Rappels et compléments sur les fonctions

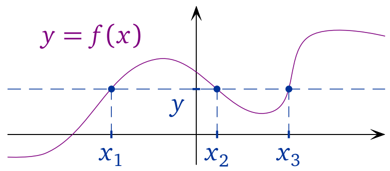
1 Vocabulaire usuel sur les fonctions

1.1 Valeurs d'une fonction

Définition **(Ensemble de définition et image d'une fonction, image et antécédents d'un point)** Soient A une partie de $\mathbb{R}$ et $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

- L'ensemble A est appelé l'*ensemble de définition de f* et tout réel $f(x)$ avec $x \in A$ est appelé une *valeur de f*.
- Pour tous $x \in A$ et $y \in \mathbb{R}$, si $y = f(x)$, on dit que y est *l'image de x par f* et que x est *un antécédent de y par f*.

✌ **Explication** ✌ Sur la figure ci-contre, y possède plusieurs antécédents par f, raison pour laquelle on parle d'UN antécédent et non de « l' » antécédent de y.



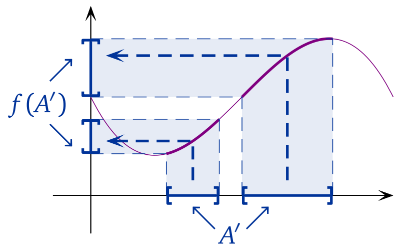
Définition **(Image d'une partie par une fonction, image d'une fonction)** Soient A une partie de $\mathbb{R}$ et $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

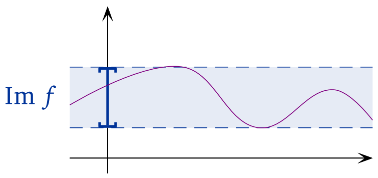
- Pour toute partie A' de A, on appelle *image de A' par f*, notée $f(A')$, l'ensemble :

$$f(A') = \left\{ y \in \mathbb{R} / \quad \exists\, x \in A' / \quad y = f(x) \right\} = \left\{ f(x) \right\}_{x \in A'}.$$

- L'image de A tout entier est simplement appelée l'*image de f* et notée généralement $\mathrm{Im}\, f$ plutôt que $f(A)$.

✌ **Explication** ✌ L'image $f(A')$ de A' par f est l'ensemble des images par f des éléments de A'. Graphiquement, pour déterminer $f(A')$, on projette sur l'axe des ordonnées la portion du graphe de f qui se situe au-dessus de A', comme l'illustre la figure de droite.





On fait pareil pour déterminer graphiquement l'image $\mathrm{Im}\, f$ de f, mais avec le graphe de f tout entier.

Exemple

- L'image de $\mathbb{R}_+$ par la fonction exponentielle est l'intervalle $[1, +\infty[$. L'image de $\mathbb{R}_-$ est $]0, 1]$.
- L'image de $\pi\mathbb{Z}$ par la fonction sinus est $\{0\}$, l'image de $[0, \pi]$ est $[0, 1]$, l'image de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ est $[-1, 1]$ et l'image de $[0, 2\pi]$ est aussi $[-1, 1]$.

Définition **(Expression « à valeurs dans… »)** Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}$ et $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est *à valeurs dans B* si toute valeur de f est élément de B, i.e. si : $\forall x \in A, \quad f(x) \in B$, ou encore si : $\mathrm{Im}\, f \subset B$.

✖ **Attention !** ✖ Dire que f est à valeurs dans B, ce n'est pas dire que l'image de f est B tout entier. La fonction $x \longmapsto |x| + 1$, par exemple, est définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, mais son image n'est pas $\mathbb{R}_+$ tout entier mais seulement $[1, +\infty[$ — car quand x décrit $\mathbb{R}_+$, $|x| + 1$ décrit $[1, +\infty[$.

1.2 Composition des fonctions

Définition (Composée de deux fonctions) Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}$ et $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : B \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions. On suppose f à valeurs dans B. On appelle *composée de f suivie de g* la fonction $g \circ f$ définie sur A par :

$$\forall x \in A, \quad g \circ f(x) = g\big(f(x)\big).$$

✌ **Explication** ✌ Pourquoi la condition « f est à valeurs dans B » est-elle si importante ? Pour pouvoir parler de $g\big(f(x)\big)$ pour tout $x \in A$, on doit garantir que $f(x)$ appartient à l'ensemble de définition B de g pour tout $x \in A$: $\forall x \in A, \quad f(x) \in B$, autrement dit que f est à valeurs dans B.

Exemple La fonction $x \longmapsto \ln(2x+3)$ est définie sur $\left]-\dfrac{3}{2}, +\infty\right[$.

Démonstration La fonction $x \longmapsto 2x+3$ est définie sur $\mathbb{R}$ et la fonction $\ln$ sur $\mathbb{R}_+^*$, mais quand x décrit $\mathbb{R}$, $2x+3$ n'appartient pas forcément à $\mathbb{R}_+^*$. Pour quels $x \in \mathbb{R}$ est-il vrai que : $2x+3 > 0$? Réponse : $x \in \left]-\dfrac{3}{2}, +\infty\right[$.

Exemple La fonction $x \longmapsto \sqrt{1-x^2}$ est définie sur $[-1, 1]$.

Démonstration La fonction $x \longmapsto 1-x^2$ est définie sur $\mathbb{R}$ et la fonction $\sqrt{\cdot}$ sur $\mathbb{R}_+$, mais quand x décrit $\mathbb{R}$, $1-x^2$ n'appartient pas forcément à $\mathbb{R}_+$. Pour quels $x \in \mathbb{R}$ est-il vrai que : $1-x^2 \geqslant 0$? Réponse : $x \in [-1, 1]$.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$1+x$		$-$	0		$+$		
$1-x$			$+$		0	$-$	
$1-x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

