Nombres complexes

1 L'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes

1.1 Forme algébrique, conjugué, module

Ce que c'est qu'un nombre complexe, nous ne nous le demanderons pas dans ce chapitre. On vous a dit pendant longtemps que le carré d'un nombre — sous-entendu réel — était toujours positif, et puis tout à coup on a changé d'avis et on vous a soutenu qu'un carré pouvait être négatif dans un certain monde de nombres plus grand que $\mathbb{R}$. Qu'avez-vous fait de cette annonce ? Vous l'avez suivie sans broncher, vous suivez toujours. Nous conserverons quelques mois encore ce point de vue naïf sur les nombres complexes qui consiste à accepter que les choses existent parce qu'on vous le dit même si on ne vous le justifie pas. Nous y reviendrons en revanche avec plus de scrupules au chapitre « Structures de groupe et d'anneau ».

Définition-théorème (Ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, forme algébrique, parties réelle et imaginaire)

- L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$ et contient l'ensemble des réels $\mathbb{R}$ ainsi qu'un certain élément i pour lequel : $\mathrm{i}^2 = -1$.
- Tout nombre complexe z s'écrit d'une et une seule manière sous la forme dite *algébrique* : $z = a + \mathrm{i}b$ pour certains $a, b \in \mathbb{R}$. Le réel a est appelé la *partie réelle de* z et noté $\mathrm{Re}(z)$, le réel b est appelé la *partie imaginaire de* z et noté $\mathrm{Im}(z)$.
- Les réels sont exactement les nombres complexes de partie imaginaire nulle. Enfin, un nombre complexe de partie réelle nulle est appelé un *imaginaire pur*.

En pratique L'unicité de la forme algébrique d'un nombre complexe est utilisée fréquemment pour faire des identifications. Elle permet, face à une égalité : $a + \mathrm{i}b = a' + \mathrm{i}b'$, d'écrire que : $a = a'$ et $b = b'$. En résumé :

UNE égalité de nombres complexes = DEUX égalités de nombres réels

Définition-théorème (Addition et multiplication sur $\mathbb{C}$) L'ensemble $\mathbb{C}$ est muni de deux opérations d'addition et de multiplication qui généralisent celles que nous connaissons sur $\mathbb{R}$. Précisément, pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$:

$$z + z' = \Big(\mathrm{Re}(z) + \mathrm{Re}(z')\Big) + \mathrm{i}\Big(\mathrm{Im}(z) + \mathrm{Im}(z')\Big) \quad \text{et} \quad zz' = \Big(\mathrm{Re}(z)\mathrm{Re}(z') - \mathrm{Im}(z)\mathrm{Im}(z')\Big) + \mathrm{i}\Big(\mathrm{Re}(z)\mathrm{Im}(z') + \mathrm{Im}(z)\mathrm{Re}(z')\Big),$$

ce qui signifie que : $\mathrm{Re}(z + z') = \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Re}(z')$ et $\mathrm{Im}(z + z') = \mathrm{Im}(z) + \mathrm{Im}(z')$, et :

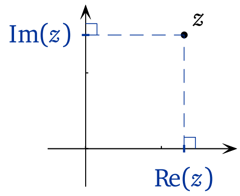
$$\mathrm{Re}(zz') = \mathrm{Re}(z)\mathrm{Re}(z') - \mathrm{Im}(z)\mathrm{Im}(z') \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(zz') = \mathrm{Re}(z)\mathrm{Im}(z') + \mathrm{Im}(z)\mathrm{Re}(z').$$

Pour finir, pour tout $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}^*$ avec $x, y \in \mathbb{R}$: $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{x + \mathrm{i}y} = \dfrac{x - \mathrm{i}y}{x^2 + y^2}$.

Attention ! En général : $\mathrm{Re}(zz') \neq \mathrm{Re}(z)\mathrm{Re}(z')$ et $\mathrm{Im}(zz') \neq \mathrm{Im}(z)\mathrm{Im}(z')$.
En particulier : $\mathrm{Re}\big(z^2\big) \neq \mathrm{Re}(z)^2$ et $\mathrm{Im}\big(z^2\big) \neq \mathrm{Im}(z)^2$.

Exemple $\dfrac{1 + \mathrm{i}}{1 - \mathrm{i}}$ est imaginaire pur car : $\dfrac{1 + \mathrm{i}}{1 - \mathrm{i}} = \dfrac{(1 + \mathrm{i})^2}{1^2 + 1^2} = \dfrac{1 + 2\mathrm{i} - 1}{2} = \mathrm{i}$.

Définition **(Affixe et image)** On munit le plan d'un repère orthonormal direct $\left(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$.



- Pour tout $z = x + iy \in \mathbb{C}$ avec $x, y \in \mathbb{R}$, le point M du plan de coordonnées (x, y) est appelé l'*image de* z tandis que z est appelé l'*affixe de* M. On dit aussi que z est l'*affixe* du vecteur du plan de coordonnées (x, y).
- **Règles de calcul sur les affixes :**
  - — Pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ du plan d'affixes respectifs u et v et pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, le vecteur $\lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v}$ a pour affixe : $\lambda u + \mu v$.
  - — Pour tous points A et B du plan d'affixes respectifs a et b, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe : $b - a$.

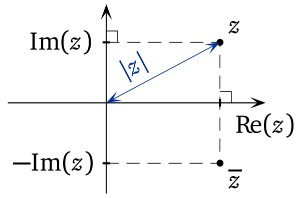
Explication Au fond, les notions de point, vecteur, coordonnées et nombre complexe sont équivalentes, on préférera d'ailleurs parfois écrire qu'un point est ÉGAL à un nombre complexe, qu'un vecteur est ÉGAL à ses coordonnées, etc.

Exemple Pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$, le milieu du segment joignant z et z' a pour affixe $\dfrac{z+z'}{2}$.

✖ ATTENTION ! ✖ LES INÉGALITÉS N'ONT AUCUN SENS SUR $\mathbb{C}$.

En quel sens pertinent un point d'un plan serait-il plus petit ou plus grand qu'un autre ?

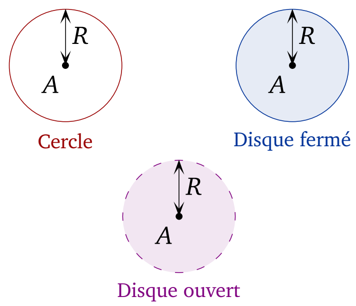
Définition **(Conjugué, module)** Soit $z \in \mathbb{C}$.



- On appelle *conjugué de* z le nombre complexe : $\overline{z} = \mathrm{Re}(z) - i\,\mathrm{Im}(z)$.
- On appelle *module de* z le réel positif ou nul : $|z| = \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2}$.

Explication

- Module et valeur absolue coïncident sur $\mathbb{R}$ car pour tout $x \in \mathbb{R}$: $|x| = \sqrt{x^2}$.
- De par sa définition, le module $|z|$ s'interprète comme norme du vecteur d'affixe z. De même, pour tous $a, b \in \mathbb{C}$ d'images A, B, le module $|a - b|$ n'est autre que la distance AB. Il en découle que pour tout $R > 0$:
  - — le cercle de centre A et de rayon R est l'ensemble $\left\{z \in \mathbb{C} / \quad |z - a| = R\right\}$,
  - — le disque fermé de centre A et de rayon R est l'ensemble $\left\{z \in \mathbb{C} / \quad |z - a| \leqslant R\right\}$,
  - — le disque ouvert de centre A et de rayon R est l'ensemble $\left\{z \in \mathbb{C} / \quad |z - a| < R\right\}$.



Exemple Pour tout $t \in \mathbb{R}$, le point d'affixe $\dfrac{2}{1+it}$ appartient au cercle de centre 1 et de rayon 1.

Démonstration $$\left|\frac{2}{1+it} - 1\right| = \left|\frac{2-(1+it)}{1+it}\right| = \left|\frac{1-it}{1+it}\right| = \frac{\sqrt{1+t^2}}{\sqrt{1+t^2}} = 1.$$

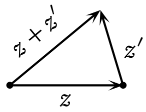
Théorème **(Propriétés du conjugué)** Pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$:

$$\mathrm{Re}(z) = \frac{z+\overline{z}}{2}, \qquad \mathrm{Im}(z) = \frac{z-\overline{z}}{2i}, \qquad \overline{\overline{z}} = z, \qquad \overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'} \qquad \text{et} \qquad \overline{zz'} = \overline{z} \times \overline{z'}.$$

Théorème (Propriétés du module) Soient $z, z' \in \mathbb{C}$.

