \theta \equiv \theta'\ [2\pi].$$

Attention ! Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$: $\quad 0 = 0\,e^{i\theta}$, $\quad$ mais on considère tout de même que 0 n'a pas de forme trigonométrique, donc pas d'arguments.

Exemple Les réels et les imaginaires purs ont des formes trigonométriques plus piégeuses qu'il n'y paraît, attention !

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$: $\quad x = \begin{cases} x\,e^{i0} & \text{si } x > 0 \\ (-x)\,e^{i\pi} & \text{si } x < 0 \end{cases}$ $\quad$ et pour tout $y \in \mathbb{R}^*$: $\quad iy = \begin{cases} y\,e^{\frac{i\pi}{2}} & \text{si } y > 0 \\ (-y)\,e^{-\frac{i\pi}{2}} & \text{si } y < 0. \end{cases}$

Grâce aux paragraphes qui précèdent, nous savons exprimer un argument de tout nombre complexe non nul sous la forme d'une arctangente, d'un arccosinus ou d'un arcsinus.

Exemple On cherche un argument de $-1+2i$.

Démonstration Pour commencer : $\quad -1 < 0 \quad$ et $\quad 2 > 0$, $\quad$ donc $-1+2i$ possède un argument θ dans $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$.

- **Arctangente :** $\quad -1 < 0$, $\quad$ donc nous l'avons vu, $\pi + \operatorname{Arctan}\frac{2}{-1} = \pi - \operatorname{Arctan} 2$ est un argument de $-1+2i$.
- **Arccosinus :** $\quad \theta \in [0, \pi] \quad$ et $\quad \cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\quad$ donc $\theta = \operatorname{Arccos}\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$.
- **Arccosinus :** $\quad \pi - \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \quad$ et $\quad \sin(\pi - \theta) = \sin\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\quad$ donc $\theta = \pi - \operatorname{Arcsin}\frac{2}{\sqrt{5}}$.

Exemple Soit $n \in \mathbb{N}^*$. À quelle condition sur $p \in \mathbb{Z}$ le nombre $e^{\frac{ip\pi}{n}}$ est-il réel ?

Démonstration $\quad e^{\frac{ip\pi}{n}} \in \mathbb{R} \iff \arg\left(e^{\frac{ip\pi}{n}}\right) \equiv 0\ [2\pi]$ ou $\arg\left(e^{\frac{ip\pi}{n}}\right) \equiv \pi\ [2\pi] \iff \arg\left(e^{\frac{ip\pi}{n}}\right) \equiv 0\ [\pi]$

$\iff \frac{p\pi}{n} \equiv 0\ [\pi] \underset{\times n}{\overset{\div\pi}{\iff}} p \equiv 0\ [n] \iff p$ est un multiple de n.

Théorème (Propriétés algébriques des arguments) Pour tous $z, z' \in \mathbb{C}^*$:

$$\arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z')\ [2\pi], \qquad \arg(\overline{z}) \equiv -\arg(z)\ [2\pi] \qquad \text{et} \qquad \arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv -\arg(z)\ [2\pi].$$

Démonstration $\quad zz' = |z|\,e^{i\arg(z)}|z'|\,e^{i\arg(z')} = |zz'|\,e^{i(\arg(z)+\arg(z'))}$, $\quad$ donc : $\quad \arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z')\ [2\pi]$.

De même : $\quad \overline{z} = \overline{|z|\,e^{i\arg(z)}} = |z|\,e^{-i\arg(z)} = |\overline{z}|\,e^{-i\arg(z)}$, $\quad$ donc : $\quad \arg(\overline{z}) \equiv -\arg(z)\ [2\pi]$.

Enfin : $\quad \frac{1}{z} = \frac{1}{|z|\,e^{i\arg(z)}} = \left|\frac{1}{z}\right| e^{-i\arg(z)}$, $\quad$ donc : $\quad \arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv -\arg(z)\ [2\pi]$.

Exemple Le nombre complexe $\frac{1-i}{1-i\sqrt{3}}$ admet $\frac{\pi}{12}$ pour argument car : $\quad \frac{1-i}{1-i\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}\,e^{-\frac{i\pi}{4}}}{2\,e^{-\frac{i\pi}{3}}} = \frac{e^{-\frac{i\pi}{4}+\frac{i\pi}{3}}}{\sqrt{2}} = \frac{e^{\frac{i\pi}{12}}}{\sqrt{2}}$.

