Rappels et compléments sur les fonctions

Dans tout ce chapitre, les lettres $E, F\dots$ désignent des parties quelconques de $\mathbb{R}$.

1 Vocabulaire usuel

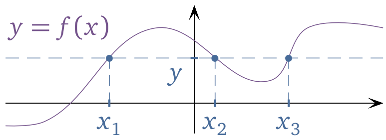
Les grands théorèmes d'analyse de cette partie seront démontrés plus tard dans l'année aux chapitres « Continuité », « Dérivabilité », « Convexité » et « Intégration sur un segment ».

1.1 Valeurs d'une fonction, fonctions surjectives/injectives

Définition (Ensemble de définition, image et antécédents) Soit $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. L'ensemble E est appelé l'*ensemble de définition de f* et tout réel $f(x)$ avec $x \in E$ est appelé une *valeur de f*.

Pour tous $x \in E$ et $y \in \mathbb{R}$, si $y = f(x)$, on dit que y est L'*image de x par f* et que x est UN *antécédent de y par f*.

Sur la figure ci-contre, y possède plusieurs antécédents par f, raison pour laquelle on parle d'UN antécédent et non de « l' » antécédent de y.

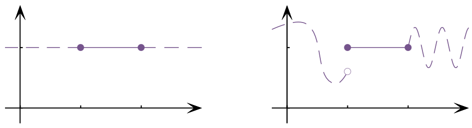


Définition (Restriction et prolongements) Soit A une partie de E.

- **Restriction :** Soit $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On appelle *restriction de f à A*, notée $f_{|A}$, la fonction définie sur A SEULEMENT par la relation $f_{|A}(x) = f(x)$ pour tout $x \in A$.
- **Prolongements :** Soit $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On appelle *prolongement de f à E* toute fonction g de E dans $\mathbb{R}$ pour laquelle $g_{|A} = f$, i.e. pour laquelle $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in A$.

Restreindre/prolonger une fonction, c'est diminuer/augmenter la taille de son ensemble de définition.

Attention ! Toute fonction possède BEAUCOUP de prolongements. On parle donc toujours d'UN prolongement et non « du » prolongement. Les figures ci-contre représentent deux prolongements de la fonction $x \longmapsto 1$ définie sur $[1, 2]$.



Définition (Image d'une partie par une fonction, image d'une fonction) Soit $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Pour toute partie A de E, on appelle *image de A par f* l'ensemble des images par f des éléments de A :

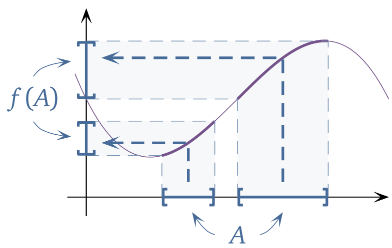
$$f(A) = \Big\{ y \in \mathbb{R} \mid \quad \exists x \in A, \quad y = f(x) \Big\} = \Big\{ f(a) \mid \quad a \in A \Big\}.$$

L'image de E tout entier est simplement appelée l'*image de f*.

Pour représenter $f(A)$, on projette sur l'axe des ordonnées la portion du graphe de f qui se situe au-dessus de A.

Exemple

- L'image de $\mathbb{R}_+$ par la fonction exponentielle est l'intervalle $[1, +\infty[$. L'image de $\mathbb{R}_-$ est $]0, 1]$.
- L'image de $\pi\mathbb{Z}$ par la fonction sinus est $\{0\}$, l'image de $[0, \pi]$ est $[0, 1]$, l'image de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ est $[-1, 1]$ et l'image de $[0, 2\pi]$ est aussi $[-1, 1]$.



Définition (Expression « à valeurs dans… ») Soit $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est *à valeurs dans F* si toute valeur de f est élément de F, i.e. si : $\quad \forall x \in E, \quad f(x) \in F, \quad$ ou encore si $f(E) \subset F$.

✖ Attention ! Dire que f est à valeurs dans F, ce n'est pas suggérer que f atteint TOUS les éléments de F, i.e. que $f(E)=F$. Par exemple, la fonction $x \longmapsto x^2+1$ est définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. Son image, pourtant, n'est pas $\mathbb{R}_+$ tout entier mais seulement $[1,+\infty[$, car quand x décrit $\mathbb{R}_+$, x^2+1 décrit exactement $[1,+\infty[$.

Définition (Fonction surjective) Soit $f: E \longrightarrow F$ une fonction — à valeurs dans F, donc. On dit que f est *surjective de E* SUR *F* ou que c'est une *surjection de E* SUR *F* si :
$$\forall y \in F, \quad \exists x \in E, \quad y = f(x), \qquad \text{ce qui revient à dire que } f(E)=F,$$
ou encore que tout élément de F possède AU MOINS un antécédent dans E par f.

La fonction f est bien sûr à valeurs dans son image $f(E)$ et tout élément de $f(E)$ possède un antécédent par f, donc...

Toute fonction est surjective de son ensemble de définition SUR SON IMAGE.

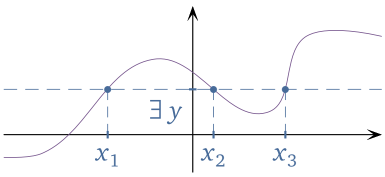
Exemple La fonction carré n'est pas surjective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, en revanche elle l'est de $\mathbb{R}$ sur son image $\mathbb{R}_+$.

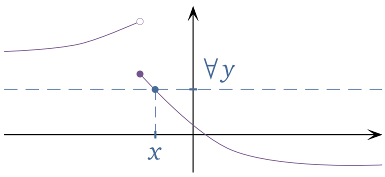
✖ Attention ! On ne dit pas que f est surjective de E « dans » F mais bien qu'elle l'est de E SUR F, car en cas de surjectivité, f permet à E de « couvrir » entièrement F. Cette idée de couverture justifie l'emploi de la préposition « sur ».

Définition (Fonction injective) Soit $f: E \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est *injective sur E* ou que c'est une *injection sur E* si :
$$\forall x,x' \in E, \qquad f(x)=f(x') \quad \Longrightarrow \quad x=x',$$
ce qui revient à dire que tout réel possède AU PLUS un antécédent dans E par f.

Plus précisément, si f est injective, les éléments de son image $f(E)$ possèdent tous exactement un antécédent par f alors que les éléments de $\mathbb{R} \setminus f(E)$ n'en possèdent aucun.

f N'est PAS injective, CERTAINS y ont plusieurs antécédents.





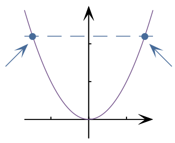
f est injective, AUCUN y n'a plusieurs antécédents, certains même n'en ont pas.

D'un point de vue calculatoire, une fonction injective est une fonction que l'on peut « simplifier » en cours de calcul — si $f(x)=f(x')$, alors $x=x'$ après « simplification ».

On comprend également bien l'injectivité en contraposant sa définition. La fonction f est injective lorsqu'elle donne des valeurs différentes à des points différents — si $x \neq x'$, alors $f(x) \neq f(x')$.

Exemple La fonction carré n'est pas injective sur $\mathbb{R}$ car par exemple $(-1)^2 = 1^2$.

Elle est en revanche injective sur $\mathbb{R}_+$ car pour tous $x,x' \in \mathbb{R}_+$, si $x^2 = x'^2$: $\quad x=x' \quad$ ou $\quad x=-x'$, $\quad$ donc $x=x'$ par positivité.



Exemple La fonction $x \longmapsto \dfrac{x+1}{x-1}$ est injective sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Démonstration Soient $x,x' \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Si $\dfrac{x+1}{x-1} = \dfrac{x'+1}{x'-1}$, alors $(x+1)(x'-1)=(x'+1)(x-1)$, donc $x=x'$ après développement et simplification.

1.2 Composition des fonctions

Définition-théorème (Composée de deux fonctions) Soient $f: E \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g: F \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions. Si f est à valeurs dans F, on appelle *composée de f suivie de g* la fonction $g \circ f$ définie pour tout $x \in E$ par $g \circ f(x) = g\big(f(x)\big)$.

La composition est *associative*. Soient $f: E \longrightarrow \mathbb{R}$, $g: F \longrightarrow \mathbb{R}$ et $h: G \longrightarrow \mathbb{R}$ trois fonctions. Si f est à valeurs dans F et g à valeurs dans G, alors : $\quad h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

Pour parler de $g\big(f(x)\big)$ pour tout $x \in E$, on doit garantir que $f(x) \in F$, autrement dit que f est à valeurs dans F.

Quand la fonction extérieure g est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier, la condition « f est à valeurs dans $\mathbb{R}$ » est sans intérêt. Par exemple, la fonction exponentielle est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier, donc pour toute fonction $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$, la fonction e^f est définie sur E sans qu'aucun problème de définition puisse jamais se poser.

Exemple La fonction $x \longmapsto \ln(x+3)$ est définie sur $]-3,+\infty[$.

Démonstration La fonction $x \longmapsto x+3$ est définie sur $\mathbb{R}$ et la fonction ln sur $\mathbb{R}_+^*$, mais quand x décrit $\mathbb{R}$, $x+3$ n'appartient pas forcément à $\mathbb{R}_+^*$. Pour quels $x \in \mathbb{R}$ est-il vrai que $x+3>0$? Réponse : $x \in]-3,+\infty[$.

Exemple La fonction $x \longmapsto \sqrt{1-x^2}$ est définie sur $[-1,1]$.

Démonstration La fonction $x \longmapsto 1-x^2$ est définie sur $\mathbb{R}$ et la fonction $\sqrt{\cdot}$ sur $\mathbb{R}_+$, mais quand x décrit $\mathbb{R}$, $1-x^2$ n'appartient pas forcément à $\mathbb{R}_+$. Pour quels $x \in \mathbb{R}$ est-il vrai que $1-x^2 \geqslant 0$? Réponse : $x \in [-1,1]$ d'après le tableau de signe ci-contre.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$1+x$		$-$	0	$+$			
$1-x$				$+$	0	$-$	
$1-x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Exemple La fonction $x \longmapsto \dfrac{1+e^{\sqrt{x}}}{x\sqrt{2-x}}$ est définie sur : $\left\{x \in \mathbb{R} \mid \ x\sqrt{2-x} \neq 0 \ \text{ et } \ 2-x \geqslant 0 \ \text{ et } \ x \geqslant 0\right\}$

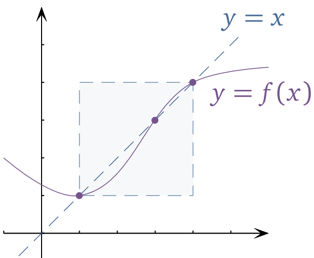
$$= \left\{x \in \mathbb{R} \mid \ x \neq 0 \ \text{ et } \ x \neq 2 \ \text{ et } \ 0 \leqslant x \leqslant 2\right\} =]0,2[.$$

✖ **Attention !** La composition n'est pas commutative, ne confondez pas les fonctions $g \circ f$ et $f \circ g$, dont l'une peut d'ailleurs être définie sans que l'autre le soit. Par exemple, si f est la fonction $x \longmapsto x^2$ et si g la fonction $x \longmapsto x^2+1$, $g \circ f$ est la fonction $x \longmapsto \left(x^2\right)^2+1 = x^4+1$ et $f \circ g$ la fonction $x \longmapsto \left(x^2+1\right)^2 = x^4 \boxed{+2x^2} +1$.

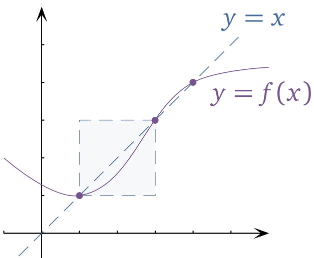
Définition (Partie stable par une fonction) Soient $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et A une partie de E. On dit que A est *stable par f* si $f(A) \subset A$, i.e. si pour tout $x \in A$: $f(x) \in A$.

Exemple

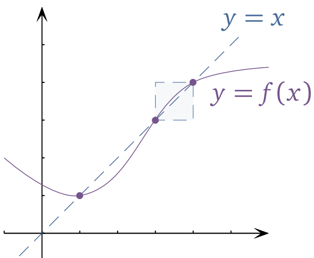
- L'intervalle $\mathbb{R}_+^*$ est stable par la fonction inverse $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ car pour tout $x>0$: $\dfrac{1}{x}>0$.
- L'intervalle $[0,1]$ est stable par $x \longmapsto \sqrt{1-x}$ car pour tout $x \in [0,1]$: $0 \leqslant 1-x \leqslant 1$, donc $0 \leqslant \sqrt{1-x} \leqslant 1$.
- Sur les figures ci-contre, les intervalles $[1,4]$, $[1,3]$, $[3,4]$ et $[4,+\infty[$ sont stables par f, mais $]-\infty,1]$ ne l'est pas.



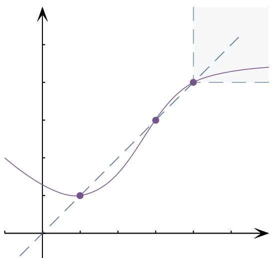
$[1,4]$ est stable par f.



$[1,3]$ est stable par f.

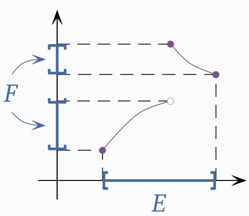


$[3,4]$ est stable par f.