- **Propriétés algébriques :** $|\overline{z}| = |z|$, $\quad z\overline{z} = |z|^2$, $\quad |zz'| = |z| \times |z'|$ $\quad$ et si $z' \neq 0$: $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$.
  Également : $|z| = 0$ si et seulement si $z = 0$.
- **Propriétés géométriques :** $\big|\mathrm{Re}(z)\big| \leqslant |z|$ $\quad$ et $\quad$ $\big|\mathrm{Im}(z)\big| \leqslant |z|$.

  Inégalité triangulaire : $|z + z'| \leqslant |z| + |z'|$, $\quad$ **Généralisée :** $\Big||z| - |z'|\Big| \leqslant |z \pm z'| \leqslant |z| + |z'|$.
  (avec égalité si et seulement z et z' sont, comme vecteurs, colinéaires de même sens.)



En pratique L'inverse de $z = x + iy \neq 0$ se calcule grâce à la formule « $z\overline{z} = |z|^2$ » : $\boxed{\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2} = \dfrac{x - iy}{x^2 + y^2}.}$

Démonstration

- **Inégalité triangulaire :** $|z + z'| \leqslant |z| + |z'| \iff |z+z'|^2 \leqslant \big(|z| + |z'|\big)^2$

$$\iff (z+z')(\overline{z} + \overline{z'}) \leqslant \big(|z| + |z'|\big)^2 \iff |z|^2 + z\overline{z'} + z'\overline{z} + |z'|^2 \leqslant |z|^2 + 2|z|.|z'| + |z'|^2$$

$$\iff \frac{z\overline{z'} + \overline{z}z'}{2} \leqslant |z|.|z'| \iff \mathrm{Re}\big(z\overline{z'}\big) \leqslant |z|.|z'| \iff \mathrm{Re}\big(z\overline{z'}\big) \leqslant |z\overline{z'}|.$$

  Enfin, l'inégalité obtenue étant vraie, celle de départ l'est aussi !
- **Cas d'égalité :** L'inégalité triangulaire est une égalité si et seulement si l'inégalité obtenue finalement ci-dessus en est une : $\mathrm{Re}\big(z\overline{z'}\big) = |z\overline{z'}|$, i.e. si et seulement si : $z\overline{z'} \in \mathbb{R}_+$ car les réels positifs sont les seuls nombres complexes dont la partie réelle est égale au module.
  — Si : $z' = 0$, z et z' sont naturellement colinéaires de mêmes sens.
  — Si : $z' \neq 0$, dire que : $z\overline{z'} \in \mathbb{R}_+$ revient à dire, après division par $|z'|^2$ qui est strictement positif, que : $z \times \dfrac{\overline{z'}}{|z'|^2} = \dfrac{z}{z'} \in \mathbb{R}_+$, i.e. que z et z' sont colinéaires de même sens.
- **Généralisation :** D'après l'inégalité triangulaire : $|z| = \Big|(z+z') + (-z')\Big| \leqslant |z+z'| + |-z'|$, donc : $|z| - |z'| \leqslant |z + z'|$, et de même : $|z'| - |z| \leqslant |z + z'|$. Comme voulu : $\Big||z| - |z'|\Big| \leqslant |z + z'|$.
  L'inégalité sur $|z - z'|$ s'obtient à partir de celle sur $|z + z'|$ par simple substitution de $-z'$ à z'. ■

1.2 Équations du second degré à coefficients complexes

Théorème (Racines carrées d'un nombre complexe) Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, l'équation : $\omega^2 = z$ d'inconnue $\omega \in \mathbb{C}$ possède exactement DEUX solutions opposées appelées les *racines carrées de z*.

ATTENTION !

$\sqrt{x}$ Notation autorisée si $x \in \mathbb{R}_+$.

$\cancel{\sqrt{z}}$ La plus interdite des notations interdites si $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$!

Pourquoi cet interdit ? Parce que nous ne savons pas choisir, tout nombre complexe non nul a DEUX racines carrées distinctes qui se valent l'une l'autre. Il n'y a que dans le cas des réels positifs qu'on sait choisir car les racines carrées d'un réel positif x sont toutes les deux réelles, l'une positive, l'autre négative, et on choisit de noter $\sqrt{x}$ la première.

Démonstration Dans l'énoncé, z est choisi non nul car l'équation : $\omega^2 = 0$ d'inconnue $\omega \in \mathbb{C}$ ne possède évidemment qu'une solution, à savoir 0.

Écrivons z sous forme algébrique $z = x + iy$ et donnons-nous $\omega = a + ib \in \mathbb{C}$ sous forme algébrique. L'idée forte de la preuve est cachée dans l'équivalence : $\omega^2 = z \iff \omega^2 = z$ et $|\omega|^2 = |z|$ où l'on a ajouté simplement l'équation des modules —- équivalence idiote mais qui s'avère féconde.

$$\omega^2 = z \quad\Longleftrightarrow\quad \omega^2 = z \quad \text{et} \quad |\omega|^2 = |z| \quad\Longleftrightarrow\quad \begin{cases} a^2 - b^2 = x \\ 2ab = y \end{cases} \quad \text{et} \quad a^2 + b^2 = \sqrt{x^2+y^2}$$
$$\Longleftrightarrow\quad a^2 = \frac{x + \sqrt{x^2+y^2}}{2} \quad \text{et} \quad b^2 = \frac{-x + \sqrt{x^2+y^2}}{2} \quad \text{et} \quad 2ab = y \qquad \text{(demi-somme et demi-différence).}$$

On tire aisément a et b **AU SIGNE PRÈS** de ces relations sur a^2 et b^2. L'égalité : $2ab = y$ permet quant à elle de savoir si a et b sont de même signe ou de signes opposés. On obtient finalement deux racines carrées $\omega = a + ib$ distinctes de z opposées l'une de l'autre. ■

Exemple Les racines carrées de $24+10\mathrm{i}$ sont $\pm(5+\mathrm{i})$.

Démonstration Pour tout $\omega = a + ib \in \mathbb{C}$ sous forme algébrique :

$$\begin{aligned}
\omega^2 = 24+10\mathrm{i} \quad &\Longleftrightarrow \quad \omega^2 = 24+10\mathrm{i} \quad \text{et} \quad |\omega|^2 = |24+10\mathrm{i}| = 2\times|12+5\mathrm{i}| \\
&\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} a^2 - b^2 = 24 \\ 2ab = 10 \end{cases} \quad \text{et} \quad a^2+b^2 = 2\sqrt{12^2+5^2} = 26 \\
&\Longleftrightarrow \quad a^2 = \frac{26+24}{2} = 25, \quad b^2 = \frac{26-24}{2} = 1 \quad \text{et} \quad ab = 5 \\
&\Longleftrightarrow \quad a = \pm 5, \quad b = \pm 1 \quad \text{et} \quad ab = 5 \quad \overset{ab=5\geqslant 0}{\Longleftrightarrow} \quad (a,b) = (5,1) \quad \text{ou} \quad (a,b) = (-5,-1) \\
&\Longleftrightarrow \quad \omega = 5+\mathrm{i} \quad \text{ou} \quad \omega = -(5+\mathrm{i}).
\end{aligned}$$

Nous sommes à présent capables de résoudre **TOUTES** les équations du second degré **À COEFFICIENTS COMPLEXES**.

Théorème (Équations du second degré à coefficients complexes) Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 0$. Les solutions de l'équation $az^2 + bz + c = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ sont $\dfrac{-b+\delta}{2a}$ et $\dfrac{-b-\delta}{2a}$ où δ est l'une quelconque des deux racines carrées du discriminant $b^2 - 4ac$. La somme de ces solutions vaut $-\dfrac{b}{a}$ et leur produit $\dfrac{c}{a}$.

Démonstration Pour tout $z \in \mathbb{C}$: $az^2 + bz + c = a\left(z^2 + \dfrac{b}{a}z + \dfrac{c}{a}\right) = a\left(\left(z + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{b^2-4ac}{4a^2}\right)$

$$= a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\delta}{2a}\right)^2\right) = a\left(\left(z+\frac{b}{2a}\right) + \frac{\delta}{2a}\right).\left(\left(z+\frac{b}{2a}\right) - \frac{\delta}{2a}\right) = a\left(z - \frac{-b-\delta}{2a}\right)\left(z - \frac{-b+\delta}{2a}\right).$$

Pour finir, on sait qu'un produit de nombres complexes est nul si et seulement si l'un de ses facteurs l'est. ■

Exemple Les solutions de l'équation : $z^2 - (3+\mathrm{i})z + (2+\mathrm{i}) = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ sont 1 et $2+\mathrm{i}$.

