

RAPPELS ET COMPLÉMENTS SUR LES FONCTIONS

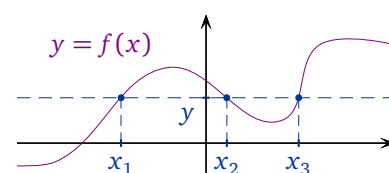
1 VOCABULAIRE USUEL SUR LES FONCTIONS

1.1 VALEURS D'UNE FONCTION

Définition (Ensemble de définition et image d'une fonction, image et antécédents d'un point) Soient A une partie de \mathbb{R} et $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

- L'ensemble A est appelé *l'ensemble de définition de f* et tout réel $f(x)$ avec $x \in A$ est appelé une *valeur de f* .
- Pour tous $x \in A$ et $y \in \mathbb{R}$, si $y = f(x)$, on dit que y est *l'image de x par f* et que x est *un antécédent de y par f* .

🔗 **Explication** 🔗 Sur la figure ci-contre, y possède plusieurs antécédents par f , raison pour laquelle on parle d'UN antécédent et non de « l' » antécédent de y .



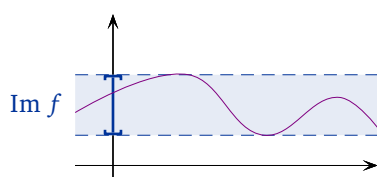
Définition (Image d'une partie par une fonction, image d'une fonction) Soient A une partie de \mathbb{R} et $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

- Pour toute partie A' de A , on appelle *image de A' par f* , notée $f(A')$, l'ensemble :

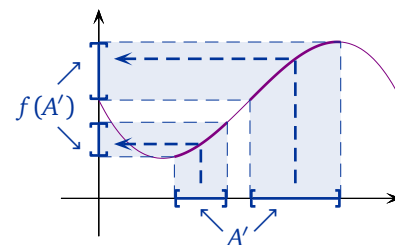
$$f(A') = \{y \in \mathbb{R} / \exists x \in A' / y = f(x)\} = \{f(x)\}_{x \in A'}$$

- L'image de A tout entier est simplement appelée *l'image de f* et notée généralement $\text{Im } f$ plutôt que $f(A)$.

🔗 **Explication** 🔗 L'image $f(A')$ de A' par f est l'ensemble des images par f des éléments de A' . Graphiquement, pour déterminer $f(A')$, on projette sur l'axe des ordonnées la portion du graphe de f qui se situe au-dessus de A' , comme l'illustre la figure de droite.



On fait pareil pour déterminer graphiquement l'image $\text{Im } f$ de f , mais avec le graphe de f tout entier.



Exemple

- L'image de \mathbb{R}_+ par la fonction exponentielle est l'intervalle $[1, +\infty[$. L'image de \mathbb{R}_- est $]0, 1]$.
- L'image de $\pi\mathbb{Z}$ par la fonction sinus est $\{0\}$, l'image de $[0, \pi]$ est $[0, 1]$, l'image de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ est $[-1, 1]$ et l'image de $[0, 2\pi]$ est aussi $[-1, 1]$.

Définition (Expression « à valeurs dans... ») Soient A et B deux parties de \mathbb{R} et $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est *à valeurs dans B* si toute valeur de f est élément de B , i.e. si : $\forall x \in A, f(x) \in B$, ou encore si : $\text{Im } f \subset B$.

✗ **ATTENTION !** ✗ Dire que f est à valeurs dans B , ce n'est pas dire que l'image de f est B tout entier. La fonction $x \mapsto |x| + 1$, par exemple, est définie sur \mathbb{R} et à valeurs dans \mathbb{R}_+ , mais son image n'est pas \mathbb{R}_+ tout entier mais seulement $[1, +\infty[$ — car quand x décrit \mathbb{R}_+ , $|x| + 1$ décrit $[1, +\infty[$.

1.2 COMPOSITION DES FONCTIONS

Définition (Composée de deux fonctions) Soient A et B deux parties de \mathbb{R} et $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : B \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions. On suppose f à valeurs dans B . On appelle *composée de f suivie de g* la fonction $g \circ f$ définie sur A par :

$$\forall x \in A, \quad g \circ f(x) = g(f(x)).$$

🦋 **Explication** 🦋 Pourquoi la condition « f est à valeurs dans B » est-elle si importante ? Pour pouvoir parler de $g(f(x))$ pour tout $x \in A$, on doit garantir que $f(x)$ appartient à l'ensemble de définition B de g pour tout $x \in A$: $\forall x \in A, \quad f(x) \in B$, autrement dit que f est à valeurs dans B .

Exemple La fonction $x \mapsto \ln(2x + 3)$ est définie sur $\left] -\frac{3}{2}, +\infty \right[$.

Démonstration La fonction $x \mapsto 2x + 3$ est définie sur \mathbb{R} et la fonction \ln sur \mathbb{R}_+^* , mais quand x décrit \mathbb{R} , $2x + 3$ n'appartient pas forcément à \mathbb{R}_+^* . Pour quels $x \in \mathbb{R}$ est-il vrai que : $2x + 3 > 0$? Réponse : $x \in \left] -\frac{3}{2}, +\infty \right[$.

Exemple La fonction $x \mapsto \sqrt{1 - x^2}$ est définie sur $[-1, 1]$.

Démonstration La fonction $x \mapsto 1 - x^2$ est définie sur \mathbb{R} et la fonction $\sqrt{\cdot}$ sur \mathbb{R}_+ , mais quand x décrit \mathbb{R} , $1 - x^2$ n'appartient pas forcément à \mathbb{R}_+ . Pour quels $x \in \mathbb{R}$ est-il vrai que : $1 - x^2 \geq 0$? Réponse : $x \in [-1, 1]$.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$1 + x$	$-$	0	$+$	
$1 - x$		$+$	0	$-$
$1 - x^2$	$-$	0	$+$	$-$

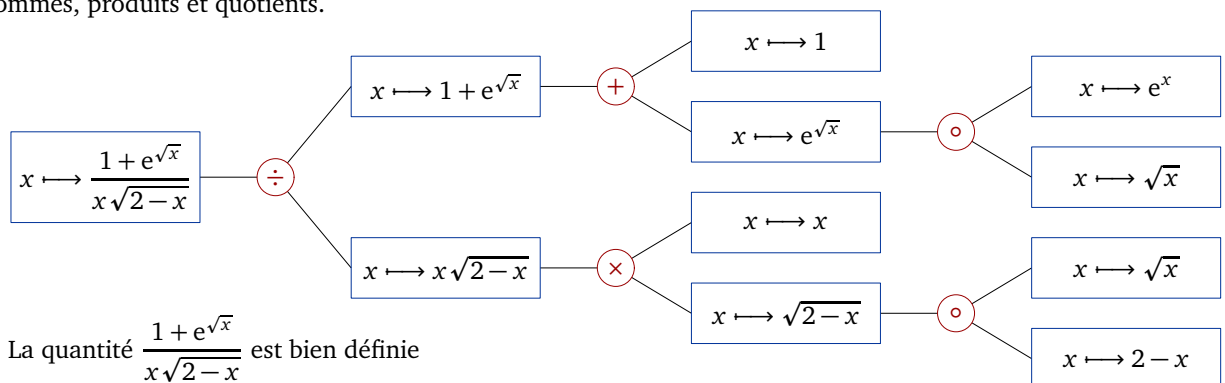
✗ **ATTENTION !** ✗ La composition n'est pas commutative, ne confondez pas $g \circ f$ et $f \circ g$. Il arrive d'ailleurs souvent que l'une de ces fonctions soit définie sans que l'autre le soit. Par exemple, si f est la fonction $x \mapsto x^2$ et si g la fonction $x \mapsto x^2 + 1$, toutes deux définies sur \mathbb{R} , $g \circ f$ est la fonction : $x \mapsto (x^2)^2 + 1 = x^4 + 1$ et $f \circ g$ la fonction : $x \mapsto (x^2 + 1)^2 = x^4 + 2x^2 + 1$. Ce n'est pas pareil !

Théorème (Associativité de la composition) Soient A, B et C trois parties de \mathbb{R} et $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $g : B \rightarrow \mathbb{R}$ et $h : C \rightarrow \mathbb{R}$ trois fonctions. On suppose f à valeurs dans B et g à valeurs dans C . Alors :

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

Exemple La fonction $x \mapsto \frac{1 + e^{\sqrt{x}}}{x\sqrt{2-x}}$ est définie sur $]0, 2[$.

Démonstration La construction de cette fonction requiert plus qu'une simple composition, également des sommes, produits et quotients.



La quantité $\frac{1 + e^{\sqrt{x}}}{x\sqrt{2-x}}$ est bien définie

si et seulement si : $x\sqrt{2-x} \neq 0, \quad \sqrt{x} \in \mathbb{R}, \quad 2-x \geq 0$ et $x \geq 0,$

i.e. si et seulement si : $x \neq 0, \quad x \neq 2, \quad x \leq 2$ et $x \geq 0,$ i.e. : $x \in]0, 2[.$

1.3 FONCTIONS MONOTONES, FONCTIONS MAJORÉES/MINORÉES

Définition (Monotonie) Soient A une partie de \mathbb{R} et $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

- On dit que f est *croissante* si : $\forall x, y \in A, \quad x < y \implies f(x) \leq f(y)$.
- On dit que f est *strictement croissante* si : $\forall x, y \in A, \quad x < y \implies f(x) < f(y)$.
- On dit que f est *décroissante* si : $\forall x, y \in A, \quad x < y \implies f(x) \geq f(y)$.
- On dit que f est *strictement décroissante* si : $\forall x, y \in A, \quad x < y \implies f(x) > f(y)$.
- On dit que f est (resp. *strictement*) *monotone* si f est (resp. strictement) croissante ou décroissante.