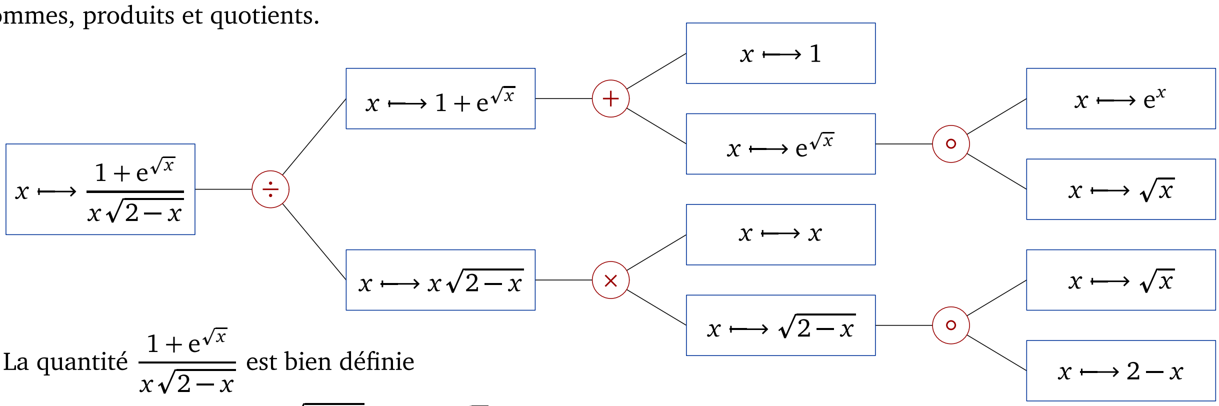
✖ **Attention !** ✖ La composition n'est pas commutative, ne confondez pas $g \circ f$ et $f \circ g$. Il arrive d'ailleurs souvent que l'une de ces fonctions soit définie sans que l'autre le soit. Par exemple, si f est la fonction $x \longmapsto x^2$ et si g la fonction $x \longmapsto x^2+1$, toutes deux définies sur $\mathbb{R}$, $g \circ f$ est la fonction : $x \longmapsto \left(x^2\right)^2 + 1 = x^4 + 1$ et $f \circ g$ la fonction : $x \longmapsto \left(x^2+1\right)^2 = x^4 \boxed{+2x^2} + 1$. Ce n'est pas pareil !

Théorème (Associativité de la composition) Soient A, B et C trois parties de $\mathbb{R}$ et $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : B \longrightarrow \mathbb{R}$ et $h : C \longrightarrow \mathbb{R}$ trois fonctions. On suppose f à valeurs dans B et g à valeurs dans C. Alors :

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

Exemple La fonction $x \longmapsto \dfrac{1+e^{\sqrt{x}}}{x\sqrt{2-x}}$ est définie sur $]0, 2[$.

Démonstration La construction de cette fonction requiert plus qu'une simple composition, également des sommes, produits et quotients.



La quantité $\dfrac{1+e^{\sqrt{x}}}{x\sqrt{2-x}}$ est bien définie

si et seulement si : $x\sqrt{2-x} \neq 0, \quad \sqrt{x} \in \mathbb{R}, \quad 2-x \geqslant 0 \quad$ et $\quad x \geqslant 0$,

i.e. si et seulement si : $x \neq 0, \quad x \neq 2, \quad x \leqslant 2 \quad$ et $\quad x \geqslant 0$, i.e. : $x \in\,]0, 2[$.

1.3 Fonctions monotones, fonctions majorées/minorées

Définition (Monotonie) Soient A une partie de $\mathbb{R}$ et $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

- On dit que f est *croissante* si : $\forall x, y \in A, \quad x < y \implies f(x) \leqslant f(y)$.
- On dit que f est *strictement croissante* si : $\forall x, y \in A, \quad x < y \implies f(x) < f(y)$.
- On dit que f est *décroissante* si : $\forall x, y \in A, \quad x < y \implies f(x) \geqslant f(y)$.
- On dit que f est *strictement décroissante* si : $\forall x, y \in A, \quad x < y \implies f(x) > f(y)$.
- On dit que f est (resp. *strictement*) *monotone* si f est (resp. strictement) croissante ou décroissante.

✌ **Explication** ✌ On peut bien sûr CARACTÉRISER la monotonie d'une fonction DÉRIVABLE par le signe de sa dérivée, mais c'est là un THÉORÈME et non une DÉFINITION. La définition ci-dessus est générale et ne requiert pas la dérivabilité.

Théorème (Somme de fonctions monotones) Soient A une partie de $\mathbb{R}$ et $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : A \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions.

Si f et g sont croissantes, alors $f + g$ l'est aussi. Si de plus f ou g l'est strictement, alors $f + g$ aussi.

On dispose d'un résultat analogue pour les fonctions décroissantes.

Démonstration Dans le cas où f est croissante et g strictement croissante, soient $x, y \in A$ avec : $x < y$. Par hypothèse : $f(x) \leqslant f(y)$ et : $g(x) < g(y)$, donc par somme : $f(x) + g(x) < f(y) + g(y)$. ■

Exemple Pas besoin de dériver pour expliquer que la fonction $x \longmapsto x + \ln x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$!

Théorème (Composée de fonctions monotones) Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}$ et $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : B \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions. On suppose f à valeurs dans B.

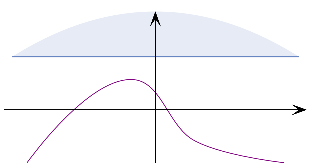
- Si f et g sont (resp. strictement) monotones de même sens de variation, alors $g \circ f$ est (resp. strictement) croissante.
- Si f et g sont (resp. strictement) monotones de sens de variation opposés, alors $g \circ f$ est (resp. strictement) décroissante.

Démonstration Dans le cas où f est croissante et g décroissante, soient $x, y \in A$ avec : $x < y$. Comme f est croissante : $f(x) \leqslant f(y)$, puis comme g est décroissante : $g\big(f(y)\big) \leqslant g\big(f(x)\big)$. ■

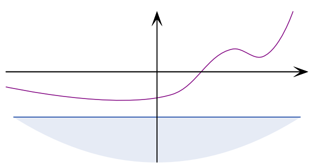
Exemple Pas besoin de dériver pour expliquer que la fonction $x \longmapsto e^{e^x}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$!

Définition (Fonction majorée/minorée/bornée) Soient A une partie de $\mathbb{R}$ et $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

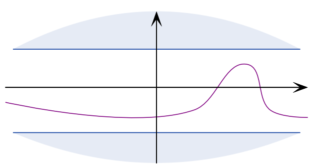
- On dit que f est *majorée sur A* si : $\exists\, M \in \mathbb{R}/ \quad \forall x \in A, \quad f(x) \leqslant M$. Un tel réel M est appelé UN *majorant de f sur A*. On dit ausi que f est *majorée par M sur A* ou que M *majore f sur A*.
- On dit que f est *minorée sur A* si : $\exists\, m \in \mathbb{R}/ \quad \forall x \in A, \quad f(x) \geqslant m$. Un tel réel m est appelé UN *minorant de f sur A*. On dit aussi que f est *minorée par m sur A* ou que m *minore f sur A*.
- On dit que f est *bornée sur A* si f est à la fois majorée et minorée sur A, i.e. si : $\exists\, K \in \mathbb{R}_+/ \quad \forall x \in A, \quad \big|f(x)\big| \leqslant K$.