Démonstration Le discriminant de cette équation vaut : $(3+\mathrm{i})^2 - 4(2+\mathrm{i}) = 2\mathrm{i}$. Or on peut montrer que les racines carrées de $2\mathrm{i}$ sont $\pm(1+\mathrm{i})$, donc les solutions cherchées sont $\dfrac{(3+\mathrm{i})\pm(1+\mathrm{i})}{2}$, i.e. 1 et $2+\mathrm{i}$.

Théorème (Systèmes somme-produit) Soient $a, b \in \mathbb{C}$. Les solutions du *système somme-produit* : $\begin{cases} x + y = a \\ xy = b \end{cases}$ d'inconnues $x, y \in \mathbb{C}$ sont les deux racines du polynôme $X^2 - aX + b$ —- éventuellement égales.

Démonstration Ce résultat repose sur la remarque suivante : $(X-x)(X-y) = X^2 - (x+y)X + xy$. ■

Exemple Les solutions du système : $\begin{cases} x + y = 3+\mathrm{i} \\ xy = 2+\mathrm{i} \end{cases}$ d'inconnue $(x,y) \in \mathbb{C}^2$ sont les couples $(1, 2+\mathrm{i})$ et $(2+\mathrm{i}, 1)$.

Démonstration Les solutions du système étudié sont les racines du polynôme $X^2 - (3+\mathrm{i})X + (2+\mathrm{i})$ — calculées dans l'exemple précédent.

1.3 Dérivation des fonctions complexes

Définition **(Dérivation des fonctions complexes)** Soient I un intervalle, $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction et $a \in I$. On dit que f est dérivable en a si les fonctions $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ le sont. On appelle dans ce cas *nombre dérivé de f en a* le nombre complexe : $f'(a) = \mathrm{Re}(f)'(a) + \mathrm{i}\,\mathrm{Im}(f)'(a)$.

L'ensemble des fonctions complexes dérivables sur I tout entier, i.e. dérivables en tout point de I, est noté $\mathscr{D}(I,\mathbb{C})$. Si $f \in \mathscr{D}(I,\mathbb{C})$, la fonction $x \longmapsto f'(x)$ définie sur I est appelée la *dérivée de f*.

Explication

- En résumé, dériver une fonction complexe revient à dériver ses parties réelle et imaginaire, qui sont quant à elles des fonctions réelles : $\mathrm{Re}\big(f'\big) = \mathrm{Re}(f)'$ et $\mathrm{Im}\big(f'\big) = \mathrm{Im}(f)'$.
- On peut montrer que les formules de dérivation d'une somme, d'un produit et d'un quotient de fonctions complexes sont les mêmes que pour les fonctions réelles, de même que la formule de dérivation d'une composée de fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ suivie d'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.

Exemple

- La fonction $x \longmapsto x^2 + \mathrm{i}\sin x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ car les fonctions $x \longmapsto x^2$ et $x \longmapsto \sin x$ le sont, et sa dérivée est $x \longmapsto 2x + \mathrm{i}\cos x$.
- La fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x+\mathrm{i}}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient et sa dérivée est $x \longmapsto -\dfrac{1}{(x+\mathrm{i})^2}$.

Pour les fonctions complexes, pas question de parler de monotonie ou de signe de la dérivée puisqu'il n'y a pas d'inégalités dans $\mathbb{C}$, mais le théorème fondamental suivant est en revanche conservé :

Théorème **(Caractérisation des fonctions dérivables constantes)** Soient I un **intervalle** et $f \in \mathscr{D}(I,\mathbb{C})$. Alors f est constante sur I si et seulement si f' est nulle sur I.

2 Autour de l'exponentielle complexe

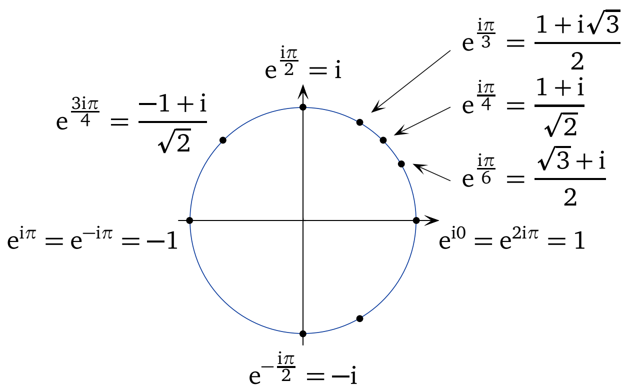
2.1 Nombres complexes de module 1

Définition **(Ensemble $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module 1)** On note $\mathbb{U}$ l'ensemble $\big\{z \in \mathbb{C}/ \quad |z| = 1\big\}$, géométriquement le cercle trigonométrique de centre 0 et de rayon 1.

Définition **(« Exponentielle iθ »)** Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on appelle *exponentielle (de)* iθ le nombre complexe :

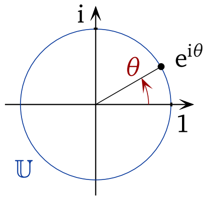
$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta.$$

Explication La notation $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, qui cache un cosinus et un sinus, n'est qu'une **notation**, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ n'est pas « e à la puissance iθ » au sens où ce serait « e multiplié par lui-même iθ fois », ce qui n'a aucun sens ! Quel rapport avec l'exponentielle classique alors ? Le choix de la notation $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ est justifié par le fait que, comme on va le voir, l'« exponentielle iθ » se comporte **comme** une exponentielle classique en transformant les sommes en produits. En réalité, une notion unique d'exponentielle se cache derrière l'exponentielle réelle et l'« exponentielle iθ », mais ce n'est pas encore de votre âge !



Théorème **(Paramétrisation de $\mathbb{U}$ par l'« exponentielle iθ »)**

- Pour tout $z\in\mathbb{C}$: $\quad z\in\mathbb{U} \iff \exists\ \theta\in\mathbb{R}/\ \ z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$. $\quad$ En résumé : $\quad \mathbb{U}=\left\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right\}_{\theta\in\mathbb{R}}$.
- Pour tous $\theta,\theta'\in\mathbb{R}$: $\quad \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'} \iff \theta\equiv\theta'\ [2\pi]\right)$.



Démonstration Autre manière de dire que tout point du cercle trigonométrique a des coordonnées de la forme $(\cos\theta,\sin\theta)$, donc un affixe de la forme $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ — avec unicité du θ modulo 2π. ■

Exemple Pour tout $\theta\in\mathbb{R}$: $\quad \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=1 \iff \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}0} \iff \theta\equiv 0\ [2\pi] \iff \theta\in 2\pi\mathbb{Z}$

et : $\quad \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=\mathrm{i} \iff \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{2}} \iff \theta\equiv\frac{\pi}{2}\ [2\pi] \iff \theta\in\frac{\pi}{2}+2\pi\mathbb{Z}$.

Théorème **(Propriétés algébriques de l'« exponentielle iθ »)** Soient $\theta,\theta'\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}$.

(i) **Conjugaison :** $\quad \overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}=\dfrac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}$.

(ii) **Formules d'Euler :** $\quad \cos\theta=\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2} \quad$ et $\quad \sin\theta=\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2\mathrm{i}}$.

(iii) **Transformation des sommes en produits :** $\quad \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\theta')}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'}$.

(iv) **Formule de Moivre :** $\quad (\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^n=\cos(n\theta)+\mathrm{i}\sin(n\theta)$.

✌ **Explication** ✌ La relation : $\quad \mathrm{e}^{\mathrm{i}(x+y)}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\mathrm{e}^{\mathrm{i}y} \quad$ RÉSUME deux formules que vous connaissez bien. Elle s'écrit aussi : $\cos(x+y)+\mathrm{i}\sin(x+y)=\big(\cos x+\mathrm{i}\sin x\big)\big(\cos y+\mathrm{i}\sin y\big)$, et donc par identification des parties réelle et imaginaire, est équivalente aux relations : $\quad \cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y \quad$ et $\quad \sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y \quad$ que nous savons être vraies.

Démonstration

(ii) Tout simplement, pour tout $z\in\mathbb{C}$: $\quad \mathrm{Re}(z)=\dfrac{z+\overline{z}}{2} \quad$ et $\quad \mathrm{Im}(z)=\dfrac{z-\overline{z}}{2\mathrm{i}}$.

