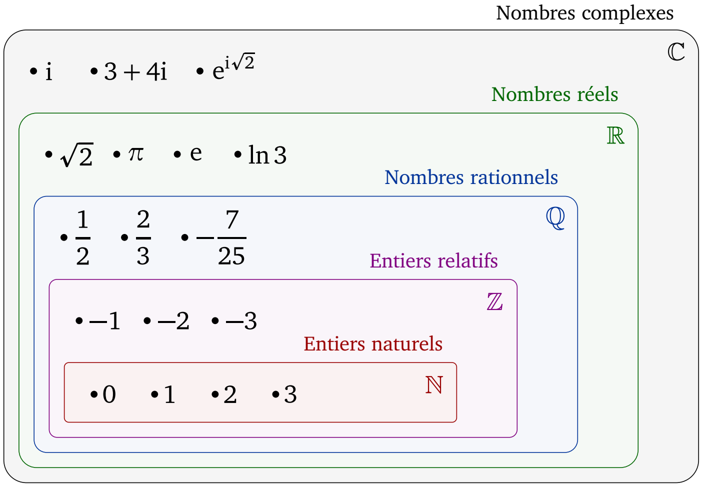
Rappels et compléments calculatoires

1 Ensembles de nombres



- **Ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$:**
  On rappelle que :
  - $\mathbb{N}^*$ désigne l'ensemble $\mathbb{N}$ privé de 0 — idem pour $\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{R}^*$ et $\mathbb{C}^*$,
  - $\mathbb{R}_+$ désigne l'ensemble des réels positifs ou nuls et $\mathbb{R}_-$ l'ensemble des réels négatifs ou nuls,
  - $\mathbb{R}_+^*$ désigne l'ensemble des réels strictement positifs et $\mathbb{R}_-^*$ l'ensemble des réels strictement négatifs.
- **Intervalles :**
  Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ tels que : $a \leqslant b$, on introduit différents ensembles de nombres appelés *intervalles* :
  - *segments* : $[a,b] = \left\{x \in \mathbb{R}/ \quad a \leqslant x \leqslant b\right\}$,
  - intervalles *ouverts* : $]a,b[= \left\{x \in \mathbb{R}/ \quad a < x < b\right\}$,
  $$]a,+\infty[= \left\{x \in \mathbb{R}/ \quad a < x\right\}, \quad]-\infty,b[= \left\{x \in \mathbb{R}/ \quad x < b\right\} \quad \text{et} \quad]-\infty,+\infty[= \mathbb{R},$$
  - intervalles *semi-ouverts à droite* : $[a,b[= \left\{x \in \mathbb{R}/ \quad a \leqslant x < b\right\}$ et $[a,+\infty[= \left\{x \in \mathbb{R}/ \quad a \leqslant x\right\}$,
  - intervalles *semi-ouverts à gauche* : $]a,b] = \left\{x \in \mathbb{R}/ \quad a < x \leqslant b\right\}$ et $]-\infty,b] = \left\{x \in \mathbb{R}/ \quad x \leqslant b\right\}$.
- **Intervalles d'entiers :**
  Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ tels que : $a \leqslant b$, on note $[\![a,b]\!]$ l'ensemble des **entiers** compris entre a et b :
  $$[\![a,b]\!] = \left\{n \in \mathbb{Z}/ \quad a \leqslant n \leqslant b\right\}. \qquad \text{Par exemple :} \quad [\![0,2]\!] = \left\{0,1,2\right\}.$$
  Dans le cas où a et b sont eux-mêmes des entiers, l'intervalle d'entiers $[\![a,b]\!]$ contient exactement $b-a\boxed{+1}$ éléments. Il y a par exemple $2-0+1=3$ éléments dans $[\![0,2]\!]$. **N'oubliez pas le « +1 » !**

2 Factorisation première et forme irréductible d'un rationnel

Le contenu de ce paragraphe sera repris en détail au chapitre « Arithmétique des entiers relatifs ».

Définition (Divisibilité, diviseur, multiple) Soient $a, b \in \mathbb{N}$. On dit que a *divise* b, ou que a est un *diviseur de* b, ou que b est *divisible par* a, ou que b est un *multiple de* a, si : $b = ak$ pour un certain $k \in \mathbb{N}$.

Exemple Les diviseurs de 7 sont 1 et 7, les diviseurs de 6 sont 1, 2, 3 et 6, les diviseurs de 20 sont 1, 2, 4, 5, 10 et 20.

