RAISONNER, RÉDIGER

Cette annexe, qui plane à mes yeux comme une ombre au-dessus de tous les chapitres au programme, a deux objectifs :

— vous apprendre ou vous rappeler les raisonnements de base utilisés en mathématiques,

— vous convaincre qu'il est essentiel de savoir rédiger — pour faire joli, mais surtout pour bien penser.

1 AXIOMES, DÉFINITIONS, THÉORÈMES

- **Axiomes :** Dans une théorie formelle quelconque, mathématique ou non, on appelle *axiomes* les propositions que la théorie tient pour vraies sans justification comme points de départ.

  Nous aurons très peu l'occasion de rencontrer les axiomes sur lesquels les mathématiques sont traditionnellement fondés. Dans notre démarche de fondement pourtant, tout au long de l'année, nous aurons à cœur de démontrer presque tous les énoncés que nous manipulerons — mais pas tous, nous ne remonterons pas en-deçà d'un certain point. Précisément, nous admettrons l'existence des nombres réels avec toutes les propriétés que nous leur connaissons, alors que les mathématiques en réalité, loin d'accepter les réels sans discussion, sont capables d'en offrir une construction à partir d'axiomes plus élémentaires.

- **Définitions :** On appelle *définition* toute manière d'accorder un nom jusqu'ici inusité à un objet vérifiant une certaine propriété. Une définition crée ainsi une classe d'objets — les oiseaux, par exemple — réunis autour d'un certain nom — le mot « oiseau » — lequel résume une certaine propriété — « animal à plumes ».

  Pourquoi un nom « jusqu'ici inusité » ? Tout simplement parce qu'il ne faut pas qu'un même nom puisse signifier des choses différentes. L'homonymie est tolérée dans le langage usuel mais pas en mathématiques, par souci de rigueur formelle. La situation du mot « verre » par exemple, à la fois matériau brut et objet dans lequel je bois, est interdite en mathématiques.

> Pour définir la classe des objets « machin », deux rédactions possibles :
>
> « On appelle *machin* tout objet tel que… »
>
> ou bien :
>
> « Soit x un objet. On dit que x est un *machin* s'il vérifie… »

- **Théorèmes :** On appelle *théorème* toute proposition d'une théorie que l'on a pu démontrer à partir de ses axiomes. Une théorie n'est finalement qu'un empilement ordonné d'axiomes, de démonstrations et de théorèmes. Trois autres mots sont couramment utilisés pour désigner certaines formes de théorèmes :

  — **Lemmes :** On appelle *lemme* tout théorème préparatoire à la démonstration d'un « plus gros » théorème. La démonstration d'un gros théorème peut ainsi se trouver saucissonnée en morceaux plus petits.

  — **Corollaires :** On appelle *corollaire* tout théorème qui est une conséquence presque immédiate d'un « plus gros » théorème.

  — **Caractérisations :** On appelle *caractérisation* tout théorème sur une notion qui donne une condition équivalente à la définition de cette notion. Une caractérisation est donc au fond ce qu'on pourrait appeler une « redéfinition ». Exemple bien connu :

> **Définition (Fonction croissante)** Soient I un intervalle et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est *croissante sur* I si : $\quad \forall x, y \in I, \quad \big(x < y \implies f(x) \leqslant f(y)\big)$.

Voilà pour la définition. Le théorème suivant redéfinit la notion de croissance dans le cas des fonctions DÉRIVABLES.

> **Théorème (Caractérisation des fonctions dérivables croissantes)** Soient I un intervalle et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction DÉRIVABLE. Alors f est croissante sur I si et seulement si f' est positive ou nulle sur I.

2 Introduire une variable, montrer une proposition universelle

La première règle de rédaction, c'est que **tout objet dont on parle doit être introduit**. En français, si vous dites : « Elle les lui a donnés hier » sans avoir précisé auparavant qui sont « elle », « les » et « lui », personne ne vous comprendra. En maths c'est pareil, vous devez présenter tout ce dont vous parlez. Un calcul de dérivée par exemple ne doit jamais ressembler à : $f'(x) = \dots,$ mais se présenter proprement ainsi, avec un x parfaitement introduit :

$$\text{POUR TOUT } x \in \dots : \quad f'(x) = \dots$$

On a souvent l'occasion d'introduire des variables en mathématiques parce qu'on a souvent à prouver des propositions universelles : $\forall x \in E, \quad \mathscr{P}(x)$.