📖 **Explication** 📖 On peut bien sûr **CARACTÉRISER** la monotonie d'une fonction **DÉRIVABLE** par le signe de sa dérivée, mais c'est là un **THÉORÈME** et non une **DÉFINITION**. La définition ci-dessus est générale et ne requiert pas la dérivabilité.

Théorème (Somme de fonctions monotones) Soient A une partie de \mathbb{R} et $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : A \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions.

Si f et g sont croissantes, alors $f + g$ l'est aussi. Si de plus f ou g l'est strictement, alors $f + g$ aussi.

On dispose d'un résultat analogue pour les fonctions décroissantes.

Démonstration Dans le cas où f est croissante et g strictement croissante, soient $x, y \in A$ avec : $x < y$. Par hypothèse : $f(x) \leq f(y)$ et : $g(x) < g(y)$, donc par somme : $f(x) + g(x) < f(y) + g(y)$. ■

Exemple Pas besoin de dériver pour expliquer que la fonction $x \mapsto x + \ln x$ est strictement croissante sur \mathbb{R}_+^* !

Théorème (Composée de fonctions monotones) Soient A et B deux parties de \mathbb{R} et $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : B \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions. On suppose f à valeurs dans B .

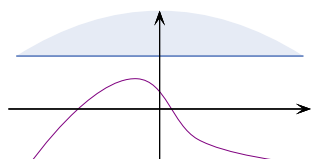
- Si f et g sont (resp. strictement) monotones de même sens de variation, alors $g \circ f$ est (resp. strictement) croissante.
- Si f et g sont (resp. strictement) monotones de sens de variation opposés, alors $g \circ f$ est (resp. strictement) décroissante.

Démonstration Dans le cas où f est croissante et g décroissante, soient $x, y \in A$ avec : $x < y$. Comme f est croissante : $f(x) \leq f(y)$, puis comme g est décroissante : $g(f(y)) \leq g(f(x))$. ■

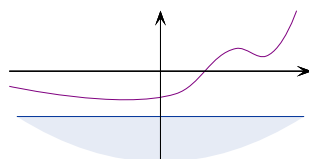
Exemple Pas besoin de dériver pour expliquer que la fonction $x \mapsto e^{e^x}$ est strictement croissante sur \mathbb{R} !

Définition (Fonction majorée/minorée/bornée) Soient A une partie de \mathbb{R} et $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

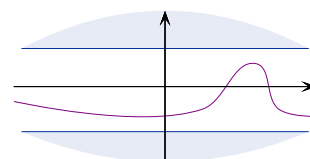
- On dit que f est *majorée sur A* si : $\exists M \in \mathbb{R} / \forall x \in A, \quad f(x) \leq M$. Un tel réel M est appelé **UN majorant de f sur A** . On dit aussi que f est *majorée par M sur A* ou que M *major*e f sur A .
- On dit que f est *minorée sur A* si : $\exists m \in \mathbb{R} / \forall x \in A, \quad f(x) \geq m$. Un tel réel m est appelé **UN minorant de f sur A** . On dit aussi que f est *minorée par m sur A* ou que m *minore* f sur A .
- On dit que f est *bornée sur A* si f est à la fois majorée et minorée sur A , i.e. si : $\exists K \in \mathbb{R}_+ / \forall x \in A, \quad |f(x)| \leq K$.



Fonction majorée non minorée



Fonction minorée non majorée



Fonction bornée

Démonstration Par définition, la proposition : « f est majorée et minorée sur A » s'écrit :

$$\exists m, M \in \mathbb{R} / \forall x \in A, m \leq f(x) \leq M,$$

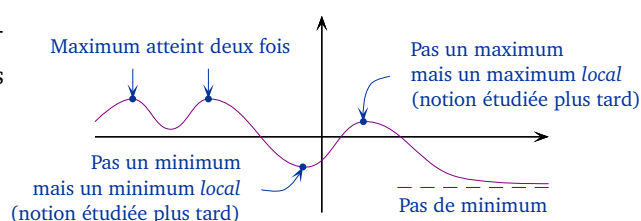
or ce n'est pas la définition donnée ci-dessus. Montrons donc l'équivalence des deux formulations.

- Si : $\exists K \in \mathbb{R}_+ / \forall x \in A, |f(x)| \leq K$, alors : $-K \leq f(x) \leq K$, donc f est minorée et majorée.
- À présent, si : $\exists m, M \in \mathbb{R} / \forall x \in A, m \leq f(x) \leq M$, posons : $K = \max\{|m|, |M|\}$. Alors pour tout $x \in A$: $-K \leq -|m| \leq m \leq f(x) \leq M \leq |M| \leq K$, donc : $|f(x)| \leq K$. ■

Définition (Maximum/minimum d'une fonction) Soient A une partie de \mathbb{R} , $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $a \in A$.

- On dit que f admet un maximum en a si pour tout $x \in A$: $f(x) \leq f(a)$. Le réel $f(a)$ est alors appelé le maximum de f en a , on le note aussi $\max_A f$ ou $\max_{x \in A} f(x)$.
- On dit que f admet un minimum en a si pour tout $x \in A$: $f(x) \geq f(a)$. Le réel $f(a)$ est alors appelé le minimum de f en a , on le note aussi $\min_A f$ ou $\min_{x \in A} f(x)$.

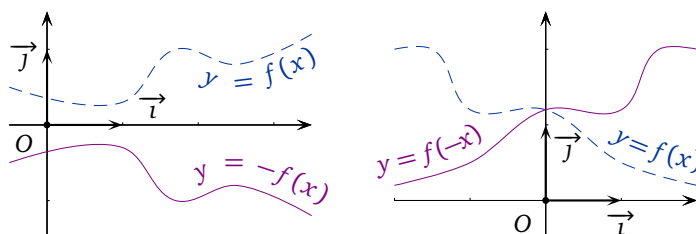
✗ **ATTENTION !** ✗ Une fonction peut ne pas avoir de maximum/minimum et quand elle en a un, il peut être atteint en plusieurs points différents.



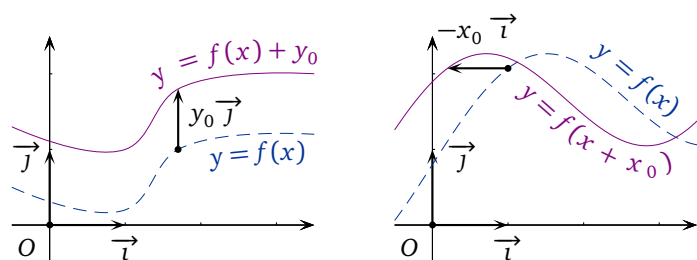
1.4 TRANSFORMATIONS AFFINES DU GRAPHE D'UNE FONCTION

Théorème (Transformations affines du graphe d'une fonction, cas des symétries) Soient A une partie de \mathbb{R} et $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Les graphes ci-dessous sont représentés dans un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) .

- La fonction $x \mapsto -f(x)$ est définie sur A et son graphe s'obtient à partir de celui de f par une symétrie par rapport à (Ox) .
- La fonction $x \mapsto f(-x)$ est définie sur $-A$, i.e. le symétrique de A par rapport à (Oy) , et son graphe s'obtient aussi à partir de celui de f par la même symétrie.



Théorème (Transformations affines du graphe d'une fonction, cas des translations) Soient A une partie de \mathbb{R} et $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Les graphes ci-dessous sont représentés dans un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) .

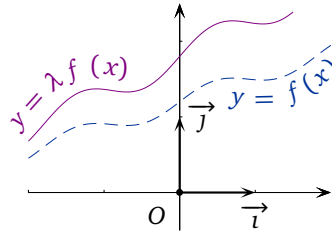


- Soit $y_0 \in \mathbb{R}$. La fonction $x \mapsto f(x) + y_0$ est définie sur A et son graphe s'obtient à partir de celui de f par une translation de vecteur $y_0 \vec{j}$.
- Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. La fonction $x \mapsto f(x + x_0)$ est définie sur $A - x_0$, i.e. l'ensemble A décalé vers la gauche de x_0 , et son graphe s'obtient à partir de celui de f par une translation de vecteur $-x_0 \vec{i}$.

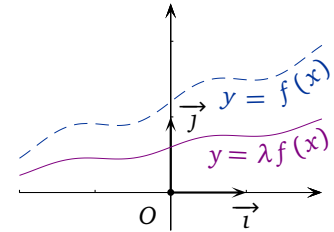
✗ **ATTENTION !** ✗ Dans le cas de la fonction $x \mapsto f(x + x_0)$, il y a bien un signe « moins » dans l'expression du vecteur de translation $-x_0 \vec{i}$ et c'est normal, la fonction $x \mapsto f(x + x_0)$ atteint la valeur $f(0)$ en $-x_0$, puis la valeur $f(1)$ en $-x_0 + 1$, etc. Pour résumer, on peut dire que $x \mapsto f(x + x_0)$ est EN AVANCE de x_0 sur $x \mapsto f(x)$.

Théorème (Transformations affines du graphe d'une fonction, cas des contractions/dilatations) Soient A une partie de \mathbb{R} et $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Les graphes ci-dessous sont représentés dans un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) .

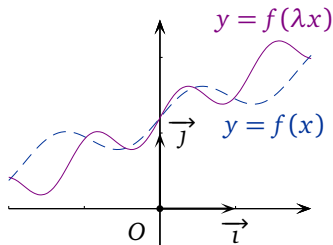
- Soit $\lambda > 0$. La fonction $x \mapsto \lambda f(x)$ est définie sur A et son graphe s'obtient à partir de celui de f par une dilatation verticale de rapport λ si $\lambda \geq 1$ et une contraction verticale de rapport $\frac{1}{\lambda}$ si $\lambda < 1$.