Définition (Nombre premier) Soit $p \in \mathbb{N}$. On dit que p est *premier* si : $p \neq 1$ et si ses seuls diviseurs sont 1 et p.

Explication

- Les nombres premiers sont l'analogue dans $\mathbb{N}$ des particules élémentaires en physique — des nombres qu'on ne peut pas casser en morceaux plus petits par produit.
- Il existe une infinité de nombres premiers : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43...

Théorème (Factorisation première) Tout entier naturel supérieur ou égal à 2 peut être écrit d'une et une seule manière, appelée sa *factorisation première*, sous la forme : $p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$ où $p_1, \dots, p_r$ sont des nombres premiers pour lesquels : $p_1 < \dots < p_r$ et où $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{N}^*$.

Explication Tout entier supérieur ou égal à 2 est un empilement par produit des particules élémentaires que constituent les nombres premiers.

Exemple $33 = 3 \times 11$. $60 = 2^2 \times 3 \times 5$. $98 = 2 \times 7^2$. $1000 = 2^3 \times 5^3$.

Définition (Nombres premiers entre eux) Soient $a, b \in \mathbb{N}$. On dit que a et b sont *premiers entre eux* si leur seul diviseur commun est 1, i.e. si leurs factorisations premières n'ont aucun facteur premier commun.

Exemple 33 et 98 sont premiers entre eux.

Théorème (Forme irréductible d'un rationnel) Tout rationnel peut être écrit d'une et une seule manière, appelée sa *forme irréductible*, sous la forme $\dfrac{p}{q}$ où $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ avec $|p|$ et q premiers entre eux.

Explication En choisissant p dans $\mathbb{Z}$ et q dans $\mathbb{N}^*$, on impose que le signe de la fraction soit porté par son numérateur. Sans cela, il n'y aurait pas unicité de la forme irréductible.

En pratique

- **Mise sous forme irréductible :** Pour écrire un rationnel $\dfrac{a}{b}$ avec $a, b \in \mathbb{N}^*$ sous forme irréductible, on remplace a et b par leurs factorisations premières, puis on simplifie au maximum. Par exemple, la forme irréductible de $\dfrac{495}{60}$ est :
$$\frac{495}{60} = \frac{3^2 \times 5 \times 11}{2^2 \times 3 \times 5} = \frac{3 \times 11}{2^2} = \frac{33}{4}.$$
- **Réduction au même dénominateur :** Comment réduit-on par exemple la somme $\dfrac{13}{28} + \dfrac{5}{42}$ au même dénominateur ?

  EN TOUT CAS, PAS COMME ÇA : $\dfrac{13}{28} + \dfrac{5}{42} = \dfrac{13 \times 42 + 5 \times 28}{28 \times 42} = \dfrac{686}{1176}$.

  — On commence par déterminer le PLUS PETIT DÉNOMINATEUR COMMUN des fractions $\dfrac{13}{28}$ et $\dfrac{5}{42}$. Il vaut ici : $84 = 2^2 \times 3 \times 7$ car : $28 = 2^2 \times 7$ et $42 = 2 \times 3 \times 7$ — on a conservé la plus grande puissance de chaque nombre premier.

  — On réduit ensuite avec CE plus petit dénominateur commun et on n'oublie pas de présenter le résultat sous forme irréductible : $\dfrac{13}{28} + \dfrac{5}{42} = \dfrac{13 \times 3}{28 \times 3} + \dfrac{5 \times 2}{42 \times 2} = \dfrac{49}{2^2 \times 3 \times 7} = \dfrac{7^2}{2^2 \times 3 \times 7} = \dfrac{7}{12}$.

3 INÉGALITÉS, VALEURS ABSOLUES, PUISSANCES, RACINES CARRÉES

On rappelle brièvement dans ce paragraphe les règles usuelles de calcul sur les inégalités, les valeurs absolues, les puissances et les racines carrées. Le point de vue adopté est purement algébrique, les FONCTIONS puissances, racine carrée et valeur absolue seront revues spécifiquement dans un chapitre ultérieur, de même qu'on s'interdira momentanément toute étude de fonction pour démontrer une inégalité.

✖ **ATTENTION !** ✖

La confusion des inégalités **STRICTES** et des inégalités **LARGES** est rigoureusement proscrite ! Nous allons manipuler des inégalités toute l'année, alors de grâce, faites l'effort de **CHOISIR CHAQUE FOIS SCRUPULEUSEMENT** le symbole que vous souhaitez utiliser.