Or par ailleurs : $\quad \frac{1-i}{1-i\sqrt{3}} = \frac{(1-i)\left(1+i\sqrt{3}\right)}{4} = \frac{\sqrt{3}+1}{4} + i\,\frac{\sqrt{3}-1}{4}$, $\quad$ donc : $\quad \cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} \quad$ et $\quad \sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$.

Théorème (Interprétation géométrique de $\dfrac{z-b}{z-a}$) Soient $a,b\in\mathbb{C}$ et $z\in\mathbb{C}\setminus\{a,b\}$.
En notant A l'image de a, B celle de b et M celle de z : $\left|\dfrac{z-b}{z-a}\right|=\dfrac{MB}{MA}$ et $\arg\left(\dfrac{z-b}{z-a}\right)\equiv\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right)\ [2\pi]$.

Démonstration En notant $\vec{\imath}$ le vecteur d'affixe i, $b-z$ a pour image $\overrightarrow{MB}$, donc : $\arg(b-z)\equiv\left(\vec{\imath},\overrightarrow{MB}\right)\ [2\pi]$.
Ainsi : $\arg\left(\dfrac{z-b}{z-a}\right)\equiv\arg\left(\dfrac{b-z}{a-z}\right)\equiv\arg(b-z)-\arg(a-z)\equiv\left(\vec{\imath},\overrightarrow{MB}\right)-\left(\vec{\imath},\overrightarrow{MA}\right)\equiv\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right)\ [2\pi]$.

4.3 Exponentielle complexe

Définition (Exponentielle complexe) On pose pour tout $z\in\mathbb{C}$: $e^z=e^{\mathrm{Re}(z)}\,e^{i\,\mathrm{Im}(z)}$.
Ce nombre complexe est défini sous forme **trigonométrique** : $|e^z|=e^{\mathrm{Re}(z)}$ et $\arg\left(e^z\right)\equiv\mathrm{Im}(z)\ [2\pi]$.

Exemple $e^{1+i\pi}=e\times e^{i\pi}=-e$ et $e^{2+\frac{i\pi}{4}}=e^2\,e^{\frac{i\pi}{4}}=e^2\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{i}{\sqrt{2}}\right)=\dfrac{e^2}{\sqrt{2}}+\dfrac{i\,e^2}{\sqrt{2}}$.

Théorème (Propriétés de l'exponentielle complexe)

(i) **Périodicité :** L'exponentielle complexe est $2i\pi$-périodique, autrement dit pour tout $z\in\mathbb{C}$: $e^{z+2i\pi}=e^z$.
On dispose en fait d'un résultat plus précis. Pour tous $z,z'\in\mathbb{C}$: $e^z=e^{z'}\iff z\equiv z'\ [2i\pi]$.
Attention au i !

(ii) **Transformation des sommes en produits :** Pour tous $z,z'\in\mathbb{C}$: $e^{z+z'}=e^z\,e^{z'}$.

L'exponentielle complexe transforme donc les formes algébriques en formes trigonométriques.

Démonstration

(i) Simple identification de formes trigonométriques :
$$e^z=e^{z'}\iff e^{\mathrm{Re}(z)}=e^{\mathrm{Re}(z')}\ \text{et}\ \mathrm{Im}(z)\equiv\mathrm{Im}(z')\ [2\pi]\iff \mathrm{Re}(z)=\mathrm{Re}(z')\ \text{et}\ \mathrm{Im}(z)\equiv\mathrm{Im}(z')\ [2\pi]\iff z\equiv z'\ [2i\pi].$$

(ii) $$e^{z+z'}=e^{\mathrm{Re}(z+z')}\,e^{i\,\mathrm{Im}(z+z')}=e^{\mathrm{Re}(z)+\mathrm{Re}(z')}\,e^{i\,\mathrm{Im}(z)+i\,\mathrm{Im}(z')}=e^{\mathrm{Re}(z)}\,e^{\mathrm{Re}(z')}\,e^{i\,\mathrm{Im}(z)}\,e^{i\,\mathrm{Im}(z')}=e^z\,e^{z'}.$$

L'exemple qui suit suggère qu'il est plus compliqué de définir un logarithme complexe que l'exponentielle complexe car la $2i\pi$-périodicité de $z\longmapsto e^z$ accorde une infinité de logarithmes à tout nombre complexe non nul.

Exemple On souhaite résoudre l'équation $e^z=2+i$ d'inconnue $z\in\mathbb{C}$.