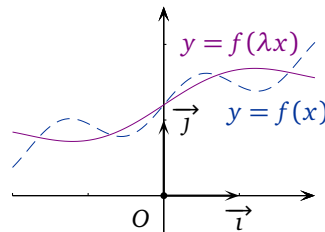
Dilatation verticale ($\lambda \geq 1$)



Contraction verticale ($\lambda < 1$)



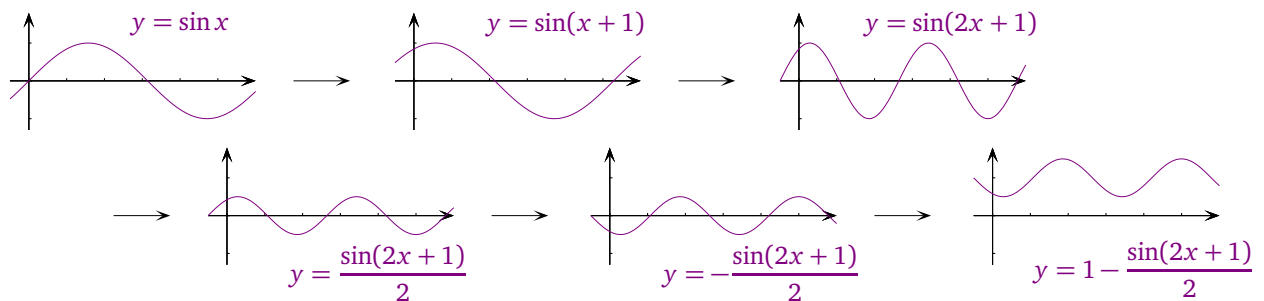
Contraction horizontale ($\lambda \geq 1$)



Dilatation horizontale ($\lambda < 1$)

- Soit $\lambda > 0$. La fonction $x \mapsto f(\lambda x)$ est définie sur l'ensemble dilaté/contracté $\frac{1}{\lambda} A$ et son graphe s'obtient à partir de celui de f par une contraction horizontale de rapport λ si $\lambda \geq 1$ et une dilatation horizontale de rapport $\frac{1}{\lambda}$ si $\lambda < 1$.

Exemple



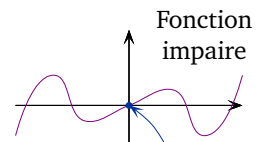
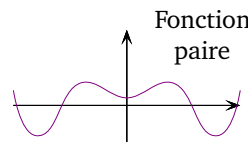
Définition (Parité/imparité)

Soit A une partie de \mathbb{R} symétrique par rapport à 0, i.e. telle que :

$$\forall x \in A, -x \in A.$$

Soit $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

- On dit que f est *paire* si : $\forall x \in A, f(-x) = f(x)$.
Cela revient à dire que le graphe de f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- On dit que f est *impaire* si : $\forall x \in A, f(-x) = -f(x)$.
Cela revient à dire que le graphe de f est symétrique par rapport à l'origine.



Le graphe d'une fonction impaire définie en 0 passe toujours par l'origine.

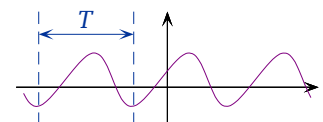
En pratique

Pas besoin d'étudier une fonction $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ paire ou impaire sur A tout entier, une étude sur $A \cap \mathbb{R}_+$ suffit.

Définition (Périodicité) Soient $T > 0$ et A une partie de \mathbb{R} T -périodique, i.e. telle que :

$$\forall x \in A, x + T \in A \text{ et } x - T \in A.$$

Soit $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est T -périodique ou périodique de période T si : $\forall x \in A, f(x + T) = f(x)$. Le réel T est alors appelé **UNE** période de f .



ATTENTION !

Une fonction périodique ne possède jamais qu'une seule période. Tout multiple entier d'une période T est encore une période : $2T, 3T, 4T \dots$. Voilà pourquoi on ne parle jamais de « la » période, mais toujours d'**UNE** période.

En pratique

Pas besoin d'étudier une fonction $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ T -périodique sur A tout entier, une étude sur une période suffit, par exemple $A \cap [0, T[$.

Théorème (Opérations sur les fonctions périodiques) Soient $T > 0$, A une partie de \mathbb{R} T -périodique et $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : A \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions T -périodiques.

- (i) Les fonctions $f + g$ et $f \times g$ sont aussi T -périodiques, ainsi que $\frac{f}{g}$ si g ne s'annule pas.
- (ii) Pour tout $\omega > 0$, la fonction $x \mapsto f(\omega x)$ est $\frac{T}{\omega}$ -périodique sur l'ensemble dilaté/contracté $\frac{1}{\omega} A$.

🦋 **Explication** 🦋 Si par exemple $\omega = 2$, le graphe de la fonction $x \mapsto f(2x)$ est la contraction horizontale de facteur 2 de celui de f . Si f est T -périodique, rien d'étonnant du coup à ce que $x \mapsto f(2x)$ soit $\frac{T}{2}$ -périodique.

Démonstration

- (i) Concernant $f + g$, pour tout $x \in A$: $(f + g)(x + T) = f(x + T) + g(x + T) = f(x) + g(x) = (f + g)(x)$.
- (ii) Notons g la fonction $x \mapsto f(\omega x)$ définie en tout point x pour lequel : $\omega x \in A$, i.e. sur $\frac{1}{\omega} A$. Pour tout $x \in \frac{1}{\omega} A$: $g\left(x + \frac{T}{\omega}\right) = f\left[\omega\left(x + \frac{T}{\omega}\right)\right] = f(\omega x + T) = f(\omega x) = g(x)$. ■

Exemple La fonction $x \mapsto \sin(2x)$ est π -périodique car la fonction sinus est 2π -périodique.

2 RAPPELS SUR LA DÉRIVATION

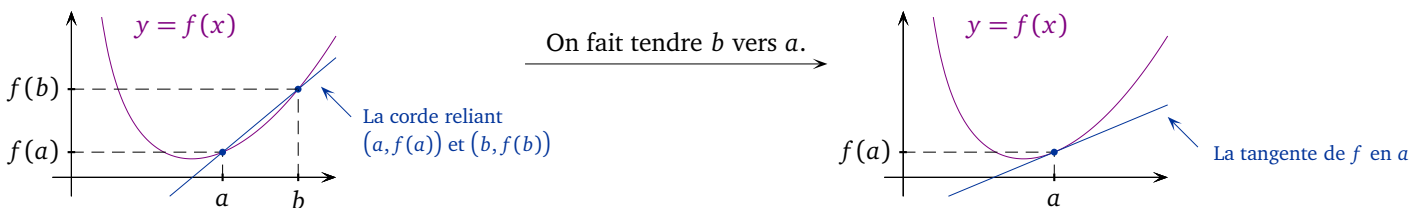
Définition (Dérivabilité, tangente) Soient I un intervalle, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $a \in I$.

- On dit que f est *dérivable en a* si $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ EXISTE ET EST FINIE. Cette limite est alors appelée le *nombre dérivé de f en a* et notée $f'(a)$.

L'ensemble des fonctions dérivables sur I tout entier, i.e. dérivables en tout point de I , est noté $\mathcal{D}(I, \mathbb{R})$. Pour tout $f \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$, la fonction $x \mapsto f'(x)$ sur I est appelée la *dérivée de f* .

- Si f est dérivable en a , la droite d'équation : $y = f(a) + f'(a)(x - a)$ est appelée la *tangente de f en a* .

🦋 **Explication** 🦋 Si f est dérivable en a , alors pour $x \approx a$: $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \approx f'(a)$, donc : $f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a)$. Ce raisonnement sans rigueur justifie tout de même rapidement le fait que la tangente de f en a est LA DROITE LA PLUS PROCHE DU GRAPHE DE f AU VOISINAGE DE a . Plus géométriquement, sachant que $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ est le coefficient directeur de la corde reliant les points de coordonnées $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$, la limite : $f'(a) = \lim_{b \rightarrow a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ représente la « pente limite » des cordes précitées.



Théorème (Opérations sur les dérivées) Soient I un intervalle et $f, g \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$.

- **Multiplication par un réel** : Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, λf est dérivable sur I et :
- **Somme** : $f + g$ est dérivable sur I et :
- **Produit** : $f g$ est dérivable sur I et :
- **Quotient** : Si g ne s'annule pas sur I , $\frac{f}{g}$ est dérivable sur I et :

Soient I et J deux intervalles, $f \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{D}(J, \mathbb{R})$. On suppose f à valeurs dans J .

- **Composée** : $g \circ f$ est dérivable sur I et :

$$(\lambda f)' = \lambda f'.$$

$$(f + g)' = f' + g'.$$

$$(f g)' = f' g + f g'.$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' g - f g'}{g^2}.$$

$$(g \circ f)' = f' \times g' \circ f.$$

Exemple La fonction $x \mapsto \ln(x + \sqrt{x(1-x)})$ est définie sur $]0, 1[$ et dérivable sur $]0, 1[$.

Étudiez scrupuleusement la raison pour laquelle f n'a pas a priori les mêmes ensembles de définition et de dérivabilité.