Théorème (Rappels sur les inégalités) Soient $a, b, c, d, \lambda \in \mathbb{R}$.

- **Lien strict/large :** Si : $a < b$, alors : $a \leqslant b$. **LA RÉCIPROQUE EST FAUSSE !**
- **Somme :** Si : $a \leqslant b$ et $c \leqslant d$, alors : $a + c \leqslant b + d$.
- **Produit :**
  - **par un réel positif :** Si : $a \leqslant b$ et $\lambda \geqslant 0$, alors : $\lambda a \leqslant \lambda b$.
  - **par un réel négatif :** Si : $a \leqslant b$ et $\lambda \leqslant 0$, alors : $\lambda a \geqslant \lambda b$ — **ATTENTION !**
  - **d'inégalités positives :** Si : $0 \leqslant a \leqslant b$ et $0 \leqslant c \leqslant d$, alors : $0 \leqslant ac \leqslant bd$.
- **Passage à l'inverse :** Si : $a \leqslant b$ et si a et b sont **DE MÊME SIGNE**, alors : $\dfrac{1}{b} \leqslant \dfrac{1}{a}$.

On peut remplacer dans ces résultats les inégalités larges par des inégalités strictes.

✎ **En pratique** ✎

MAJORER une fraction de réels positifs, c'est majorer son numérateur et **MINORER** son dénominateur.
MINORER une fraction de réels positifs, c'est minorer son numérateur et **MAJORER** son dénominateur.

Exemple Soit $x \in [1, 2]$. On souhaite encadrer grossièrement le réel $\dfrac{2x+1}{3x^2+4}$ par un calcul simple.

Démonstration Comme $1 \leqslant x \leqslant 2$: $3 \leqslant 2x + 1 \leqslant 5$ et $1 \leqslant x^2 \leqslant 4$, puis : $7 \leqslant 3x^2 + 4 \leqslant 16$.
Par quotient enfin : $\dfrac{3}{16} \leqslant \dfrac{2x+1}{3x^2+4} \leqslant \dfrac{5}{7}$.

Exemple Pour tout $x > 0$: $x + \dfrac{1}{x} \geqslant 2$.

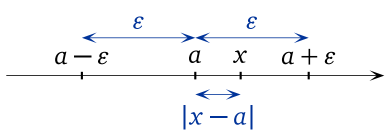
Démonstration $x + \dfrac{1}{x} \geqslant 2 \quad \overset{x>0}{\Longleftrightarrow} \quad x^2 + 1 \geqslant 2x \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 - 2x + 1 \geqslant 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (x-1)^2 \geqslant 0$.
Le carré d'un réel est toujours positif ou nul, la dernière inégalité étant vraie, donc celle de départ aussi. Sur une copie, il vaudrait mieux **PARTIR** de l'inégalité : $(x-1)^2 \geqslant 0$ et **EN DÉDUIRE** l'inégalité désirée.

Définition-théorème (Rappels sur les valeurs absolues)

- **Définition :** Soit $x \in \mathbb{R}$. On appelle *valeur absolue de* x le réel $|x|$ défini par : $|x| = \begin{cases} x & \text{si : } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si : } x < 0. \end{cases}$ Ce réel est positif ou nul, et nul seulement si : $x = 0$.
- **Interprétation géométrique :** Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x|$ est la distance de x à 0 sur la droite réelle.
  En particulier : $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$.
- **Effet sur une somme ou un produit :** Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$: $|x + y| \leqslant |x| + |y|$ (*inégalité triangulaire*)
  et : $|xy| = |x| \times |y|$.

✌ **Explication** ✌ Plus généralement, pour tous $x, a \in \mathbb{R}$, $|x - a|$ est la distance entre x et a, donc pour tout $\varepsilon > 0$:

$|x - a| \leqslant \varepsilon \iff x \in [a - \varepsilon, a + \varepsilon]$ et $|x - a| < \varepsilon \iff x \in]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$.



✖ **ATTENTION !** ✖ $\boxed{|x - y| \cancel{\leqslant} |x| - |y|.}$ Dans l'inégalité triangulaire : $|x + y| \leqslant |x| + |y|$, quand on remplace y par $-y$, c'est toujours un « + » qu'on trouve à droite : $|x - y| \leqslant |x| + |y|$.