Démonstration Il s'agit essentiellement d'identifier des formes trigonométriques. Pour tout $z=x+iy\in\mathbb{C}$ sous forme algébrique :
$$e^z=2+i\iff e^x=|2+i|=\sqrt{5}\ \text{et}\ y\ \text{est un argument de}\ 2+i$$
$$\iff x=\frac{\ln 5}{2}\ \text{et}\ y\equiv\mathrm{Arctan}\,\frac{1}{2}\ [2\pi]\iff \exists\,k\in\mathbb{Z},\quad z=\frac{\ln 5}{2}+i\,\mathrm{Arctan}\,\frac{1}{2}+2ik\pi.$$

Théorème (Dérivation des fonctions de la forme e^φ) Soient I un intervalle et $\varphi\in\mathscr{D}(I,\mathbb{C})$. La fonction $x\longmapsto e^{\varphi(x)}$ est dérivable sur I et $\left(e^\varphi\right)'=\varphi'\,e^\varphi$.
En particulier, pour tout $a\in\mathbb{C}$, la fonction $x\longmapsto e^{ax}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $x\longmapsto a\,e^{ax}$.

Démonstration Posons $a=\mathrm{Re}(\varphi)$ et $b=\mathrm{Im}(\varphi)$. Par hypothèse sur φ, les fonctions **réelles** a et b sont dérivables sur I. Or : $e^\varphi=e^{a+ib}=e^a e^{ib}=e^a(\cos b+i\sin b)$, donc $\mathrm{Re}(e^\varphi)=e^a\cos b$ et $\mathrm{Im}(e^\varphi)=e^a\sin b$. Il en découle que $\mathrm{Re}(e^\varphi)$ et $\mathrm{Im}(e^\varphi)$ sont dérivables sur I, donc que e^φ l'est à son tour. En outre :
$$\left(\mathrm{Re}(e^\varphi)\right)'=\left(e^a\cos b\right)'=a'e^a\cos b-e^a b'\sin b=e^a(a'\cos b-b'\sin b)=e^a\mathrm{Re}\Big((a'+ib')(\cos b+i\sin b)\Big)=\mathrm{Re}\left(\varphi'e^\varphi\right).$$
On montre de même que $\left(\mathrm{Im}(e^\varphi)\right)'=\mathrm{Im}\left(\varphi'e^\varphi\right)$. Comme voulu : $\left(e^\varphi\right)'=\varphi'\,e^\varphi$.

5 Sommes trigonométriques

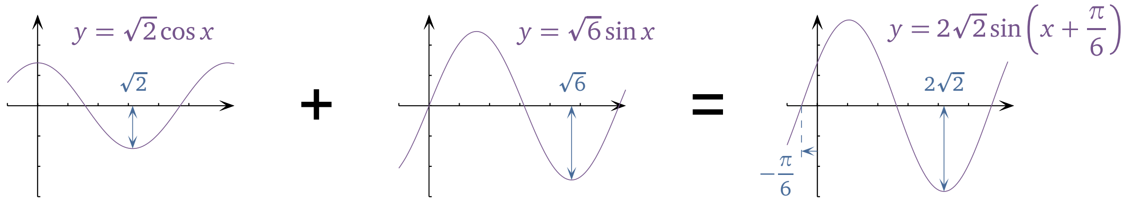
5.1 Transformation des expressions $a\cos x + b\sin x$

Pour tout couple $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ distinct de $(0,0)$, la fonction $x \longmapsto a\cos x + b\sin x$ peut être écrite sous la forme d'un unique cosinus $x \longmapsto A\cos(x+\varphi)$ ou d'un unique sinus $x \longmapsto A\sin(x+\psi)$ pour certains $\varphi,\psi \in \mathbb{R}$. La transformation repose essentiellement sur les identités : $\mathrm{Re}(zz') = \mathrm{Re}(z)\,\mathrm{Re}(z') - \mathrm{Im}(z)\,\mathrm{Im}(z')$ et $\mathrm{Im}(zz') = \mathrm{Re}(z)\,\mathrm{Im}(z') + \mathrm{Im}(z)\,\mathrm{Re}(z')$.

Exemple Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\cos x + \sin x = \mathrm{Re}\big((1-\mathrm{i})(\cos x + \mathrm{i}\sin x)\big) = \mathrm{Re}\Big(\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{4}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\Big) = \sqrt{2}\,\mathrm{Re}\Big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}\Big) = \sqrt{2}\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$

et de même : $\sqrt{2}\cos x + \sqrt{6}\sin x = \mathrm{Im}\Big(\big(\sqrt{2}+\mathrm{i}\sqrt{6}\big)(\cos x + \mathrm{i}\sin x)\Big) = \mathrm{Im}\Big(2\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{6}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\Big) = 2\sqrt{2}\,\mathrm{Im}\Big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}\Big) = 2\sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right)$.