(iv) Par récurrence à partir de (iii) : $\quad \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^n=\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}$. $\quad$ Ce n'est que ça, la formule de Moivre. ■

✎ **En pratique** ✎ **(Linéarisation d'expressions trigonométriques)** Linéariser une expression polynomiale en $\sin x$ et $\cos x$ —- par exemple $5\sin^4 x\cos^7 x+2\sin x\cos^4 x$ —- c'est l'exprimer à l'aide de $\sin x$, $\sin(2x)$, $\sin(3x)\dots$ et $\cos x$, $\cos(2x)$, $\cos(3x)\dots$ en supprimant toute puissance et tout produit. Deux outils principaux, les formules d'Euler et la formule du binôme. La linéarisation permet notamment le calcul des intégrales de la forme $\displaystyle\int_a^b \sin^m x\cos^n x\ \mathrm{d}x$ où $a,b\in\mathbb{R}$ et $m,n\in\mathbb{N}$.

Exemple Pour tout $x\in\mathbb{R}$: $\quad \sin^5 x=\dfrac{\sin(5x)-5\sin(3x)+10\sin x}{16}$.

Démonstration
$$\sin^5 x \overset{\text{Euler}}{=} \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}\right)^5 \overset{\text{Binôme}}{=} \frac{1}{32\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{5\mathrm{i}x}-5\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x}+10\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-10\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}+5\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{-5\mathrm{i}x}\right)$$
$$=\frac{1}{32\mathrm{i}}\Big(\left(\mathrm{e}^{5\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{-5\mathrm{i}x}\right)-5\left(\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}x}\right)+10\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\right)\Big) \overset{\text{Euler}}{=} \frac{\sin(5x)-5\sin(3x)+10\sin x}{16}.$$

Exemple $\displaystyle\int_0^{2\pi}\sin^2 x\cos^4 x\ \mathrm{d}x=\frac{\pi}{8}$.

Démonstration Pour tout $x\in\mathbb{R}$: $\quad \sin^2 x\cos^4 x \overset{\text{Euler}}{=} \left(\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}\right)^2\left(\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2}\right)^4$
$$\overset{\text{Binôme}}{=} -\frac{1}{64}\left(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}-2+\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}\right)\left(\mathrm{e}^{4\mathrm{i}x}+4\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}+6+4\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-4\mathrm{i}x}\right)=-\frac{1}{64}\left(\mathrm{e}^{6\mathrm{i}x}+2\mathrm{e}^{4\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}-4-\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}+2\mathrm{e}^{-4\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-6\mathrm{i}x}\right)$$
$$=-\frac{1}{64}\Big(\left(\mathrm{e}^{6\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-6\mathrm{i}x}\right)+2\left(\mathrm{e}^{4\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-4\mathrm{i}x}\right)-\left(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}\right)-4\Big) \overset{\text{Euler}}{=} \frac{-\cos(6x)-2\cos(4x)+\cos(2x)+2}{32}.$$

Nous pouvons maintenant calculer l'intégrale demandée :

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 x \cos^4 x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{32}\int_0^{2\pi} \Big(-\cos(6x) - 2\cos(4x) + \cos(2x) + 2\Big)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{32}\left[-\frac{\sin(6x)}{6} - 2\,\frac{\sin(4x)}{4} + \frac{\sin(2x)}{2} + 2x\right]_{x=0}^{x=2\pi} = \frac{\pi}{8}.$$

✎ **En pratique** ✎ **(Dé-linéarisation)** On a moins souvent l'occasion de le faire, mais on peut aussi « dé-linéariser » les expressions trigonométriques, i.e. effectuer la transformation inverse de la linéarisation. Deux outils principaux, la formule de Moivre et la formule du binôme.

Exemple Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\sin(6x) = 2\Big(3 - 16\cos^2 x + 16\cos^4 x\Big)\cos x \sin x$.

Démonstration $\sin(6x) = \mathrm{Im}\big(\mathrm{e}^{6\mathrm{i}x}\big) = \mathrm{Im}\Big((\cos x + \mathrm{i}\sin x)^6\Big)$

$$\overset{\text{Binôme}}{=} \mathrm{Im}\Big(\cos^6 x + 6\mathrm{i}\cos^5 x \sin x - 15\cos^4 x \sin^2 x - 20\mathrm{i}\cos^3 x \sin^3 x + 15\cos^2 x \sin^4 x + 6\mathrm{i}\cos x \sin^5 x - \sin^6 x\Big)$$

$$= 6\cos^5 x \sin x - 20\cos^3 x \sin^3 x + 6\cos x \sin^5 x.$$

On pourrait s'arrêter là, mais on va tâcher d'embellir le résultat.

$$\sin(6x) = 2\left(3\cos^4 x - 10\cos^2 x \sin^2 x + 3\sin^4 x\right)\cos x \sin x = 2\left(3\cos^4 x - 10\cos^2 x\big(1-\cos^2 x\big) + 3\big(1-\cos^2 x\big)^2\right)\cos x \sin x$$

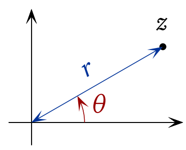
$$= 2\left(3 - 16\cos^2 x + 16\cos^4 x\right)\cos x \sin x \qquad \text{après développement.}$$

2.2 Formes trigonométriques

La définition suivante repose intégralement sur le fait que pour tout $z \in \mathbb{C}$ non nul : $\left|\dfrac{z}{|z|}\right| = 1$, i.e. : $\dfrac{z}{|z|} \in \mathbb{U}$.

Définition-théorème (Argument(s) et formes trigonométriques, coordonnées polaires) Tout nombre complexe NON NUL peut être écrit sous la forme : $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$, dite *forme trigonométrique*. Le réel r est en fait unique car : $r = |z|$, mais θ, appelé UN *argument de* z, est seulement unique à 2π près.

Il existe en revanche un et un seul argument de z dans $]-\pi, \pi]$, et celui-ci est appelé L' *argument (principal) de* z et noté $\arg(z)$.



Le couple (r, θ) est aussi appelé UN *couple de coordonnées polaires* du point d'image z.

✖ **Attention !** ✖ Zéro n'a pas de forme trigonométrique, donc pas d'arguments.

Exemple Les formes trigonométriques des réels et des imaginaires purs constituent le minimum à maîtriser.

- **Cas des réels :** Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$: $x = x\mathrm{e}^{\mathrm{i}0}$ si $x > 0$ et $x = (-x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$ si $x < 0$.
- **Cas des imaginaires purs :** Pour tout $y \in \mathbb{R}^*$: $\mathrm{i}y = y\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{2}}$ si $y > 0$ et $\mathrm{i}y = (-y)\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{2}}$ si $y < 0$.

Théorème (Propriétés des arguments) Pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$ NON NULS :

$$\arg\big(zz'\big) \equiv \arg(z) + \arg(z')\ [2\pi], \qquad \arg\big(\overline{z}\big) \equiv -\arg(z)\ [2\pi] \qquad \text{et} \qquad \arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv -\arg(z)\ [2\pi].$$

Démonstration $zz' = |z|\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\arg(z)}|z'|\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\arg(z')} = |zz'|\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\arg(z)+\arg(z')\right)}$, donc : $\arg\big(zz'\big) \equiv \arg(z) + \arg(z')\ [2\pi]$.

Ensuite : $\overline{z} = \overline{|z|\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\arg(z)}} = |z|\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\arg(z)} = \left|\overline{z}\right|\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\arg(z)}$, donc : $\arg\big(\overline{z}\big) \equiv -\arg(z)\ [2\pi]$.

Enfin : $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{|z|\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\arg(z)}} = \left|\dfrac{1}{z}\right|\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\arg(z)}$, donc : $\arg\left(\dfrac{1}{z}\right) \equiv -\arg(z)\ [2\pi]$. ■

Exemple Le nombre complexe $\dfrac{1-\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}\sqrt{3}}$ admet $\dfrac{\pi}{12}$ pour argument car : $\dfrac{1-\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{4}}}{2\,\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{3}}} = \dfrac{\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{4}+\frac{\mathrm{i}\pi}{3}}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{12}}}{\sqrt{2}}$.

Comme : $\dfrac{1-\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}\sqrt{3}} = \dfrac{(1-\mathrm{i})\big(1+\mathrm{i}\sqrt{3}\big)}{4} = \dfrac{\sqrt{3}+1}{4} + \mathrm{i}\,\dfrac{\sqrt{3}-1}{4}$, alors : $\cos\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$.