Exemple On cherche, en fonction de $x \in \mathbb{R}$ quelconque, une expression de $|x-3|-|x+2|$ qui ne fasse apparaître aucune valeur absolue. Comment procéder ?

Démonstration $|x-3| = \begin{cases} x-3 & \text{si : } \; x \geqslant 3 \\ -(x-3) & \text{si : } \; x < 3 \end{cases}$ et $|x+2| = \begin{cases} x+2 & \text{si : } \; x \geqslant -2 \\ -(x+2) & \text{si : } \; x < -2, \end{cases}$ donc la quantité $|x-3|-|x+2|$ nous oblige à distinguer trois intervalles : $]-\infty,-2[$, $[-2,3[$ et $[3,+\infty[$.

$$|x-3|-|x+2| = \begin{cases} -(x-3)+(x+2) = 5 & \text{si : } \; x \in \,]-\infty,-2[\\ -(x-3)-(x+2) = 1-2x & \text{si : } \; x \in [-2,3[\\ (x-3)-(x+2) = -5 & \text{si : } \; x \in [3,+\infty[. \end{cases}$$

Exemple On veut résoudre l'équation : $|x-4| = 2x+10$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Démonstration Tout d'abord, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $|x-4| = \begin{cases} x-4 & \text{si : } \; x \geqslant 4 \\ 4-x & \text{si : } \; x < 4. \end{cases}$

- **Résolution sur $[4,+\infty[$:** Pour tout $x \geqslant 4$:

$$|x-4| = 2x+10 \quad \Longleftrightarrow \quad x-4 = 2x+10 \quad \Longleftrightarrow \quad x = -14,$$

  or : $-14 \notin [4,+\infty[$, donc l'équation n'a pas de solution sur $[4,+\infty[$.

- **Résolution sur $]-\infty,4[$:** Pour tout $x < 4$:

$$|x-4| = 2x+10 \quad \Longleftrightarrow \quad 4-x = 2x+10 \quad \Longleftrightarrow \quad x = -2,$$

  et : $-2 \in \,]-\infty,4[$, donc -2 est bien solution. C'est finalement la seule solution sur $\mathbb{R}$.

Exemple On veut résoudre l'inéquation : $|2x-1| < \dfrac{1}{x}$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}^*$.

Démonstration Pour commencer, l'équation n'a pas de solution dans $\mathbb{R}^*_-$ car pour tout $x < 0$: $\dfrac{1}{x} < 0$ alors que : $|2x-1| \geqslant 0$.

- **Résolution sur $\left]0,\dfrac{1}{2}\right[$:** Pour tout $x \in \left]0,\dfrac{1}{2}\right[$:

$$\begin{aligned} |2x-1| < \frac{1}{x} \quad &\Longleftrightarrow \quad 1-2x < \frac{1}{x} \quad \overset{x>0}{\Longleftrightarrow} \quad (1-2x)x < 1 \\ &\Longleftrightarrow \quad 2x^2-x+1 > 0 \quad \overset{\text{Discriminant } -7}{\Longleftrightarrow} \quad x \in \left]0,\frac{1}{2}\right[. \end{aligned}$$

- **Résolution sur $\left[\dfrac{1}{2},+\infty\right[$:** Pour tout $x \in \left[\dfrac{1}{2},+\infty\right[$:

$$\begin{aligned} |2x-1| < \frac{1}{x} \quad &\Longleftrightarrow \quad 2x-1 < \frac{1}{x} \quad \overset{x>0}{\Longleftrightarrow} \quad (2x-1)x < 1 \\ &\Longleftrightarrow \quad 2x^2-x-1 < 0 \quad \overset{\text{Discriminant } 9}{\Longleftrightarrow} \quad x \in \left]-\frac{1}{2},1\right[\quad \Longleftrightarrow \quad x \in \left[\frac{1}{2},1\right[. \end{aligned}$$

- **Conclusion :** L'ensemble des solutions cherché est la réunion d'intervalles $\left]0,\dfrac{1}{2}\right[\cup \left[\dfrac{1}{2},1\right[= \,]0,1[$.

Définition-théorème (Rappels sur les puissances)

- **Définition :** Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.
  On appelle x *puissance* n le nombre x^n défini par : $x^n = \underbrace{x \times \ldots \times x}_{n \text{ fois}}$ avec : $x^0 = 1$ par convention.