Graphiquement, la deuxième égalité signifie que la somme des signaux sinusoïdaux $x \longmapsto \sqrt{2}\cos x$ et $x \longmapsto \sqrt{6}\sin x$ est encore un signal sinusoïdal, de nouvelle amplitude $2\sqrt{2}$ et déphasé de $\dfrac{\pi}{6}$.



Exemple Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} 2\cos x - 3\sin x &= \mathrm{Re}\big((2+3\mathrm{i})(\cos x + \mathrm{i}\sin x)\big) = \mathrm{Re}\Big(\sqrt{13}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\mathrm{Arctan}\,\frac{3}{2}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\Big) = \sqrt{13}\,\mathrm{Re}\Big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(x+\mathrm{Arctan}\,\frac{3}{2}\right)}\Big) \\ &= \sqrt{13}\cos\left(x + \mathrm{Arctan}\,\frac{3}{2}\right). \end{aligned}$$

5.2 Linéarisation

Linéariser une expression polynomiale en $\sin x$ et $\cos x$ — par exemple $5\sin^4 x\cos^7 x + 2\sin x\cos^4 x$ — c'est l'exprimer comme une **combinaison linéaire** de $\cos x$, $\cos(2x)$, $\cos(3x)\ldots$ et $\sin x$, $\sin(2x)$, $\sin(3x)\ldots$ en supprimant toute puissance et tout produit.

La recette est simple : Euler, binôme, Euler.

Exemple Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \sin^5 x &\overset{\text{Euler}}{=} \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}\right)^5 \overset{\text{Binôme}}{=} \frac{1}{32\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{5\mathrm{i}x} - 5\,\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x} + 10\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - 10\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} + 5\,\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-5\mathrm{i}x}\right) \\ &= \frac{1}{32\mathrm{i}}\Big(\big(\mathrm{e}^{5\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-5\mathrm{i}x}\big) - 5\big(\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-3\mathrm{i}x}\big) + 10\big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\big)\Big) \overset{\text{Euler}}{=} \frac{\sin(5x) - 5\sin(3x) + 10\sin x}{16}. \end{aligned}$$

C'est notamment en les linéarisant qu'on primitive les fonctions $x \longmapsto \cos^m x\sin^n x$, m et n décrivant $\mathbb{N}$.

Exemple On veut primitiver la fonction $x \longmapsto \cos^4 x\sin^2 x$.

Démonstration Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\cos^4 x\sin^2 x \overset{\text{Euler}}{=} \left(\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2}\right)^4 \left(\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}\right)^2$

$$\begin{aligned} &\overset{\text{Binôme}}{=} -\frac{1}{64}\left(\mathrm{e}^{4\mathrm{i}x} + 4\,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} + 6 + 4\,\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-4\mathrm{i}x}\right)\left(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} - 2 + \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}\right) = -\frac{1}{64}\left(\mathrm{e}^{6\mathrm{i}x} + 2\,\mathrm{e}^{4\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} - 4 - \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x} + 2\,\mathrm{e}^{-4\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-6\mathrm{i}x}\right) \\ &= -\frac{1}{64}\Big(\big(\mathrm{e}^{6\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-6\mathrm{i}x}\big) + 2\big(\mathrm{e}^{4\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-4\mathrm{i}x}\big) - \big(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}\big) - 4\Big) \overset{\text{Euler}}{=} \frac{-\cos(6x) - 2\cos(4x) + \cos(2x) + 2}{32}. \end{aligned}$$

La fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{32}\left(-\dfrac{\sin(6x)}{6} - 2\,\dfrac{\sin(4x)}{4} + \dfrac{\sin(2x)}{2} + 2x\right)$ est ainsi une primitive de $x \longmapsto \cos^4 x\sin^2 x$.

5.3 Délinéarisation

Il est parfois utile de *dé-linéariser* les expressions trigonométriques. Là aussi, la recette est simple : Moivre, binôme.

Exemple Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\sin(6x) = 2\left(3 - 16\cos^2 x + 16\cos^4 x\right)\cos x\sin x$.