Quand on veut montrer que : $\forall x \in E, \quad \mathscr{P}(x),$ on écrit **sans réfléchir** :

« Soit $x \in E$. Introduction de la variable x.
Montrons que $\mathscr{P}(x)$. »

$\vdots$ } Preuve de $\mathscr{P}(x)$.

L'essentiel dans cet encadré et les suivants, c'est la distinction **réfléchir/ne pas réfléchir**. Les modèles de rédaction proposés doivent devenir des réflexes. Vous ne pourrez pas vous en sortir en maths tant que cela ne sera pas le cas.

Exemple $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \dfrac{x}{x^2+1} \leqslant \dfrac{1}{2}.$

Démonstration Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrons que : $\dfrac{x}{x^2+1} \leqslant \dfrac{1}{2}$. Or : $(x-1)^2 \geqslant 0,$ donc : $x^2+1 \geqslant 2x,$ et enfin : $\dfrac{x}{x^2+1} \leqslant \dfrac{1}{2}.$

3 Donner un nom à un objet, montrer l'existence d'un objet

Admettons qu'on soit amené dans une preuve à répéter de nombreuses fois une quantité un peu compliquée, disons $\dfrac{e^{n_0}+1}{\sqrt{n_0^2+1}}$, où n_0 est un nombre qui a déjà été introduit proprement. Il est naturel alors de vouloir résumer cette expression par un petit nom plus simple, disons K. Au lieu d'écrire $\dfrac{e^{n_0}+1}{\sqrt{n_0^2+1}}$ partout, on écrira simplement K, c'est plus court.

Pour donner le nom K à la quantité $\dfrac{e^{n_0}+1}{\sqrt{n_0^2+1}}$, on écrit :

« Posons : $K = \dfrac{e^{n_0}+1}{\sqrt{n_0^2+1}}$. » ou bien : « Notons K le réel $\dfrac{e^{n_0}+1}{\sqrt{n_0^2+1}}$. »

À **gauche**, le choix du nom K suppose que la lettre K n'est pas déjà le nom d'un autre objet.

À **droite**, la quantité à laquelle on donne un nom ne doit contenir que des objets déjà introduits, ici n_0.

Cette rédaction « Posons/notons » est employée souvent pour montrer une proposition existentielle : $\exists\, x \in E/\quad \mathscr{P}(x)$.

> Quand on veut montrer que : $\exists\, x \in E/\quad \mathscr{P}(x)$, et qu'on a déjà en tête un exemple d'objet $x \in E$ qui a la propriété $\mathscr{P}$, on écrit **SANS RÉFLÉCHIR** :
>
> « Posons : $x = \ldots$ L'exemple qu'on a en tête.
> Vérifions que $\mathscr{P}(x)$. »
>
> $\vdots \quad \Big\}$ Vérification que x satisfait la propriété $\mathscr{P}$.

La difficulté, bien sûr, ne consiste souvent pas à vérifier que x a la propriété $\mathscr{P}$, mais à avoir l'idée d'un exemple de tel objet x. Il n'existe hélas pas de règle générale pour avoir des idées. Nous y reviendrons tout de même un peu plus loin dans le paragraphe sur l'analyse-synthèse.

Exemple $\forall x, y \in \mathbb{R},\quad \exists\, z \in \mathbb{R}/\quad z > x + y.$

Démonstration Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Après réflexion, posons : $z = x + y + 1$. Comme voulu : $z > x + y$.

4 Montrer une disjonction, une implication ou une équivalence

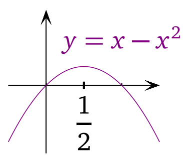
On rappelle que les propositions : p ou q et : $(\text{non } p) \Longrightarrow q$ sont équivalentes. Ainsi, dire que de deux propositions l'une est vraie, c'est dire que si on suppose fausse l'une fixée des deux, alors c'est l'autre qui est vraie.

> Quand on veut montrer que : p ou q, on procède souvent ainsi :
>
> « Supposons p fausse.
> Montrons que q est vraie. »
>
> $\vdots \quad \Big\}$ Preuve de q.

Exemple $\forall x \in \mathbb{R},\quad \max\left\{x^2, (x-2)^2\right\} \geqslant 1.$

Démonstration Soit $x \in \mathbb{R}$. Il s'agit de montrer que : $x^2 \geqslant 1$ ou $(x-2)^2 \geqslant 1$. Supposons à cette fin que : $x^2 < 1$ et montrons qu'alors : $(x-2)^2 \geqslant 1$. Or dire que : $x^2 < 1$, c'est dire que : $-1 < x < 1$, donc aussitôt : $-3 < x - 2 < -1$, et comme la fonction carrée est décroissante sur $\mathbb{R}_-$: $(x-2)^2 \geqslant (-1)^2 = 1$.