  Si : $x \neq 0$, on appelle x *puissance* $-n$ le nombre x^{-n} défini par : $x^{-n} = \dfrac{1}{x^n} = \left(\dfrac{1}{x}\right)^n = \overbrace{\dfrac{1}{x} \times \ldots \times \dfrac{1}{x}}^{n \text{ fois}}$.

- **Règles de calcul :** Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ et $m, n \in \mathbb{N}$: $x^{m+n} = x^m x^n$, $x^{mn} = \left(x^m\right)^n$ et $(xy)^n = x^n y^n$.

  Ces formules sont encore vraies si m ou n est négatif à condition que x et y soient non nuls.

Définition-théorème (Rappels sur les racines carrées)

- **Définition :** Soit $x \geqslant 0$. Il existe un et un seul réel $r \geqslant 0$ pour lequel : $x = r^2$. On l'appelle la *racine carrée de* x et on le note $\sqrt{x}$.
- **Effet sur une somme ou un produit :** Pour tous $x, y \geqslant 0$: $\sqrt{xy} = \sqrt{x} \times \sqrt{y}$, MAIS : $\sqrt{x+y} \cancel{=} \sqrt{x} + \sqrt{y}$.
  En outre : $\sqrt{x^2} = |x|$.

✖ **Attention !** ✖ La quantité $\left(\sqrt{x}\right)^2$ n'est définie que si : $x \geqslant 0$, et par définition de la racine carrée : $\left(\sqrt{x}\right)^2 = x$. La quantité $\sqrt{x^2}$, au contraire, est toujours définie, mais comme le passage au carré tue le signe de x^2 : $\sqrt{x^2} = |x|$. Ce qu'il faut retenir, c'est qu'en général : $\boxed{\sqrt{x^2} \cancel{=} x.}$

✖ **Attention !** ✖

$$\boxed{\begin{array}{lll} \text{Pour tous } a, b, x, y \in \mathbb{R} : & ax = ay \cancel{\iff} x = y, & a^2 = b^2 \cancel{\iff} a = b \\ \text{et pour } a \geqslant 0 : & x^2 = a \cancel{\iff} x = \sqrt{a}. & \end{array}}$$

Ce sont là des **erreurs graves**. Pour les corriger, un rappel : $\boxed{\text{Un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs l'est.}}$

Il en découle que : $ax = ay \iff a(x-y) = 0 \iff a = 0 \text{ ou } x = y$,

que : $a^2 = b^2 \iff (a+b)(a-b) = 0 \iff a = b \text{ ou } a = -b \iff |a| = |b|$,

et enfin si : $a \geqslant 0$, que : $x^2 = a \iff \left(x + \sqrt{a}\right)\left(x - \sqrt{a}\right) = 0 \iff x = \sqrt{a} \text{ ou } x = -\sqrt{a}$.

Voici donc la version corrigée des règles erronées précédentes :

$$\boxed{\begin{array}{llll} \text{Pour tous } a, b, x, y \in \mathbb{R} : & ax = ay \iff a = 0 \text{ ou } x = y, & & \\ & a^2 = b^2 \iff a = b \text{ ou } a = -b \iff |a| = |b|, & & \\ \text{et pour } a \geqslant 0 : & x = \sqrt{a} \iff x^2 = a \text{ et } x \geqslant 0. & & \end{array}}$$

Exemple On veut résoudre l'équation : $|x-2| = 2|x+1|$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Démonstration Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $|x-2| = 2|x+1| \iff (x-2)^2 = 4(x+1)^2$

$$\iff 3x^2 + 12x = 0 \overset{\text{Pas de}}{\underset{\text{discriminant !}}{\iff}} x(x+4) = 0 \iff x \in \{-4, 0\}.$$

Exemple On veut résoudre l'équation : $\sqrt{x+8} = x+2$ d'inconnue $x \in [-8, +\infty[$.

Démonstration

- **Réponse incorrecte :** Pour tout $x \in [-8, +\infty[$: $\sqrt{x+8} = x+2 \iff x+8 = (x+2)^2$

$$\iff x^2 + 3x - 4 = 0 \overset{\text{Discriminant 25}}{\iff} x = \frac{-3+\sqrt{25}}{2} \text{ ou } x = \frac{-3-\sqrt{25}}{2} \iff x \in \{-4, 1\}.$$

  Et là — surprise — il se trouve en fait que -4 n'est pas solution car : $\sqrt{-4+8} = 2 \neq -2 = -4+2$. Mais que s'est-il donc passé ? Tout simplement, la première équivalence est fausse, mais de gauche à droite, le passage au carré est correct. De droite à gauche au contraire, le passage à la racine carrée est faux car si : $x+8 = (x+2)^2$, alors : $\sqrt{x+8} = \sqrt{(x+2)^2} = |x+2|$ — avec une valeur absolue !