Démonstration $\sin(6x) \overset{\text{Moivre}}{=} \mathrm{Im}\Big((\cos x + \mathrm{i}\sin x)^6\Big)$

$$\begin{aligned} &\overset{\text{Binôme}}{=} \mathrm{Im}\Big(\cos^6 x + 6\mathrm{i}\cos^5 x\sin x - 15\cos^4 x\sin^2 x - 20\mathrm{i}\cos^3 x\sin^3 x + 15\cos^2 x\sin^4 x + 6\mathrm{i}\cos x\sin^5 x - \sin^6 x\Big) \\ &= 6\cos^5 x\sin x - 20\cos^3 x\sin^3 x + 6\cos x\sin^5 x = 2\left(3\cos^4 x - 10\cos^2 x\sin^2 x + 3\sin^4 x\right)\cos x\sin x \end{aligned}$$

La relation $\cos^2+\sin^2=1$ nous permet finalement de valoriser la fonction cosinus par exemple.

$$\begin{aligned}\sin(6x) &= 2\left(3\cos^4 x - 10\cos^2 x\left(1-\cos^2 x\right)+3\left(1-\cos^2 x\right)^2\right)\cos x\sin x\\ &= 2\left(3-16\cos^2 x+16\cos^4 x\right)\cos x\sin x \qquad \text{après développement.}\end{aligned}$$

5.4 Technique de l'angle moitié

La *technique de l'angle moitié*, qui consiste à écrire les expressions $e^{ix}+e^{iy}$ et $e^{ix}-e^{iy}$ sous forme trigonométrique. On s'en sert souvent pour factoriser des expressions en cosinus et sinus. L'idée est simple. Pour tous $x,y\in\mathbb{R}$:

$$e^{ix}+e^{iy} = \underbrace{\boxed{e^{\frac{i(x+y)}{2}}}}_{\text{Mise en facteur de l'angle moitié } \frac{x+y}{2}}\left(e^{\frac{i(x-y)}{2}}+e^{-\frac{i(x-y)}{2}}\right) = 2\,e^{\frac{i(x+y)}{2}}\cos\frac{x-y}{2}.$$

En réalité, le résultat obtenu n'est pas forcément la forme trigonométrique de $e^{ix}+e^{iy}$ car le cosinus obtenu peut être négatif, mais on n'en est pas loin. La technique s'adapte bien sûr au cas des expressions $e^{ix}-e^{iy}$.

Très souvent y est nul et le calcul prend la forme suivante : $\quad e^{ix}+1 = e^{\frac{ix}{2}}\left(e^{\frac{ix}{2}}+e^{-\frac{ix}{2}}\right) = 2\,e^{\frac{ix}{2}}\cos\frac{x}{2}.$

Le programme vous épargne l'apprentissage par cœur de quatre nouvelles formules, mais exige que vous sachiez les retrouver **RAPIDEMENT**.

Théorème (Quatre nouvelles formules de trigo) Pour tous $x,y\in\mathbb{R}$:

$$\cos x+\cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} \qquad \cos x-\cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

$$\sin x+\sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} \qquad \sin x-\sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

Démonstration $\quad \sin x+\sin y = \mathrm{Im}\left(e^{ix}+e^{iy}\right) \overset{\text{Angle}}{\underset{\text{moitié}}{=}} \mathrm{Im}\left(2\,e^{\frac{i(x+y)}{2}}\cos\frac{x-y}{2}\right) = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}.$

Exemple Pour tous $n\in\mathbb{N}$ et $x\in\mathbb{R}$: $\quad \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\cos(2kx) = \begin{cases}\dfrac{\sin\left((n+1)x\right)}{\sin x}\cos(nx) & \text{si } x\notin\pi\mathbb{Z}\\ n+1 & \text{si } x\in\pi\mathbb{Z}.\end{cases}$

Démonstration Vous devez à tout prix savoir refaire cette démonstration.

Si $x\in\pi\mathbb{Z}$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\cos(2kx) = \sum_{k=0}^{n}1 = n+1.$ Si au contraire $x\notin\pi\mathbb{Z}$: $\quad e^{2ix}\neq 1,\quad$ donc :

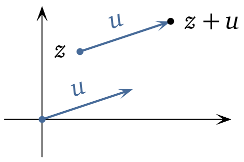
$$\sum_{k=0}^{n}\cos(2kx) = \sum_{k=0}^{n}\mathrm{Re}\left(e^{2ikx}\right) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n}e^{2ikx}\right) \overset{e^{2ix}\neq 1}{=} \mathrm{Re}\left(\frac{e^{2i(n+1)x}-1}{e^{2ix}-1}\right) \overset{\text{Angle}}{\underset{\text{moitié}}{=}} \mathrm{Re}\left(\frac{e^{i(n+1)x}\left(e^{i(n+1)x}-e^{-i(n+1)x}\right)}{e^{ix}\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)}\right)$$