> Quand on veut montrer que : $p \Longrightarrow q$, on écrit **SANS RÉFLÉCHIR** :
>
> « Supposons p vraie.
> Montrons que q est vraie. »
>
> $\vdots \quad \Big\}$ Preuve de q.



Exemple $\forall x \in [0, 1],\quad x - x^2 \in \mathbb{N} \quad\Longrightarrow\quad x \in \{0, 1\}.$

Démonstration Soit $x \in [0, 1]$. On suppose que : $x - x^2 \in \mathbb{N}$. Montrons que : $x \in \{0, 1\}$. Nous connaissons bien les fonctions polynomiales du second degré. Ici, clairement : $0 \leqslant x - x^2 \leqslant \frac{1}{4}$, où $\frac{1}{4}$ est la valeur du maximum atteint au milieu des racines 0 et 1 en $\frac{1}{2}$. Or : $x - x^2 \in \mathbb{N}$ par hypothèse, donc forcément : $x - x^2 = 0$, i.e. : $x = 0$ ou $x = 1$.

✖ **Attention !** ✖ N'utilisez pas la flèche d'implication « $\Longrightarrow$ » pour dire « donc », ce n'est pas là son sens.

Quand on fait un raisonnement du type : « p est vraie donc q est vraie », ce n'est pas : $p \Longrightarrow q$ qu'on est en train d'affirmer, mais un enchevêtrement plus complexe de propositions :

p est vraie **ET** il est vrai que $p \Longrightarrow q$, **DONC** q est vraie.

Bref, dans : « p est vraie donc q est vraie », on rappelle d'abord que p est vraie, ensuite on sous-entend que : $p \Longrightarrow q$, enfin on en déduit que q est vraie, et c'était la vérité de q qui nous intéressait dès le départ. Dans : $p \Longrightarrow q$ au contraire, ni la vérité de p ni la vérité de q n'est affirmée. La flèche « $\Longrightarrow$ » et la préposition « donc » ont ainsi bel et bien des usages différents.

On rappelle que les propositions : non $(p \Longrightarrow q)$ et : p et (non q) sont équivalentes. En particulier, les propositions : non $\big(\forall x \in E,\ \mathscr{P}(x) \Longrightarrow \mathscr{Q}(x)\big)$ et : $\exists\, x \in E/\ \mathscr{P}(x)$ et $\big(\text{non } \mathscr{Q}(x)\big)$ le sont donc aussi. Ainsi, dire que le prédicat $\mathscr{P}$ n'implique pas $\underbrace{\text{TOUJOURS}}_{\forall}$ le prédicat $\mathscr{Q}$, c'est dire que $\underbrace{\text{DANS CERTAINS CAS}}_{\exists}$, $\mathscr{P}$ peut être vrai sans que $\mathscr{Q}$ le soit.

Quand on veut montrer que : $p \Longrightarrow q$ est **FAUSSE**, on écrit **SANS RÉFLÉCHIR** :

« Montrons que p est vraie.

$\vdots$ } Preuve de p.

Montrons que q est fausse. »

$\vdots$ } Preuve que q est fausse.

Exemple Il est faux que : $\forall x, y \in \mathbb{R},\quad x < y \quad\Longrightarrow\quad \sin x \leqslant \sin y$. Bref, la fonction sinus n'est pas croissante.

Démonstration Nous devons montrer que : $\exists\, x, y \in \mathbb{R}/\quad x < y$ et $\sin x > \sin y$. Après réflexion, posons : $x = \dfrac{\pi}{2}$ et $y = \pi$. Alors en effet : $x < y$ et $\sin x = 1 > 0 = \sin y$.

Quand on veut montrer que : $p \Longleftrightarrow q$, deux possibilités :

— soit on raisonne par double implication :

« • Supposons p vraie.
Montrons que q est vraie.

$\vdots$ } Preuve de q.

• Réciproquement, supposons q vraie.
Montrons que p est vraie. »

$\vdots$ } Preuve de p.