Fonction majorée non minorée



Fonction minorée non majorée



Fonction bornée

Démonstration Par définition, la proposition : « f est majorée et minorée sur A » s'écrit :

$$\exists\, m, M \in \mathbb{R}/ \quad \forall x \in A, \quad m \leqslant f(x) \leqslant M,$$

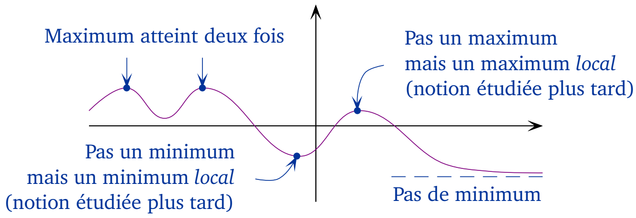
or ce n'est pas la définition donnée ci-dessus. Montrons donc l'équivalence des deux formulations.

- Si : $\exists\, K \in \mathbb{R}_+/ \quad \forall x \in A, \quad \big|f(x)\big| \leqslant K,$ alors : $-K \leqslant f(x) \leqslant K,$ donc f est minorée et majorée.
- À présent, si : $\exists\, m, M \in \mathbb{R}/ \quad \forall x \in A, \quad m \leqslant f(x) \leqslant M,$ posons : $K = \max\big\{|m|, |M|\big\}.$ Alors pour tout $x \in A$: $-K \leqslant -|m| \leqslant m \leqslant f(x) \leqslant M \leqslant |M| \leqslant K,$ donc : $\big|f(x)\big| \leqslant K.$ ■

Définition (Maximum/minimum d'une fonction) Soient A une partie de $\mathbb{R}$, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $a \in A$.

- On dit que f *admet un maximum en a* si pour tout $x \in A$: $f(x) \leqslant f(a)$. Le réel $f(a)$ est alors appelé le maximum de f en a, on le note aussi $\max\limits_A f$ ou $\max\limits_{x \in A} f(x)$.
- On dit que f *admet un minimum en a* si pour tout $x \in A$: $f(x) \geqslant f(a)$. Le réel $f(a)$ est alors appelé le minimum de f en a, on le note aussi $\min\limits_A f$ ou $\min\limits_{x \in A} f(x)$.

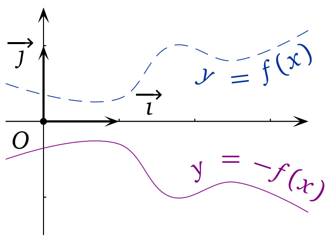
✖ **Attention !** ✖ Une fonction peut ne pas avoir de maximum/minimum et quand elle en a un, il peut être atteint en plusieurs points différents.

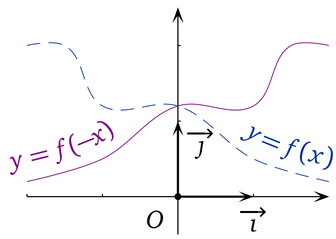


1.4 Transformations affines du graphe d'une fonction

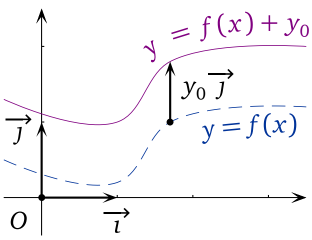
Théorème (Transformations affines du graphe d'une fonction, cas des symétries) Soient A une partie de $\mathbb{R}$ et $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Les graphes ci-dessous sont représentés dans un repère orthonormal $\big(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\big)$.

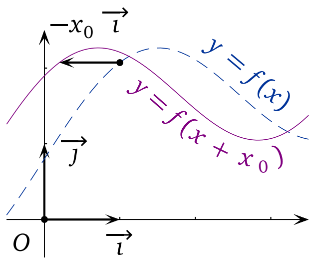
- La fonction $x \longmapsto -f(x)$ est définie sur A et son graphe s'obtient à partir de celui de f par une symétrie par rapport à (Ox).
- La fonction $x \longmapsto f(-x)$ est définie sur $-A$, i.e. le symétrique de A par rapport à (Oy), et son graphe s'obtient aussi à partir de celui de f par la même symétrie.





Théorème (Transformations affines du graphe d'une fonction, cas des translations) Soient A une partie de $\mathbb{R}$ et $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Les graphes ci-dessous sont représentés dans un repère orthonormal $\big(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\big)$.



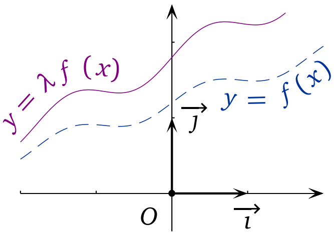


- Soit $y_0 \in \mathbb{R}$. La fonction $x \longmapsto f(x) + y_0$ est définie sur A et son graphe s'obtient à partir de celui de f par une translation de vecteur $y_0\,\vec{\jmath}$.
- Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. La fonction $x \longmapsto f(x + x_0)$ est définie sur $A - x_0$, i.e. l'ensemble A décalé vers la gauche de x_0, et son graphe s'obtient à partir de celui de f par une translation de vecteur $-x_0\,\vec{\imath}$.

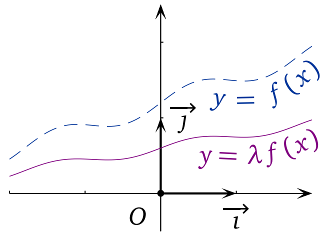
✖ **Attention !** ✖ Dans le cas de la fonction $x \longmapsto f(x+x_0)$, il y a bien un signe « moins » dans l'expression du vecteur de translation $-x_0\,\vec{\imath}$ et c'est normal, la fonction $x \longmapsto f(x+x_0)$ atteint la valeur $f(0)$ en $-x_0$, puis la valeur $f(1)$ en $-x_0+1$, etc. Pour résumer, on peut dire que $x \longmapsto f(x+x_0)$ est **en avance** de x_0 sur $x \longmapsto f(x)$.