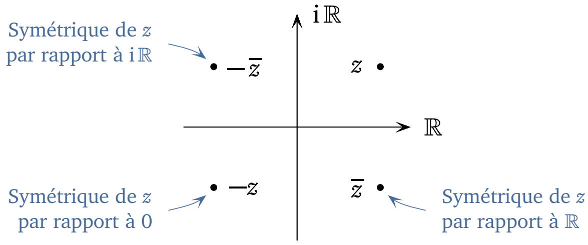
$$\overset{\text{Euler}}{=} \mathrm{Re}\left(e^{inx}\frac{\sin\left((n+1)x\right)}{\sin x}\right) = \frac{\sin\left((n+1)x\right)}{\sin x}\mathrm{Re}\left(e^{inx}\right) = \frac{\sin\left((n+1)x\right)}{\sin x}\cos(nx).$$

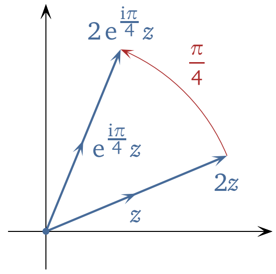
6 Transformations usuelles du plan complexe

Les figures ci-dessous vous rappellent :

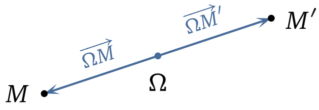
- que l'addition de deux nombres complexes s'interprète géométriquement en termes de translation,
- deux ou trois choses concernant les symétries les plus simples,
- que le produit de deux nombres complexes s'interprète géométriquement en termes d'homothétie et de rotation.







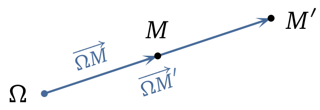
Voyons maintenant ce qu'il en est de transformations plus compliquées. Dans chacun des cas ci-dessous, un point Ω d'affixe ω est fixé et on effectue une transformation sur un point M d'affixe z. L'image de M par cette transformation est un point M' d'affixe z'.



Symétrie centrale par rapport à Ω :

$$\overrightarrow{\Omega M'} = -\overrightarrow{\Omega M},$$

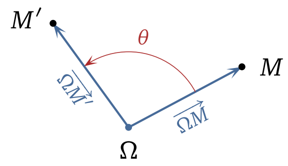
donc $z'-\omega = -(z-\omega)$ i.e. $z' = 2\omega - z$.



Homothétie de centre Ω et de rapport λ (ici $\lambda = 2$) :

$$\overrightarrow{\Omega M'} = \lambda\,\overrightarrow{\Omega M},$$

donc $z'-\omega = \lambda(z-\omega)$ i.e. $z' = \omega + \lambda(z-\omega)$.



Rotation de centre Ω et d'angle de mesure θ :

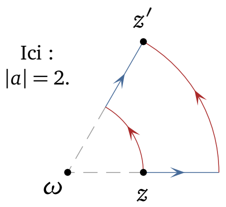
$$\Omega M' = \Omega M \quad \text{et} \quad \left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) \equiv \theta\ [2\pi]$$

donc $z'-\omega = e^{i\theta}(z-\omega)$ i.e. $z' = \omega + e^{i\theta}(z-\omega)$.

Finalement, les transformations auxquelles nous sommes habitués sont toutes de la forme $z \longmapsto az+b$ ou $z \longmapsto a\overline{z}+b$ pour certains $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$. Réciproquement, de quelle manière les transformations $z \longmapsto az+b$ s'interprètent-elles géométriquement ? Fixons $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$ et notons f la transformation $z \longmapsto az+b$ et α un argument de a.

— Si $a = 1$, f est simplement la translation de vecteur b.