— soit on raisonne directement par équivalence en changeant peu à peu p en q :

« $p \quad\Longleftrightarrow\quad \ldots \quad\Longleftrightarrow\quad \ldots \quad\Longleftrightarrow\quad q$. »

Exemple $\forall x, y \in \mathbb{R},\qquad x^2 + y^2 = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad x = y = 0.$

Démonstration Soient $x, y \in \mathbb{R}$. L'implication directe est triviale, car si $x = y = 0$: $x^2 + y^2 = 0$. Pour la réciproque, si : $x^2 + y^2 = 0$, alors : $\underbrace{x^2}_{\geqslant 0} = \underbrace{-y^2}_{\leqslant 0}$, donc : $x^2 = -y^2 = 0$ et enfin : $x = y = 0$.

5 Montrer l'unicité d'un objet

Le raisonnement suivant n'est pas le seul raisonnement possible pour montrer l'unicité d'un objet. Nous approcherons le problème d'une autre manière un peu plus loin avec l'analyse-synthèse.

> Quand on veut montrer qu'un ensemble E contient $\underbrace{\textbf{AU PLUS UN}}_{\text{C'est cela l'unicité.}}$ élément vérifiant une propriété $\mathscr{P}$, on peut procéder ainsi :
>
> « Soient $x, x' \in E$.
> Faisons l'hypothèse que $\mathscr{P}(x)$ et $\mathscr{P}(x')$.
> Montrons que : $x = x'$. »
>
> $\left.\vdots\right\}$ Preuve que : $x = x'$.

✖ Attention ! ✖

- Montrer l'unicité d'un objet dans un ensemble E vérifiant une propriété $\mathscr{P}$, ce n'est pas montrer la proposition : $\exists\,!\ x \in E/\quad \mathscr{P}(x)$, car cette proposition n'affirme pas seulement l'unicité de x mais aussi son **EXISTENCE** à travers le symbole « $\exists$ ». « Au plus un » ne signifie pas « exactement un ».
- Il n'est pas nécessaire de raisonner par l'absurde en supposant x et x' différents. On prend deux objets x et x' qui ont la même propriété. Si on arrive à montrer qu'alors ils sont **FORCÉMENT** égaux, cela montre bien l'unicité souhaitée.

Exemple $\exists\,!\ x \in \mathbb{R}_+/\quad x^2 = 1.$

Démonstration

- **Existence :** Posons : $x = 1$. Comme voulu : $x \in \mathbb{R}_+$ et $x^2 = 1$.
- **Unicité :** Soient $x, x' \in \mathbb{R}_+$. On suppose que : $x^2 = x'^2 = 1$. Aussitôt, soit : $x = x'$, soit : $x = -x'$. Or s'il était vrai que : $\underbrace{x}_{\geqslant 0} = \underbrace{-x'}_{\leqslant 0}$, x et x' seraient nuls alors que : $x^2 = x'^2 = 1$. Forcément : $x = x'$.

6 Montrer une inclusion ou une égalité d'ensembles

> Quand on veut montrer une inclusion : $E \subset F$, on écrit **SANS RÉFLÉCHIR** :
>
> « Soit $x \in E$.
> Montrons que : $x \in F$. »
>
> $\left.\vdots\right\}$ Preuve que : $x \in F$.

Exemple $\left\{x \in \mathbb{R}/\quad \exists\ y \in \mathbb{R}_+/\quad x \geqslant y\right\} \subset \mathbb{R}_+$.

Démonstration Soit $x \in \mathbb{R}$. On suppose que : $x \geqslant y$ $\overbrace{\text{pour un certain}}^{\exists}$ $y \in \mathbb{R}_+$. Montrons qu'alors : $x \in \mathbb{R}_+$. Or : $y \geqslant 0$ par hypothèse et : $x \geqslant y$, donc en effet : $x \geqslant 0$.

Exemple On note $2\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels pairs et on pose : $E = \left\{k(k+1)\right\}_{k\in\mathbb{N}}$. Alors : $E \subset 2\mathbb{N}$.
En français, cela revient à dire que tout entier de la forme $k(k+1)$ avec $k \in \mathbb{N}$ est pair.

Démonstration Soit $n \in E$, disons : $n = k(k+1)$ pour un certain $k \in \mathbb{N}$. Montrons que : $n \in 2\mathbb{N}$. Or k est pair ou impair, et si k est impair alors $k+1$ est pair. De toute façon, donc, k ou $k+1$ est pair. Par produit, $n = k(k+1)$ l'est aussi, donc en effet : $n \in 2\mathbb{N}$.

Quand on veut montrer une égalité d'ensembles : $E = F$, deux possibilités :

— soit on raisonne par double inclusion :

« • Soit $x \in E$.
Montrons que : $x \in F$.