Théorème **(Transformations affines du graphe d'une fonction, cas des contractions/dilatations)** Soient A une partie de $\mathbb{R}$ et $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Les graphes ci-dessous sont représentés dans un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

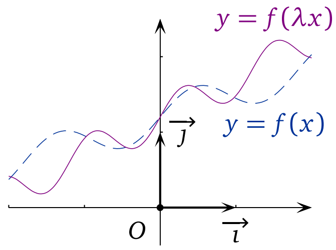
- Soit $\lambda > 0$. La fonction $x \longmapsto \lambda f(x)$ est définie sur A et son graphe s'obtient à partir de celui de f par une dilatation verticale de rapport λ si $\lambda \geqslant 1$ et une contraction verticale de rapport $\dfrac{1}{\lambda}$ si $\lambda < 1$.



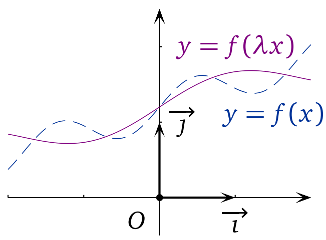
Dilatation verticale ($\lambda \geqslant 1$)



Contraction verticale ($\lambda < 1$)



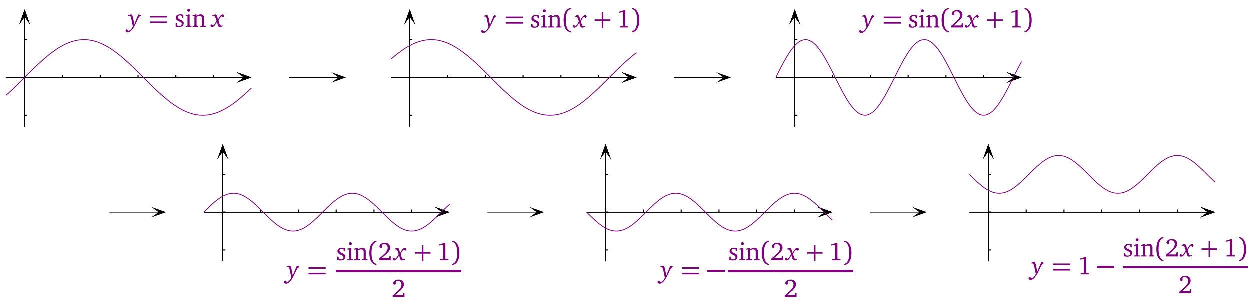
Contraction horizontale ($\lambda \geqslant 1$)



Dilatation horizontale ($\lambda < 1$)

- Soit $\lambda > 0$. La fonction $x \longmapsto f(\lambda x)$ est définie sur l'ensemble dilaté/contracté $\dfrac{1}{\lambda} A$ et son graphe s'obtient à partir de celui de f par une contraction horizontale de rapport λ si $\lambda \geqslant 1$ et une dilatation horizontale de rapport $\dfrac{1}{\lambda}$ si $\lambda < 1$.

Exemple

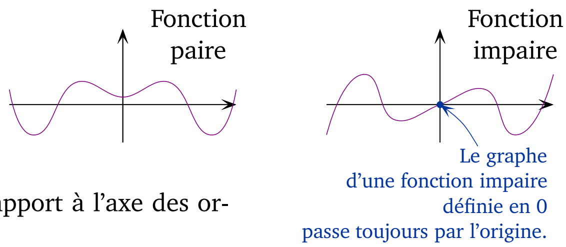


Définition **(Parité/imparité)**
Soit A une partie de $\mathbb{R}$ *symétrique par rapport à* 0, i.e. telle que :

$$\forall x \in A, \quad -x \in A.$$

Soit $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

- On dit que f est *paire* si : $\quad \forall x \in A, \quad f(-x) = f(x)$.
  Cela revient à dire que le graphe de f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- On dit que f est *impaire* si : $\quad \forall x \in A, \quad f(-x) = -f(x)$.
  Cela revient à dire que le graphe de f est symétrique par rapport à l'origine.

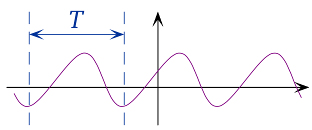


✎ **En pratique** ✎ Pas besoin d'étudier une fonction $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ paire ou impaire sur A tout entier, une étude sur $A \cap \mathbb{R}_+$ suffit.

Définition **(Périodicité)** Soient $T > 0$ et A une partie de $\mathbb{R}$ *T-périodique*, i.e. telle que :

$$\forall x \in A, \quad x + T \in A \quad \text{et} \quad x - T \in A.$$

Soit $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est *T-périodique* ou *périodique de période T* si : $\quad \forall x \in A, \quad f(x+T) = f(x)$. $\quad$ Le réel T est alors appelé UNE *période de f*.



✖ **Attention !** ✖ Une fonction périodique ne possède jamais qu'une seule période. Tout multiple entier d'une période T est encore une période : $2T, 3T, 4T \ldots$ Voilà pourquoi on ne parle jamais de « la » période, mais toujours d'UNE période.

✎ **En pratique** ✎ Pas besoin d'étudier une fonction $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ T-périodique sur A tout entier, une étude sur une période suffit, par exemple $A \cap [0, T[$.

Théorème (Opérations sur les fonctions périodiques) Soient $T > 0$, A une partie de $\mathbb{R}$ T-périodique et $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : A \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions T-périodiques.

(i) Les fonctions $f+g$ et $f \times g$ sont aussi T-périodiques, ainsi que $\dfrac{f}{g}$ si g ne s'annule pas.

(ii) Pour tout $\omega > 0$, la fonction $x \longmapsto f(\omega x)$ est $\dfrac{T}{\omega}$-périodique sur l'ensemble dilaté/contracté $\dfrac{1}{\omega}A$.

Explication Si par exemple $\omega = 2$, le graphe de la fonction $x \longmapsto f(2x)$ est la contraction horizontale de facteur 2 de celui de f. Si f est T-périodique, rien d'étonnant du coup à ce que $x \longmapsto f(2x)$ soit $\dfrac{T}{2}$-périodique.

Démonstration

(i) Concernant $f+g$, pour tout $x \in A$: $(f+g)(x+T) = f(x+T)+g(x+T) = f(x)+g(x) = (f+g)(x)$.