— Si $a \neq 1$, remarquons d'abord que f possède un et un seul point fixe car l'équation $f(\omega) = \omega$ d'inconnue $\omega \in \mathbb{C}$ admet $\omega = \dfrac{b}{1-a}$ pour seule et unique solution. Nous allons maintennat exprimer f sous une forme plus sympathique grâce à ce point fixe. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, en posant $z' = f(z)$:



$$z'-\omega = (az+b)-(a\omega+b) = a(z-\omega) = \underbrace{|a|\times\underbrace{e^{i\alpha}(z-\omega)}_{\substack{\text{Rotation de centre } \omega \\ \text{et d'angle de mesure } \alpha}}}_{\substack{\text{Homothétie de centre } \omega \\ \text{et de rapport } |a|}} = \underbrace{e^{i\alpha}\times\underbrace{|a|(z-\omega)}_{\substack{\text{Homothétie de centre } \omega \\ \text{et de rapport } |a|}}}_{\substack{\text{Rotation de centre } \omega \\ \text{et d'angle de mesure } \alpha}}.$$

Conclusion : f est la composée d'une homothétie et d'une rotation de mêmes centres et l'ordre dans lequel on compose ces deux transformations ne compte pas. On dit que f est la *similitude directe de centre ω, de rapport $|a|$ et d'angle de mesure α.*

Exemple La fonction $z \overset{f}{\longmapsto} 2iz+1$ est la similitude directe de centre $\dfrac{1+2i}{5}$, de rapport 2 et d'angle de mesure $\dfrac{\pi}{2}$.

Démonstration Le coefficient $2i = 2\,e^{\frac{i\pi}{2}}$ devant z est différent de 1, donc f n'est pas une translation. Son rapport est alors 2 et son angle a pour mesure $\dfrac{\pi}{2}$.

Enfin, le centre de f est son unique point fixe ω : $\quad f(\omega) = \omega \iff \omega = \dfrac{1}{1-2i} = \dfrac{1+2i}{5}$.

7 Racines $n^{\text{èmes}}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, rappelons que la fonction racine $n^{\text{ème}}$ est la réciproque de la fonction puissance $n^{\text{ème}}$ sur $\mathbb{R}_+$.

$$\text{Pour tous } x, y \in \mathbb{R}_+ : \qquad y = \sqrt[n]{x} \iff x = y^n.$$

Définition (Racines $n^{\text{èmes}}$, ensemble $\mathbb{U}_n$) Pour tous $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle *racine $n^{\text{ème}}$ de z* tout nombre complexe ζ pour lequel $z = \zeta^n$.

Les racines $n^{\text{èmes}}$ de 1 sont appelées les *racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité* et leur ensemble est noté $\mathbb{U}_n$.

Attention !

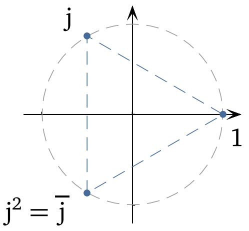
$\sqrt[n]{x}$ Notation autorisée si $x \in \mathbb{R}_+$.

$\cancel{\sqrt[n]{x}}$ LA PLUS INTERDITE DES NOTATIONS INTERDITES SINON !

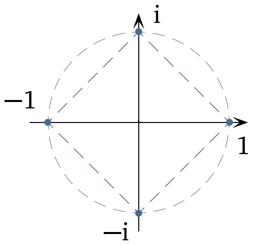
Pourquoi cet interdit ? Parce que nous allons voir dans un instant que tout nombre complexe non nul possède n racines $n^{\text{èmes}}$ distinctes qui se valent les unes les autres. Laquelle noterions-nous $\sqrt[n]{z}$?

Théorème (Description des racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\mathbb{U}_n = \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{n}} \mid k \in [\![0, n-1]\!] \right\} \subset \mathbb{U}$.

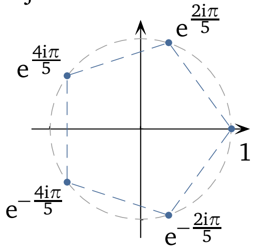
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{U}_n$ est donc l'ensemble des sommets du polygone *régulier* — i.e. à côtés de même longueur — à n côtés, de centre 0 et passant par le point d'affixe 1. Pour $n = 3$, on a posé $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.



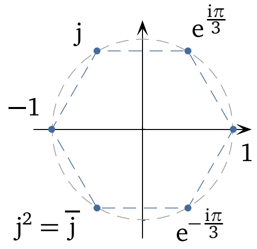
Triangle équilatéral $\mathbb{U}_3$



Carré $\mathbb{U}_4$



Pentagone régulier $\mathbb{U}_5$



Hexagone régulier $\mathbb{U}_6$

Démonstration Soit $\omega \in \mathbb{C}$. Posons $\rho = |\omega|$ et notons φ l'unique argument de ω dans l'intervalle $[0, 2\pi[$. Par identification de formes trigonométriques :