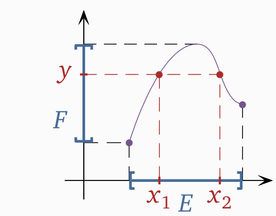

$[4,+\infty[$ est stable par f.

1.3 Fonctions bijectives, réciproques

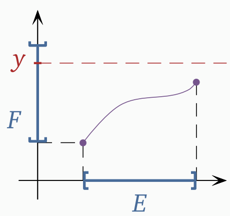
Définition (Fonction bijective) Soit $f : E \longrightarrow F$ une fonction — à valeurs dans F, donc. On dit que f est *bijective de E sur F*, ou que f est une *bijection de E sur F* si elle est à la fois injective sur E et surjective de E sur F, i.e. si tout élément de F possède UN ET UN SEUL antécédent dans E par f : $\forall y \in F, \quad \exists!\, x \in E, \quad y = f(x)$.



Fonction bijective de E sur F



Fonction NON bijective de E sur F, y a PLUSIEURS antécédents.



Fonction NON bijective de E sur F, y N'a PAS d'antécédent.

Attention !

- Une bijection n'est pas forcément strictement monotone. La figure de gauche le montre bien.
- Comme pour la surjectivité, on ne dit pas que f est bijective de E « dans » F mais bien qu'elle l'est de E SUR F.

Définition (Identité, réciproque)

- **Identité :** On appelle *identité de E*, notée Id_E, la fonction « qui ne fait rien » $\begin{cases} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x. \end{cases}$
- **Réciproque :** Soit $f : E \longrightarrow F$ une fonction à valeurs dans F. On appelle *réciproque de f sur F* toute fonction $g : F \longrightarrow E$ pour laquelle $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_F$.

En termes simples, g défait le travail effectué par f — et vice versa. Ce que l'une tricote, l'autre le détricote.

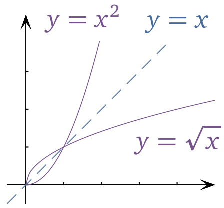
Exemple Les fonctions $\begin{cases} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{cases}$ et $\begin{cases} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{cases}$ sont réciproques l'une de l'autre car pour tout $x \geqslant 0$:
$$\left(\sqrt{x}\right)^2 = x \quad \text{et} \quad \sqrt{x^2} = |x| = x.$$

Par définition, une fonction f de E dans $\mathbb{R}$ envoie tout élément x de E sur un et un seul réel $y = f(x)$. En toute généralité, y peut être atteint plusieurs fois, mais quand f est bijective de E sur F, y ne possède qu'un antécédent, on peut donc récupérer x sans ambiguïté quand on connaît y, autrement dit « défaire f ».

Théorème (Bijectivité et réciproque) Soit $f : E \longrightarrow F$ une fonction à valeurs dans F. La fonction f est bijective de E sur F si et seulement si elle possède une réciproque sur F.

Une telle réciproque est alors unique, appelée LA réciproque de f et notée f^{-1}. Pour tous $x \in E$ et $y \in F$:
$$y = f(x) \quad \Longleftrightarrow \quad x = f^{-1}(y).$$
Cette équivalence signifie géométriquement que le graphe de f et celui de f^{-1} sont symétriques l'un de l'autre par rapport à la droite d'équation $y = x$.

La symétrie des graphes de f et f^{-1} par rapport à la droite d'équation $y = x$ se visualise aisément sur les graphes des fonctions $x \longmapsto x^2$ et $x \longmapsto \sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}_+$. Un point de coordonnées (x, y) appartient au graphe de la fonction $t \longmapsto t^2$ sur $\mathbb{R}_+$ si et seulement si $y = x^2$, si et seulement si $x = \sqrt{y}$, si et seulement si le point de coordonnées (y, x) appartient au graphe de la fonction $t \longmapsto \sqrt{t}$.



1.4 Fonctions monotones, fonctions majorées/minorées

Définition (Fonction monotone) Soit $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

- On dit que f est *croissante* si : $\forall x, y \in E, \quad x < y \implies f(x) \leqslant f(y).$
- On dit que f est *strictement croissante* si : $\forall x, y \in E, \quad x < y \implies f(x) < f(y).$
- On dit que f est *décroissante* si : $\forall x, y \in E, \quad x < y \implies f(x) \geqslant f(y).$
- On dit que f est (resp. *strictement*) *monotone* si f est (resp. strictement) croissante ou décroissante.

Une fonction croissante (resp. décroissante) est une fonction qui préserve (resp. renverse) les inégalités.

On peut bien sûr CARACTÉRISER la monotonie d'une fonction DÉRIVABLE par le signe de sa dérivée, mais il s'agit là d'un THÉORÈME et non d'une DÉFINITION. La définition ci-dessus est générale et ne requiert pas la dérivabilité.

Théorème (Injectivité et stricte monotonie) Soit $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.
Si f est strictement monotone, f est injective.

Attention ! La réciproque est fausse en général comme le montre le graphe de la fonction injective représentée un peu plus haut. Cette fonction est injective sans être monotone, mais du coup elle N'est PAS continue. Nous verrons plus tard qu'une fonction injective et continue sur un intervalle y est toujours strictement monotone.

Démonstration Dans le cas croissant, soient $x, x' \in E$ deux réels pour lesquels $f(x) = f(x')$. Si $x < x'$, alors par stricte croissance : $f(x) < f(x')$, et de même, si $x > x'$: $f(x) > f(x')$. Bref $x = x'$.

Théorème (Opérations sur les fonctions monotones) Les résultats qui suivent sont énoncés en termes de monotonie au sens large, mais ils sont valables pour des fonctions monotones au sens strict.

(i) **Addition :** Soient $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : E \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions.
Si f et g sont croissantes, $f + g$ l'est aussi. Si f et g sont décroissantes, $f + g$ l'est aussi.

(ii) **Produit :** Soient $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : E \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions.
Si f et g sont croissantes POSITIVES, fg est croissante. Si f et g sont décroissantes POSITIVES, fg est décroissante.

(iii) **Composition :** Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions.
Si f et g sont monotones de même sens de variation, $g \circ f$ est croissante.
Si f et g sont monotones de sens de variation opposés, $g \circ f$ est décroissante.

(iv) **Réciproque :** Soit $f : E \longrightarrow F$ une fonction bijective de E sur F.
Si f est monotone, elle l'est strictement et f^{-1} est strictement monotone de même sens de variation.

Attention ! La fonction identité $x \longmapsto x$ est croissante sur $\mathbb{R}$, mais quand on la multiplie par elle-même, le résultat $x \longmapsto x^2$ N'est PAS une fonction croissante sur $\mathbb{R}$. Comme quoi la positivité compte !

Démonstration

(i) Dans le cas où f et g sont croissantes, soient $x, y \in E$. Si $x < y$, alors par hypothèse $f(x) \leqslant f(y)$ et $g(x) \leqslant g(y)$, donc $f(x) + g(x) \leqslant f(y) + g(y)$ par somme.

(ii) Dans le cas où f et g sont décroissantes, soient $x, y \in E$. Si $x < y$, alors par hypothèse $0 \leqslant f(y) \leqslant f(x)$ et $0 \leqslant g(y) \leqslant g(x)$, donc $f(y)g(y) \leqslant f(x)g(x)$ par produit d'inégalités POSITIVES.

(iii) Dans le cas où f est croissante et g décroissante, soient $x, y \in E$. Si $x < y$, alors $f(x) \leqslant f(y)$ par croissance de f, puis $g\big(f(y)\big) \leqslant g\big(f(x)\big)$ par décroissance de g.

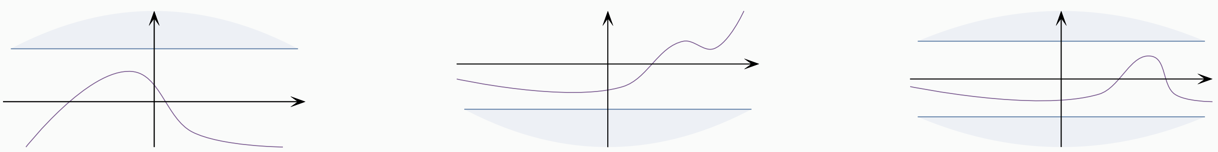
(iv) Dans le cas croissant : $\forall x, y \in E, \quad x < y \quad \Longrightarrow \quad f(x) \leqslant f(y)$, f est en fait STRICTEMENT croissante, car si $f(x) = f(y)$, alors $x = y$ par injectivité.

Montrons que f^{-1} est strictement croissante. Soient $y, y' \in F$ deux réels pour lesquels $y < y'$. Si jamais $f^{-1}(y) \geqslant f^{-1}(y')$, alors par croissance de f : $y = f\big(f^{-1}(y)\big) \geqslant f\big(f^{-1}(y')\big) = y'$ — contradiction.

Exemple Pas besoin de dériver pour expliquer que les fonctions $x \longmapsto e^x + x$ et $x \longmapsto e^{e^x}$ sont croissantes sur $\mathbb{R}$!

Définition (Fonction majorée/minorée/bornée) Soit $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

- On dit que f est *majorée* si : $\exists M \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in E, \quad f(x) \leqslant M$. Un tel réel M est appelé UN *majorant de f*. On dit aussi que f est *majorée par M* ou que M *majore* f.
- On dit que f est *minorée* si : $\exists m \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in E, \quad f(x) \geqslant m$. Un tel réel m est appelé UN *minorant de f*. On dit aussi que f est *minorée par m* ou que m *minore* f.
- On dit que f est *bornée* si f est à la fois majorée et minorée, i.e. si : $\exists K \geqslant 0, \quad \forall x \in E, \quad \big|f(x)\big| \leqslant K$.



Fonction majorée non minorée — Fonction minorée non majorée — Fonction bornée

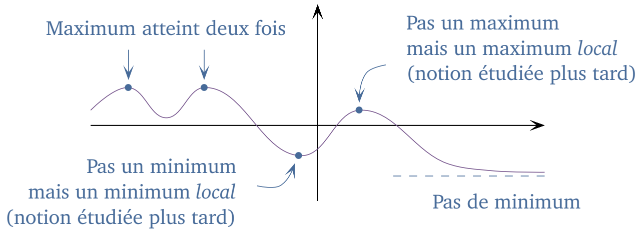
Démonstration La proposition « f est majorée et minorée » s'écrit : $\exists m, M \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in E, \quad m \leqslant f(x) \leqslant M$ et nous voulons montrer qu'elle est équivalente à la proposition : $\exists K \geqslant 0, \quad \forall x \in E, \quad \big|f(x)\big| \leqslant K$.

- Si pour un certain $K \geqslant 0$: $\forall x \in E, \quad \big|f(x)\big| \leqslant K$, alors $-K \leqslant f(x) \leqslant K$ pour tout $x \in E$, donc f est minorée par $-K$ et majorée par K.
- Pour la réciproque, supposons f minorée par m et majorée par M et posons $K = \max\big\{|m|, |M|\big\}$. Pour tout $x \in E$: $-K \leqslant -|m| \leqslant m \leqslant f(x) \leqslant M \leqslant |M| \leqslant K$, donc $\big|f(x)\big| \leqslant K$.

Définition **(Maximum/minimum d'une fonction)** Soient $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $a \in E$.

- On dit que f *admet un maximum en a* si : $\forall x \in E, \quad f(x) \leqslant f(a)$. Le réel $f(a)$ est alors appelé le *maximum de f* et noté $\max_E f$ ou $\max_{x \in E} f(x)$.
- On dit que f *admet un minimum en a* si : $\forall x \in E, \quad f(x) \geqslant f(a)$. Le réel $f(a)$ est alors appelé le *minimum de f* et noté $\min_E f$ ou $\min_{x \in E} f(x)$.

Attention ! Une fonction peut très bien ne pas avoir de maximum/minimum, et quand elle en a un, il peut être atteint plusieurs fois.



1.5 Transformations affines du graphe d'une fonction

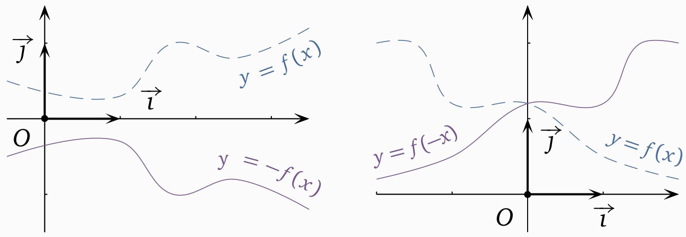
Dans le théorème qui suit, les fonctions sont représentés graphiquement dans un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

Théorème **(Transformations affines du graphe d'une fonction)** Soient $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction, $a, b \in \mathbb{R}$ et $\lambda > 0$.

- **Symétries :**

  Le graphe de la fonction $x \longmapsto -f(x)$ s'obtient à partir de celui de f par une symétrie par rapport à (Ox).