(ii) Notons g la fonction $x \longmapsto f(\omega x)$ définie en tout point x pour lequel : $\omega x \in A$, i.e. sur $\dfrac{1}{\omega}A$. Pour tout $x \in \dfrac{1}{\omega}A$: $g\left(x+\dfrac{T}{\omega}\right) = f\left[\omega\left(x+\dfrac{T}{\omega}\right)\right] = f(\omega x+T) = f(\omega x) = g(x)$. ■

Exemple La fonction $x \longmapsto \sin(2x)$ est π-périodique car la fonction sinus est 2π-périodique.

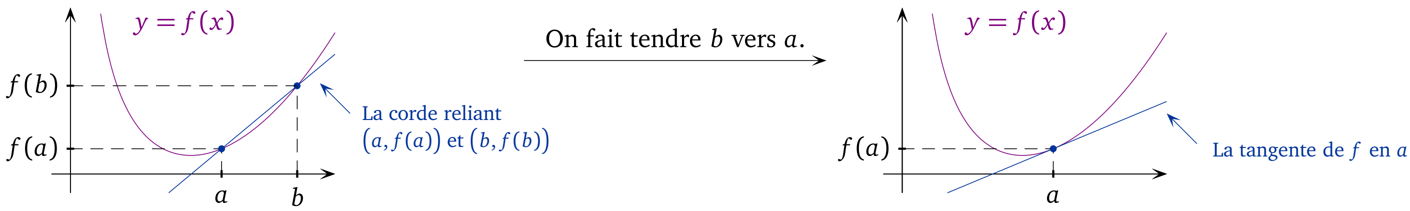
2 Rappels sur la dérivation

Définition (Dérivabilité, tangente) Soient I un intervalle, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $a \in I$.

- On dit que f est *dérivable en a* si $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ EXISTE ET EST FINIE. Cette limite est alors appelée le *nombre dérivé de f en a* et notée $f'(a)$.

  L'ensemble des fonctions dérivables sur I tout entier, i.e. dérivables en tout point de I, est noté $\mathscr{D}(I,\mathbb{R})$. Pour tout $f \in \mathscr{D}(I,\mathbb{R})$, la fonction $x \longmapsto f'(x)$ sur I est appelée la *dérivée de f*.
- Si f est dérivable en a, la droite d'équation : $y = f(a) + f'(a)(x-a)$ est appelée la *tangente de f en a*.

Explication Si f est dérivable en a, alors pour $x \approx a$: $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \approx f'(a)$, donc : $f(x) \approx f(a)+f'(a)(x-a)$. Ce raisonnement sans rigueur justifie tout de même rapidement le fait que la tangente de f en a est LA DROITE LA PLUS PROCHE DU GRAPHE DE f AU VOISINAGE DE a. Plus géométriquement, sachant que $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ est le coefficient directeur de la corde reliant les points de coordonnées $\big(a,f(a)\big)$ et $\big(b,f(b)\big)$, la limite : $f'(a) = \lim\limits_{b \to a} \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ représente la « pente limite » des cordes précitées.



Théorème (Opérations sur les dérivées) Soient I un intervalle et $f, g \in \mathscr{D}(I, \mathbb{R})$.

- **Multiplication par un réel :** Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, λf est dérivable sur I et : $(\lambda f)' = \lambda f'$.
- **Somme :** $f + g$ est dérivable sur I et : $(f+g)' = f' + g'$.
- **Produit :** fg est dérivable sur I et : $(fg)' = f'g + fg'$.
- **Quotient :** Si g ne s'annule pas sur I, $\dfrac{f}{g}$ est dérivable sur I et : $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$.

Soient I et J deux intervalles, $f \in \mathscr{D}(I, \mathbb{R})$ et $g \in \mathscr{D}(J, \mathbb{R})$. On suppose f à valeurs dans J.

- **Composée :** $g \circ f$ est dérivable sur I et : $(g \circ f)' = f' \times g' \circ f$.

Exemple La fonction $x \overset{f}{\longmapsto} \ln\left(x + \sqrt{x(1-x)}\right)$ est définie sur $]0, 1]$ et dérivable sur $]0, 1[$.

Étudiez scrupuleusement la raison pour laquelle f n'a pas a priori les mêmes ensembles de définition et de dérivabilité.

Démonstration

- **Ensemble de définition :** La quantité $\ln\left(x + \sqrt{x(1-x)}\right)$ est bien définie si : $x(1-x) \geqslant 0$ à cause de la racine carrée et si : $x + \sqrt{x(1-x)} > 0$ à cause du logarithme, i.e. si : $x \in [0, 1]$ et $x > 0$. Conclusion : f est définie sur $]0, 1]$.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
x		$-$	0		$+$		
$1-x$			$+$		0	$-$	
$x(1-x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

- **Ensemble de dérivabilité :** La fonction racine carrée est définie sur $\mathbb{R}_+$ mais dérivable seulement sur $\mathbb{R}_+^*$. Nous allons donc devoir modifier un peu ce qui précède, remplacer « $x(1-x) \geqslant 0$ » par « $x(1-x) > 0$ ».
  - La fonction $x \longmapsto x(1-x)$ est dérivable sur $]0, 1[$ **à valeurs dans** $\mathbb{R}_+^*$ et la fonction racine carrée est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, donc $x \longmapsto \sqrt{x(1-x)}$ est dérivable sur $]0, 1[$ par composition.
  - Par somme, $x \longmapsto x + \sqrt{x(1-x)}$ est dérivable sur $]0, 1[$, **à valeurs dans** $\mathbb{R}_+^*$. La fonction logarithme étant dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, f est enfin dérivable sur $]0, 1[$ par composition.
- **Remarque :** Nous n'avons pas prouvé que f **n'est pas** dérivable en 1, le raisonnement qui prouve sa bonne définition sur $]0, 1]$ montre seulement sa dérivabilité sur $]0, 1[$.

Théorème (Caractérisation des fonctions dérivables constantes/monotones) Soient I un **intervalle** et $f \in \mathscr{D}(I, \mathbb{R})$. Afin d'alléger, on n'énonce ci-dessous que le cas des fonctions croissantes.

- f est constante sur I si et seulement si f' est nulle sur I.
- f est croissante sur I si et seulement si f' est positive ou nulle sur I.
- f est strictement croissante sur I si et seulement si f' est positive ou nulle sur I et n'est identiquement nulle sur aucun intervalle $[a, b]$ avec $a < b$.

  En particulier, si f' est strictement positive sur I, alors f est strictement croissante sur I.