Exemple Soit $n \in \mathbb{N}^*$. À quelle condition sur $p \in \mathbb{Z}$ le nombre $\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}p\pi}{n}}$ est-il réel ?

Démonstration $\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}p\pi}{n}} \in \mathbb{R} \iff \arg\left(\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}p\pi}{n}}\right) \equiv 0\ [2\pi]$ ou $\arg\left(\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}p\pi}{n}}\right) \equiv \pi\ [2\pi] \iff \arg\left(\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}p\pi}{n}}\right) \equiv 0\ [\pi]$

$\iff \dfrac{p\pi}{n} \equiv 0\ [\pi] \underset{\times n}{\overset{\div\pi}{\iff}} p \equiv 0\ [n] \iff p$ est un multiple de n.

Théorème (Lien entre la forme algébrique et les formes trigonométriques) Soit $z \in \mathbb{C}$ NON NUL de forme algébrique : $z = x + \mathrm{i}y$ et de forme trigonométrique : $z = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.

(i) $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$, et bien sûr : $r = \sqrt{x^2+y^2}$.

(ii) $$\theta \equiv \begin{cases} \operatorname{Arctan}\dfrac{y}{x}\ [2\pi] & \text{si } x > 0 \\ \pi + \operatorname{Arctan}\dfrac{y}{x}\ [2\pi] & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Démonstration

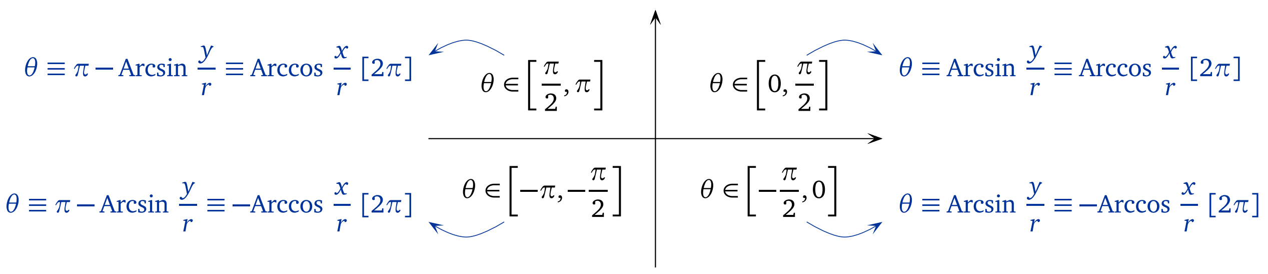
(i) Simple identification des parties réelle et imaginaire : $x + \mathrm{i}y = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = r\cos\theta + \mathrm{i}r\sin\theta$.

(ii) Si $x > 0$: $\theta \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[+ 2k\pi$ pour un certain $k \in \mathbb{Z}$, or : $\tan(\theta - 2k\pi) = \tan\theta = \dfrac{r\sin\theta}{r\cos\theta} = \dfrac{y}{x}$, donc comme $\theta - 2k\pi \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$: $\theta - 2k\pi = \operatorname{Arctan}\dfrac{y}{x}$, et enfin : $\theta \equiv \operatorname{Arctan}\dfrac{y}{x}\ [2\pi]$.

Si $x < 0$: $\theta \in \left]\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right[+ 2k\pi$ pour un certain $k \in \mathbb{Z}$, or : $\tan(\theta - \pi - 2k\pi) = \tan\theta = \dfrac{y}{x}$, donc comme $\theta - \pi - 2k\pi \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$: $\theta - \pi - 2k\pi = \operatorname{Arctan}\dfrac{y}{x}$, et enfin : $\theta \equiv \pi + \operatorname{Arctan}\dfrac{y}{x}\ [2\pi]$. ■

En pratique Avec les notations du théorème, nous avons obtenu un argument de z sous forme d'arctangente, mais nous aurions pu, par un procédé analogue, obtenir un arcsinus ou un arccosinus. La figure suivante résume les possibilités qui s'offrent à nous. Le résultat n'est pas à connaître, mais la démarche pour y parvenir, si. Il faut bien avoir en tête que :

Arcsin est la réciproque de $\sin\big|_{\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]}$, Arccos la réciproque de $\cos\big|_{[0,\pi]}$ et Arctan la réciproque de $\tan\big|_{\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[}$.



Exemple $3 - 5\mathrm{i}$ a pour argument $-\operatorname{Arcsin}\dfrac{5}{\sqrt{34}}$ ou $-\operatorname{Arccos}\dfrac{3}{\sqrt{34}}$.

Démonstration Comme : $3 \geqslant 0$ et $-5 \leqslant 0$, nous pouvons choisir un argument θ de $3 - 5\mathrm{i}$ dans $\left[-\dfrac{\pi}{2}, 0\right]$.

- **Arcsinus :** Comme $\theta \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$: $\sin\theta = -\dfrac{5}{\sqrt{34}}$ donne : $\theta = \operatorname{Arcsin}\left(-\dfrac{5}{\sqrt{34}}\right) = -\operatorname{Arcsin}\dfrac{5}{\sqrt{34}}$.
- **Arccosinus :** Comme : $-\theta \in [0, \pi]$, l'égalité : $\cos(-\theta) = \cos\theta = \dfrac{3}{\sqrt{34}}$ donne : $\theta = -\operatorname{Arccos}\dfrac{3}{\sqrt{34}}$.

En pratique **(Technique de l'angle moitié)**

- La *technique de l'angle moitié* consiste à écrire les complexes de la forme $e^{ix}+e^{iy}$ sous forme trigonométrique. On s'en sert souvent pour factoriser des expressions en sinus et cosinus. L'idée est simple. Pour tous $x,y\in\mathbb{R}$:
$$e^{ix}+e^{iy}=\boxed{e^{\frac{i(x+y)}{2}}}\left(e^{\frac{i(x-y)}{2}}+e^{-\frac{i(x-y)}{2}}\right)=2\,e^{\frac{i(x+y)}{2}}\cos\frac{x-y}{2}.$$
Mise en facteur de l'ANGLE MOITIÉ $\frac{x+y}{2}$

  En réalité, le résultat obtenu n'est pas forcément la forme trigonométrique de $e^{ix}+e^{iy}$ car $\cos\frac{x-y}{2}$ peut être négatif, mais on n'en est pas loin. Cette technique s'adapte bien sûr au cas des complexes de la forme $e^{ix}-e^{iy}$.

- Le programme vous épargne l'apprentissage par cœur de quatre nouvelles formules. Pour tous $x,y\in\mathbb{R}$:
$$\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\,\cos\frac{x-y}{2}\qquad\text{et}\qquad \sin x-\sin y=2\cos\frac{x+y}{2}\,\sin\frac{x-y}{2},$$
$$\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\,\cos\frac{x-y}{2}\qquad\text{et}\qquad \cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}\,\sin\frac{x-y}{2}.$$
  On s'attend en revanche à ce que vous sachiez les retrouver rapidement. Par exemple :
$$\sin x+\sin y=\mathrm{Im}\left(e^{ix}+e^{iy}\right)\underset{\text{moitié}}{\overset{\text{Angle}}{=}}\mathrm{Im}\left(2\,e^{\frac{i(x+y)}{2}}\cos\frac{x-y}{2}\right)=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}.$$

Exemple Pour tous $n\in\mathbb{N}$ et $x\in\mathbb{R}$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\cos(2kx)=\begin{cases}\dfrac{\sin\big((n+1)x\big)\cos(nx)}{\sin x} & \text{si : } x\notin\pi\mathbb{Z}\\ n+1 & \text{si : } x\in\pi\mathbb{Z}.\end{cases}$

Démonstration Vous devez à tout prix savoir refaire cette démonstration, l'exercice est très classique.
Si $x\in\pi\mathbb{Z}$: $\cos(2kx)=1$ pour tout $k\in[\![0,n]\!]$, donc : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\cos(2kx)=n+1$. Supposons désormais que : $x\notin\pi\mathbb{Z}$, de sorte que : $e^{2ix}\neq 1$.
$$\sum_{k=0}^{n}\cos(2kx)=\sum_{k=0}^{n}\mathrm{Re}\left(e^{2ikx}\right)=\mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n}e^{2ikx}\right)\overset{e^{2ix}\neq1}{=}\mathrm{Re}\left(\frac{e^{2i(n+1)x}-1}{e^{2ix}-1}\right)\underset{\text{moitié}}{\overset{\text{Angle}}{=}}\mathrm{Re}\left(\frac{e^{i(n+1)x}\left(e^{i(n+1)x}-e^{-i(n+1)x}\right)}{e^{ix}\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)}\right)$$
$$\overset{\text{Euler}}{=}\mathrm{Re}\left(e^{inx}\,\frac{\sin\big((n+1)x\big)}{\sin x}\right)=\frac{\sin\big((n+1)x\big)}{\sin x}\,\mathrm{Re}\left(e^{inx}\right)=\frac{\sin\big((n+1)x\big)}{\sin x}\,\cos(nx).$$