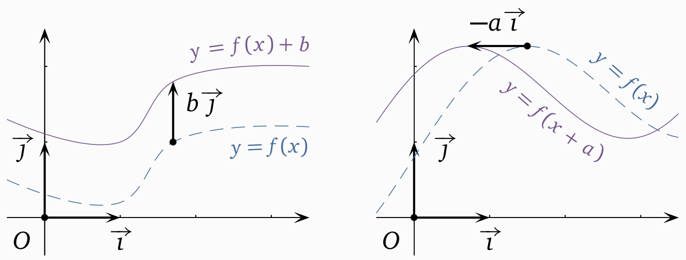
  Le graphe de la fonction $x \longmapsto f(-x)$ s'obtient à partir de celui de f par une symétrie par rapport à (Oy).



- **Translations :**

  Le graphe de la fonction $x \longmapsto f(x) + b$ s'obtient à partir de celui de f par une translation de vecteur $b\vec{\jmath}$.

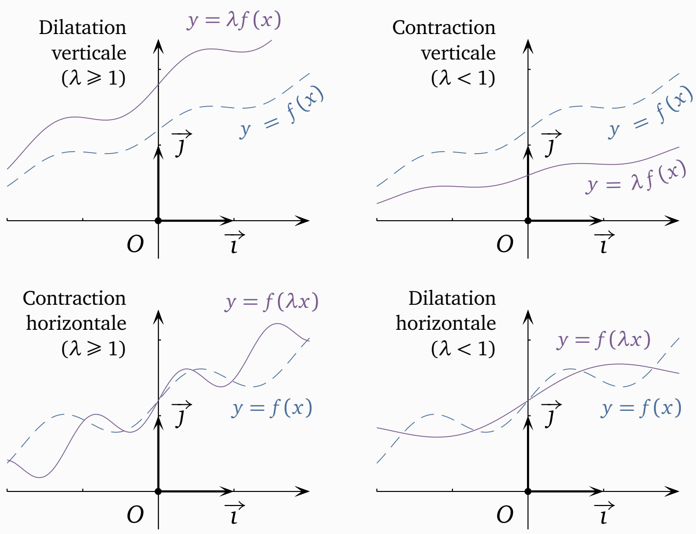
  Le graphe de la fonction $x \longmapsto f(x+a)$ s'obtient à partir de celui de f par une translation de vecteur $-a\vec{\imath}$.



- **Contractions/dilatations :**

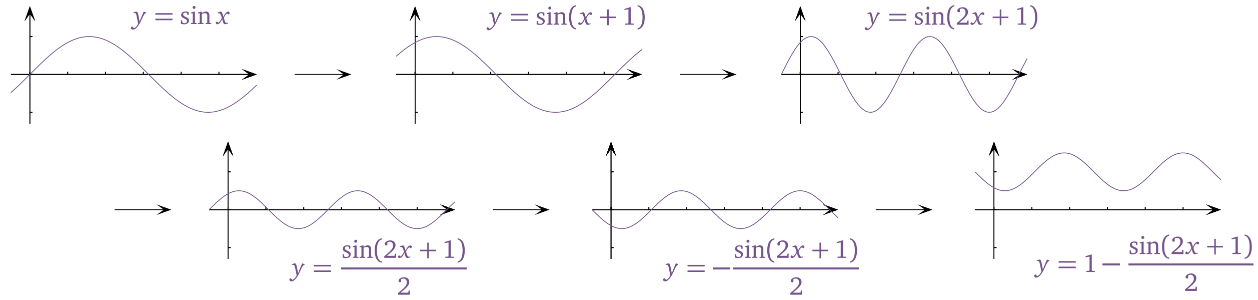
  Le graphe de la fonction $x \longmapsto \lambda f(x)$ s'obtient à partir de celui de f par une dilatation verticale de rapport λ si $\lambda \geqslant 1$ et une contraction verticale de rapport $\dfrac{1}{\lambda}$ si $\lambda < 1$.

  Le graphe de la fonction $x \longmapsto f(\lambda x)$ s'obtient à partir de celui de f par une contraction horizontale de rapport λ si $\lambda \geqslant 1$ et une dilatation horizontale de rapport $\dfrac{1}{\lambda}$ si $\lambda < 1$.

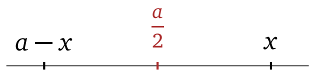


Attention ! Dans le cas de la fonction $x \longmapsto f(x+a)$, il y a un signe « moins » dans l'expression du vecteur de translation $-a\vec{\imath}$ et c'est normal. La fonction $x \longmapsto f(x+a)$ atteint la valeur $f(0)$ en $-a$, puis la valeur $f(1)$ en $-a+1$, etc. En résumé, on peut dire que $x \longmapsto f(x+a)$ est EN AVANCE de a sur $x \longmapsto f(x)$.

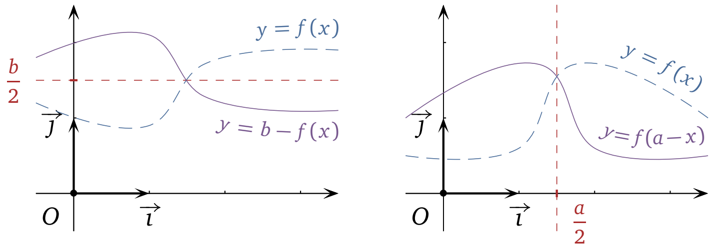
Exemple



Exemple Pour tous $a, x \in \mathbb{R}$, les réels x et $a-x$ sont symétriques l'un de l'autre par rapport à $\frac{a}{2}$ car $\frac{a}{2}$ est le milieu du segment d'extrémités x et $a-x$: $\dfrac{x+(a-x)}{2} = \dfrac{a}{2}$.



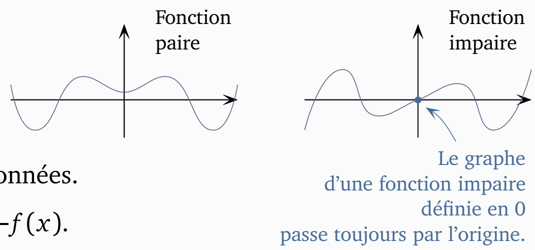
Donnons-nous à présent une fonction $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a, b \in \mathbb{R}$. Comment peut-on représenter les fonctions $x \longmapsto b - f(x)$ et $x \longmapsto f(a-x)$ quand on connaît le graphe de f ? Le graphe de la fonction $x \longmapsto b - f(x)$ s'obtient à partir de celui de f par une symétrie par rapport à la droite d'équation $y = \dfrac{b}{2}$. Le graphe de la fonction $x \longmapsto f(a-x)$ s'obtient quant à lui à partir de celui de f par une symétrie par rapport à la droite d'équation $x = \dfrac{a}{2}$.



Définition (Fonction paire/impaire) On suppose E *symétrique par rapport à* 0, i.e. que : $\forall x \in E, \quad -x \in E$.

Soit $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

- **Parité :** On dit que f est *paire* si : $\forall x \in E, \quad f(-x) = f(x)$.
  Le graphe de f est alors symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- **Imparité :** On dit que f est *impaire* si : $\forall x \in E, \quad f(-x) = -f(x)$.
  Le graphe de f est alors symétrique par rapport à l'origine.



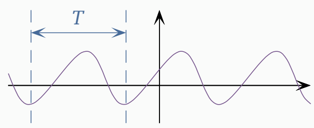
Pas besoin d'étudier une fonction $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ paire ou impaire sur E tout entier, une étude sur $E \cap \mathbb{R}_+$ suffit.

Théorème (Réciproque d'une fonction bijective impaire) Soit $f : E \longrightarrow F$ une fonction bijective de E sur F. Si E est symétrique par rapport à 0 et si f est impaire, F est symétrique par rapport à 0 et f^{-1} est impaire.

Démonstration Soit $y \in F$, disons $y = f(x)$ pour un certain $x \in E$. Comme E est symétrique par rapport à 0 : $-x \in E$, et comme f est impaire : $-y = -f(x) = f(-x) \in F$. Conclusion : F est symétrique par rapport à 0. Ensuite : $f^{-1}(-y) = f^{-1}\big(-f(x)\big) = f^{-1}\big(f(-x)\big) = -x = -f^{-1}(y)$, donc f^{-1} est impaire.

Définition (Fonction périodique) Soit $T > 0$.
On suppose E *T-périodique*, i.e. que : $\forall x \in E, \quad x + T \in E \quad$ et $\quad x - T \in E$.

Soit $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est *T-périodique* ou *périodique de période T* si : $\forall x \in E, \quad f(x+T) = f(x)$. Le réel T est alors appelé UNE *période de f*.



Pas besoin d'étudier une fonction $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ T-périodique sur E tout entier, une étude sur une période suffit, par exemple $E \cap [0, T[$.

Attention ! Une fonction périodique ne possède jamais qu'une seule période. Tout multiple entier d'une période T est encore une période : $2T, \quad 3T, \quad 4T \ldots$ Voilà pourquoi on ne parle jamais de « la » période, mais toujours d'UNE période.

Certaines fonctions possèdent en revanche une *plus petite période*, mais pas toutes. On peut montrer que toute fonction continue non constante périodique possède une plus petite période. Les fonctions sinus et cosinus admettent par exemple 2π pour plus petite période. Certaines fonctions admettent au contraire tout réel strictement positif pour période et n'en ont donc pas de plus petite. C'est le cas des fonctions constantes et de la fonction $x \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Théorème (Opérations sur les fonctions périodiques) Soit $T > 0$. On suppose E T-périodique. Soient $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : E \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions T-périodiques.

(i) Les fonctions $f + g$ et $f \times g$ sont aussi T-périodiques, ainsi que $\dfrac{f}{g}$ si g ne s'annule pas.

(ii) Pour tout $\omega > 0$, la fonction $x \longmapsto f(\omega x)$ est $\dfrac{T}{\omega}$-périodique sur l'ensemble dilaté/contracté $\dfrac{1}{\omega}E$.

Par exemple, pour $\omega = 2$, le graphe de la fonction $x \longmapsto f(2x)$ s'obtient à partir de celui de f par une contraction horizontale de facteur 2. Si f est T-périodique, rien d'étonnant du coup à ce que $x \longmapsto f(2x)$ soit $\dfrac{T}{2}$-périodique.

Démonstration

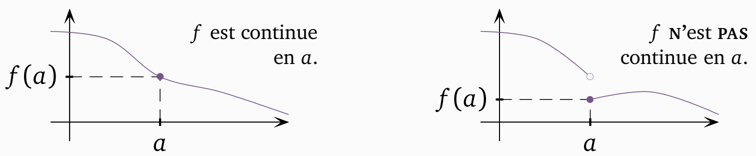
(i) Concernant $f + g$, pour tout $x \in E$: $\quad (f+g)(x+T) = f(x+T) + g(x+T) = f(x) + g(x) = (f+g)(x)$.

(ii) Notons g la fonction $x \longmapsto f(\omega x)$ définie sur $\left\{x \in \mathbb{R} \mid \quad \omega x \in E\right\} = \dfrac{1}{\omega}E$. Pour tout $x \in \dfrac{1}{\omega}E$:

$$g\left(x + \frac{T}{\omega}\right) = f\left(\omega\left(x + \frac{T}{\omega}\right)\right) = f(\omega x + T) = f(\omega x) = g(x).$$

1.6 Fonctions continues

Définition (Fonction continue) Soit $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.
Pour tout $a \in E$, on dit que f est *continue en* a si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.



On dit que f est *continue sur* E si f est continue en tout point de E. L'ensemble des fonctions continues sur E tout entier est noté $\mathscr{C}(E, \mathbb{R})$.

Théorème (Opérations sur les fonctions continues)

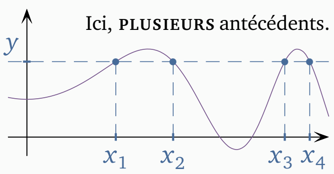
- **Combinaison linéaire, produit, quotient :** Pour toutes fonctions $f, g \in \mathscr{C}(E, \mathbb{R})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, les fonctions $\lambda f + \mu g$ et fg sont continues sur E, ainsi que $\dfrac{f}{g}$ si g ne s'annule pas.
- **Composition :** Pour toutes fonctions $f \in \mathscr{C}(E, F)$ et $g \in \mathscr{C}(F, \mathbb{R})$, $g \circ f$ est continue sur E.
- **Réciproque :** Soient I et J deux intervalles. Pour toute fonction $f \in \mathscr{C}(I, J)$ bijective de I sur J, la réciproque f^{-1} est continue sur J.

Attention ! La composition est plus délicate à manier que l'addition et le produit car elle jongle avec différents niveaux d'intervalles. Par exemple, on NE peut PAS dire que « la fonction $x \longmapsto \sqrt{x^2+1}$ est continue sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions qui le sont », car la fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$ N'est PAS continue sur $\mathbb{R}$ tout entier. Que dire alors ? Éventuellement ceci : « La fonction $x \longmapsto \sqrt{x^2+1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ par composition », mais si on veut suivre avec précision les différents niveaux d'intervalles en jeu, on dira plutôt que « la fonction $x \longmapsto x^2+1$ est continue sur $\mathbb{R}$ À VALEURS DANS $\mathbb{R}_+$ et la fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$ l'est sur $\mathbb{R}_+$, donc la fonction $x \longmapsto \sqrt{x^2+1}$ est continue sur $\mathbb{R}$ ».

Théorème (Théorème des valeurs intermédiaires ou TVI) Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction CONTINUE.