- **Réponse correcte :** Pour tout $x \in [-8, +\infty[$:

$$\sqrt{x+8} = x+2 \iff x+8 = (x+2)^2 \ \boxed{\text{et } x+2 \geqslant 0} \iff x^2 + 3x - 4 = 0 \ \boxed{\text{et } x \geqslant -2}$$

$$\overset{\text{Discriminant 25}}{\iff} x \in \{-4, 1\} \ \boxed{\text{et } x \geqslant -2} \iff x = 1.$$

✖ **ATTENTION !** ✖ Pour tous $x, a \in \mathbb{R}$: $x \leqslant a \quad \not\Longrightarrow \quad x^2 \leqslant a^2 \qquad$ et $\qquad x^2 \leqslant a^2 \quad \not\Longrightarrow \quad x \leqslant a.$

Par exemple : $-2 \leqslant 1$ alors que $(-2)^2 > 1^2$, et : $1 \leqslant (-2)^2$ alors que $1 > -2$. En tout cas :

$$\boxed{\begin{array}{rrcl} \text{Pour tous } x, a \in \mathbb{R} : & x^2 \leqslant a^2 & \Longleftrightarrow & |x| \leqslant |a|, \\ \text{pour } x, a \geqslant 0 : & x \leqslant a & \Longleftrightarrow & x^2 \leqslant a^2, \\ \text{et pour } x \geqslant 0 \text{ seulement :} & x \leqslant a & \Longleftrightarrow & x^2 \leqslant a^2 \quad \text{et} \quad a \geqslant 0. \end{array}}$$

Exemple On veut résoudre l'inéquation : $|x-1| \leqslant |2x+1|$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Démonstration Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $|x-1| \leqslant |2x+1| \iff (x-1)^2 \leqslant (2x+1)^2 \iff 3x^2 + 6x \geqslant 0$

$$\underset{\text{discriminant !}}{\overset{\text{Pas de}}{\Longleftrightarrow}} \quad x(x+2) \geqslant 0 \iff x \in \left]-\infty, -2\right] \cup \left[0, +\infty\right[.$$

Exemple On veut résoudre l'inéquation : $\sqrt{x^2 - 3x + 2} \leqslant x + 1$ d'inconnue x.

Démonstration Pour commencer, un tableau de signe :

x	1	2
$x^2 - 3x + 2$	$+ \quad 0 \quad -$	$0 \quad +$

Ce tableau montre que l'équation étudiée n'est définie que sur $]-\infty, 1] \cup [2, +\infty[$. Pour tout x dans ce domaine :

$$\sqrt{x^2 - 3x + 2} \leqslant x + 1 \iff x^2 - 3x + 2 \leqslant (x+1)^2 \quad \boxed{\text{et} \quad x + 1 \geqslant 0}$$

$$\iff 5x \geqslant 1 \quad \boxed{\text{et} \quad x \geqslant -1} \iff x \geqslant \frac{1}{5}.$$

L'ensemble des solutions cherché est la réunion d'intervalles $\left[\frac{1}{5}, 1\right] \cup [2, +\infty[$.

✎ **En pratique** ✎ **(Le principe des substitutions)** Nous terminerons ce chapitre par un principe fondamental qui n'a rien à voir avec les inégalités mais que les inégalités illustrent efficacement. L'idée de départ est très simple — si une inégalité est vraie « pour **TOUT** x » par exemple, vous pouvez substituer à la variable x **N'IMPORTE QUELLE VALEUR DE VOTRE CHOIX**, cela vous conduira dans bien des cas vers de nouveaux résultats. Quelques exemples vaudront ici mieux qu'un long discours.