2.3 Exponentielle complexe

Nous disposons à ce stade de deux exponentielles, l'exponentielle sur $\mathbb{R}$ et l'« exponentielle $i\theta$ ». Plus généralement :

Définition **(Exponentielle complexe)** Pour tout $z\in\mathbb{C}$, on appelle *exponentielle* (*de*) z le nombre complexe suivant : $e^z=e^{\mathrm{Re}(z)}\,e^{i\,\mathrm{Im}(z)}$ sous forme TRIGONOMÉTRIQUE. En d'autres termes : $\left|e^z\right|=e^{\mathrm{Re}(z)}$ et $\arg\left(e^z\right)\equiv\mathrm{Im}(z)\ [2\pi]$.

Exemple $e^{2+\frac{i\pi}{4}}=e^2e^{\frac{i\pi}{4}}=e^2\left(\dfrac{1}{\sqrt2}+\dfrac{i}{\sqrt2}\right)=\dfrac{e^2}{\sqrt2}+\dfrac{i\,e^2}{\sqrt2}.$

Théorème **(Propriétés de l'exponentielle complexe)**

(i) **Périodicité :** L'exponentielle complexe est $2i\pi$-périodique, i.e. que pour tout $z\in\mathbb{C}$: $e^{z+2i\pi}=e^z$.
On dispose en fait d'un résultat plus précis. Pour tous $z,z'\in\mathbb{C}$: $e^z=e^{z'}\iff z\equiv z'\ [2i\pi]$.
Attention au i !

(ii) **Transformation des sommes en produits :** Pour tous $z,z'\in\mathbb{C}$: $e^{z+z'}=e^z\,e^{z'}$.

Démonstration

(i) Identification de formes trigonométriques : $\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{z'} \iff \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(z)} = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(z')}$ et $\mathrm{Im}(z) \equiv \mathrm{Im}(z')\ [2\pi]$

$$\iff \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(z') \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(z) \equiv \mathrm{Im}(z')\ [2\pi] \iff z \equiv z'\ [2i\pi].$$

(ii) $\mathrm{e}^{z+z'} = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(z+z')}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(z+z')} = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(z)+\mathrm{Re}(z')}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(z)+\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(z')} = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(z)}\,\mathrm{e}^{\mathrm{Re}(z')}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(z)}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(z')} = \mathrm{e}^z\,\mathrm{e}^{z'}$. ■

Exemple L'équation : $\mathrm{e}^z = 2+\mathrm{i}$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ a pour solutions : $\dfrac{\ln 5}{2} + \mathrm{i}\,\mathrm{Arctan}\,\dfrac{1}{2} + 2ik\pi$, k décrivant $\mathbb{Z}$.

Démonstration Pour tout $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$ sous forme algébrique :

$$\mathrm{e}^z = 2+\mathrm{i} \iff \mathrm{e}^x = |2+\mathrm{i}| = \sqrt{5} \quad \text{et} \quad y \text{ est un argument de } 2+\mathrm{i}$$

$$\iff x = \frac{\ln 5}{2} \quad \text{et} \quad y \equiv \mathrm{Arctan}\,\frac{1}{2}\ [2\pi] \iff \exists\, k \in \mathbb{Z}/ \quad z = \frac{\ln 5}{2} + \mathrm{i}\,\mathrm{Arctan}\,\frac{1}{2} + 2ik\pi.$$

Théorème (Dérivation des fonctions de la forme e^{φ}) Soit I un intervalle.

- Soit $\varphi \in \mathscr{D}(I,\mathbb{C})$. La fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{\varphi(x)}$ est dérivable sur I de dérivée $x \longmapsto \varphi'(x)\mathrm{e}^{\varphi(x)}$.
- En particulier, pour tout $a \in \mathbb{C}$, la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{ax}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $x \longmapsto a\mathrm{e}^{ax}$.

Démonstration Pour commencer : $\mathrm{e}^{\varphi} = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(\varphi)+\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(\varphi)} = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(\varphi)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(\varphi)} = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(\varphi)}\big(\cos\mathrm{Im}(\varphi) + \mathrm{i}\sin\mathrm{Im}(\varphi)\big)$, donc : $\mathrm{Re}(\mathrm{e}^{\varphi}) = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(\varphi)}\cos\mathrm{Im}(\varphi)$ et $\mathrm{Im}(\mathrm{e}^{\varphi}) = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(\varphi)}\sin\mathrm{Im}(\varphi)$.

- Par hypothèse φ est dérivable sur I, i.e. $\mathrm{Re}(\varphi)$ et $\mathrm{Im}(\varphi)$ le sont. Par composition avec les fonctions exp, sin et cos qui sont dérivables sur tout $\mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{\mathrm{Re}(\varphi)}$, $\cos\mathrm{Re}(\varphi)$ et $\sin\mathrm{Im}(\varphi)$ sont dérivables sur I et :

$$\left(\mathrm{e}^{\mathrm{Re}(\varphi)}\right)' = \mathrm{Re}(\varphi)'\mathrm{e}^{\mathrm{Re}(\varphi)}, \qquad \big(\cos\mathrm{Im}(\varphi)\big)' = -\mathrm{Im}(\varphi)'\sin\mathrm{Im}(\varphi) \qquad \text{et} \qquad \big(\sin\mathrm{Im}(\varphi)\big)' = \mathrm{Im}(\varphi)'\cos\mathrm{Im}(\varphi).$$

- Du coup, par produit, $\mathrm{Re}(\mathrm{e}^{\varphi}) = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(\varphi)}\cos\mathrm{Im}(\varphi)$ et $\mathrm{Im}(\mathrm{e}^{\varphi}) = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(\varphi)}\sin\mathrm{Im}(\varphi)$ sont dérivables sur I et :

$$\mathrm{Re}(\mathrm{e}^{\varphi})' = \left(\mathrm{e}^{\mathrm{Re}(\varphi)}\cos\mathrm{Im}(\varphi)\right)' = \left(\mathrm{e}^{\mathrm{Re}(\varphi)}\right)'\times\cos\mathrm{Im}(\varphi) + \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(\varphi)}\times\big(\cos\mathrm{Im}(\varphi)\big)' = \Big(\mathrm{Re}(\varphi)'\cos\mathrm{Im}(\varphi) - \mathrm{Im}(\varphi)'\sin\mathrm{Im}(\varphi)\Big)\mathrm{e}^{\mathrm{Re}(\varphi)}$$

et de même : $\mathrm{Im}(\mathrm{e}^{\varphi})' = \Big(\mathrm{Re}(\varphi)'\sin\mathrm{Im}(\varphi) + \mathrm{Im}(\varphi)'\cos\mathrm{Im}(\varphi)\Big)\mathrm{e}^{\mathrm{Re}(\varphi)}$.

- Nous avons bien montré que e^{φ} est dérivable sur I puisque ses parties réelle et imaginaire le sont. Enfin :

$$\varphi'\mathrm{e}^{\varphi} = \Big(\mathrm{Re}(\varphi)' + \mathrm{i}\,\mathrm{Im}(\varphi)'\Big)\times\mathrm{e}^{\mathrm{Re}(\varphi)}\Big(\cos\mathrm{Im}(\varphi) + \mathrm{i}\,\sin\mathrm{Im}(\varphi)\Big) = \mathrm{Re}(\mathrm{e}^{\varphi})' + \mathrm{i}\,\mathrm{Im}(\mathrm{e}^{\varphi})' = \left(\mathrm{e}^{\varphi}\right)'. \quad ■$$

2.4 RACINES $n^{\text{ÈMES}}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, rappelons que la fonction racine $n^{\text{ème}}$ est la réciproque de la fonction puissance $n^{\text{ème}}$ sur $\mathbb{R}_+$.

$$\boxed{\text{Pour tous } x, y \in \mathbb{R}_+ : \quad y = \sqrt[n]{x} \iff x = y^n.}$$

Définition (Racines $n^{\text{èmes}}$)

- Soient $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle *racine $n^{\text{ème}}$ de z* tout nombre complexe ζ pour lequel : $z = \zeta^n$.
- Les racines $n^{\text{èmes}}$ de 1 sont dites *racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité*. Leur ensemble est noté $\mathbb{U}_n$.