Tout réel y compris entre $f(a)$ et $f(b)$ possède AU MOINS UN antécédent par f dans $[a, b]$:

$$\exists\, x \in [a, b], \quad y = f(x).$$

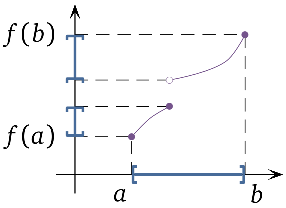


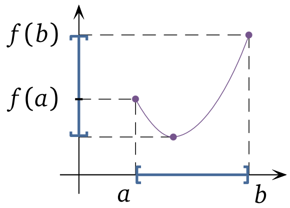
Le TVI est le théorème général par excellence d'EXISTENCE DE SOLUTIONS pour les équations de la forme $y = f(x)$ d'inconnue x où y est fixé.

✖ Attention ! En général : $f\big([a,b]\big) \cancel{=} \big[f(a),f(b)\big], \quad f\big(]a,b[\big) \cancel{=} \big]f(a),f(b)\big[, \quad \ldots$

Ces égalités fausses sont très tentantes, faites attention. Par chance, elles sont vraies dans de nombreuses situations courantes, MAIS avec deux restrictions de taille : la CONTINUITÉ et la STRICTE MONOTONIE.

f n'est pas continue
$f\big([a,b]\big)$ N'est PAS un intervalle.





f n'est pas monotone,
$f\big([a,b]\big)$ est un intervalle,
mais PAS $\big[f(a),f(b)\big]$
ni $\big[f(b),f(a)\big]$.

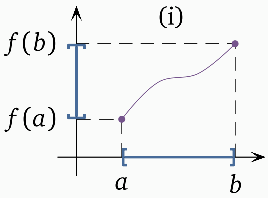
Nous utiliserons le *TVI strictement monotone* que voici une infinité de fois cette année. Brûleront donc en enfer toutes celles et tous ceux d'entre vous qui l'utiliseront sans soin.

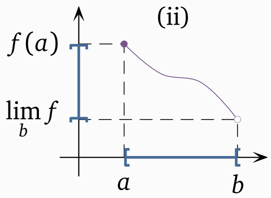
Théorème (TVI strictement monotone) Soient $a,b \in \mathbb{R}$ avec $a<b$.

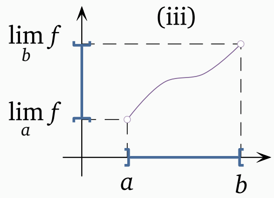
(i) Toute fonction f CONTINUE et STRICTEMENT CROISSANTE sur $[a,b]$ est bijective de $[a,b]$ sur $\big[f(a),f(b)\big]$.

(ii) Toute fonction f CONTINUE et STRICTEMENT DÉCROISSANTE sur $[a,b[$ est bijective de $[a,b[$ sur $\big]\lim\limits_b f, f(a)\big]$.

(iii) Toute fonction f CONTINUE et STRICTEMENT CROISSANTE sur $]a,b[$ est bijective de $]a,b[$ sur $\big]\lim\limits_a f, \lim\limits_b f\big[$.







D'autres versions du théorème sont disponibles selon que f est croissante ou décroissante et définie ou non en a et b, avec éventuellement $a=-\infty$ et $b=+\infty$.

Comme le TVI de base, le TVI strictement monotone nous parle de façon générale des équations de la forme $y=f(x)$ d'inconnue x où y est fixé, mais la stricte monotonie garantit l'UNICITÉ DE LA SOLUTION.

Nous démontrerons le TVI et son corollaire strictement monotone plus tard dans l'année, mais rien ne nous empêche d'en comprendre dès maintenant les tenants et les aboutissants.

f est continue sur $[a,b]$. $\longrightarrow$ $f\big([a,b]\big)$ n'a pas de trou, c'est un intervalle.

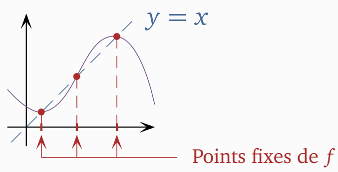
$\downarrow$

f est strictement croissante sur $[a,b]$. $\longrightarrow$ $f\big([a,b]\big) = \big[f(a),f(b)\big]$.

$\downarrow$

f est injective sur $[a,b]$. $\longrightarrow$ f est bijective de $[a,b]$ sur son IMAGE $f\big([a,b]\big)$. $\longrightarrow$ f est bijective de $[a,b]$ sur $\big[f(a),f(b)\big]$.

Définition (Point fixe) Soit $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On appelle *point fixe de f* tout élément x de E pour lequel $f(x)=x$.



En pratique : Étudier les POINTS FIXES DE f, c'est étudier les ZÉROS DE $x \longmapsto f(x)-x$, i.e. résoudre l'équation $f(x)-x=0$ d'inconnue x.

Exemple La fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{-x}$ possède un et un seul point fixe sur $\mathbb{R}$.

Démonstration La fonction $x \overset{f}{\longmapsto} \mathrm{e}^{-x} - x$ est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ par somme des fonctions $x \longmapsto \mathrm{e}^{-x}$ et $x \longmapsto -x$ qui le sont. En outre $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, donc d'après le TVI strictement monotone, f s'annule une et une seule fois sur $\mathbb{R}$.

1.7 Fonctions dérivables, dérivées successives

Définition (Fonction dérivable, tangente) Soit $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

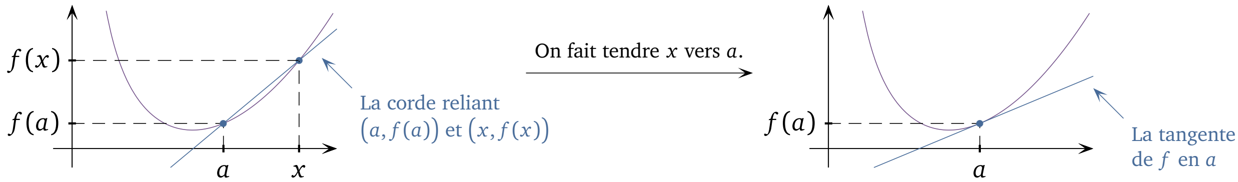
Pour tout $a \in E$, on dit que f est *dérivable en a* si la limite $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et est finie. On la note $f'(a)$ ou $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a)$ le cas échéant et on l'appelle le *nombre dérivé de f en a*. On appelle enfin *tangente de f en a* la droite d'équation :

$$y = f(a) + f'(a)(x-a).$$

On dit que f est *dérivable sur E* si f est dérivable en tout point de E. La fonction $x \longmapsto f'(x)$ est alors appelée la *dérivée de f*. L'ensemble des fonctions dérivables sur E tout entier est noté $\mathscr{D}(E,\mathbb{R})$.

Si f est dérivable en a et si x est proche de a : $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \approx f'(a)$, donc $f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a)$. Ce n'est pas très rigoureux, mais c'est convaincant. La tangente de f en a est la droite la plus proche du graphe de f au voisinage de a.

Géométriquement, $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est le coefficient directeur de la corde reliant les points de coordonnées $\big(a, f(a)\big)$ et $\big(x, f(x)\big)$. Après passage à la limite, le réel $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est donc la « pente limite » des cordes en question.

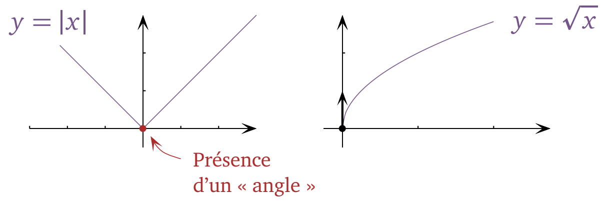


Attention ! La notation $\big(f(x)\big)'$ est rigoureusement **INTERDITE** !

La quantité $f(x)$ dépend de x, c'est une **EXPRESSION** et non pas une **FONCTION**. Pour la dériver, on a besoin de préciser par rapport à quelle variable on dérive. Notez désormais $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(f(x)\big)$ ce que vous auriez aimé noter $\big(f(x)\big)'$.

Théorème (Dérivabilité implique continuité) Soient $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $a \in E$. Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.

Attention ! La réciproque est fausse ! Les fonctions valeur absolue ou racine carrée sont continues en 0, mais n'y sont pas dérivables. Par exemple, le graphe de la fonction racine carrée possède une tangente verticale en 0.



Démonstration Si f est dérivable en a :

$$f(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \times (x-a) + f(a) \underset{x \to a}{\longrightarrow} f'(a) \times 0 + f(a) = f(a),$$ donc f est continue en a. ■

Définition (Dérivées successives) Soit $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On pose $f^{(0)} = f$.

Ensuite, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, si on a réussi au cours des étapes précédentes à définir la fonction $f^{(k-1)}$ sur E et si elle est dérivable sur E, on dit que f est *k fois dérivable sur E* et on pose $f^{(k)} = \big(f^{(k-1)}\big)'$. La fonction $f^{(k)}$, également notée $\frac{\mathrm{d}^k f}{\mathrm{d}x^k}$, est alors appelée la *dérivée $k^{\text{ème}}$ de f*.

On préfère généralement les notations f, f', f'' et f''' aux notations $f^{(0)}$, $f^{(1)}$, $f^{(2)}$ et $f^{(3)}$.

Exemple Soit $n \in \mathbb{N}$. En notant f la fonction $x \longmapsto x^n$ sur $\mathbb{R}$, f est indéfiniment dérivable et pour tous $k \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$:

$$f^{(k)}(x) = \begin{cases} n(n-1)\dots(n-k+1)\,x^{n-k} & \text{si } k \leqslant n \\ 0 & \text{si } k > n. \end{cases}$$

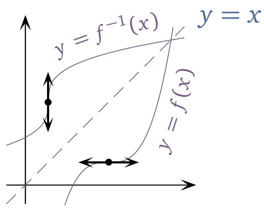
Théorème (Opérations sur les fonctions dérivables)

- **Combinaison linéaire, produit, quotient :** Pour toutes fonctions $f, g \in \mathscr{D}(E, \mathbb{R})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, les fonctions $\lambda f + \mu g$ et fg sont dérivables sur E, ainsi que $\dfrac{f}{g}$ si g ne s'annule pas. En outre :
$$(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g', \qquad (fg)' = f'g + fg' \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$
- **Composition :** Pour toutes fonctions $f \in \mathscr{D}(E, F)$ et $g \in \mathscr{D}(F, \mathbb{R})$, $g \circ f$ est dérivable sur E et :
$$(g \circ f)' = f' \times g' \circ f.$$
- **Réciproque :** Soient I et J deux intervalles. Pour toute fonction $f \in \mathscr{D}(I, J)$ bijective de I sur J, SI f' NE S'ANNULE PAS SUR I, alors f^{-1} est dérivable sur J et $\left(f^{-1}\right)' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}$.

On peut remplacer ci-dessus « dérivable » par « k fois dérivable » pour tout $k \in \mathbb{N}$ ou par « indéfiniment dérivable », mais les formules énoncées ne sont valables que pour les dérivées premières.

Démonstration La dérivabilité de f^{-1} demande du travail, mais la formule de dérivation en découle aisément. En dérivant simplement la relation $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_J$, on obtient $\left(f^{-1}\right)' \times f' \circ f^{-1} = 1$.

Attention !



- Pour la dérivabilité de f^{-1}, l'hypothèse de non-annulation de f' est CRUCIALE ! Sur la figure ci-contre, f' s'annule en a, donc f possède une tangente HORIZONTALE en a. Il en découle que f^{-1} possède une tangente VERTICALE en $f(a)$, donc N'est PAS dérivable en $f(a)$.
- On n'a pas besoin de dériver 99 fois une fonction pour savoir que la dérivée 100ème est bien définie ! Par exemple, la fonction $x \longmapsto \dfrac{e^x}{x^2+1}$ est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ simplement parce que les fonctions $x \longmapsto e^x$ et $x \longmapsto x^2 + 1$ le sont.

Exemple La fonction $x \overset{f}{\longmapsto} \ln\left(x + \sqrt{x(1-x)}\right)$ est définie et continue sur $]0, 1]$ et dérivable sur $]0, 1[$.

Démonstration

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
x		$-$	0		$+$		
$1-x$				$+$	0	$-$	
$x(1-x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

- **Ensemble de définition :** La fonction f est définie sur :
$$\left\{x \in \mathbb{R} \mid \quad x(1-x) \geqslant 0 \quad \text{et} \quad x + \sqrt{x(1-x)} > 0\right\}$$
$$= \left\{x \in \mathbb{R} \mid \quad x \in [0, 1] \quad \text{et} \quad x > 0\right\} =]0, 1].$$
- **Ensemble de continuité :** Les fonctions usuelles utilisées pour construire f sont toutes continues en tout point en lequel elles sont définies, donc f est continue sur $]0, 1]$.
- **Ensemble de dérivabilité :** La fonction racine carrée est dérivable seulement sur $\mathbb{R}_+^*$. La fontion f est donc dérivable sur $\left\{x \in \mathbb{R} \mid \quad x(1-x) > 0 \quad \text{et} \quad x + \sqrt{x(1-x)} > 0\right\} =]0, 1[$.