$$\begin{aligned} \omega^n = 1 \quad &\iff \quad \rho^n\, e^{in\varphi} = 1\, e^{i0} &&\iff \quad \rho^n = 1 \quad \text{et} \quad n\varphi \equiv 0\ [2\pi] \\ &\overset{\rho \in \mathbb{R}_+}{\iff} \quad \rho = 1 \quad \text{et} \quad \exists\, k \in \mathbb{Z},\ \ n\varphi = 2k\pi &&\iff \quad \rho = 1 \quad \text{et} \quad \exists\, k \in \mathbb{Z},\ \ \varphi = \frac{2k\pi}{n} \\ &\overset{\varphi \in [0, 2\pi[}{\iff} \quad \rho = 1 \quad \text{et} \quad \exists\, k \in [\![0, n-1]\!],\ \ \varphi = \frac{2k\pi}{n} &&\iff \quad \exists\, k \in [\![0, n-1]\!],\quad \omega = e^{\frac{2ik\pi}{n}}. \end{aligned}$$

Ceci nous fait bien un total de n racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité, car les nombres $0, \frac{2\pi}{n}, \frac{4\pi}{n}, \ldots, \frac{2(n-1)\pi}{n}$ sont distincts et éléments de $[0, 2\pi[$, donc leurs images par la fonction $x \longmapsto e^{ix}$ sont distinctes. ■

Définition (Nombre j) Il est d'usage de poser : $j = e^{\frac{2i\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Alors :

$$j^3 = 1, \qquad \overline{j} = j^2, \qquad 1 + j + j^2 = 0 \qquad \text{et pour tout } z \in \mathbb{C} : \quad z^2 + z + 1 = (z - j)\big(z - \overline{j}\big).$$

La relation : $j^3 = 1$ montre que toute puissance de j vaut 1, j ou $j^2 = \overline{j}$ après réduction modulo 3 de l'exposant. Par exemple : $j^{32} = j^2$ car $32 \equiv 2\ [3]$, et de même : $j^{13} = j$ car $13 \equiv 1\ [3]$.

Démonstration Comme $j \neq 1$: $1 + j + j^2 = \frac{j^3 - 1}{j - 1} = 0$. ■

Théorème (Description générale des racines $n^{\text{èmes}}$) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La seule racine $n^{\text{ème}}$ de 0 est 0. Sinon, tout nombre complexe $z = re^{i\theta} \in \mathbb{C}^*$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ possède exactement n racines $n^{\text{èmes}}$, à savoir les nombres :

$$\sqrt[n]{r}\, e^{\frac{i\theta}{n} + \frac{2ik\pi}{n}}, \qquad k \text{ décrivant } [\![0, n-1]\!].$$

Démonstration Soit $z = re^{i\theta} \in \mathbb{C}^*$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Posons $\zeta = \sqrt[n]{r}\, e^{\frac{i\theta}{n}}$. Il est immédiat que : $\zeta^n = z$ et ζ est non nul. Nous disposons ainsi d'UN EXEMPLE de racine $n^{\text{ème}}$ de z, et grâce à lui, nous allons les trouver toutes. Pour tout $\omega \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} \omega^n = z \quad &\iff \quad \omega^n = \zeta^n &&\overset{\zeta \neq 0}{\iff} \quad \frac{\omega}{\zeta} \in \mathbb{U}_n \\ &\iff \quad \exists\, k \in [\![0, n-1]\!],\quad \frac{\omega}{\zeta} = e^{\frac{2ik\pi}{n}} &&\iff \quad \exists\, k \in [\![0, n-1]\!],\quad \omega = \sqrt[n]{r}\, e^{\frac{i\theta}{n} + \frac{2ik\pi}{n}}. \end{aligned}$$ ■

Exemple Les racines cubiques de $1 + i$ sont : $\sqrt[6]{2}\, e^{\frac{i\pi}{12}}$, $\sqrt[6]{2}\, e^{\frac{3i\pi}{4}}$ et $\sqrt[6]{2}\, e^{-\frac{7i\pi}{12}}$.

Démonstration $1 + i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\, e^{\frac{i\pi}{4}}$, donc les racines cubiques de $1 + i$ sont les trois nombres : $\sqrt[3]{\sqrt{2}}\, e^{\frac{i\pi}{12} + \frac{2ik\pi}{3}} = \sqrt[6]{2}\, e^{\frac{i\pi}{12} + \frac{2ik\pi}{3}}$, k décrivant $\{0, 1, 2\}$.