✖ **ATTENTION !** ✖

$\sqrt[n]{x}$ Notation autorisée si $x \in \mathbb{R}_+$.

$\cancel{\sqrt[n]{z}}$ La plus interdite des notations interdites si $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$!

Pourquoi cet interdit ? Parce que nous allons voir dans un instant que tout nombre complexe non nul a n racines $n^{\text{èmes}}$ distinctes qui se valent les unes les autres. Laquelle noterions-nous $\sqrt[n]{z}$?

Théorème (Formule des racines $n^{\text{èmes}}$) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- La seule racine $n^{\text{ème}}$ de 0 est 0.
- Soit $z = re^{i\theta} \in \mathbb{C}$ **NON NUL** sous forme trigonométrique. Alors z possède exactement n racines $n^{\text{èmes}}$, à savoir les nombres complexes : $\sqrt[n]{r}\, e^{\frac{i\theta}{n}+\frac{2ik\pi}{n}}$, k décrivant $[\![0, n-1]\!]$.
- **Cas particulier des racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité :** $\mathbb{U}_n = \left\{e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right\}_{0\leqslant k\leqslant n-1}$.

Démonstration Passons sur l'évidence du cas 0. Pour le reste, nous allons traiter d'abord le cas des racines de l'unité et ensuite nous généraliserons.

- **Racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité :** Soit $\omega \in \mathbb{C}$. Posons : $\rho = |\omega|$ et notons φ l'unique argument de ω dans l'intervalle $[0, 2\pi[$. Par identification de formes trigonométriques :

$$\begin{aligned}
\omega^n = 1 \quad &\iff \quad \rho^n\, e^{in\varphi} = 1\, e^{i0} \quad \iff \quad \rho^n = 1 \quad \text{et} \quad n\varphi \equiv 0\,[2\pi] \\
&\overset{\rho\in\mathbb{R}_+}{\iff} \quad \rho = 1 \quad \text{et} \quad \exists\, k \in \mathbb{Z}/\ \ n\varphi = 2k\pi \quad \iff \quad \rho = 1 \quad \text{et} \quad \exists\, k \in \mathbb{Z}/\ \ \varphi = \frac{2k\pi}{n} \\
&\overset{\varphi\in[0,2\pi[}{\iff} \quad \rho = 1 \quad \text{et} \quad \exists\, k \in [\![0, n-1]\!]/\ \ \varphi = \frac{2k\pi}{n} \quad \iff \quad \exists\, k \in [\![0, n-1]\!]/\ \ \omega = e^{\frac{2ik\pi}{n}}.
\end{aligned}$$

  Ceci nous fait bien un total de n racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité, n car les exponentielles obtenues sont distinctes.

- **Cas général :** Soit $z = re^{i\theta} \in \mathbb{C}$ **NON NUL** sous forme trigonométrique. Posons : $\zeta = \sqrt[n]{r}\, e^{\frac{i\theta}{n}}$. Il est immédiat que : $\zeta^n = z$ et ζ est non nul puisque z ne l'est pas. Nous disposons ainsi déjà d'une racine $n^{\text{ème}}$ de z et grâce à elle, nous allons trouver les autres. Pour tout $\omega \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned}
\omega^n = z \quad &\iff \quad \omega^n = \zeta^n \quad \overset{\zeta\neq 0}{\iff} \quad \left(\frac{\omega}{\zeta}\right)^n = 1 \\
&\iff \quad \exists\, k \in [\![0, n-1]\!]/\ \ \frac{\omega}{\zeta} = e^{\frac{2ik\pi}{n}} \quad \iff \quad \exists\, k \in [\![0, n-1]\!]/\ \ \omega = \sqrt[n]{r}\, e^{\frac{i\theta}{n}+\frac{2ik\pi}{n}}. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Exemple Les racines cubiques de $1+i$ sont : $\sqrt[6]{2}\, e^{\frac{i\pi}{12}}$, $\sqrt[6]{2}\, e^{\frac{3i\pi}{4}}$ et $\sqrt[6]{2}\, e^{-\frac{7i\pi}{12}}$.

Démonstration D'abord : $1+i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\, e^{\frac{i\pi}{4}}$. D'après la formule du théorème, les racines cubiques de $1+i$ sont alors les trois nombres : $\sqrt[3]{\sqrt{2}}\, e^{\frac{i\pi}{12}+\frac{2ik\pi}{3}} = \sqrt[6]{2}\, e^{\frac{i\pi}{12}+\frac{2ik\pi}{3}}$, k décrivant l'ensemble $\{0, 1, 2\}$.

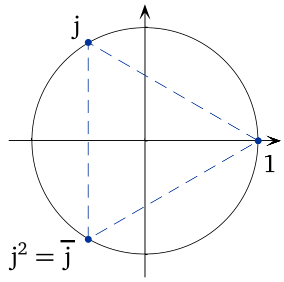
Définition (Nombre j) On note j le nombre $e^{\frac{2i\pi}{3}}$, racine $3^{\text{ème}}$ de l'unité. Quelques relations à connaître à son sujet :

$$j^3 = 1, \qquad \overline{j} = j^2, \qquad 1 + j + j^2 = 0 \qquad \text{et pour tout } z \in \mathbb{C} : \quad z^2 + z + 1 = (z - j)(z - \overline{j}).$$

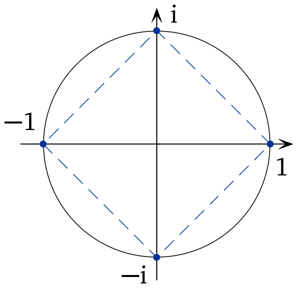
Démonstration Simple vérification. $\blacksquare$

✌ **Explication** ✌ Tâchons de visualiser la formule des racines $n^{\text{èmes}}$ sur quelques dessins.

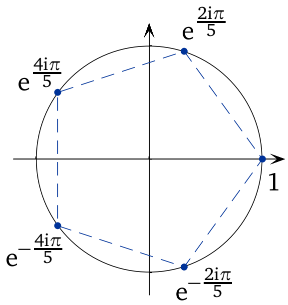
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{U}_n$ est l'ensemble des sommets du polygone régulier —- i.e. à côtés de même longueur —- à n côtés, de centre O et passant par le point d'affixe 1.



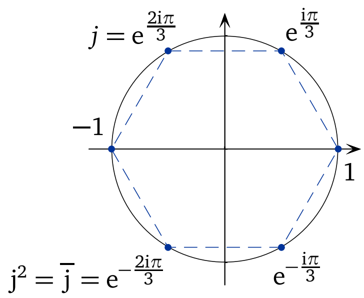
$\mathbb{U}_3$ est l'ensemble des sommets d'un triangle équilatéral.



$\mathbb{U}_4$ est l'ensemble des sommets d'un carré.



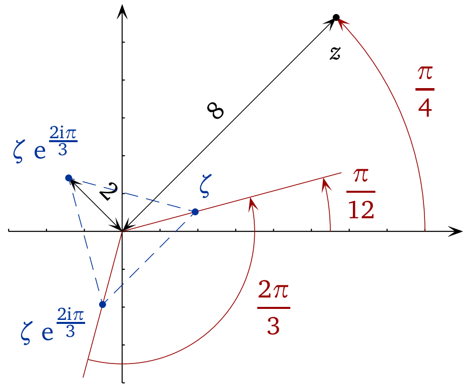
$\mathbb{U}_5$ est l'ensemble des sommets d'un pentagone régulier.



$\mathbb{U}_6$ est l'ensemble des sommets d'un hexagone régulier.

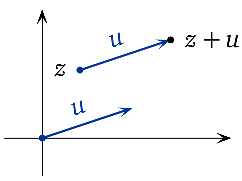
- Et l'expression : $\sqrt[n]{r}\ e^{\frac{i\theta}{n}+\frac{2ik\pi}{n}}$, elle raconte quoi ? Pour : $z = re^{i\theta}$, nous avons déjà vu plus haut que $\zeta = \sqrt[n]{r}e^{\frac{i\theta}{n}}$ est **UNE** racine $n^{\text{ème}}$ de z. Pour obtenir à partir de ζ toutes les racines $n^{\text{èmes}}$ de z, il reste alors à le multiplier par chacun des éléments de $\mathbb{U}_n = \left\{e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right\}_{0\leqslant k\leqslant n-1}$.