  Attention, nous n'avons pas prouvé que f N'est PAS dérivable en 1. Le théorème utilisé nous parle de la dérivabilité, PAS de la NON-dérivabilité. Pour étudier la dérivabilité de f en 1, il faudrait revenir à la définition en termes de taux d'accroissement, mais nous ne le ferons pas.

Théorème (Caractérisation des fonctions dérivables constantes/monotones) Soient I un INTERVALLE et $f \in \mathscr{D}(I, \mathbb{R})$. Afin d'alléger, on ne traite ci-dessous que le cas des fonctions croissantes.

- **Constance :** f est constante sur I si et seulement si f' est nulle sur I.
- **Monotonie :** f est croissante sur I si et seulement si f' est positive (ou nulle) sur I.
- **Monotonie stricte :** f est strictement croissante sur I si et seulement si f' est positive (ou nulle) sur I et n'est identiquement nulle sur aucun intervalle $[a, b]$ inclus dans I avec $a < b$.

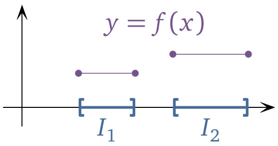
  En particulier, si f' est strictement positive sur I, f est strictement croissante sur I.

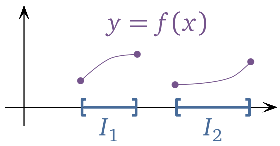
À ce stade de l'année, c'est pour leur SIGNE qu'on calcule des dérivées, donc :

FACTORISEZ TOUJOURS VOS DÉRIVÉES LE PLUS POSSIBLE !

✖ Attention ! Mine de rien, l'hypothèse selon laquelle I est un **INTERVALLE** est indispensable.

f est constante sur I_1 et sur I_2, donc $f' = 0$ sur I_1 et sur I_2, mais f n'est pas constante sur $I_1 \cup I_2$.





f est croissante sur I_1 et sur I_2, donc $f' \geqslant 0$ sur I_1 et sur I_2, mais f n'est pas croissante sur $I_1 \cup I_2$.

On a souvent besoin de démontrer des inégalités en mathématiques, et s'il n'y a pas de méthode unique pour y parvenir, il y en a quand même une qu'il faut toujours avoir en tête, l'**ÉTUDE DES VARIATIONS OU DU SIGNE D'UNE FONCTION.**

Exemple Pour tout $x \in [0,2]$: $\dfrac{x+1}{x^2+3} \in \left[\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{2}\right]$. Par ailleurs, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\dfrac{x+1}{x^2+3} \in \left[-\dfrac{1}{6}, \dfrac{1}{2}\right]$.

Démonstration

- **Tentative naïve :** Pour tout $x \in [0,2]$: $0 \leqslant x^2 \leqslant 4$ donc $3 \leqslant x^2+3 \leqslant 7$, et par ailleurs $1 \leqslant x+1 \leqslant 3$, donc par quotient : $\dfrac{1}{7} \leqslant \dfrac{x+1}{x^2+3} \leqslant \dfrac{3}{3} = 1$. Hélas, ce résultat est moins fin que celui que nous souhaitons. En encadrant **SÉPAREMENT** le numérateur et le dénominateur, nous ne les avons pas fait communiquer assez, cette tentative naïve est un échec.
- **Étude d'une fonction :** La fonction $x \stackrel{f}{\longmapsto} \dfrac{x+1}{x^2+3}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

On FACTORISE !

$$f'(x) = \frac{1 \times \left(x^2+3\right) - (x+1) \times 2x}{\left(x^2+3\right)^2} = -\frac{x^2+2x-3}{\left(x^2+3\right)^2} = -\frac{(x-1)(x+3)}{\left(x^2+3\right)^2}.$$

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↘	$-\dfrac{1}{6}$	↗	$\dfrac{1}{2}$	↘	0

On conclut grâce au tableau ci-contre, sachant que $f(0) = \dfrac{1}{3} \leqslant \dfrac{3}{7} = f(2)$.

Exemple Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$: $\dfrac{x+1}{x-1} \ln x \geqslant 2$.

Démonstration On pourrait étudier la fonction $x \longmapsto \dfrac{x+1}{x-1} \ln x$ et la comparer à 2, mais la dérivée d'un quotient occasionne souvent d'affreux calculs, donc nous allons plutôt étudier le signe de $x \stackrel{f}{\longmapsto} (x+1)\ln x - 2(x-1)$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Nous diviserons par $x-1$ à la fin pour obtenir le signe de $x \longmapsto \dfrac{x+1}{x-1} \ln x - 2$.

Pour tout $x > 0$: $f'(x) = \ln x + \dfrac{1}{x} - 1$ et $f''(x) = \dfrac{x-1}{x^2}$.

On conclut grâce au tableau ci-contre.

x	0		1		$+\infty$
$f''(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f'(x)$	‖	↘	0	↗	
$f'(x)$	‖	$+$	0	$+$	
$f(x)$	‖	↗	0	↗	
$f(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$\dfrac{f(x)}{x-1}$	‖	$+$	‖	$+$	

Exemple Pour tous $x, y \in \left]-1,1\right[$: $\dfrac{x+y}{1+xy} \in \left]-1,1\right[$.

Démonstration Comment prouver une inégalité sur deux variables ? Idée : on « gèle » l'une des variables, par exemple y, et on considère que seule x est réellement variable. On dérive alors par rapport à x.

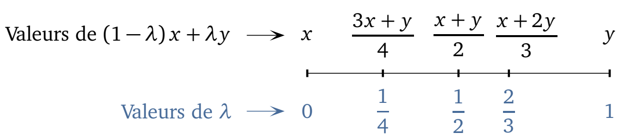
Fixons $y \in \left]-1,1\right[$. La fonction $x \stackrel{f}{\longmapsto} \dfrac{x+y}{1+xy}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{1}{y}\right\}$, donc a fortiori sur $\left]-1,1\right[$, et pour tout $x \in \left]-1,1\right[$: $f'(x) = \dfrac{1-y^2}{(1+xy)^2} > 0$.

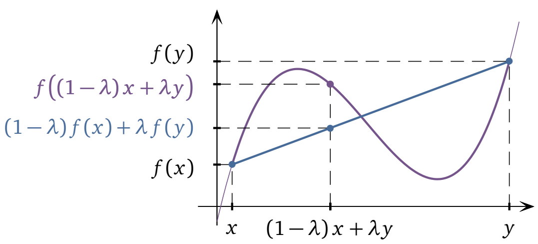
On conclut grâce au tableau ci-contre.

x	-1		1
$f'(x)$	‖	$+$	‖
$f(x)$	‖ -1	↗	1 ‖

1.8 FONCTIONS CONVEXES/CONCAVES

Soient I un intervalle I, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $x, y \in \mathbb{R}$. Quand λ décrit $[0,1]$, $\lambda(y-x)$ décrit le segment d'extrémités 0 et $y-x$, donc $(1-\lambda)x + \lambda y = x + \lambda(y-x)$ décrit le segment d'extrémités x et y.



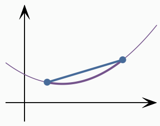


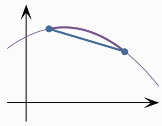
De la même manière, quand λ décrit $[0,1]$, $(1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$ décrit le segment d'extrémités $f(x)$ et $f(y)$, et dans le plan, le point de coordonnées $\big((1-\lambda)x+\lambda y\,,\,(1-\lambda)f(x)+\lambda f(y)\big)$ décrit le segment d'extrémités $\big(x, f(x)\big)$ et $\big(y, f(y)\big)$, appelé une *corde de f*.

Définition (Fonction convexe/concave) Soient I un intervalle et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

- **Fonction convexe :** On dit que f est *convexe* si son graphe est situé en-dessous de toutes ses cordes, i.e. si :
$$\forall x, y \in I, \quad \forall \lambda \in [0,1], \quad f\big((1-\lambda)x + \lambda y\big) \leqslant (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y).$$
- **Fonction concave :** On dit que f est *concave* si son graphe est situé au-dessus de toutes ses cordes, i.e. si :
$$\forall x, y \in I, \quad \forall \lambda \in [0,1], \quad f\big((1-\lambda)x + \lambda y\big) \geqslant (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y).$$
Il est équivalent de dire que $-f$ est convexe.

Fonction convexe,
perpétuel virage à gauche





Fonction concave,
perpétuel virage à droite

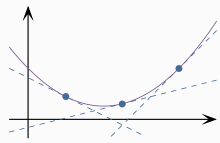
Exemple La fonction valeur absolue est convexe sur $\mathbb{R}$ car pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in [0,1]$, d'après l'inégalité triangulaire :
$$\big|(1-\lambda)x + \lambda y\big| \leqslant |1-\lambda| \times |x| + |\lambda| \times |y| = (1-\lambda)|x| + \lambda|y|.$$

Théorème (Caractérisation des fonctions convexes dérivables) Soient I un intervalle et $f \in \mathscr{D}(I,\mathbb{R})$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) f est convexe sur I.

(ii) f' est croissante sur I — ou bien $f'' \geqslant 0$ si f est deux fois dérivable sur I.

(iii) Le graphe de f est situé au-dessus de toutes ses tangentes.



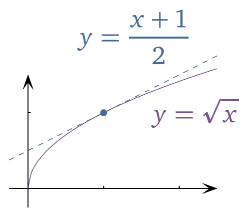
On dispose bien sûr d'une caractérisation analogue de la concavité.

Démonstration (Implication (ii) $\Longrightarrow$ (iii)) Supposons f' croissante et fixons $a \in I$. Montrons que le graphe de f est situé au-dessus de sa tangente en a, i.e. que pour tout $x \in I$: $f(x) \geqslant f'(a)(x-a) + f(a)$. Notons pour cela φ la fonction $x \longmapsto f(x) - f'(a)(x-a) - f(a)$. Cette fonction est dérivable sur I et pour tout $x \in I$: $\varphi'(x) = f'(x) - f'(a)$. Par croissance de f', φ' est négative à gauche de a et positive à droite. Ainsi, φ est décroissante à gauche de a et croissante à droite, donc positive sur I tout entier puisque $\varphi(a) = 0$.

Exemple Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction puissance $x \longmapsto x^{2n}$ est convexe sur $\mathbb{R}$ car sa dérivée seconde $x \longmapsto 2n(2n-1)x^{2(n-1)}$ est positive sur $\mathbb{R}$.

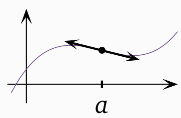
Exemple Pour tout $x > 0$: $\sqrt{x} \leqslant \dfrac{x+1}{2}$.

Démonstration La fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$ est concave sur $\mathbb{R}_+^*$ car sa dérivée $x \longmapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ y est décroissante. Son graphe est situé sous sa tangente en 1, d'équation $y = \dfrac{x+1}{2}$.



Définition-théorème (Point d'inflexion) Soient I un intervalle, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $a \in I$ un point qui n'est pas une borne de I. On dit que f *possède un point d'inflexion en a* si f est convexe au voisinage de a à gauche et concave au voisinage de a à droite — ou l'inverse.

Si f est deux fois dérivable sur I, f possède un point d'inflexion en a si et seulement si f'' s'annule en a et est positive au voisinage de a à gauche et négative au voisinage de a à droite — ou l'inverse.



Exemple Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction puissance $x \longmapsto x^{2n+1}$ possède un et un seul point d'inflexion, à savoir en 0, car sa dérivée seconde $x \longmapsto 2n(2n+1)x^{2n-1}$, s'annule en changeant de signe en 0 et ne le fait nulle part ailleurs.

Exemple Soient $a \in \mathbb{R}^*$ et $b, c \in \mathbb{R}$. La fonction $x \longmapsto ax^3 + bx^2 + cx + d$ possède un et un seul point d'inflexion, à savoir en $-\dfrac{b}{3a}$, car sa dérivée seconde $x \longmapsto 6ax + 2b$ s'annule en changeant de signe en $-\dfrac{b}{3a}$ et ne le fait nulle part ailleurs.

2 Fonctions usuelles

2.1 Fonctions affines, polynomiales et rationnelles

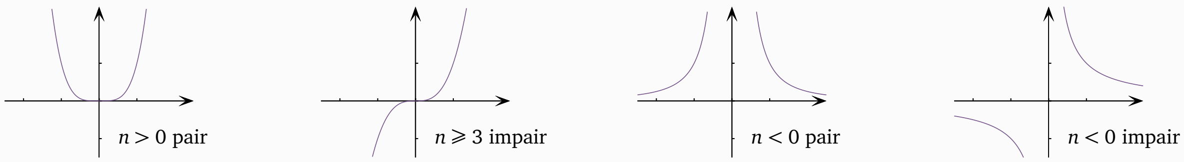
Théorème (La seule formule à connaître sur les fonctions affines) Le graphe d'une fonction affine f est une droite, donc COÏNCIDE AVEC SA TANGENTE EN TOUT POINT. Ainsi, pour tous $a, x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = f'(a)(x-a) + f(a).$$

Attention ! On vous a habitués à utiliser l'ordonnée à l'origine p d'une fonction affine $x \overset{f}{\longmapsto} mx+p$, mais la plupart du temps, on se fiche royalement de ce qui se passe à l'origine. Si vous connaissez la pente m de f et sa valeur en un point a, f a pour expression $x \longmapsto m(x-a)+f(a)$.