$\vdots$ } Preuve que : $x \in F$.

• Réciproquement, soit $x \in F$.
Montrons que : $x \in E$. »

$\vdots$ } Preuve que : $x \in E$.

— soit on raisonne directement par équivalence :

« Pour tout x : $x \in E \iff \ldots \iff \ldots \iff x \in F$. »

Exemple $\mathbb{R}_- = \left\{x \in \mathbb{R} / \quad \forall y \in \mathbb{R}_+, \quad x \leqslant y\right\}$.

Démonstration

- Montrons que : $\mathbb{R}_- \subset \left\{x \in \mathbb{R} / \quad \forall y \in \mathbb{R}_+, \quad x \leqslant y\right\}$.
  Soit $x \in \mathbb{R}_-$. Nous devons montrer que : $\forall y \in \mathbb{R}_+, \quad x \leqslant y$, mais c'est évident par hypothèse sur x.
- Montrons que : $\left\{x \in \mathbb{R} / \quad \forall y \in \mathbb{R}_+, \quad x \leqslant y\right\} \subset \mathbb{R}_-$.
  Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall y \in \mathbb{R}_+, \quad x \leqslant y$. Alors en particulier, pour $y = 0$: $x \leqslant 0$, i.e. : $x \in \mathbb{R}_-$.

Exemple Soient E un ensemble et $\{A_i\}_{i \in I}$ un ensemble de parties de E. Alors : $\overline{\bigcup_{i \in I} A_i} = \bigcap_{i \in I} \overline{A_i}$.

Démonstration Pour tout $x \in E$: $x \in \overline{\bigcup_{i \in I} A_i} \iff \text{non}\left(x \in \bigcup_{i \in I} A_i\right) \iff \text{non}\left(\exists\, i \in I / \quad x \in A_i\right)$
$\iff \forall i \in I, \quad \text{non}\,(x \in A_i) \iff \forall i \in I, \quad x \in \overline{A_i} \iff x \in \bigcap_{i \in I} \overline{A_i}$.

7 Le raisonnement par récurrence

Le raisonnement par récurrence repose sur le principe suivant :

$$\text{si } \underbrace{\mathscr{P}_0 \text{ est vraie}}_{\text{Initialisation}} \quad \text{et si :} \quad \underbrace{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathscr{P}_n \implies \mathscr{P}_{n+1},}_{\text{Hérédité}} \qquad \text{alors :} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathscr{P}_n.$$

Quand on veut montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathscr{P}_n$, on rédige ainsi :

« • **Initialisation :** ... Vérification que $\mathscr{P}_0$ est vraie.

• **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$.
Supposons $\mathscr{P}_n$ vraie.
Montrons que $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie. »

$\vdots$ } Preuve que $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.

✖ **Attention !** ✖ A priori, toute autre rédaction est exclue.

- Commencer l'hérédité par : « Supposons que **pour tout** $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}_n$ est vraie » est une erreur **gravissime**. Si on suppose la propriété vraie à **tous** les rangs, que reste-t-il à prouver ? On ne peut jamais montrer ce qu'on prend pour hypothèse.

- Une erreur moins grave à présent, mais c'est une incorrection quand même : « Supposons $\mathscr{P}_n$ vraie **POUR UN CERTAIN** $n \in \mathbb{N}$ ». On voit souvent cela. Où est le problème ? La proposition : « $\mathscr{P}_n$ est vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$ » s'écrit formellement : $\exists\, n \in \mathbb{N}/\quad \mathscr{P}_n$, alors que l'hérédité repose sur le principe suivant : $\forall n \in \mathbb{N},\quad \mathscr{P}_n \implies \mathscr{P}_{n+1}$ — rien à voir. La locution « pour un certain… » cache toujours la présence d'un quantificateur « $\exists$ ».

Exemple Par définition, un entier $n \in \mathbb{Z}$ est *pair* s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que : $n = 2k$ et *impair* s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que : $n = 2k+1$. Nous savons bien que tout entier est pair ou impair — mais encore faut-il le montrer !

Démonstration Naturellement, le « ou » est ici inclusif. Nous verrons plus loin comment le rendre exclusif.

- **Initialisation :** L'entier 0 est pair car : $0 = 2 \times 0$.

  Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose n pair ou impair. Il s'agit de montrer que $n+1$ est lui aussi pair ou impair. Deux cas se présentent :

  — si n est pair, disons : $n = 2k$ avec $k \in \mathbb{Z}$, alors : $n+1 = 2k+1$ donc $n+1$ est impair,

  — si n est impair, disons : $n = 2k+1$ avec $k \in \mathbb{Z}$, alors : $n+1 = 2\underbrace{(k+1)}_{\in\mathbb{Z}}$ donc $n+1$ est pair.

  Dans les deux cas, $n+1$ est pair ou impair. Fin de la récurrence.

- Hélas nous avons seulement montré que tout entier **NATUREL** est pair ou impair. Qu'en est-il des entiers négatifs ? Soit n un tel entier. Alors $-n$ est un entier naturel, donc $-n$ est pair ou impair :

  — si $-n$ est pair, disons : $-n = 2k$ avec $k \in \mathbb{Z}$, alors $n = 2\overbrace{(-k)}^{\in\mathbb{Z}}$ est pair,

  — si $-n$ est impair, disons : $-n = 2k+1$ avec $k \in \mathbb{Z}$, alors $n = -2k-1 = 2\underbrace{(-k-1)}_{\in\mathbb{Z}}+1$ est impair.

  Dans les deux cas, n est pair ou impair.

Il arrive parfois qu'on ne sache pas déduire $\mathscr{P}_{n+1}$ de $\mathscr{P}_n$, mais seulement $\mathscr{P}_{n+2}$ de $\mathscr{P}_n$ **ET** $\mathscr{P}_{n+1}$. Le principe du raisonnement par récurrence prend dans ce cas la forme suivante :

$$\underbrace{\text{si } \mathscr{P}_0 \text{ ET } \mathscr{P}_1 \text{ sont vraies}}_{\text{Initialisation}} \qquad \text{et si :} \quad \underbrace{\forall n \in \mathbb{N},\quad \left(\mathscr{P}_n \text{ et } \mathscr{P}_{n+1}\right) \implies \mathscr{P}_{n+2},}_{\text{Hérédité}} \qquad \text{alors :} \quad \forall n \in \mathbb{N},\quad \mathscr{P}_n.$$

Une telle récurrence est appelée une *récurrence double*. Les récurrences classiques sont dites *simples* et il existe bien entendu des récurrences *triples*, etc.

> Quand on veut raisonner par récurrence **DOUBLE** que : $\forall n \in \mathbb{N},\quad \mathscr{P}_n,$ on rédige ainsi :
>
> « • **Initialisation :** . . . Vérification que $\mathscr{P}_0$ **ET** $\mathscr{P}_1$ sont vraies.
>
> • **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$.
> Faisons l'hypothèse que $\mathscr{P}_n$ et $\mathscr{P}_{n+1}$ sont vraies.
> Montrons que $\mathscr{P}_{n+2}$ est vraie. »
>
> ⋮ } Preuve que $\mathscr{P}_{n+2}$ est vraie.

Exemple On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par : $u_0 = 4$, $u_1 = 5$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = 2^n + 3$.

Démonstration Intuitivement, le calcul d'un terme de cette suite requiert toujours la connaissance des **DEUX** précédents — d'où l'idée qu'une récurrence **DOUBLE** est nécessaire.

Initialisation : $u_0 = 4 = 2^0 + 3$ et $u_1 = 5 = 2^1 + 3$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que : $u_n = 2^n + 3$ et $u_{n+1} = 2^{n+1} + 3$. Aussitôt :

$$u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n \overset{\text{HDR}}{=} 3\left(2^{n+1}+3\right) - 2\left(2^n+3\right) = (3-1)\,2^{n+1} + (9-6) = 2^{n+2} + 3.$$

Il arrive aussi parfois qu'on ne sache déduire $\mathscr{P}_{n+1}$ que de **TOUTES** les propositions antérieures $\mathscr{P}_0, \mathscr{P}_1, \ldots, \mathscr{P}_n$. Le principe du raisonnement par récurrence prend dans ce cas la forme suivante :

$$\underbrace{\text{si } \mathscr{P}_0 \text{ est vraie}}_{\text{Initialisation}} \qquad \text{et si :} \quad \underbrace{\forall n \in \mathbb{N},\quad \left(\forall k \in [\![0,n]\!],\quad \mathscr{P}_k\right) \implies \mathscr{P}_{n+1},}_{\text{Hérédité}} \qquad \text{alors :} \quad \forall n \in \mathbb{N},\quad \mathscr{P}_n.$$

Une telle récurrence est appelée une *récurrence forte*.