Démonstration

- **Ensemble de définition** : La quantité $\ln(x + \sqrt{x(1-x)})$ est bien définie si : $x(1-x) \geq 0$ à cause de la racine carrée et si : $x + \sqrt{x(1-x)} > 0$ à cause du logarithme, i.e. si : $x \in [0, 1]$ et $x > 0$. Conclusion : f est définie sur $]0, 1[$.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
x	$-$	0	$+$	
$1-x$		$+$	0	$-$
$x(1-x)$	$-$	0	$+$	0

- **Ensemble de dérivabilité** : La fonction racine carrée est définie sur \mathbb{R}_+ mais dérivable seulement sur \mathbb{R}_+^* . Nous allons donc devoir modifier un peu ce qui précède, remplacer « $x(1-x) \geq 0$ » par « $x(1-x) > 0$ ».
 - La fonction $x \mapsto x(1-x)$ est dérivable sur $]0, 1[$ À VALEURS DANS \mathbb{R}_+^* et la fonction racine carrée est dérivable sur \mathbb{R}_+^* , donc $x \mapsto \sqrt{x(1-x)}$ est dérivable sur $]0, 1[$ par composition.
 - Par somme, $x \mapsto x + \sqrt{x(1-x)}$ est dérivable sur $]0, 1[$, À VALEURS DANS \mathbb{R}_+^* . La fonction logarithme étant dérivable sur \mathbb{R}_+^* , f est enfin dérivable sur $]0, 1[$ par composition.
- **Remarque** : Nous n'avons pas prouvé que f n'est PAS dérivable en 1, le raisonnement qui prouve sa bonne définition sur $]0, 1[$ montre seulement sa dérivabilité sur $]0, 1[$.

Théorème (Caractérisation des fonctions dérivables constantes/monotones) Soient I un INTERVALLE et $f \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$. Afin d'alléger, on n'énonce ci-dessous que le cas des fonctions croissantes.

- f est constante sur I si et seulement si f' est nulle sur I .
- f est croissante sur I si et seulement si f' est positive ou nulle sur I .
- f est strictement croissante sur I si et seulement si f' est positive ou nulle sur I et n'est identiquement nulle sur aucun intervalle $[a, b]$ avec $a < b$.

En particulier, si f' est strictement positive sur I , alors f est strictement croissante sur I .

En pratique

À ce stade de l'année, c'est pour leur **SIGNE** qu'on calcule des dérivées.

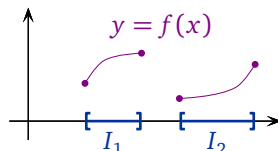
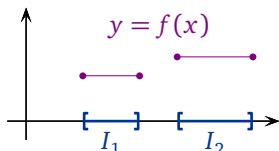
Conséquence :

FACTORISEZ TOUJOURS VOS DÉRIVÉES LE PLUS POSSIBLE !

Rappelons que le signe d'une fonction s'obtient souvent grâce à un **TABLEAU DE SIGNE**.

⚠ ATTENTION ! ⚠ Mine de rien, l'hypothèse selon laquelle I est un INTERVALLE est indispensable. Le théorème est faux si I est une réunion d'intervalles non vides disjoints.

f est constante sur I_1 et sur I_2 , donc $f' = 0$ sur I_1 et sur I_2 , mais f n'est pas constante sur $I_1 \cup I_2$.



f est croissante sur I_1 et sur I_2 , donc $f' \geq 0$ sur I_1 et sur I_2 , mais f n'est pas croissante sur $I_1 \cup I_2$.

Définition (Dérivées successives) Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

On commence par poser : $f^{(0)} = f$. Ensuite, pour tout $k \in \mathbb{N}$, si on a réussi à définir $f^{(k)}$ sur I au cours des étapes précédentes, et si $f^{(k)}$ est dérivable sur I , on pose : $f^{(k+1)} = (f^{(k)})'$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, si la fonction $f^{(k)}$ est bien définie, dite *dérivée $k^{\text{ème}}$ de f* , on dit que f est k fois dérivable sur I . On note généralement f, f', f'', f''' plutôt que $f^{(0)}, f^{(1)}, f^{(2)}$ et $f^{(3)}$ respectivement.

En pratique Le théorème « Opérations sur les dérivées » se généralise bien aux dérivées successives. Ainsi la somme et le produit de deux fonctions k fois dérivables sont eux-mêmes k fois dérivables. Il en va de même de leur quotient et de leur composée quand ils ont un sens.

Exemple La fonction $x \mapsto \frac{e^x}{x^2 + 1}$ est dérivable autant de fois qu'on le veut sur \mathbb{R} car les fonctions $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto x^2 + 1$ le sont. On n'a pas besoin de dériver 99 fois pour savoir que la dérivée 100^{ème} est bien définie !

En pratique On a souvent besoin de démontrer des inégalités en mathématiques, et s'il n'y a pas de méthode unique pour y parvenir, il y en a quand même une qu'il faut toujours avoir en tête, l'ÉTUDE DES VARIATIONS D'UNE FONCTION.

Exemple Pour tout $x \in]-1, +\infty[$: $\ln(1+x) \leq x$. Un grand classique !

Démonstration La fonction $x \mapsto x - \ln(1+x)$ est définie et dérivable sur $] -1, +\infty[$ et pour tout $x \in] -1, +\infty[$: $f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}$. On conclut grâce au tableau ci-contre.

x	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	
$f(x)$		↘ 0 ↗	

Exemple Pour tout $x \in [0, 2]$: $\frac{x+1}{x^2+3} \in \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$. Par ailleurs, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\frac{x+1}{x^2+3} \in \left[-\frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right]$.

Démonstration

- **Tentative naïve** : Pour tout $x \in [0, 2]$: $0 \leq x^2 \leq 4$ donc $3 \leq x^2 + 3 \leq 7$, et par ailleurs : $1 \leq x + 1 \leq 3$, donc par quotient : $\frac{1}{7} \leq \frac{x+1}{x^2+3} \leq \frac{3}{3} = 1$ — sauf que ce résultat est moins fin que celui que nous souhaitons. En encadrant **SÉPARÉMENT** le numérateur et le dénominateur, nous ne les avons pas fait communiquer assez, cette tentative naïve est un échec.

- **Solution via une étude de fonction** : La fonction $x \mapsto \frac{x+1}{x^2+3}$ est définie et dérivable sur \mathbb{R} et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = \frac{1 \times (x^2 + 3) - (x + 1) \times 2x}{(x^2 + 3)^2} = -\frac{x^2 + 2x - 3}{(x^2 + 3)^2} = -\frac{(x - 1)(x + 3)}{(x^2 + 3)^2}$$

x	$-\infty$	-3	1	$+\infty$			
$f'(x)$	-	0	+	0	-		
$f(x)$	0	↘	$-\frac{1}{6}$	↗	$\frac{1}{2}$	↘	0

On conclut grâce au tableau ci-contre, sachant que : $f(0) = \frac{1}{3} \leq \frac{3}{7} = f(2)$.

Exemple Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$: $\frac{x+1}{x-1} \ln x \geq 2$.

Démonstration Nous pourrions étudier la fonction $x \mapsto \frac{x+1}{x-1} \ln x$ et la comparer à 2, mais la dérivée d'un quotient occasionne souvent d'affreux calculs, donc nous allons plutôt étudier le **SIGNE** de $x \mapsto (x+1) \ln x - 2(x-1)$ sur \mathbb{R}_+^* . Nous diviserons par $x-1$ en fin d'étude pour obtenir le résultat.

Or pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$: $f'(x) = \ln x + \frac{1}{x} - 1$ et $f''(x) = \frac{x-1}{x^2}$. On conclut grâce au tableau ci-contre.

x	0	1	$+\infty$	
$f''(x)$		- 0 +		
$f'(x)$		↘ 0 ↗		
$f'(x)$		+	0	+
$f(x)$		↘ 0 ↗		
$f(x)$		-	0	+
$\frac{f(x)}{x-1}$		+		+

En pratique Relisez bien le début de l'exemple précédent :

Les fonctions ne sont pas toutes aussi faciles à étudier les unes que les autres, faites le bon choix !

Exemple Pour tout $x, y \in]-1, 1[$: $\frac{x+y}{1+xy} \in]-1, 1[$.

Démonstration Comment prouver une inégalité sur deux variables ? Idée : on « gèle » l'une des variables, par exemple y , et on considère que seule x est réellement variable. On dérive alors par rapport à x .

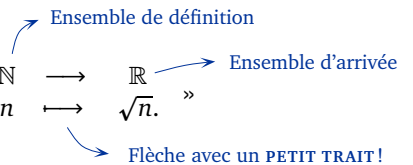
Soit $y \in]-1, 1[$ **FIXÉ**. La fonction $x \mapsto \frac{x+y}{1+xy}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{1}{y} \right\}$, donc a fortiori sur $]-1, 1[$. Pour tout $x \in]-1, 1[$: $f'(x) = \frac{1-y^2}{(1+xy)^2} > 0$. On conclut grâce au tableau ci-contre.

x	-1	1
$f'(x)$		+
$f(x)$	-1	1

3 FONCTIONS ET BONNE RÉDACTION

✗ ATTENTION ! ✗

- Pour définir une fonction, on peut procéder ainsi : « On note f la fonction $\begin{cases} \mathbb{N} & \rightarrow \\ n & \mapsto \end{cases} \mathbb{R} \begin{cases} \\ \sqrt{n}. \end{cases}$ »
- ou ainsi : « On note f la fonction $n \mapsto \sqrt{n}$ définie sur \mathbb{N} . »
- « On note f la fonction définie sur \mathbb{N} par : $\forall n \in \mathbb{N}, f(n) = \sqrt{n}$. »
- « On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $f(n) = \sqrt{n}$. »



On s'interdira en revanche scrupuleusement les formulations suivantes :

« On note f la fonction \sqrt{n} sur \mathbb{N} . » « On note f la fonction $n \mapsto \sqrt{n}$ sur \mathbb{N} . » « On pose $f(n) = \sqrt{n}$. »

- Pour parler d'une fonction, on écrit « ... la fonction $x \mapsto \sin(x^2)$... » et non pas « ... la fonction ~~$\sin(x^2)$~~ ... »
- On dit qu'une fonction est définie **SUR** tel ou tel domaine. On s'interdira scrupuleusement toute formulation du type : « La fonction $x \mapsto \frac{1}{x-5}$ est définie pour ~~tout~~ $x \in \mathbb{R} \setminus \{5\}$. »
- On dit qu'une fonction est monotone **SUR** tel ou tel domaine. On s'interdira scrupuleusement toute formulation du type : « La fonction $x \mapsto e^{2x} + 1$ est monotone pour ~~tout~~ $x \in \mathbb{R}$. »
- On dit qu'une fonction est dérivable **SUR** tel ou tel domaine. On s'interdira scrupuleusement toute formulation du type : « La fonction $x \mapsto \frac{x}{x^2+1}$ est dérivable pour ~~tout~~ $x \in \mathbb{R}$. »

- Last but not least : **LA NOTATION « $f(x)'$ » EST TOTALEMENT INTERDITE.** Quand vous dérivez une fonction, disons $x \mapsto e^{\sin x}$, n'écrivez pas : « Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = (e^{\sin x})' = e^{\sin x} \cos x$ », mais simplement : « Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = e^{\sin x} \cos x$. »

4 FONCTIONS USUELLES

4.1 FONCTIONS AFFINES

Définition (Fonctions affines) On appelle *fonction affine* toute fonction de la forme $x \mapsto mx + p$ avec $m, p \in \mathbb{R}$.