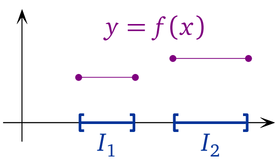
✎ **En pratique** ✎ À ce stade de l'année, c'est pour leur **signe** qu'on calcule des dérivées.

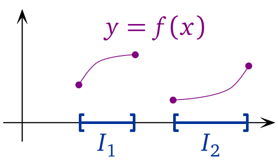
Conséquence : $\boxed{\text{Factorisez toujours vos dérivées le plus possible !}}$

Rappelons que le signe d'une fonction s'obtient souvent grâce à un **tableau de signe**.

✖ **Attention !** ✖ Mine de rien, l'hypothèse selon laquelle I est un **intervalle** est indispensable. Le théorème est faux si I est une réunion d'intervalles non vides disjoints.

f est constante sur I_1 et sur I_2, donc $f' = 0$ sur I_1 et sur I_2, mais f n'est pas constante sur $I_1 \cup I_2$.





f est croissante sur I_1 et sur I_2, donc $f' \geqslant 0$ sur I_1 et sur I_2, mais f n'est pas croissante sur $I_1 \cup I_2$.

Définition (Dérivées successives) Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

On commence par poser : $f^{(0)} = f$. Ensuite, pour tout $k \in \mathbb{N}$, **SI** on a réussi à définir $f^{(k)}$ sur I au cours des étapes précédentes, et **SI** $f^{(k)}$ est dérivable sur I, on pose : $f^{(k+1)} = \left(f^{(k)}\right)'$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, si la fonction $f^{(k)}$ est bien définie, dite *dérivée* $k^{\text{ème}}$ *de* f, on dit que f est k *fois dérivable sur* I. On note généralement f, f', f'' et f''' plutôt que $f^{(0)}$, $f^{(1)}$, $f^{(2)}$ et $f^{(3)}$ respectivement.

✎ **En pratique** ✎ Le théorème « Opérations sur les dérivées » se généralise bien aux dérivées successives. Ainsi la somme et le produit de deux fonctions k fois dérivables sont eux-mêmes k fois dérivables. Il en va de même de leur quotient et de leur composée quand ils ont un sens.

Exemple La fonction $x \longmapsto \dfrac{e^x}{x^2+1}$ est dérivable autant de fois qu'on le veut sur $\mathbb{R}$ car les fonctions $x \longmapsto e^x$ et $x \longmapsto x^2+1$ le sont. On n'a pas besoin de dériver 99 fois pour savoir que la dérivée $100^{\text{ème}}$ est bien définie !

✎ **En pratique** ✎ On a souvent besoin de démontrer des inégalités en mathématiques, et s'il n'y a pas de méthode unique pour y parvenir, il y en a quand même une qu'il faut toujours avoir en tête, l'**ÉTUDE DES VARIATIONS D'UNE FONCTION.**

Exemple Pour tout $x \in \left]-1,+\infty\right[$: $\ln(1+x) \leqslant x$. Un grand classique !

Démonstration La fonction $x \overset{f}{\longmapsto} x - \ln(1+x)$ est définie et dérivable sur $\left]-1,+\infty\right[$ et pour tout $x \in \left]-1,+\infty\right[$: $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{1+x} = \dfrac{x}{1+x}$. On conclut grâce au tableau ci-contre.

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖	↘	0	↗	

Exemple Pour tout $x \in [0,2]$: $\dfrac{x+1}{x^2+3} \in \left[\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{2}\right]$. Par ailleurs, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\dfrac{x+1}{x^2+3} \in \left[-\dfrac{1}{6}, \dfrac{1}{2}\right]$.

Démonstration

- **Tentative naïve :** Pour tout $x \in [0,2]$: $0 \leqslant x^2 \leqslant 4$ donc $3 \leqslant x^2+3 \leqslant 7$, et par ailleurs : $1 \leqslant x+1 \leqslant 3$, donc par quotient : $\dfrac{1}{7} \leqslant \dfrac{x+1}{x^2+3} \leqslant \dfrac{3}{3} = 1$ — sauf que ce résultat est moins fin que celui que nous souhaitons. En encadrant **SÉPAREMENT** le numérateur et le dénominateur, nous ne les avons pas fait communiquer assez, cette tentative naïve est un échec.
- **Solution via une étude de fonction :** La fonction $x \overset{f}{\longmapsto} \dfrac{x+1}{x^2+3}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = \frac{1 \times \left(x^2+3\right) - (x+1) \times 2x}{\left(x^2+3\right)^2} = -\frac{x^2+2x-3}{\left(x^2+3\right)^2} = -\frac{(x-1)(x+3)}{\left(x^2+3\right)^2}.$$

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↘	$-\frac{1}{6}$	↗	$\frac{1}{2}$	↘	0

On conclut grâce au tableau ci-contre, sachant que : $f(0) = \dfrac{1}{3} \leqslant \dfrac{3}{7} = f(2)$.

Exemple Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$: $\dfrac{x+1}{x-1} \ln x \geqslant 2$.

Démonstration Nous pourrions étudier la fonction $x \longmapsto \dfrac{x+1}{x-1} \ln x$ et la comparer à 2, mais la dérivée d'un quotient occasionne souvent d'affreux calculs, donc nous allons plutôt étudier le **SIGNE** de $x \overset{f}{\longmapsto} (x+1)\ln x - 2(x-1)$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Nous diviserons par $x-1$ en fin d'étude pour obtenir le résultat.

Or pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$: $f'(x) = \ln x + \dfrac{1}{x} - 1$ et $f''(x) = \dfrac{x-1}{x^2}$. On conclut grâce au tableau ci-contre.

x	0		1		$+\infty$
$f''(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f'(x)$	‖	↘	0	↗	
$f'(x)$	‖	$+$	0	$+$	
$f(x)$	‖	↗	0	↗	
$f(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$\dfrac{f(x)}{x-1}$	‖	$+$	‖	$+$	

✎ **En pratique** ✎ Relisez le début de l'exemple précédent :

> Les fonctions ne sont pas toutes aussi faciles à étudier les unes que les autres, faites le bon choix !

Exemple Pour tout $x, y \in]-1,1[$: $\dfrac{x+y}{1+xy} \in]-1,1[$.

Démonstration Comment prouver une inégalité sur deux variables ? Idée : on « gèle » l'une des variables, par exemple y, et on considère que seule x est réellement variable. On dérive alors par rapport à x.