Exemple

- **L'inégalité triangulaire comme point de départ :** Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$: $|x+y| \leqslant |x| + |y|$.
- **Un premier rebondissement :** Appliquons l'inégalité triangulaire aux réels x et $-y$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$. Cela donne : $\big|x + (-y)\big| \leqslant |x| + |-y|$, donc : $|x-y| \leqslant |x| + |y|$. Cette inégalité est un nouveau résultat.
- **Un deuxième rebondissement :** Appliquons l'inégalité triangulaire aux réels $x+y$ et $-y$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$. Cela donne : $\big|(x+y) + (-y)\big| \leqslant |x+y| + |-y|$, donc : $|x| \leqslant |x+y| + |y|$, puis : $|x+y| \geqslant |x| - |y|$. Encore un nouveau résultat !
- **Un rebondissement sur le deuxième rebondissement :** Nous venons de montrer que : $|x+y| \geqslant |x| - |y|$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, mais donc également que : $|y+x| \geqslant |y| - |x|$, ou encore : $|x+y| \geqslant |y| - |x|$. Ainsi, le réel $|x+y|$ est supérieur ou égal aux deux nombres **OPPOSÉS** $|x| - |y|$ et $|y| - |x|$, donc à la valeur absolue $\big||x| - |y|\big|$: $|x+y| \geqslant \big||x| - |y|\big|$. Ces substitutions successives montrent que l'inégalité triangulaire porte en germe un peu plus qu'elle-même. En l'occurrence, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$: $\big||x| - |y|\big| \leqslant |x+y| \leqslant |x| + |y|$. On appelle ce résultat l'*inégalité triangulaire généralisée*.

Exemple Si a, b et c sont les longueurs des côtés d'un triangle quelconque, alors :

$$\sqrt{a+b-c} + \sqrt{b+c-a} + \sqrt{c+a-b} \leqslant \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}.$$

Démonstration La somme des longueurs de deux côtés d'un triangle est toujours supérieure ou égale à la longueur de son troisième côté, donc : $a+b \geqslant c$, $b+c \geqslant a$ et $c+a \geqslant b$. Conclusion : les racines carrées de l'inégalité sont bien définies.

Pour le reste, la preuve qui suit vous paraîtra forcément compliquée — vraiment trop compliquée — mais il ne faut pas s'imaginer que quelqu'un l'a trouvée comme ça d'un claquement de doigts. Il a fallu tenter des choses, échouer, recommencer, affiner. Je vous donne cet exemple seulement pour vous libérer un peu, vous montrer **CE QU'ON PEUT FAIRE QUAND ON OSE.**

- Point de départ : $\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2 \geqslant 0$ pour tous $x,y \geqslant 0$, car le carré d'un réel est toujours positif ou nul. Simplifions : $2\sqrt{x}\sqrt{y} \leqslant x+y$, puis ajoutons $x+y$: $\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2 = x+2\sqrt{x}\sqrt{y}+y \leqslant 2(x+y)$. Enfin, prenons la racine carrée : $\sqrt{x}+\sqrt{y} \leqslant \sqrt{2}\sqrt{x+y}$ ♣.

- Nous allons à présent exploiter trois fois l'inégalité ♣. Pour tous $x,y,z \geqslant 0$:
$$\sqrt{x}+\sqrt{y} \leqslant \sqrt{2}\sqrt{x+y}, \qquad \sqrt{y}+\sqrt{z} \leqslant \sqrt{2}\sqrt{y+z} \qquad \text{et} \qquad \sqrt{z}+\sqrt{x} \leqslant \sqrt{2}\sqrt{z+x},$$
donc par somme : $2\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\right) \leqslant \sqrt{2}\left(\sqrt{x+y}+\sqrt{y+z}+\sqrt{z+x}\right)$. Divisons enfin par 2 :
$$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z} \leqslant \sqrt{\frac{x+y}{2}}+\sqrt{\frac{y+z}{2}}+\sqrt{\frac{z+x}{2}} \qquad ♠.$$

- Nous sommes enfin en mesure de conclure. De nouveau, a, b et c sont les longueurs des côtés d'un triangle quelconque. Appliquons « simplement » ♠ aux réels : $x=a+b-c$, $y=b+c-a$ et $z=c+a-b$. On obtient directement le résultat :

$$\sqrt{a+b-c}+\sqrt{b+c-a}+\sqrt{c+a-b} \leqslant \underbrace{\sqrt{\frac{(a+b-c)+(b+c-a)}{2}}}_{\sqrt{b}}+\underbrace{\sqrt{\frac{(b+c-a)+(c+a-b)}{2}}}_{\sqrt{c}}+\underbrace{\sqrt{\frac{(c+a-b)+(a+b-c)}{2}}}_{\sqrt{a}}$$