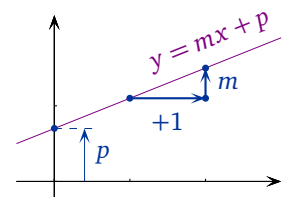
En pratique Le graphe de f est alors la droite de coefficient directeur m et d'ordonnée à l'origine p .

Si on connaît deux valeurs $f(a)$ et $f(b)$ de f avec $a \neq b$, alors :

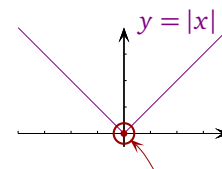
$$m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Souvent, en réalité, ce n'est pas l'ordonnée à l'origine qu'on connaît, mais l'ordonnée en un autre point a . Le résultat suivant est **FONDAMENTAL** :

$$f(x) = m(x - a) + f(a)$$



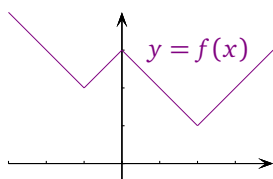
On appelle *fonction affine par morceaux* toute fonction f dont le domaine de définition est la réunion d'un nombre fini d'intervalles disjoints sur lesquels f est affine. La fonction valeur absolue, par exemple, est affine par morceaux, paire, continue sur \mathbb{R} MAIS dérivable seulement sur \mathbb{R}^* .



Exemple Le graphe de la fonction $x \mapsto |x+1| - |x| + |x-2|$ est représenté ci-dessous.

Pas dérivable en 0, il y a un « angle ».

Démonstration Tout simplement, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

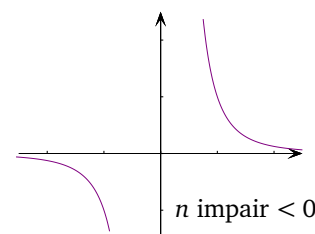
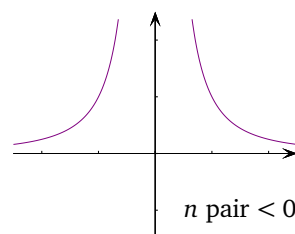
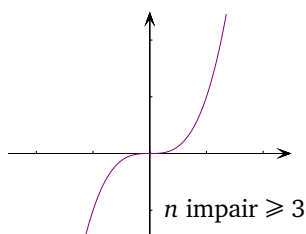
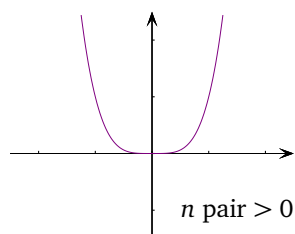


$$f(x) = \begin{cases} (x+1) - x + (x-2) = x-1 & \text{si } x \geq 2 \\ (x+1) - x - (x-2) = 3-x & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ (x+1) + x - (x-2) = x+3 & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ -(x+1) + x - (x-2) = 1-x & \text{si } x < -1, \end{cases}$$

et nous n'avons alors plus qu'à tracer des morceaux de droites selon les principes de la remarque précédente.

4.2 FONCTIONS POLYNOMIALES ET RATIONNELLES

Théorème (Fonctions puissances entières) Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, la fonction $x \mapsto x^n$ est définie et dérivable sur son ensemble de définition, à savoir \mathbb{R} si $n \geq 0$ et \mathbb{R}^* si $n < 0$, de dérivée $x \mapsto nx^{n-1}$.



Nous aurons plus tard dans l'année un chapitre « Polynômes » et un chapitre « Fractions rationnelles » importants. Il s'agit ici seulement de faire rapidement connaissance avec ces objets.

Définition (Fonctions polynomiales et rationnelles)

- On appelle *fonction polynomiale* toute fonction $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de la forme $x \mapsto a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ avec $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Les réels a_0, \dots, a_n sont appelés les *coefficients de P* et le plus grand exposant de x doté d'un coefficient non nul est appelé le *degré de P*.
- On appelle *fonction rationnelle* tout quotient d'une fonction polynomiale par une fonction polynomiale non nulle.

Exemple La fonction $x \mapsto 3x^5 - x^4 + 7x^2 + x - 2$ est polynomiale de degré 5.

En pratique Pour calculer la limite en $+\infty$ ou $-\infty$ d'une fonction polynomiale ou rationnelle, on factorise par le terme de plus haut degré au numérateur et au dénominateur, puis on simplifie. Par exemple :

$$4x^5 - 6x^4 + 5 = \underbrace{4x^5}_{\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty} \times \underbrace{\left(1 - \frac{3}{2x} + \frac{5}{4x^5}\right)}_{\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty \quad \text{et} \quad \frac{x^2 + 2x + 7}{3x^2 - 1} = \frac{x^2 \left(1 + \frac{2}{x} + \frac{7}{x^2}\right)}{3x^2 \left(1 - \frac{1}{3x^2}\right)} = \frac{1}{3} \times \frac{1 + \frac{2}{x} + \frac{7}{x^2}}{1 - \frac{1}{3x^2}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{3}.$$

Définition-théorème (Racine d'une fonction polynomiale) Soient $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction polynomiale et $\lambda \in \mathbb{R}$.

- On dit que λ est une *racine de P* si : $P(\lambda) = 0$.
- Factorisation par une racine :** λ est racine de P si et seulement s'il existe une fonction polynomiale $Q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $P(x) = (x - \lambda)Q(x)$.

Exemple La fonction $x \mapsto x^3 - 3x^2 + x + 3$ s'annule en 2, et en effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(x) = (x-2)(x^2 - x - 1)$.

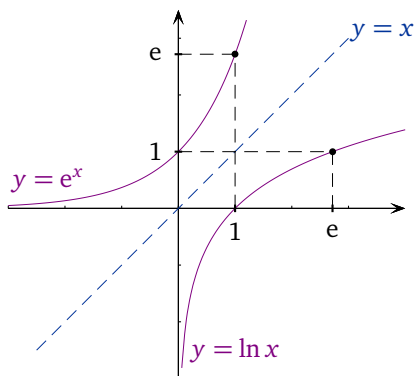
🐇 **Explication** 🐇 Ce chapitre est consacré aux fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , mais on peut bien sûr définir des fonctions polynomiales et rationnelles de \mathbb{C} dans \mathbb{C} au moyen de coefficients complexes et disposer naturellement d'une notion de racine complexe. Le nombre i est par exemple racine de $x \mapsto x^2 + 1$, d'où la factorisation suivante pour tout $x \in \mathbb{C}$: $x^2 + 1 = (x-i)(x+i)$.

4.3 FONCTIONS EXPONENTIELLE, LOGARITHME ET PUISSANCES

Définition-théorème (Fonctions exponentielle et logarithme) La fonction exponentielle \exp est définie et dérivable sur \mathbb{R} de dérivée elle-même. On pose $e^x = \exp(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et le nombre e^1 est noté e : $e \approx 2,718$.

La fonction logarithme (népérien) \ln est définie et dérivable sur \mathbb{R}_+^* de dérivée la fonction inverse $x \mapsto \frac{1}{x}$.

- **Réciprocité** : Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\ln e^x = x$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$: $e^{\ln x} = x$. Conséquence : les graphes d' \exp et \ln sont symétriques l'un de l'autre par rapport à la droite d'équation $y = x$ — nous y reviendrons plus loin.



- **Transformation somme/produit** : Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$: $e^{x+y} = e^x e^y$, donc en particulier : $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$, et pour tous $x, y \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y, \quad \text{donc en particulier : } \ln \frac{1}{x} = -\ln x.$$

- **Croissances comparées** :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0.$$

- **Inégalités classiques** : Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $e^x \geq x + 1$ et pour tout $x \in]-1, +\infty[$: $\ln(1+x) \leq x$.

✗ **ATTENTION !** ✗ Le réel e^x n'est pas « e multiplié x fois par lui-même », car en général x n'est pas un entier naturel — que signifierait « e multiplié $\sqrt{2}$ fois par lui-même » ? La notation « puissance » de e^x n'est qu'une **NOTATION**, utilisée par souci de commodité parce que l'exponentielle transforme les sommes en produits comme les puissances classiques. Mais dans ce cas, qu'est-ce donc qu' e^x si ce n'est pas « e multiplié x fois par lui-même » ? Mystère, mystère...

Jusqu'ici, nous avons seulement défini les puissances x^n pour n ENTIER. Nous pouvons maintenant généraliser.