Exemple Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On suppose que : $u_0 \geqslant 0$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} \leqslant \sum_{k=0}^{n} u_k$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \leqslant 2^n u_0$.

Démonstration On ne peut obtenir une propriété sur u_{n+1} via la relation : $u_{n+1} \leqslant \sum_{k=0}^{n} u_k$ que si on a fait une hypothèse sur tous les nombres $u_0, \ldots, u_n$ — d'où l'idée qu'une récurrence **FORTE** est nécessaire.

Initialisation : Évidente.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$: $u_k \leqslant 2^k u_0$. Comme voulu :

$$u_{n+1} \leqslant \sum_{k=0}^{n} u_k \overset{\text{HDR}}{\leqslant} \sum_{k=0}^{n} 2^k u_0 = \frac{2^{n+1}-1}{2-1}\, u_0 \overset{u_0 \geqslant 0}{\leqslant} 2^{n+1} u_0.$$

8 Le raisonnement par l'absurde

Raisonner par l'absurde, c'est un peu prêcher le faux pour savoir le vrai. Pour commencer, on appelle *contradiction* toute proposition de la forme : q et (non q). Le principe du raisonnement par l'absurde s'énonce alors ainsi — si d'une proposition on arrive à tirer une *contradiction*, c'est qu'elle est est fausse.

Quand on veut montrer qu'une proposition p est vraie, on peut raisonner par l'absurde de la manière suivante :

« Faisons l'hypothèse que p est **FAUSSE**.

$\vdots \quad \Big\}$ Obtention d'une contradiction.

Contradiction ! Par conséquent p est vraie. »

Exemple Tout entier est pair ou impair, mais pas les deux.

Démonstration Soit $n \in \mathbb{Z}$. Nous avons déjà vu que n est pair ou impair. Peut-il être les deux à la fois ? Pour montrer que non, supposons que oui par l'absurde. Dans ce cas : $n = 2k = 2l+1$ pour certains $k, l \in \mathbb{Z}$, donc : $2(k-l) = 1$, donc $\frac{1}{2}$ est un entier, ce que nous savons être faux — contradiction ! L'hypothèse selon laquelle n est à la fois pair et impair est donc fausse. Conclusion : n est pair ou impair, mais pas les deux.

Exemple $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Démonstration

- D'abord un lemme : pour tout $n \in \mathbb{Z}$, n est pair si et seulement si n^2 est pair. Soit $n \in \mathbb{Z}$.
  - Si n est pair, disons : $n = 2k$ pour un certain $k \in \mathbb{Z}$: $n^2 = (2k)^2 = 2 \times 2k^2$, donc n^2 est pair.
  - Pour la réciproque, on va montrer par contraposition que si n n'est pas pair, n^2 ne l'est pas non plus. Or si n n'est pas pair, on a déjà vu que n est impair, disons : $n = 2k+1$ pour un certain $k \in \mathbb{Z}$. Aussitôt : $n^2 = (2k+1)^2 = 2\big(2k^2+2k\big)+1$, donc n^2 est impair, donc n'est pas pair.
- À présent, supposons par l'absurde que $\sqrt{2}$ est rationnel et écrivons-le donc sous forme **IRRÉDUCTIBLE** : $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ avec $p, q \in \mathbb{N}^*$ et p et q premiers entre eux.
  - L'égalité : $p^2 = \big(q\sqrt{2}\big)^2 = 2q^2$ montre que p^2 est pair, et donc que p est pair d'après le lemme. Ainsi : $p = 2p'$ pour un certain $p' \in \mathbb{Z}$.
  - Du coup : $q^2 = \left(\frac{p}{\sqrt{2}}\right)^2 = \left(\frac{2p'}{\sqrt{2}}\right)^2 = \big(p'\sqrt{2}\big)^2 = 2p'^2$. Ceci montre que q^2 est pair et donc que q est pair, disons : $q = 2q'$ pour un certain $q' \in \mathbb{Z}$.

  Nous avions supposé la fraction $\frac{p}{q}$ irréductible, mais finalement nous l'avons réduite : $\frac{p}{q} = \frac{2p'}{2q'} = \frac{p'}{q'}$. Contradiction ! Comme voulu, $\sqrt{2}$ est irrationnel.

9 Le raisonnement par analyse-synthèse

Quand on veut déterminer l'ensemble des éléments d'un ensemble E qui satisfont une propriété $\mathscr{P}$, on raisonne souvent par analyse-synthèse de la manière suivante.