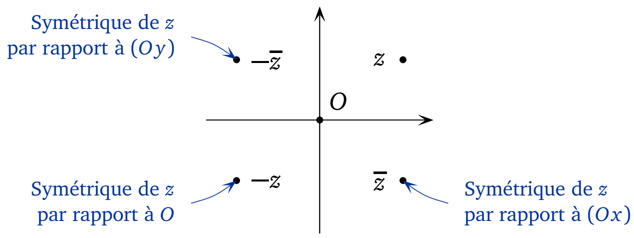
  Sur la figure ci-contre : $z = 8\ e^{\frac{i\pi}{4}}$ et $n = 3$ — donc : $r = 8$ et, par exemple : $\theta = \dfrac{\pi}{4}$. A fortiori : $\sqrt[n]{r} = \sqrt[3]{8} = 2$ et $\dfrac{\theta}{n} = \dfrac{\pi}{12}$, donc : $\zeta = 2\ e^{\frac{i\pi}{12}}$.

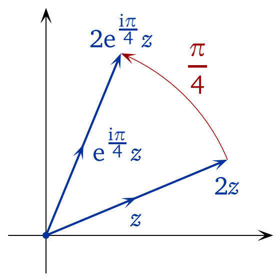


3 Interprétation géométrique des nombres complexes

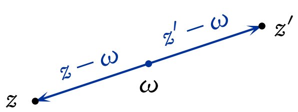
- Les figures ci-dessous vous rappellent :
  - — que l'addition de deux nombres complexes s'interprète géométriquement en termes de translation,
  - — deux ou trois choses concernant les symétries les plus simples,
  - — que le produit de deux nombres complexes s'interprète géométriquement en termes d'homothétie et de rotation.



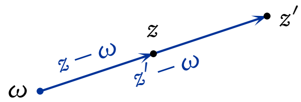




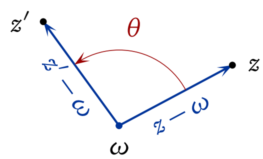
- Voyons maintenant ce qu'il en est de transformations plus compliquées. Dans chacun des cas ci-dessous, z' désigne l'image de z par la transformation considérée.



Symétrie par rapport à ω :
$z' - \omega = -(z - \omega)$
i.e. : $z' = 2\omega - z$.



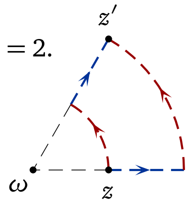
Homothétie de centre ω
et de rapport λ (ici $\lambda = 2$) :
$z' - \omega = \lambda(z - \omega)$
i.e. : $z' = \omega + \lambda(z - \omega)$.



Rotation de centre ω
et d'angle de mesure θ :
$z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$
i.e. : $z' = \omega + e^{i\theta}(z - \omega)$.

- Il apparaît ainsi clairement que les transformations géométriques auxquelles nous sommes habitués sont de la forme $z \longmapsto az + b$ ou $z \longmapsto a\bar{z} + b$ pour certains $a, b \in \mathbb{C}$ avec : $a \neq 0$. Réciproquement, que pouvons-nous dire en général des transformations de cette forme ? Fixons $a, b \in \mathbb{C}$ avec : $a \neq 0$ et notons f la transformation $z \longmapsto az + b$, ainsi qu'α un argument de a.
  - — Si : $a = 1$, f est simplement la translation de vecteur b.

Ici $|a| = 2$.



— Si : $a \neq 1$, remarquons d'abord que f possède un et un seul point fixe, l'équation : $f(\omega) = \omega$ d'inconnue $\omega \in \mathbb{C}$ admet : $\omega = \dfrac{b}{1-a}$ pour seule et unique solution. Intérêt de la manœuvre : réécrire f sous une forme plus sympathique. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, si nous posons : $z' = f(z)$, alors :

$$z' - \omega = (az+b) - (a\omega+b) = a(z-\omega) \quad = \quad \underbrace{|a| \times \underbrace{e^{i\alpha}(z-\omega)}_{\substack{\text{Rotation de centre } \omega \\ \text{et d'angle de mesure } \alpha}}}_{\substack{\text{Homothétie de centre } \omega \\ \text{et de rapport } |a|}} \quad = \quad \underbrace{e^{i\alpha} \times \underbrace{|a|(z-\omega)}_{\substack{\text{Homothétie de centre } \omega \\ \text{et de rapport } |a|}}}_{\substack{\text{Rotation de centre } \omega \\ \text{et d'angle de mesure } \alpha}}.$$

Conclusion : f est la composée d'une homothétie et d'une rotation de mêmes centres. De plus l'ordre dans lequel on compose ces deux transformations ne compte pas. On dit que f est la *similitude directe de centre ω, de rapport $|a|$ et d'angle de mesure α.*

Exemple La fonction $z \overset{f}{\longmapsto} 2iz + 1$ est la similitude directe de centre $\dfrac{1+2i}{5}$, de rapport 2 et d'angle de mesure $\dfrac{\pi}{2}$.

Démonstration Comme le coefficient de z dans la forme de f est : $2i = 2e^{\frac{i\pi}{2}} \neq 1$, f n'est pas une translation. Son rapport est alors 2 et son angle a pour mesure $\dfrac{\pi}{2}$.

Enfin le centre de f est son unique point fixe ω : $f(\omega) = \omega \iff \omega = \dfrac{1}{1-2i} = \dfrac{1+2i}{5}$.

Théorème (Interprétation géométrique de $\dfrac{z-b}{z-a}$) Soient $a, b, z \in \mathbb{C}$ avec $z \neq a$ et $z \neq b$. On note A l'image de a, B celle de b et M celle de z. Alors : $\left|\dfrac{z-b}{z-a}\right| = \dfrac{MB}{MA}$ et $\arg\left(\dfrac{z-b}{z-a}\right) \equiv \left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) [2\pi]$.

Démonstration $\arg\left(\dfrac{z-b}{z-a}\right) \equiv \arg\left(\dfrac{b-z}{a-z}\right) \equiv \arg(b-z) - \arg(a-z) \equiv \left(\vec{\imath}, \overrightarrow{MB}\right) - \left(\vec{\imath}, \overrightarrow{MA}\right) \equiv \left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) [2\pi]$,

donc : $\dfrac{z-b}{z-a} = \dfrac{b-z}{a-z} = \dfrac{|b-z|\, e^{i\beta}}{|a-z|\, e^{i\alpha}} = \dfrac{MB}{MA}\, e^{i(\beta-\alpha)} = \dfrac{MB}{MA}\, e^{i\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right)}$. ■

✎ **En pratique** ✎ Avec les notations du théorème, on peut démontrer l'alignement de A, B et M ou l'orthogonalité des droites (AM) et (BM) grâce aux équivalences suivantes :

$$A, B \text{ et } M \text{ sont alignés} \iff \left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) \equiv 0\ [2\pi] \text{ ou } \left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) \equiv \pi\ [2\pi] \iff \frac{z-b}{z-a} \in \mathbb{R}.$$

$$(AM) \text{ et } (BM) \text{ sont orthogonales} \iff \left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi] \text{ ou } \left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}\ [2\pi] \iff \frac{z-b}{z-a} \in i\mathbb{R}.$$

Exemple L'ensemble des nombres $z \in \mathbb{C}$ pour lesquels le triangle de sommets z, z^2 et z^3 est rectangle en z est constitué de la droite verticale d'équation : $x = -1$ et des deux points 0 et 1.

Démonstration Soit $z \in \mathbb{C}$. Afin de pouvoir travailler avec le rapport $\dfrac{z^3-z}{z^2-z}$, on suppose : $z \neq 0$ et $z \neq 1$. Pour ces deux points, de toute façon, le triangle de sommets z, z^2 et z^3 est réduit à un point, donc rectangle en z — par convention. À présent :

$$\text{Le triangle de sommets } z, z^2 \text{ et } z^3 \text{ est rectangle en } z \iff \frac{z^3-z}{z^2-z} \in i\mathbb{R} \iff \frac{z(z-1)(z+1)}{z(z-1)} \in i\mathbb{R}$$
$$\iff z+1 \in i\mathbb{R} \iff \mathrm{Re}(z+1) = 0 \iff \mathrm{Re}(z) = -1.$$