Exemple Quelle fonction affine f envoie 1 sur 3 et 2 sur 5 ? De pente $\dfrac{f(2)-f(1)}{2-1} = 2$, f a tout simplement pour expression $x \longmapsto 2(x-1)+3 = 2x+1$. Aucun calcul supplémentaire !

Théorème (Fonctions puissances entières) Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, la fonction $x \longmapsto x^n$ est définie et indéfiniment dérivable sur $\begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } n \geqslant 0 \\ \mathbb{R}^* & \text{si } n < 0 \end{cases}$ et sa dérivée est la fonction $x \longmapsto nx^{n-1}$.



Rappelons qu'on appelle *fonction rationnelle* tout quotient d'une fonction polynomiale par une fonction polynomiale non nulle, par exemple $x \longmapsto \dfrac{x+1}{x^2+2}$ ou $x \longmapsto \dfrac{x^3-x+7}{x}$. Les fonctions polynomiales sont bien sûr rationnelles.

Pour calculer la limite en $+\infty$ ou $-\infty$ d'une fonction polynomiale ou rationnelle, on factorise par le terme de plus haut degré au numérateur et au dénominateur, puis on simplifie. Par exemple :

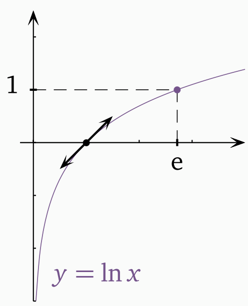
$$4x^5-6x^4+5 = \underbrace{4x^5}_{\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty} \times \underbrace{\left(1-\frac{3}{2x}+\frac{5}{4x^5}\right)}_{\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}1} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \qquad \text{et} \qquad \frac{x^2+2x+7}{3x^2-1} = \frac{x^2\left(1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{7}{x^2}\right)}{3x^2\left(1-\dfrac{1}{3x^2}\right)} = \frac{1}{3}\times\frac{1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{7}{x^2}}{1-\dfrac{1}{3x^2}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{3}.$$

Si vous êtes certains de maîtriser parfaitement ces calculs, vous avez le droit d'écrire directement sans justification que :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(4x^5-6x^4+5\right) = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+2x+7}{3x^2-1} = \frac{1}{3}.$$

2.2 Fonctions logarithme et exponentielle

Définition-théorème (Fonction logarithme)



- **Définition et régularité :** La fonction logarithme ln est définie, indéfiniment dérivable et concave sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour tout $x>0$: $\quad \ln'(x) = \dfrac{1}{x} \quad$ et $\quad \ln(1) = 0$.
- **Transformation des produits en sommes :** Pour tous $x, y > 0$: $\quad \ln(xy) = \ln x + \ln y \quad$ et $\quad \ln\dfrac{1}{x} = -\ln x$.
- **Constante de Néper :** La fonction logarithme prend la valeur 1 en un unique réel e appelé parfois la *constante de Néper* : $\quad \mathrm{e} \approx 2,71828$.
- **Croissances comparées en 0 et $+\infty$:** $\quad \displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} = 0 \quad$ et $\quad \displaystyle\lim_{x\to0} x\ln x = 0$.
- **Comportement au voisinage de 1 :** Par concavité, le graphe de la fonction logarithme est situé sous sa tangente en 1 : $\quad \ln x \leqslant x-1 \quad$ pour tout $x>0$. En outre : $\quad \displaystyle\lim_{x\to1}\frac{\ln x}{x-1} = 1$, $\quad$ i.e. $\ln x \approx x-1$ pour x proche de 1.
  Par translation d'une unité : $\quad \ln(1+x) \leqslant x \quad$ pour tout $x>-1$ et : $\quad \displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$, $\quad$ ce qui revient à dire que $\ln(1+x) \approx x$ pour x proche de 0.

La limite $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x-1}=\ln'(1)=1$ n'est rien de plus que le nombre dérivé de la fonction logarithme en 1. Elle indique que pour x proche de 1 : $\ln x\approx x-1$. Par exemple : $\ln(1,1)\approx 0,09531$ et $\ln(1,01)\approx 0,00995$.

Les limites $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to 0}x\ln x=0$ sont quant à elles le résultat d'un combat entre $\ln x$ et x. Au premier abord, ces limites sont des formes indéterminées $\dfrac{+\infty}{+\infty}$ et $0\times(+\infty)$, mais x l'emporte en réalité sur $\ln x$ dans les deux cas.

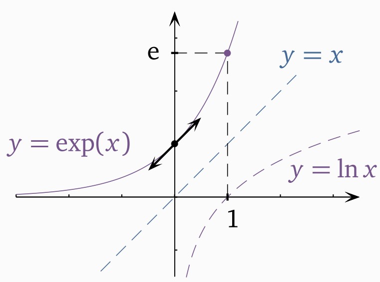
Démonstration D'après le théorème fondamental du calcul intégral, que nous étudierons aux chapitres « Techniques élémentaires de calcul intégral » et « Intégration sur un segment », toute fonction continue sur un intervalle y possède des primitives. La fonction inverse possède donc une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$, par exemple la fonction $x\longmapsto\displaystyle\int_1^x\frac{\mathrm{d}t}{t}$, et c'est justement cette primitive que nous noterons ln. La fonction inverse étant indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, ln l'est tout autant, et par ailleurs $\ln(1)=0$.

- **Variations et signe :** Pour tout $x>0$: $\ln'(x)=\dfrac{1}{x}>0$, donc ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, et comme $\ln(1)=0$, ln est strictement négative sur $]0,1[$ et strictement positive sur $]1,+\infty[$.
- **Concavité et position par rapport à la tangente en 1 :** Sa dérivée $x\longmapsto\dfrac{1}{x}$ y étant décroissante, ln est concave sur $\mathbb{R}_+^*$. Or sa tangente en 1 a pour équation $y=\ln'(1)(x-1)+\ln(1)=x-1$, donc pour tout $x>0$: $\ln x\leqslant x-1$.
- **Transformation des produits en sommes :** Fixons $y>0$ et notons φ la fonction $x\longmapsto\ln(xy)-\ln x-\ln y$ dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour tout $x>0$: $\varphi'(x)=\dfrac{y}{xy}-\dfrac{1}{x}=0$, donc φ est constante de valeur $\varphi(1)=0$, donc pour tout $x>0$: $\ln(xy)=\ln x+\ln y$. Pour $y=\dfrac{1}{x}$: $\ln x+\ln\dfrac{1}{x}=\ln(1)=0$, donc $\ln\dfrac{1}{x}=-\ln x$.
- **Croissances comparées :** Pour tout $x\geqslant 1$: $\ln\sqrt{x}\leqslant\sqrt{x}-1\leqslant\sqrt{x}$, or $\ln x=\ln\left(\sqrt{x}\right)^2=2\ln\sqrt{x}$, donc $\ln x\leqslant 2\sqrt{x}$, et enfin : $0\leqslant\dfrac{\ln x}{x}\leqslant\dfrac{2}{\sqrt{x}}$. Ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$ par encadrement.

  Ensuite, si on pose $t=\dfrac{1}{x}$: $x\ln x=-x\ln\dfrac{1}{x}=-\dfrac{\ln t}{t}$, or $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty$ et $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{\ln t}{t}=0$, donc $\lim\limits_{x\to 0}x\ln x=0$ par composition.
- **Limites en 0 et $+\infty$:** D'après le théorème de la limite monotone, que nous étudierons au chapitre « Limites d'une fonction », toute fonction croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ possède une limite en $+\infty$, éventuellement $+\infty$. La fonction ln possède donc une limite ℓ en $+\infty$. Supposons par l'absurde que ℓ est un réel. Dans la relation $\ln(xy)=\ln x+\ln y$, fixons $x>0$ et faisons tendre y vers $+\infty$. Cela donne $\ell=\ln x+\ell$, donc $\ln x=0$ pour tout $x>0$. Or cette égalité contredit la STRICTE croissance de ln, donc $\ell=+\infty$.

  Il en découle par composition que : $\ln x=-\ln\dfrac{1}{x}\underset{x\to 0^+}{\longrightarrow}-\infty$.
- **Définition de la constante de Néper :** La fonction ln est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ de limites $-\infty$ et $+\infty$ aux bornes. Elle est donc bijective de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$ d'après le TVI strictement monotone. Le réel 1, en particulier, possède donc un et un seul antécédent par ln, noté e. ■

Définition-théorème (Fonction exponentielle)



- **Définition :** La fonction logarithme est bijective de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$. On appelle *fonction exponentielle* et on note exp sa réciproque, bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$. En particulier : $\exp(1)=\mathrm{e}$ et les graphes des fonctions exp et ln sont symétriques l'un de l'autre par rapport à la droite d'équation $y=x$.

  Pour tout $x\in\mathbb{R}$: $\ln\big(\exp(x)\big)=x$ et pour tout $x>0$: $\exp(\ln x)=x$.
- **Régularité :** La fonction exponentielle exp est indéfiniment dérivable et convexe sur $\mathbb{R}$ et $\exp'=\exp$.
- **Transformation des sommes en produits :**
  Pour tous $x,y\in\mathbb{R}$: $\exp(x+y)=\exp(x)\exp(y)$ et $\exp(-x)=\dfrac{1}{\exp(x)}$.
- **Croissances comparées en $+\infty$:** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\exp(x)}=0$.
- **Comportement au voisinage de 0 :** Par convexité, le graphe de la fonction exponentielle est situé au-dessus de sa tangente en 0 : $\exp(x)\geqslant x+1$ pour tout $x\in\mathbb{R}$. En outre : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\exp(x)-1}{x}=1$, ce qui revient à dire que $\exp(x)-1\approx x$ pour x proche de 0.

Je me suis forcé à noter $\exp(x)$ plutôt que e^x l'exponentielle de x, mais c'est momentané. Dans cinq minutes, quand nous aurons compris en quoi la notation « puissance » cache une grosse subtilité, nous pourrons la noter e^x. Patience !

La limite $\lim_{x\to 0}\dfrac{\exp(x)-1}{x}=\exp'(0)=1$ n'est rien de plus que le nombre dérivé de la fonction exponentielle en 0. Elle indique que pour x proche de 0 : $\exp(x)-1\approx x$. Par exemple : $\exp(0,1)\approx 1,10517$ et $\exp(0,01)\approx 1,01005$.

Démonstration Nous avons déjà tiré du TVI strictement monotone la bijectivité de ln de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$. Cela justifie bien sûr la définition de l'exponentielle, mais aussi sa régularité. En effet, ln est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et SA DÉRIVÉE $x\longmapsto\dfrac{1}{x}$ NE S'Y ANNULE PAS, donc d'après le théorème de dérivabilité d'une réciproque, $\ln^{-1}=\exp$ est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et : $\exp'=\left(\ln^{-1}\right)'=\dfrac{1}{\ln'\circ\ln^{-1}}=\ln^{-1}=\exp$. En particulier, $\exp'$ est croissante sur $\mathbb{R}$, donc exp y est convexe, donc son graphe est situé au-dessus de sa tangente en 0 : $\exp(x)\geqslant\exp'(0)\,x+\exp(0)=x+1$ pour tout $x\in\mathbb{R}$. Nous laisserons de côté les autres vérifications par souci de légèreté.

2.3 FONCTIONS PUISSANCES

Nous n'avons défini jusqu'ici que les puissances x^n pour n ENTIER. La notation classique e^x n'est-elle cependant pas celle d'une puissance, me direz-vous ? Oui et non, car le réel e^x n'est pas « e multiplié x fois par lui-même ». Que signifierait « e multiplié $\sqrt{2}$ fois par lui-même » ? ! Voilà pourquoi, au paragraphe précédent, je me suis momentanément interdit la notation e^x. La bonne nouvelle, c'est que nous pouvons maintenant généraliser proprement notre définition des puissances.

Définition (Puissances quelconques et racines $n^{\text{èmes}}$ d'un réel STRICTEMENT POSITIF) Soit $x>0$.

- **Puissances quelconques :** Pour tout $y\in\mathbb{R}$, on appelle *x puissance y* le réel $x^y=\exp(y\ln x)$.
- **Racines $n^{\text{èmes}}$:** Pour tout ENTIER $n\in\mathbb{N}^*$, on appelle *racine $n^{\text{ème}}$ de x* le réel $\sqrt[n]{x}=x^{\frac{1}{n}}$.

Pour $x=e$, cette définition signifie que $e^y=\exp(y\ln e)=\exp(y)$ pour tout $y\in\mathbb{R}$. Ouf ! Nous avons maintenant le droit de noter l'exponentielle comme une puissance !

En résumé, la notation puissance n'est qu'une NOTATION, x^y N'est PAS le produit y fois de x — sauf si y est un entier comme nous allons le voir. Quand vous manipulez une puissance quelconque, ayez toujours en tête qu'un logarithme et une exponentielle sont cachés derrière.

Attention ! La définition $\boxed{x^y=e^{y\ln x}}$ n'est valable que pour x STRICTEMENT POSITIF à cause du logarithme.

Exemple Pour tout $x>1$: $x^{\frac{\ln\ln x}{\ln x}}=e^{\frac{\ln\ln x}{\ln x}\times\ln x}=e^{\ln\ln x}=\ln x$.

Théorème (Propriétés algébriques des puissances)

(i) Notre nouvelle définition des puissances généralise bien l'ancienne.