« • **Analyse :** Soit $x \in E$.
Faisons l'hypothèse que $\mathscr{P}(x)$. »

$\vdots$ } On part naïvement d'un élément x de propriété $\mathscr{P}$ et on essaie de le faire parler pour savoir qui il est. Quelles sont les têtes possibles de x ?

• **Synthèse :** Posons : $x = \ldots$ ← Ici, les têtes possibles de x trouvées dans l'analyse.
Vérifions que $x \in E$ et que $\mathscr{P}(x)$. »

$\vdots$ } Vérification que x appartient à E et satisfait la propriété $\mathscr{P}$.

Explication

- En réalité, vous utilisez depuis toujours sans le savoir le raisonnement par analyse-synthèse. Simplement désormais, pour progresser, vous aurez besoin de comprendre, au moment où vous en faites une, que vous êtes en train d'effectuer une analyse-synthèse.
  - Dans l'analyse, on part d'un élément quelconque de E et on montre que s'il satisfait la propriété $\mathscr{P}$, alors il a forcément telle ou telle tête et non telle autre. En résumé, **DANS L'ANALYSE, ON RESTREINT LE CHAMP DES SOLUTIONS POSSIBLES.**
  - Dans la synthèse, on vérifie que les possibilités obtenues dans l'analyse sont plus que des possibilités, qu'elles sont bel et bien des solutions.

  À l'issue de ce double mouvement, on a déterminé tous les éléments de E qui satisfont la propriété $\mathscr{P}$.
- Une analyse-synthèse, c'est au fond ce que vous faites chaque fois que vous résolvez une équation. On vous l'a dit et répété, la résolution d'une équation est toujours un double mouvement — « N'oubliez pas la réciproque ! » Tâchons de nous en convaincre sur un exemple de résolution par équivalence. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

Analyse : Les seules solutions possibles sont $-\sqrt{3}$, -1, 1 et $\sqrt{3}$. ↓

$$\begin{aligned} x^4 - 4x^2 + 3 = 0 &\iff \left(x^2\right)^2 - 4\left(x^2\right) + 3 = 0 \\ &\iff x^2 = 1 \quad \text{ou} \quad x^2 = 3 \quad \text{(second degré...)} \\ &\iff x \in \left\{-\sqrt{3}, -1, 1, \sqrt{3}\right\}. \end{aligned}$$

↑ **Synthèse :** $-\sqrt{3}$, -1, 1 et $\sqrt{3}$ sont bel et bien solutions.

- Le raisonnement par analyse-synthèse est souvent employé pour montrer les propositions de la forme : $\exists\,!\, x \in E/ \quad \mathscr{P}(x)$. Montrer une telle proposition, c'est en effet chercher l'ensemble des éléments de E qui satisfont la propriété $\mathscr{P}$ et obtenir finalement qu'il en existe un et un seul.

ANALYSE	=	UNICITÉ
SYNTHÈSE	=	EXISTENCE

  Il faut alors bien comprendre que lorsqu'on prouve une existence-unicité par analyse-synthèse, l'analyse est une amorce de la synthèse au sens où la synthèse ne fait que vérifier que les objets trouvés dans l'analyse existent bien. En résumé, **DANS L'ANALYSE-SYNTHÈSE, LA PREUVE D'UNICITÉ EST DÉJÀ UNE MANIÈRE D'ABORDER L'EXISTENCE.**

Exemple On cherche l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ pour lesquelles pour tous $x, y \in \mathbb{R}$: $f\big(y - f(x)\big) = 2 - x - y$.

Démonstration

- **Analyse :** Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On suppose que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$: $f\big(y - f(x)\big) = 2 - x - y$. En particulier, pour tout $x \in \mathbb{R}$, si on choisit pour y la valeur $f(x)$: $f(0) = 2 - x - f(x)$, donc : $f(x) = \big(2 - f(0)\big) - x$. Ce calcul prouve que f est de la forme $x \longmapsto \lambda - x$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}$.
- **Synthèse :** Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Notons f la fonction $x \longmapsto \lambda - x$. Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:
$$f\big(x - f(y)\big) = f\big(x - (\lambda - y)\big) = f(x + y - \lambda) = \lambda - (x + y - \lambda) = 2\lambda - x - y.$$
  Ainsi, la seule valeur de λ pour laquelle f satisfait le problème étudié est : $\lambda = 1$.

Conclusion : la fonction $x \longmapsto 1 - x$ est la seule fonction du type étudié.