Définition (Puissances quelconques et racines $n^{\text{èmes}}$ d'un réel STRICTEMENT POSITIF) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

- Pour tout $y \in \mathbb{R}$, on appelle x *puissance* y le réel : $x^y = e^{y \ln x}$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ (ENTIER, donc), on appelle *racine $n^{\text{ème}}$* de x le réel : $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$.

✗ **ATTENTION !** ✗

- Cette re-définition : $x^y = e^{y \ln x}$ n'est valable que pour des valeurs **STRICTEMENT POSITIVES** de x à cause du $\ln x$.
- Ici aussi, la notation « puissance » n'est qu'une **NOTATION**, x^y n'est pas le produit y fois de x . Il n'existe aucune autre définition de x^y dans le cas où y est un réel quelconque. Par conséquent, quand vous voyez x^y quelque part, **IL FAUT** que l'exponentielle et le logarithme vous sautent aux yeux instantanément.

Exemple Pour tout $x > 1$: $x^{\frac{\ln \ln x}{\ln x}} = e^{\frac{\ln \ln x}{\ln x} \times \ln x} = e^{\ln \ln x} = \ln x$.

Théorème (Propriétés algébriques des puissances) La nouvelle définition des puissances généralise bien l'ancienne.

- (i) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, les définitions : $x^n = x \times x \times \dots \times x$ (n fois) et : $x^n = e^{n \ln x}$ coïncident.
- (ii) Pour tous $x, x' \in \mathbb{R}_+^*$ et $y, y' \in \mathbb{R}$:

$$\ln(x^y) = y \ln x, \quad x^{y+y'} = x^y x^{y'}, \quad x^{yy'} = (x^y)^{y'}, \quad (xx')^y = x^y x'^y \quad \text{et} \quad x^{-y} = \frac{1}{x^y} = \left(\frac{1}{x}\right)^y.$$

Démonstration

(i) Tout simplement : $e^{n \ln x} = e^{\overbrace{\ln x + \dots + \ln x}^{n \text{ fois}}} = e^{\overbrace{\ln x \times \dots \times \ln x}^{n \text{ fois}}} = e^{\overbrace{\ln x \times \dots \times \ln x}^{n \text{ fois}}} = x \times \dots \times x$.

(ii) $\ln(x^y) = \ln(e^{y \ln x}) = y \ln x.$ $x^{y+y'} = e^{(y+y') \ln x} = e^{y \ln x + y' \ln x} = e^{y \ln x} e^{y' \ln x} = x^y x^{y'}.$

$x^{yy'} = e^{yy' \ln x} = e^{y' \ln(x^y)} = (x^y)^{y'}.$ $(xx')^y = e^{y \ln(xx')} = e^{y \ln x + y \ln x'} = e^{y \ln x} e^{y \ln x'} = x^y x'^y.$

$x^{-y} = e^{-y \ln x} = \frac{1}{e^{y \ln x}} = \frac{1}{x^y}$ et $x^{-y} = e^{-y \ln x} = e^{y \ln(\frac{1}{x})} = \left(\frac{1}{x}\right)^y.$ ■

Théorème (Étude des fonctions puissances) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

- (i) La fonction $x \mapsto x^\alpha$ est définie et dérivable sur \mathbb{R}_+^* de dérivée $x \mapsto \alpha x^{\alpha-1}$.

(ii) **Positions relatives :**

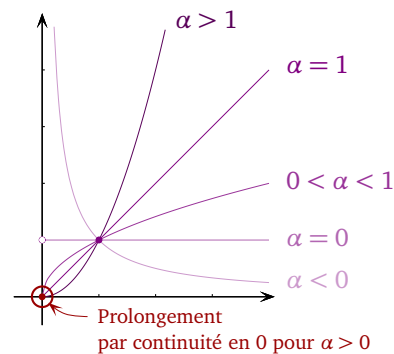
Pour tous $x \in]0, 1]$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$: $\alpha \leq \beta \implies x^\beta \leq x^\alpha.$

Pour tous $x \in [1, +\infty[$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$: $\alpha \leq \beta \implies x^\alpha \leq x^\beta.$

En particulier :

— pour $x \in]0, 1]$: $0 \leq \dots \leq x^3 \leq x^2 \leq x \leq 1 \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{x^3} \leq \dots$

— pour $x \in [1, +\infty[$: $0 \leq \dots \leq \frac{1}{x^3} \leq \frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{x} \leq 1 \leq x \leq x^2 \leq x^3 \leq \dots$



- (iii) **Prolongement par continuité en 0 pour $\alpha > 0$:** Dans le cas où $\alpha > 0$, on prolonge la fonction $x \mapsto x^\alpha$ en 0 en posant : $0^\alpha = 0$. La nouvelle fonction ainsi obtenue est définie et continue sur \mathbb{R}_+ tout entier, y compris en 0. Un tel prolongement est appelé *prolongement par continuité*. ■

✘ **ATTENTION !** ✘ Pour $\alpha \in]0, 1[$, la fonction $x \mapsto x^\alpha$ est continue en 0 mais elle y a une tangente verticale, signe qu'elle n'est pas dérivable en 0. C'est notamment ce qui arrive à la fonction racine carrée $\sqrt{\cdot}$.

Démonstration

(i) $x \xrightarrow{f} e^{\alpha \ln x}$ est dérivable comme composée et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$: $f'(x) = \frac{\alpha}{x} e^{\alpha \ln x} = \alpha x^{-1} x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}$.

(ii) Soient $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ avec : $\alpha \leq \beta$.

— Si $x \in]0, 1]$: $\ln x \leq 0$, donc : $\beta \ln x \leq \alpha \ln x$, et donc : $x^\beta = e^{\beta \ln x} \leq e^{\alpha \ln x} = x^\alpha.$

— Si $x \in [1, +\infty[$: $\ln x \geq 0$, donc : $\alpha \ln x \leq \beta \ln x$, et donc : $x^\alpha = e^{\alpha \ln x} \leq e^{\beta \ln x} = x^\beta.$

(iii) Pour $\alpha > 0$: $\lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha = 0$, donc on obtient une fonction continue en 0 en posant : $0^\alpha = 0$. ■

Théorème (Croissances comparées des fonctions logarithme, exponentielle et puissances) Le principe général, c'est que l'exponentielle est plus puissante que les puissances, qui sont elles-mêmes plus puissantes que le logarithme.

Précisément, pour tous $\alpha > 0$ et $\beta > 0$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{e^x} = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha |\ln x|^\beta = 0$.

4.4 FONCTIONS HYPERBOLIQUES sh, ch ET th

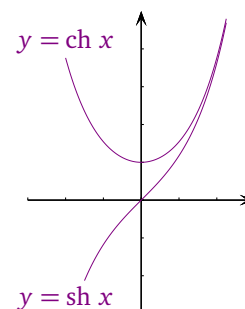
Définition-théorème (Fonctions sinus hyperbolique et cosinus hyperbolique)

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on appelle *sinus hyperbolique* de x le réel : $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ et *cosinus hyperbolique*

de x le réel : $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.

Les fonctions sinus hyperbolique et cosinus hyperbolique, respectivement impaire et paire, sont définies et dérivables sur \mathbb{R} avec : $\operatorname{sh}' = \operatorname{ch}$ et $\operatorname{ch}' = \operatorname{sh}$.

Enfin, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$.



Démonstration Les variations de ch et sh sont étudiées sur le tableau ci-contre, et pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = (\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x) \times (\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x) = e^x \times e^{-x} = 1$. ■

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\operatorname{ch} x$		+	
$\operatorname{sh} x$		0	
$\operatorname{sh} x$	-	0	+
$\operatorname{ch} x$		1	

Exemple Les solutions de l'équation : $\operatorname{ch} x = 2$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ sont :

$$\ln(2 + \sqrt{3}) \quad \text{et} \quad \ln(2 - \sqrt{3}).$$

Démonstration Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\operatorname{ch} x = 2 \iff \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 2 \iff e^x - 4 + e^{-x} = 0$

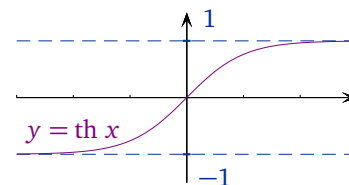
$$\begin{aligned} \xleftrightarrow{\times e^x} & (e^x)^2 - 4e^x + 1 = 0 && \text{Second degré en } e^x && e^x = \frac{4 + \sqrt{12}}{2} \quad \text{ou} \quad e^x = \frac{4 - \sqrt{12}}{2} \\ \iff & e^x = 2 + \sqrt{3} \quad \text{ou} \quad e^x = 2 - \sqrt{3} && \begin{matrix} 2 + \sqrt{3} > 0 \\ 2 - \sqrt{3} > 0 \end{matrix} && \iff x = \ln(2 + \sqrt{3}) \quad \text{ou} \quad x = \ln(2 - \sqrt{3}). \end{aligned}$$

Définition-théorème (Fonction tangente hyperbolique)

La fonction *tangente hyperbolique* est définie sur \mathbb{R} par la relation : $\operatorname{th} = \frac{\operatorname{sh}}{\operatorname{ch}}$.

Elle est dérivable sur \mathbb{R} et impaire et : $\operatorname{th}' = 1 - \operatorname{th}^2 = \frac{1}{\operatorname{ch}^2}$.

Elle possède enfin une asymptote d'équation $y = 1$ au voisinage de $+\infty$ (resp. $y = -1$ au voisinage de $-\infty$).