(ii) Pour tous $x,x'>0$ et $y,y'\in\mathbb{R}$:
$$\ln\left(x^y\right)=y\ln x,\qquad x^{y+y'}=x^yx^{y'},\qquad x^{yy'}=\left(x^y\right)^{y'},\qquad (xx')^y=x^yx'^y\qquad\text{et}\qquad x^{-y}=\frac{1}{x^y}=\left(\frac{1}{x}\right)^y.$$

Démonstration

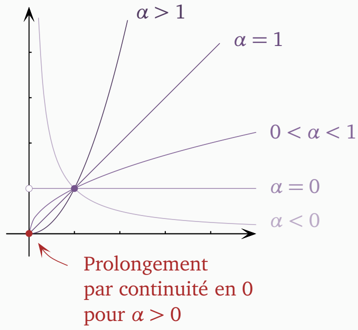
(i) Pour tous $x>0$ et $n\in\mathbb{N}$: $e^{n\ln x}=e^{\overbrace{\ln x+\ldots+\ln x}^{n\text{ termes}}}=\overbrace{e^{\ln x}\times\ldots\times e^{\ln x}}^{n\text{ termes}}=\overbrace{x\times\ldots\times x}^{n\text{ termes}}$, donc la notation traditionnelle x^n et notre nouvelle notation x^n coïncident. Même chose dans le cas d'un entier négatif.

(ii) $\ln\left(x^y\right)=\ln\left(e^{y\ln x}\right)=y\ln x$, $\qquad x^{y+y'}=e^{(y+y')\ln x}=e^{y\ln x+y'\ln x}=e^{y\ln x}e^{y'\ln x}=x^yx^{y'}$,

$x^{yy'}=e^{yy'\ln x}=e^{y'\ln(x^y)}=\left(x^y\right)^{y'}$, $\qquad (xx')^y=e^{y\ln(xx')}=e^{y\ln x+y\ln x'}=e^{y\ln x}e^{y\ln x'}=x^yx'^y$,

$x^{-y}=e^{-y\ln x}=\dfrac{1}{e^{y\ln x}}=\dfrac{1}{x^y}$ et $x^{-y}=e^{-y\ln x}=e^{y\ln\left(\frac{1}{x}\right)}=\left(\dfrac{1}{x}\right)^y$.

Théorème (Étude des fonctions puissances) Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.



(i) **Régularité :** La fonction $x \longmapsto x^\alpha$ est définie et indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ de dérivée $x \longmapsto \alpha\, x^{\alpha-1}$.

Elle est concave si $\alpha \in [0,1]$ et convexe sinon.

(ii) **Positions relatives :** $\begin{cases} \text{Pour tout } x \in]0,1] : & \alpha \leqslant \beta \implies x^\beta \leqslant x^\alpha. \\ \text{Pour tout } x \in [1,+\infty[: & \alpha \leqslant \beta \implies x^\alpha \leqslant x^\beta. \end{cases}$

(iii) **Prolongement par continuité en 0 pour $\alpha > 0$:** Si $\alpha > 0$, on prolonge la fonction $x \longmapsto x^\alpha$ en 0 en posant $0^\alpha = 0$. La fonction prolongée ainsi obtenue est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$ tout entier, y compris en 0. On dit qu'on a *prolongé par continuité* la fonction $x \longmapsto x^\alpha$ en 0.

Ainsi, pour $x \in]0,1]$: $\ldots \leqslant x^2 \leqslant x \leqslant 1 \leqslant \dfrac{1}{x} \leqslant \dfrac{1}{x^2} \leqslant \dfrac{1}{x^3} \leqslant \ldots$ et pour $x \geqslant 1$: $\ldots \leqslant \dfrac{1}{x^2} \leqslant \dfrac{1}{x} \leqslant 1 \leqslant x \leqslant x^2 \leqslant x^3 \leqslant \ldots$

✖ **Attention !** Pour $\alpha \in]0,1[$, la fonction $x \longmapsto x^\alpha$ est continue en 0 après prolongement, mais elle possède en 0 une tangente verticale, signe qu'elle N'est PAS dérivable en 0. C'est typiquement ce qui arrive à la fonction racine carrée.

Démonstration

(i) Pour tout $x > 0$: $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^\alpha\right) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\mathrm{e}^{\alpha \ln x}\right) = \dfrac{\alpha}{x} \times \mathrm{e}^{\alpha \ln x} = \alpha\, x^{-1} x^\alpha = \alpha\, x^{\alpha-1}$.

A fortiori : $\dfrac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}\left(x^\alpha\right) = \alpha(\alpha-1)\, x^{\alpha-2}$, donc la dérivée seconde de $x \longmapsto x^\alpha$ est négative sur $\mathbb{R}_+^*$ si $\alpha \in [0,1]$ et positive si $\alpha \in]-\infty,0] \cup [1,+\infty[$.

(ii) Soient $x > 0$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ avec $\alpha \leqslant \beta$.

— Si $x \in]0,1]$: $\ln x \leqslant 0$, donc $\beta \ln x \leqslant \alpha \ln x$, donc $x^\beta = \mathrm{e}^{\beta \ln x} \leqslant \mathrm{e}^{\alpha \ln x} = x^\alpha$.

— Si $x \in [1,+\infty[$: $\ln x \geqslant 0$, donc $\alpha \ln x \leqslant \beta \ln x$, donc $x^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha \ln x} \leqslant \mathrm{e}^{\beta \ln x} = x^\beta$.

(iii) Pour $\alpha > 0$: $x^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha \ln x} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$ — d'où la continuité en 0 de $x \longmapsto x^\alpha$ si on pose $0^\alpha = 0$. ■

Théorème (Croissances comparées des fonctions logarithme, exponentielle et puissances) Le principe général, c'est que l'exponentielle est plus puissante que les puissances, qui sont elles-mêmes plus puissantes que le logarithme.

Précisément, pour tous $\alpha > 0$ et $\beta \in \mathbb{R}$: $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{x^\beta}{\mathrm{e}^x} = 0$, $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha} = 0$ et $\displaystyle\lim_{x \to 0} x^\alpha\, |\ln x|^\beta = 0$.

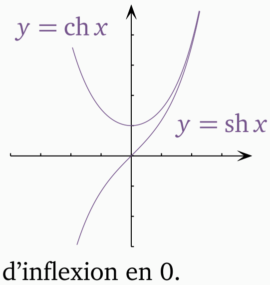
Démonstration Montrons seulement la deuxième limite. Le résultat est clair si $\beta \leqslant 0$, car sachant que $\alpha > 0$: $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} (\ln x)^\beta \in \{0,1\}$ et $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} x^\alpha = +\infty$. Supposons désormais $\beta > 0$. Le calcul qui suit a l'air affreux, mais on essaie juste de se ramener à la limite $\displaystyle\lim_{u \to +\infty} \frac{\ln u}{u} = 0$. Pour tout $x > 0$:

$$\frac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha} = \left(\frac{\ln x}{x^{\frac{\alpha}{\beta}}}\right)^\beta = \left(\frac{\dfrac{\beta}{\alpha} \times \ln x^{\frac{\alpha}{\beta}}}{x^{\frac{\alpha}{\beta}}}\right)^\beta = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^\beta \left(\frac{\ln u}{u}\right)^\beta = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^\beta v^\beta \qquad \text{si on pose } u = x^{\frac{\alpha}{\beta}} \text{ et } v = \frac{\ln u}{u}.$$

Or ici $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} x^{\frac{\alpha}{\beta}} = +\infty$ car $\dfrac{\alpha}{\beta} > 0$. Également $\displaystyle\lim_{u \to +\infty} \frac{\ln u}{u} = 0$ et $\displaystyle\lim_{v \to 0} v^\beta = 0$ car $\beta > 0$, donc $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha} = 0$ par composition. ■

2.4 Fonctions hyperboliques ch, sh et th

Définition-théorème (Fonctions cosinus hyperbolique et sinus hyperbolique)

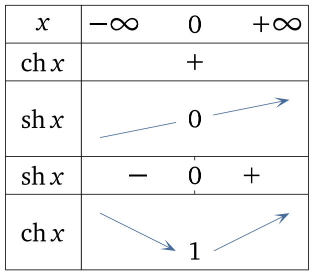


Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on appelle *cosinus hyperbolique de* x le réel : $\mathrm{ch}\, x = \dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$ et *sinus hyperbolique de* x le réel : $\mathrm{sh}\, x = \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1$.

Les fonctions ch et sh, respectivement paire et impaire, sont définies et indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$ avec : $\mathrm{ch}' = \mathrm{sh}$ et $\mathrm{sh}' = \mathrm{ch}$.

La fonction ch est convexe. La fonction sh est concave sur $\mathbb{R}_-$ et convexe sur $\mathbb{R}_+$ avec un point d'inflexion en 0.



Démonstration Les variations de ch et sh sont étudiées ci-contre et pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = (\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x)(\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x) = e^x e^{-x} = 1$. ■

Exemple Les solutions de l'équation $\operatorname{ch} x = 2$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ sont :
$$\ln\left(2+\sqrt{3}\right) \quad \text{et} \quad \ln\left(2-\sqrt{3}\right).$$

Démonstration Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\operatorname{ch} x = 2 \iff e^x - 4 + e^{-x} = 0 \overset{\times e^x}{\iff} \left(e^x\right)^2 - 4e^x + 1 = 0$$
$$\underset{\substack{\text{Second} \\ \text{degré en } e^x}}{\iff} e^x = 2+\sqrt{3} \quad \text{ou} \quad e^x = 2-\sqrt{3} \quad \underset{2-\sqrt{3}>0}{\overset{2+\sqrt{3}>0}{\iff}} \quad x = \ln\left(2+\sqrt{3}\right) \quad \text{ou} \quad x = \ln\left(2-\sqrt{3}\right).$$

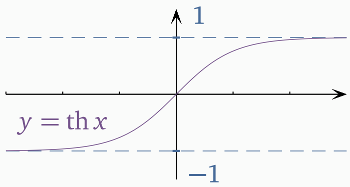
Définition-théorème (Fonction tangente hyperbolique)

La fonction *tangente hyperbolique* est définie sur $\mathbb{R}$ par la relation $\operatorname{th} = \dfrac{\operatorname{sh}}{\operatorname{ch}}$.

Elle est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et impaire et : $\operatorname{th}' = 1 - \operatorname{th}^2 = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2}$.

Elle est convexe sur $\mathbb{R}_-$ et concave sur $\mathbb{R}_+$ avec un point d'inflexion en 0.

Elle possède enfin une asymptote d'équation $y = 1$ au voisinage de $+\infty$ (resp. $y = -1$ au voisinage de $-\infty$).



Démonstration La fonction th est indéfiniment dérivable par quotient et :
$$\operatorname{th}' = \frac{\operatorname{sh}' \times \operatorname{ch} - \operatorname{ch}' \times \operatorname{sh}}{\operatorname{ch}^2} = \frac{\operatorname{ch}^2 - \operatorname{sh}^2}{\operatorname{ch}^2}, \qquad \text{quantité qui vaut à la fois } \frac{1}{\operatorname{ch}^2} \text{ et } 1 - \frac{\operatorname{sh}^2}{\operatorname{ch}^2} = 1 - \operatorname{th}^2.$$
La stricte croissance en découle. En outre, par composition, la dérivée $\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2}$ est croissante sur $\mathbb{R}_-$ et décroissante sur $\mathbb{R}_+$, donc th est convexe sur $\mathbb{R}_-$ et concave sur $\mathbb{R}_+$.

Pour la limite en $+\infty$: $\operatorname{th} x = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \dfrac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 1.$ ■

2.5 Tableau récapitulatif des dérivées usuelles

Fonction	Ensemble de définition	Ensemble de dérivabilité	Dérivée
e^x	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	e^x
$\ln x$	$\mathbb{R}_+^*$	$\mathbb{R}_+^*$	$\dfrac{1}{x}$
$x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$	$\mathbb{R}$ si $\alpha \in \mathbb{N}$ $\mathbb{R}^*$ si $\alpha \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ $\mathbb{R}_+^*$ si $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$	$\mathbb{R}$ si $\alpha \in \mathbb{N}$ $\mathbb{R}^*$ si $\alpha \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ $\mathbb{R}_+^*$ si $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$	$\alpha x^{\alpha-1}$
$\operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\operatorname{ch} x$
$\operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\operatorname{sh} x$
$\operatorname{th} x = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$1 - \operatorname{th}^2 x = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$

Par convention : $0^\alpha = 0$ pour $\alpha > 0$.

2.6 Deux ou trois grands principes de calcul des limites

À ce stade de l'année, un calcul de limite se mène toujours en deux temps :

— Dans un premier temps, on analyse l'expression étudiée en comparant de tête la taille des termes qui la composent. Qui est grand ? Qui est petit ? Qui disparaît au profit de qui ? Cette étape de défrichement doit être effectuée rapidement sur un coin de feuille sans trop de rigueur formelle. Fondée par l'intuition, elle prépare le terrain du calcul rigoureux.