Soit $y \in]-1,1[$ FIXÉ. La fonction $x \overset{f}{\longmapsto} \dfrac{x+y}{1+xy}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{1}{y}\right\}$, donc a fortiori sur $]-1,1[$. Pour tout $x \in]-1,1[$: $f'(x) = \dfrac{1-y^2}{(1+xy)^2} > 0$. On conclut grâce au tableau ci-contre.

x	-1		1
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	1

3 FONCTIONS ET BONNE RÉDACTION

✖ **ATTENTION !** ✖

- Pour définir une fonction, on peut procéder ainsi : « On note f la fonction $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ n & \longmapsto & \sqrt{n}. \end{array}\right.$ »

  Ensemble de définition

  Ensemble d'arrivée

  Flèche avec un PETIT TRAIT !

  ou ainsi : « On note f la fonction $n \longmapsto \sqrt{n}$ définie sur $\mathbb{N}$. »

  « On note f la fonction définie sur $\mathbb{N}$ par : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(n) = \sqrt{n}$. »

  « On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $f(n) = \sqrt{n}$. »

  On s'interdira en revanche scrupuleusement les formulations suivantes :

  « On note f la fonction $\sqrt{n}$ sur $\mathbb{N}$. » « On note f la fonction $n \longrightarrow \sqrt{n}$ sur $\mathbb{N}$. » « On pose $f(n) = \sqrt{n}$. »

  Problème de flèche !

- Pour parler d'une fonction, on écrit « ...la fonction $\boxed{x \longmapsto}$ $\sin(x^2)$... » et non pas « ... la fonction ✗ $\sin(x^2)$... »

- On dit qu'une fonction est définie SUR tel ou tel domaine. On s'interdira scrupuleusement toute formulation du type : « La fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x-5}$ est définie ~~pour tout~~ $x \in \mathbb{R} \setminus \{5\}$. »

  On dit qu'une fonction est monotone SUR tel ou tel domaine. On s'interdira scrupuleusement toute formulation du type : « La fonction $x \longmapsto e^{2x}+1$ est monotone ~~pour tout~~ $x \in \mathbb{R}$. »

  On dit qu'une fonction est dérivable SUR tel ou tel domaine. On s'interdira scrupuleusement toute formulation du type : « La fonction $x \longmapsto \dfrac{x}{x^2+1}$ est dérivable ~~pour tout~~ $x \in \mathbb{R}$. »

- Last but not least : **LA NOTATION « $f(x)'$ » EST TOTALEMENT INTERDITE.** Quand vous dérivez une fonction, disons $x \overset{f}{\longmapsto} e^{\sin x}$, n'écrivez pas : « Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = \left(\cancel{e^{\sin x}}\right)' = e^{\sin x}\cos x$ », mais simplement : « Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = e^{\sin x}\cos x$. »

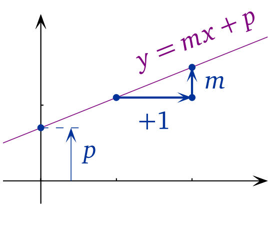
4 FONCTIONS USUELLES

4.1 FONCTIONS AFFINES

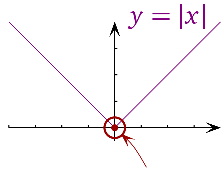
Définition (Fonctions affines) On appelle *fonction affine* toute fonction de la forme $x \longmapsto mx+p$ avec $m, p \in \mathbb{R}$.

En pratique Le graphe de f est alors la droite de coefficient directeur m et d'ordonnée à l'origine p. Si on connaît deux valeurs $f(a)$ et $f(b)$ de f avec $a \neq b$, alors : $\boxed{m = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}.}$

Souvent, en réalité, ce n'est pas l'ordonnée à l'origine qu'on connaît, mais l'ordonnée en un autre point a. Le résultat suivant est FONDAMENTAL : $\boxed{f(x) = m(x-a)+f(a).}$

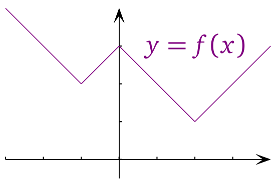


On appelle *fonction affine par morceaux* toute fonction f dont le domaine de définition est la réunion d'un nombre fini d'intervalles disjoints sur lesquels f est affine. La fonction valeur absolue, par exemple, est affine par morceaux, paire, continue sur $\mathbb{R}$ MAIS dérivable seulement sur $\mathbb{R}^*$.



Exemple Le graphe de la fonction $x \overset{f}{\longmapsto} |x+1| - |x| + |x-2|$ est représenté ci-dessous.

Démonstration Tout simplement, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

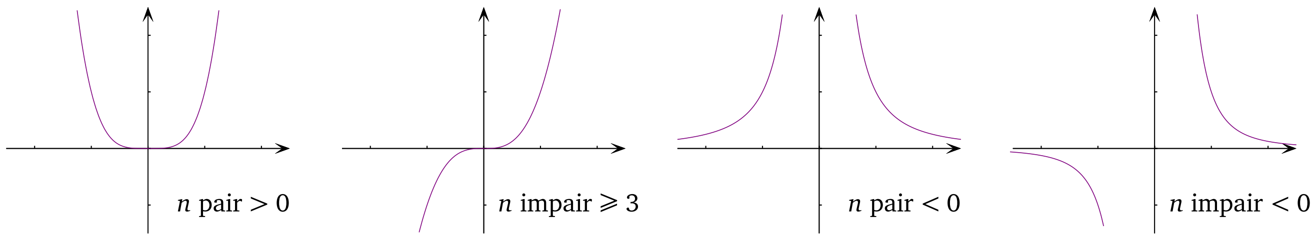


$$f(x) = \begin{cases} (x+1) & -x & +(x-2) & = & x-1 & \text{si } x \geqslant 2 \\ (x+1) & -x & -(x-2) & = & 3-x & \text{si } 0 \leqslant x < 2 \\ (x+1) & +x & -(x-2) & = & x+3 & \text{si } -1 \leqslant x < 0 \\ -(x+1) & +x & -(x-2) & = & 1-x & \text{si } x < -1, \end{cases}$$

et nous n'avons alors plus qu'à tracer des morceaux de droites selon les principes de la remarque précédente.

4.2 Fonctions polynomiales et rationnelles

Théorème **(Fonctions puissances entières)** Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, la fonction $x \longmapsto x^n$ est définie et dérivable sur son ensemble de définition, à savoir $\mathbb{R}$ si $n \geqslant 0$ et $\mathbb{R}^*$ si $n < 0$, de dérivée $x \longmapsto nx^{n-1}$.