Démonstration La fonction th est dérivable par quotient et : $\operatorname{th}' = \frac{\operatorname{sh}' \times \operatorname{ch} - \operatorname{ch}' \times \operatorname{sh}}{\operatorname{ch}^2} = \frac{\operatorname{ch}^2 - \operatorname{sh}^2}{\operatorname{ch}^2}$, quantité

qui vaut à la fois : $\frac{1}{\operatorname{ch}^2}$ et $1 - \frac{\operatorname{sh}^2}{\operatorname{ch}^2} = 1 - \operatorname{th}^2$. L'étude des variations est très simple à mener. Pour la limite

en $+\infty$: $\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$. ■

4.5 TABLEAU RÉCAPITULATIF DES DÉRIVÉES USUELLES

Par convention,
 $0^\alpha = 0$ ←
 si $\alpha > 0$.

Fonction	Ensemble de définition	Ensemble de dérivabilité	Dérivée
e^x	\mathbb{R}	\mathbb{R}	e^x
$\ln x$	\mathbb{R}_+^*	\mathbb{R}_+^*	$\frac{1}{x}$
$x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$	\mathbb{R} si $\alpha \in \mathbb{N}$ \mathbb{R}^* si $\alpha \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ \mathbb{R}_+^* si $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$	\mathbb{R} si $\alpha \in \mathbb{N}$ \mathbb{R}^* si $\alpha \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ \mathbb{R}_+^* si $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$	$\alpha x^{\alpha-1}$
$\text{sh } x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$	\mathbb{R}	\mathbb{R}	$\text{ch } x$
$\text{ch } x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$	\mathbb{R}	\mathbb{R}	$\text{sh } x$
$\text{th } x = \frac{\text{sh } x}{\text{ch } x}$	\mathbb{R}	\mathbb{R}	$1 - \text{th}^2 x = \frac{1}{\text{ch}^2 x}$

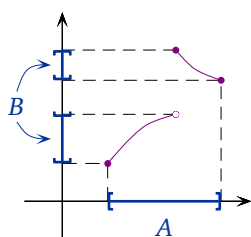
5 INTRODUCTION AUX BIJECTIONS ET AUX RÉCIPROQUES

5.1 NOTIONS DE BIJECTION ET DE RÉCIPROQUE

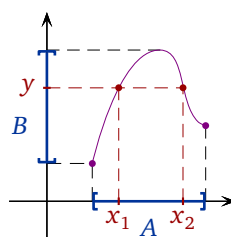
Définition (Bijection) Soient A et B deux parties de \mathbb{R} et $f : A \rightarrow B$ une fonction. On dit que f est *bijection de A sur B* , ou que f est une *bijection de A sur B* , ou que f réalise une *bijection de A sur B* , si tout élément de B possède un et un seul antécédent par f , i.e. si :

$$\forall y \in B, \quad \exists ! x \in A / y = f(x).$$

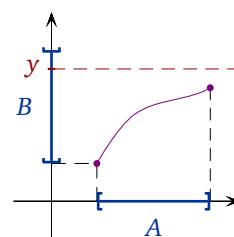
✂ Explication ✂



Fonction bijective de A sur B



Fonction NON bijective de A sur B ,
 y a PLUSIEURS antécédents.



Fonction NON bijective de A sur B ,
 y n'a AUCUN antécédent.

✘ ATTENTION ! ✘

- Une bijection n'est pas forcément strictement monotone. La figure de gauche le montre bien.
- À moins qu'il n'y ait pas d'ambiguïté, il faut toujours préciser « de A sur B » quand on évoque la bijectivité d'une fonction. À ce propos, on ne confondra pas « de A DANS B » avec « de A SUR B » :
 - Dire qu'une fonction est définie de A DANS B , c'est dire que ses valeurs sont toutes DES éléments de B mais pas forcément TOUS les éléments de B . Il y en a peut-être qu'elle n'atteint pas. C'est le même « dans » que dans l'expression « à valeurs dans B ».
 - Dire qu'une fonction est bijective de A SUR B , c'est au contraire affirmer en particulier qu'elle atteint TOUS les éléments de B , que son image est B tout entier.

Définition (Identité) Soit A une partie de \mathbb{R} . On appelle *identité de A* et on note Id_A la fonction $\begin{cases} A & \longrightarrow & A \\ x & \longmapsto & x. \end{cases}$

Définition (Réciproque) Soient A et B deux parties de \mathbb{R} et $f : A \longrightarrow B$ une fonction. On appelle *réciproque de f* toute fonction $g : B \longrightarrow A$ pour laquelle : $g \circ f = \text{Id}_A$ et $f \circ g = \text{Id}_B$.

☞ **Explication** ☞ Les identités : $\forall x \in A, g \circ f(x) = x$ et : $\forall y \in B, f \circ g(y) = y$ expriment l'idée que g défait le travail que f opère — et vice versa. Ce que l'une tricote, l'autre le détricote.

Exemple

- Les fonctions exponentielle et logarithme sont réciproques l'une de l'autre car pour tout $x \in \mathbb{R} : \ln e^x = x$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^* : e^{\ln x} = x$.
- Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Les fonctions $x \longmapsto x^\alpha$ et $x \longmapsto x^{\frac{1}{\alpha}}$ sont réciproques l'une de l'autre car pour tout $x \in \mathbb{R}_+^* : (x^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = x$ et $(x^{\frac{1}{\alpha}})^\alpha = x$. C'est en particulier le cas des fonctions $x \longmapsto x^n$ et $x \longmapsto \sqrt[n]{x}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ sur \mathbb{R}_+ .

Théorème (Bijectivité et réciproque) Soient A et B deux parties de \mathbb{R} et $f : A \longrightarrow B$ une fonction.

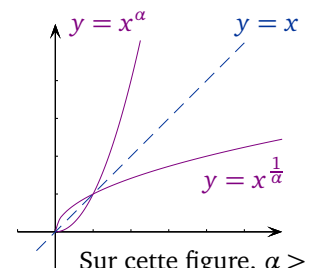
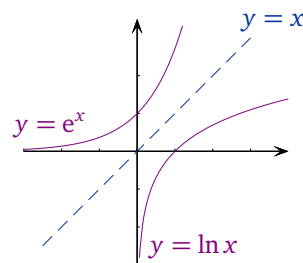
f est bijective de A sur B si et seulement si f possède une réciproque définie sur B et à valeurs dans A .

Une telle réciproque est alors unique, appelée LA réciproque de f et notée f^{-1} . Pour tous $x \in A$ et $y \in B$:

$$y = f(x) \iff x = f^{-1}(y).$$

Cette équivalence signifie géométriquement que le graphe de f et celui de f^{-1} sont symétriques l'un de l'autre par rapport à la droite d'équation $y = x$.

☞ **Explication** ☞ La symétrie des graphes de f et f^{-1} par rapport à la droite d'équation $y = x$ se visualise aisément sur les figures ci-contre. La fonction exponentielle est bijective de \mathbb{R} sur \mathbb{R}_+^* , tandis qu'à l'inverse la fonction logarithme est bijective de \mathbb{R}_+^* sur \mathbb{R} . Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^*$, la fonction $x \longmapsto x^\alpha$ est bijective de \mathbb{R}_+^* sur \mathbb{R}_+^* de réciproque $x \longmapsto x^{\frac{1}{\alpha}}$.



Démonstration Pour ne pas perdre de temps, nous laisserons de côté l'unicité de la réciproque.

- Supposons f bijective de A sur B : $\forall y \in B, \exists ! x \in A / y = f(x)$ et introduisons l'application g qui, à tout $y \in B$, associe l'unique antécédent de y par f . Nous allons montrer que g est une réciproque de f .
 - Pour tout $y \in B$: $y = f(g(y))$ par définition de $g(y)$ comme antécédent de y par f . Conclusion : $f \circ g = \text{Id}_B$.
 - Pour tout $x \in A, g(f(x))$ est par définition de g l'unique antécédent de $f(x)$ par f , or x est justement un tel antécédent de $f(x)$ par f , donc : $g(f(x)) = x$ par unicité. Conclusion : $g \circ f = \text{Id}_A$.
- Supposons réciproquement que f possède une réciproque g et montrons qu'alors f est bijective de A sur B . Soit $y \in B$. Nous devons prouver que y possède UN ET UN SEUL antécédent par f dans A .
 - Par définition de g : $y = f(g(y))$, donc y possède AU MOINS UN antécédent par f .
 - Pour montrer qu'il en possède AU PLUS UN, donnons-nous-en deux x et x' : $y = f(x) = f(x')$. Alors : $x = g(f(x)) = g(f(x')) = x'$ par définition de g , donc : $x = x'$ — unicité. ■

Théorème (Réciproque d'une fonction bijective monotone/impaire) Soient A et B deux parties de \mathbb{R} et $f : A \rightarrow B$ une fonction bijective de A sur B .

- (i) Si f est monotone, elle l'est strictement et f^{-1} est strictement monotone de même sens de variation.
- (ii) Si A est symétrique par rapport à 0 et si f est impaire, B est symétrique par rapport à 0 et f^{-1} est impaire.

Démonstration

(i) Dans le cas où f est croissante : $\forall x, y \in A, x < y \implies f(x) \leq f(y)$. En fait f est STRICTEMENT croissante, car s'il était possible d'avoir : $f(x) = f(y)$, x et y seraient DEUX antécédents d'un même élément de B alors que f est supposée bijective.

Montrons que f^{-1} est strictement croissante. Soient $y, y' \in B$ avec : $y < y'$. Or si : $f^{-1}(y) \geq f^{-1}(y')$, alors par croissance de f : $y = f(f^{-1}(y)) \geq f(f^{-1}(y')) = y'$ — contradiction.

(ii) Soit $y \in B$, disons : $y = f(x)$ pour un certain $x \in A$. Or A est symétrique par rapport à 0, donc : $-x \in A$. Et comme f est impaire : $-y = -f(x) = f(-x) \in B$. Conclusion : B est symétrique par rapport à 0.