— Dans un deuxième temps, on traduit l'analyse précédente en calcul de limite rigoureux. Les techniques de bases consistent à factoriser par le terme dominant et à exploiter les croissances comparées usuelles. En 0 ou 1, les croissances comparées usuelles sont les limites de taux d'accroissement du genre :
$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1,\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}=1,\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sh} x}{x}=1,\qquad \lim_{x\to 1}\frac{x^\alpha-1}{x-1}=\alpha,\qquad \dots$$
dont on rappelle qu'elle signifient intuitivement que pour x proche de 0 : $\ln(1+x)\approx x$, $\mathrm{e}^x-1\approx x$, $\operatorname{sh} x\approx x$ et pour x proche de 1 : $x^\alpha-1\approx\alpha(x-1)$.

Exemple $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x+\sqrt{x}}=+\infty$.

Démonstration Au brouillon, pour x très grand : $x+\sqrt{x}\approx x$, donc $\dfrac{x^2}{x+\sqrt{x}}\approx\dfrac{x^2}{x}=x\longrightarrow+\infty$. Rapide et efficace, mais pas très rigoureux. Sur une copie, on écrira ceci :
$$\frac{x^2}{x+\sqrt{x}}=\frac{x^2}{x\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)}=\frac{x}{1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}}\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty\qquad\text{et rien de plus.}$$

Exemple $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(\mathrm{e}^x+1)}{\mathrm{e}^{x+\ln x}+1}=0$.

Démonstration Au brouillon, pour x très grand : $\ln(\mathrm{e}^x+1)\approx\ln\mathrm{e}^x=x$ et $\mathrm{e}^{x+\ln x}+1=x\,\mathrm{e}^x+1\approx x\,\mathrm{e}^x$, donc : $\dfrac{\ln(\mathrm{e}^x+1)}{\mathrm{e}^{x+\ln x}+1}\approx\dfrac{x}{x\,\mathrm{e}^x}=\mathrm{e}^{-x}\longrightarrow 0$. Sur une copie :
$$\frac{\ln(\mathrm{e}^x+1)}{\mathrm{e}^{x+\ln x}+1}=\frac{\ln\mathrm{e}^x+\ln(1+\mathrm{e}^{-x})}{x\,\mathrm{e}^x\left(1+\dfrac{1}{x\,\mathrm{e}^x}\right)}=\frac{1+\dfrac{\ln(1+\mathrm{e}^{-x})}{x}}{\mathrm{e}^x\left(1+\dfrac{1}{x\,\mathrm{e}^x}\right)}\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0.$$

✖ **Attention !** Les raisonnements au brouillon de l'exemple précédent cachent une grosse difficulté car on y pratique la composition, par le logarithme d'une part et l'exponentielle d'autre part.

— Il est clair que $\mathrm{e}^x+1\approx\mathrm{e}^x$ quand x est très grand, mais comment le logarithme transforme-t-il les grandes quantités ? Le logarithme tasse les infinis. Sur l'intervalle $[\mathrm{e}^x,\mathrm{e}^x+1]$ de longueur 1, la fonction logarithme est presque constante, donc $\ln(\mathrm{e}^x+1)\approx\ln\mathrm{e}^x=x$.

— Il est tout aussi clair que $x+\ln x\approx x$ quand x est très grand, mais comment l'exponentielle transforme-t-elle les grandes quantités ? L'exponentielle écarte les infinis. Par exemple : $x+\ln 2\approx x$, mais $\mathrm{e}^{x+\ln 2}=2\,\mathrm{e}^x\cancel{\approx}\mathrm{e}^x$. L'intervalle $[x,x+\ln 2]$ a beau être de longueur $\ln 2$ assez petite, la fonction exponentielle y est terriblement croissante. La situation est encore pire sur $[x,x+\ln x]$, dont la longueur tend vers $+\infty$ avec x : $\mathrm{e}^{x+\ln x}=x\,\mathrm{e}^x\cancel{\approx}\mathrm{e}^x$.

En résumé, le symbole peu rigoureux $\approx$ demande un peu de doigté, mais il ne nous servira de toute façon qu'à défricher le terrain. Il ne peut jamais tenir lieu de preuve.

Exemple $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x}\right)=+\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}\right)=1$.

Démonstration Les deux quantités se ressemblent, mais elles sont très différentes en réalité.

- **Première limite :** Pour x très grand : $\sqrt{x^2+x}\approx\sqrt{x^2}=x$, donc $\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x}\approx x\longrightarrow+\infty$.

  Sur une copie : $\displaystyle\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x}=x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0.$

- **Deuxième limite :** Pour x très grand : $\sqrt{x^2\pm x}\approx\sqrt{x^2}=x$, donc GROS PROBLÈME ! Les quantités $\sqrt{x^2+x}$ et $\sqrt{x^2-x}$ sont chacune très grandes et se détruisent mutuellement quand on les soustrait. Que reste-t-il après soustraction ? Par exemple, quand on soustrait deux réels proches de 1000, que reste-t-il ? Ça dépend de ce qu'on soustrait : $1050-1000=50$, $1001-1000=1$ et $1000{,}001-1000=0{,}001$, et pourtant 1050, 1001 et 1000,001 sont tous proches de 1000.

  La *technique de la quantité conjuguée*, qui repose sur l'identité remarquable $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$, nous permet de mesurer la taille du reste après soustraction :

$$\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}=\frac{(x^2+x)-(x^2-x)}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}=\frac{2x}{x\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}+\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}\right)}=\frac{2}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}+\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}}\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}\frac{2}{1+1}=1.$$

Exemple $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x+\sin x} = \dfrac{1}{2}$.

Démonstration Au brouillon, pour x proche de 0 : $\ln(1+x)\approx x$ et $\sin x\approx x$, donc $x+\sin x\approx 2x$, donc $\dfrac{\ln(1+x)}{x+\sin x}\approx \dfrac{x}{2x}=\dfrac{1}{2}$. Sur une copie : $\dfrac{\ln(1+x)}{x+\sin x} = \dfrac{\dfrac{\ln(1+x)}{x}}{1+\dfrac{\sin x}{x}} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \dfrac{1}{1+1}=\dfrac{1}{2}$.

✖ **Attention !** Et si on avait voulu calculer $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x-\sin x}$? C'est plus compliqué car au dénominateur, x et $\sin x$ ont à peu près la même taille. Que reste-t-il après soustraction ? Nous ne le savons pas à ce stade de l'année et nous ne pouvons pas encore calculer cette limite.

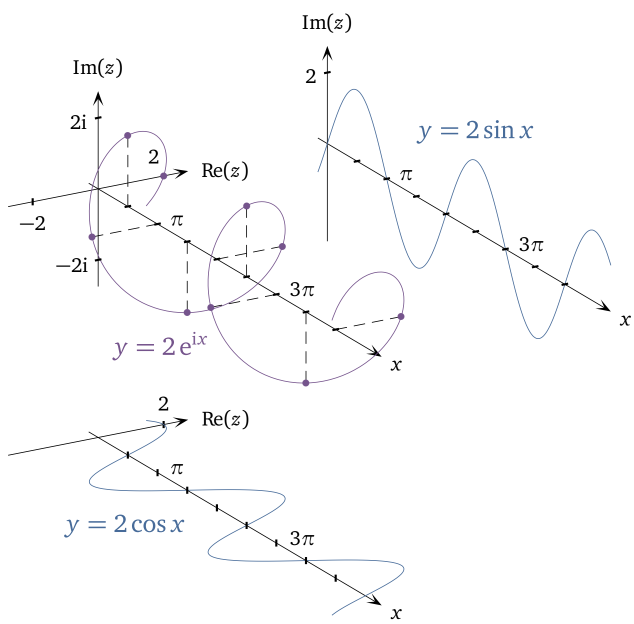
Exemple $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}$.

Démonstration Il est tentant d'analyser la situation ainsi : $1^{+\infty}=1$, mais CETTE ÉGALITÉ EST TRÈS FAUSSE. Pour faire communiquer correctement $1+x$ et son exposant $\dfrac{1}{x}$, plaçons-les AU MÊME NIVEAU, i.e. au sommet d'une exponentielle. Aussitôt : $(1+x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}^{\frac{\ln(1+x)}{x}} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \mathrm{e}^1=\mathrm{e}$.

3 Extension aux fonctions complexes

On vous a défini la notion de limite plus ou moins informellement au lycée en comptant surtout sur votre intuition. La proposition « f admet $\ell\in\mathbb{R}$ pour limite en $+\infty$ » signifie par exemple que tout intervalle de la forme $]\ell-\varepsilon,\ell+\varepsilon[$ avec $\varepsilon>0$ contient tous les réels $f(x)$ pour x assez grand. La proposition « f admet $+\infty$ pour limite en $a\in\mathbb{R}$ » signifie quant à elle que tout intervalle de la forme $]A,+\infty[$ avec $A\in\mathbb{R}$ contient tous les réels $f(x)$ pour x assez proche de a.

Et si on s'intéressait à des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$? Le graphe d'une fonction $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{C}$ ne se trace pas sur un plan, mais dans l'espace. Il faut en effet prévoir un axe pour représenter la variable $x\in\mathbb{R}$ et un plan pour son image $z=f(x)\in\mathbb{C}$. La figure ci-contre représente ainsi la fonction $x\longmapsto 2\cos x+2\mathrm{i}\sin x$, i.e. de la fonction $x\longmapsto 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$, ainsi que sa partie réelle $x\longmapsto 2\cos x$ à droite et sa partie imaginaire $x\longmapsto 2\sin x$ en-dessous.



Pour une fonction $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{C}$, quel sens donner à la proposition « f admet $\ell\in\mathbb{C}$ pour limite en a » ? On aimerait pouvoir dire que : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{\mathrm{i}x}{x+1}\right)=1+\mathrm{i}$, $\lim\limits_{x\to 1}\left(\ln x+\mathrm{i}x\right)=\mathrm{i}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+\mathrm{i}}{x^2+\mathrm{i}}=0$.

Par analogie avec le cas réel, dire que f admet $\ell\in\mathbb{C}$ pour limite en $+\infty$ revient à dire que tout disque ouvert de centre ℓ et de rayon $\varepsilon>0$ contient tous les réels $f(x)$ pour x assez grand. Les disques ouverts remplacent dans $\mathbb{C}$ les intervalles $]\ell-\varepsilon,\ell+\varepsilon[$.

✖ **Attention !** Où sont $+\infty$ et $-\infty$ dans $\mathbb{C}$? Réponse : nulle part. Pour une fonction $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{C}$, on peut faire tendre x vers $+\infty$, mais $f(x)$ ne peut tendre que vers un nombre complexe.

Théorème (Caractérisation de la limite par les parties réelle et imaginaire) Soient I un intervalle, $f:I\longrightarrow\mathbb{C}$ une fonction, a un élément ou une borne de I — éventuellement $\pm\infty$ — et $\ell\in\mathbb{C}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\ell$. (ii) $\lim\limits_{x\to a}\mathrm{Re}\big(f(x)\big)=\mathrm{Re}(\ell)$ et $\lim\limits_{x\to a}\mathrm{Im}\big(f(x)\big)=\mathrm{Im}(\ell)$.

Exemple $\lim\limits_{x\to\pi}\left(x^2+\mathrm{i}\cos x\right)=\pi^2-\mathrm{i}$ car $\lim\limits_{x\to\pi}x^2=\pi^2$ et $\lim\limits_{x\to\pi}\cos x=-1$.

De cette notion de limite pour les fonctions complexes découlent naturellement deux notions de continuité et de dérivabilité définies exactement comme dans le cas réel. Pour tout intervalle I, on note $\mathscr{C}(I,\mathbb{C})$ (resp. $\mathscr{D}(I,\mathbb{C})$) l'ensemble des fonctions continues (resp. dérivables) de I dans $\mathbb{C}$.

Théorème **(Caractérisation de la continuité et de la dérivabilité par les parties réelle et imaginaire)** Soient I un intervalle et $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction.

- **Continuité :** f est continue sur I si et seulement si $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ le sont.
- **Dérivabilité :** f est dérivable sur I si et seulement si $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ le sont.
  Dans ce cas : $f' = \mathrm{Re}(f)' + \mathrm{i}\,\mathrm{Im}(f)'$, autrement dit $\mathrm{Re}\big(f'\big) = \mathrm{Re}(f)'$ et $\mathrm{Im}\big(f'\big) = \mathrm{Im}(f)'$.

Les formules de dérivation d'une somme, d'un produit et d'un quotient de fonctions complexes sont les mêmes que dans le cas réel, de même que la formule de dérivation d'une composée $g \circ f$ avec $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$.

Exemple

- La fonction $x \longmapsto x^2 + \mathrm{i}\sin x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ car les fonctions $x \longmapsto x^2$ et $x \longmapsto \sin x$ le sont, et sa dérivée est $x \longmapsto 2x + \mathrm{i}\cos x$.
- La fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x+\mathrm{i}}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient, de dérivée $x \longmapsto -\dfrac{1}{(x+\mathrm{i})^2}$.

Pour les fonctions complexes, pas question de parler de monotonie ou de signe de la dérivée puisqu'il n'y a pas d'inégalités dans $\mathbb{C}$, mais le théorème fondamental suivant est en revanche conservé.

Théorème **(Caractérisation des fonctions dérivables constantes)** Soient I un INTERVALLE et $f \in \mathscr{D}(I, \mathbb{C})$. La fonction f est constante sur I si et seulement si f' est nulle sur I.