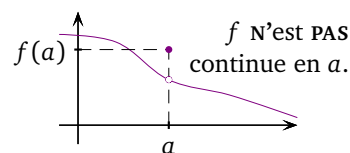
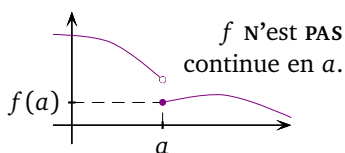
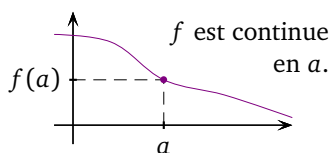
Par ailleurs : $f^{-1}(-y) = f^{-1}(-f(x)) = f^{-1}(f(-x)) = -x = -f^{-1}(y)$, donc f^{-1} est impaire. ■

5.2 LE TVI STRICTEMENT MONOTONE

Nous reviendrons très longuement et avec démonstrations sur les énoncés de ce paragraphe au chapitre « Continuité ».

Définition (Continuité) Soient I un intervalle, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $a \in I$.

On dit que f est continue en a si : $\lim_a f = f(a)$.



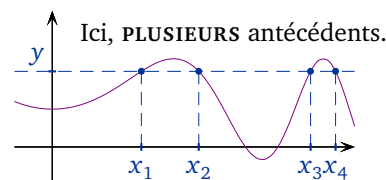
Théorème (Dérivabilité et continuité) Soient I un intervalle, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in I$. Si f est dérivable en a , alors f est continue en a .

✘ ATTENTION ! ✘ La réciproque est fautive ! Pensez à la valeur absolue ou à la racine carrée en 0.

Théorème (Théorème des valeurs intermédiaires ou TVI)

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que : $a < b$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction CONTINUE. Alors tout réel y compris entre $f(a)$ et $f(b)$ possède AU MOINS UN antécédent par f dans $[a, b]$:

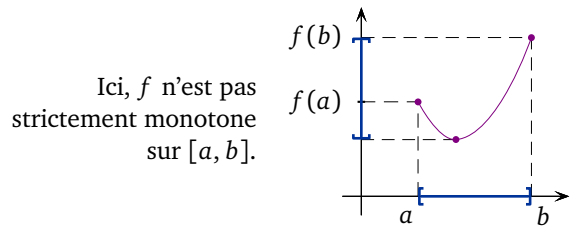
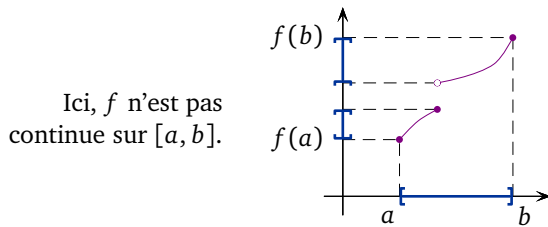
$$\exists x \in [a, b] / y = f(x).$$



✘ ATTENTION ! ✘ Avant de poursuivre, revenons un instant sur la notion d'image d'un intervalle par une fonction f .

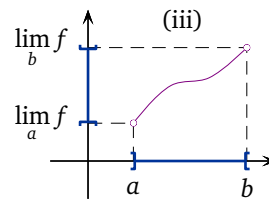
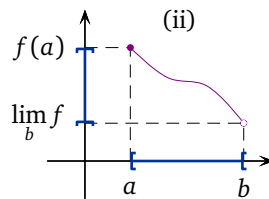
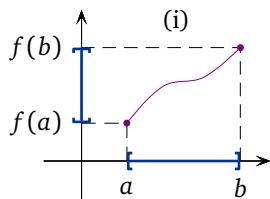
En général : $f([a, b]) \not\equiv [f(a), f(b)]$, $f(]a, b[) \not\equiv]f(a), f(b)[$, etc.

Nous allons voir que ces égalités en apparence naturelles se déduisent généralement de deux hypothèses importantes, la CONTINUITÉ et la STRICTE MONOTONIE.



Théorème (TVI strictement monotone) Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que : $a < b$.

- (i) Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction CONTINUE et STRICTEMENT CROISSANTE. Alors f est bijective de $[a, b]$ sur $[f(a), f(b)]$.
- (ii) Soit $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction CONTINUE et STRICTEMENT DÉCROISSANTE. Alors f est bijective de $[a, b[$ sur $] \lim_b f, f(a)]$.
- (iii) Soit $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction CONTINUE et STRICTEMENT CROISSANTE. Alors f est bijective de $]a, b[$ sur $] \lim_a f, \lim_b f [$.



Il existe bien sûr d'autres versions du théorème selon que f est croissante ou décroissante et définie ou non en a et b , avec éventuellement : $a = -\infty$ et $b = +\infty$.

✗ ATTENTION ! ✗ Nous allons utiliser ce théorème une infinité de fois cette année. Brûleront donc en enfer tous ceux d'entre vous qui l'utiliseront sans soin. **TROIS** choses essentielles :

- la CONTINUITÉ,
- la STRICTE MONOTONIE,
- les VALEURS/LIMITES AUX BORNES.

Exemple La fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(0) = 1$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$: $f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$ est bijective de \mathbb{R} sur \mathbb{R}_+^* .

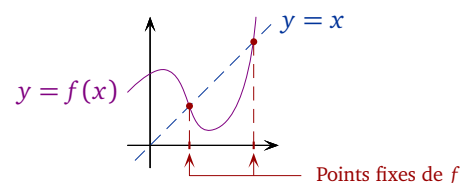
Démonstration

- **Continuité** : Comme quotient, f est continue sur \mathbb{R}^* — et en 0? Par définition du nombre dérivé : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \exp'(0) = e^0 = 1$, i.e. : $\lim_0 f = f(0)$ — continuité en 0. Ainsi f est continue sur \mathbb{R} tout entier.
- **Stricte monotonie** : Comme quotient, f est dérivable sur \mathbb{R}^* et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$: $f'(x) = \frac{e^x(x-1) + 1}{x^2}$. Le signe de f' dépend donc du signe de la fonction dérivable $x \mapsto e^x(x-1) + 1$ sur \mathbb{R} , or pour tout $x \in \mathbb{R}$: $g'(x) = xe^x$. D'après le tableau ci-contre, f est finalement strictement croissante sur \mathbb{R} .
- **Étude aux bornes** : $\lim_{-\infty} f = 0$ et $\lim_{+\infty} f = +\infty$.
- On conclut grâce au TVI strictement monotone.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$			
$g(x)$	$+$	0	$+$
$f'(x)$	$+$	$ $	$+$
$f(x)$			

Définition (Point fixe)

Soient A une partie de \mathbb{R} et $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On appelle *point fixe* de f tout élément x de A pour lequel : $f(x) = x$.



En pratique

Étudier les POINTS FIXES DE f , c'est étudier les ZÉROS DE $x \mapsto f(x) - x$.

Exemple La fonction $x \mapsto e^{-x}$ possède un et un seul point fixe sur \mathbb{R} .

Démonstration La fonction $x \xrightarrow{f} e^{-x} - x$ est continue sur \mathbb{R} , strictement décroissante sur \mathbb{R} comme somme de fonctions strictement décroissantes, et enfin : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, donc d'après le TVI strictement monotone, f s'annule une et une seule fois sur \mathbb{R} , ce qui est bien le résultat voulu.

5.3 CONTINUITÉ ET DÉRIVABILITÉ D'UNE RÉCIPROQUE

Les théorèmes de ce paragraphe seront démontrés dans les chapitres « Continuité » et « Dérivabilité ».

Théorème (Continuité et dérivabilité d'une réciproque) Soient I et J deux intervalles et $f : I \rightarrow J$ une fonction bijective de I sur J .

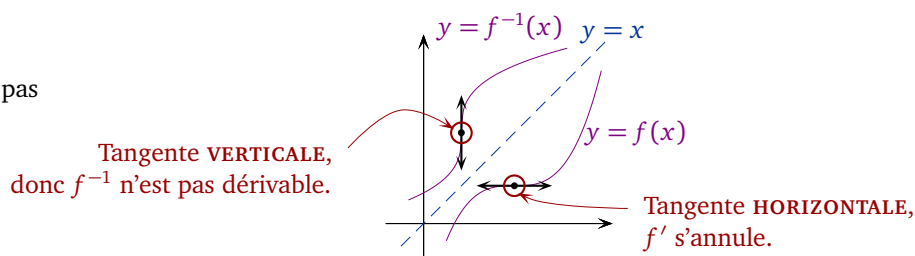
- **Continuité** : Si f est continue sur I , alors f^{-1} est continue sur J .
- **Dérivabilité** : Si f est dérivable sur I ET SI f' NE S'ANNULE PAS SUR I , alors f^{-1} est dérivable sur J et :

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}.$$

Démonstration La continuité et la dérivabilité de f^{-1} demandent du travail, mais la formule de dérivation de f^{-1} en découle aisément ensuite, il suffit de dériver la relation « $f \circ f^{-1} = \text{Id}_J$ » : $(f^{-1})' \times f' \circ f^{-1} = 1$. ■

✗ ATTENTION ! ✗

L'hypothèse selon laquelle f' ne s'annule pas est essentielle !



Exemple Faisons l'hypothèse que nous connaissons tout de l'exponentielle mais rien du logarithme. La fonction logarithme peut dans ce cas être DÉFINIE comme réciproque de l'exponentielle : $\ln = \exp^{-1}$. Or l'exponentielle est dérivable sur \mathbb{R} et sa dérivée $\exp' = \exp$ ne s'annule pas sur \mathbb{R} , donc en vertu du théorème précédent, la fonction logarithme est dérivable sur \mathbb{R}_+^* et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$: $\ln'(x) = (\exp^{-1})'(x) = \frac{1}{\exp' \circ \exp^{-1}(x)} = \frac{1}{\exp \circ \ln(x)} = \frac{1}{x}$.