Nous aurons plus tard dans l'année un chapitre « Polynômes » et un chapitre « Fractions rationnelles » importants. Il s'agit ici seulement de faire rapidement connaissance avec ces objets.

Définition **(Fonctions polynomiales et rationnelles)**

- On appelle *fonction polynomiale* toute fonction $P : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de la forme $x \longmapsto a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ avec $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Les réels $a_0, \ldots, a_n$ sont appelés les *coefficients de P* et le plus grand exposant de x doté d'un coefficient non nul est appelé le *degré de P*.
- On appelle *fonction rationnelle* tout quotient d'une fonction polynomiale par une fonction polynomiale non nulle.

Exemple La fonction $x \longmapsto 3x^5 - x^4 + 7x^2 + x - 2$ est polynomiale de degré 5.

✎ En pratique ✎ Pour calculer la limite en $+\infty$ ou $-\infty$ d'une fonction polynomiale ou rationnelle, on factorise par le terme de plus haut degré au numérateur et au dénominateur, puis on simplifie. Par exemple :

$$4x^5 - 6x^4 + 5 = \overbrace{4x^5}^{\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty} \times \underbrace{\left(1 - \frac{3}{2x} + \frac{5}{4x^5}\right)}_{\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \qquad \text{et} \qquad \frac{x^2+2x+7}{3x^2-1} = \frac{x^2\left(1 + \dfrac{2}{x} + \dfrac{7}{x^2}\right)}{3x^2\left(1 - \dfrac{1}{3x^2}\right)} = \frac{1}{3} \times \frac{1 + \dfrac{2}{x} + \dfrac{7}{x^2}}{1 - \dfrac{1}{3x^2}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{3}.$$

Définition-théorème **(Racine d'une fonction polynomiale)** Soient $P : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction polynomiale et $\lambda \in \mathbb{R}$.

- On dit que λ est une *racine de P* si : $\quad P(\lambda) = 0$.
- **Factorisation par une racine :** λ est racine de P si et seulement s'il existe une fonction polynomiale $Q : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\quad P(x) = (x - \lambda)Q(x)$.

Exemple La fonction $x \overset{f}{\longmapsto} x^3 - 3x^2 + x + 3$ s'annule en 2, et en effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(x) = (x-2)\big(x^2 - x - 1\big)$.

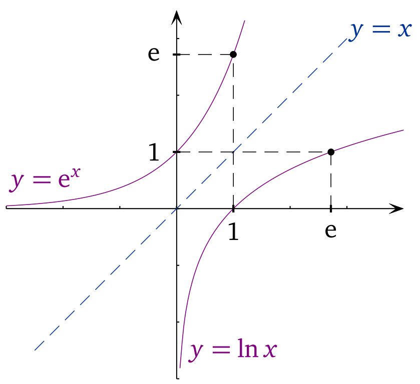
✌ **Explication** ✌ Ce chapitre est consacré aux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, mais on peut bien sûr définir des fonctions polynomiales et rationnelles de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ au moyen de coefficients complexes et disposer naturellement d'une notion de racine complexe. Le nombre i est par exemple racine de $x \longmapsto x^2 + 1$, d'où la factorisation suivante pour tout $x \in \mathbb{C}$: $x^2 + 1 = (x - \mathrm{i})(x + \mathrm{i})$.

4.3 Fonctions exponentielle, logarithme et puissances

Définition-théorème (Fonctions exponentielle et logarithme) La fonction exponentielle exp est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée elle-même. On pose $\mathrm{e}^x = \exp(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et le nombre e^1 est noté e : $\mathrm{e} \approx 2,718$.

La fonction logarithme (népérien) ln est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ de dérivée la fonction inverse $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$.

- **Réciprocité :** Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\ln \mathrm{e}^x = x$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$: $\mathrm{e}^{\ln x} = x$. Conséquence : les graphes d'exp et ln sont symétriques l'un de l'autre par rapport à la droite d'équation $y = x$ — nous y reviendrons plus loin.



- **Transformation somme/produit :** Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$: $\mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^x \mathrm{e}^y$, donc en particulier : $\mathrm{e}^{-x} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^x}$, et pour tous $x, y \in \mathbb{R}_+^*$:
$$\ln(xy) = \ln x + \ln y, \qquad \text{donc en particulier :} \quad \ln \frac{1}{x} = -\ln x.$$
- **Croissances comparées :**
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^x} = 0, \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to 0} x \ln x = 0.$$
- **Inégalités classiques :** Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\mathrm{e}^x \geqslant x + 1$ et pour tout $x \in \,]-1, +\infty[$: $\ln(1+x) \leqslant x$.

✖ **Attention !** ✖ Le réel e^x n'est pas « e multiplié x fois par lui-même », car en général x n'est pas un entier naturel — que signifierait « e multiplié $\sqrt{2}$ fois par lui-même » ? La notation « puissance » de e^x n'est qu'une **NOTATION**, utilisée par souci de commodité parce que l'exponentielle transforme les sommes en produits comme les puissances classiques. Mais dans ce cas, qu'est-ce donc qu'e^x si ce n'est pas « e multiplié x fois par lui-même » ? Mystère, mystère...

Jusqu'ici, nous avions seulement défini les puissances x^n pour n **ENTIER**. Nous pouvons maintenant généraliser.

Définition (Puissances quelconques et racines $n^{\text{èmes}}$ d'un réel STRICTEMENT POSITIF) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

- Pour tout $y \in \mathbb{R}$, on appelle x *puissance* y le réel : $x^y = \mathrm{e}^{y \ln x}$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ (**ENTIER**, donc), on appelle *racine $n^{\text{ème}}$ de x* le réel : $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$.

✖ **Attention !** ✖

- Cette re-définition : $x^y = \mathrm{e}^{y \ln x}$ n'est valable que pour des valeurs **STRICTEMENT POSITIVES** de x à cause du $\ln x$.
- Ici aussi, la notation « puissance » n'est qu'une **NOTATION**, x^y n'est pas le produit y fois de x. Il n'existe aucune autre définition de x^y dans le cas où y est un réel quelconque. Par conséquent, quand vous voyez x^y quelque part, **IL FAUT** que l'exponentielle et le logarithme vous sautent aux yeux instantanément.

Exemple Pour tout $x > 1$: $x^{\frac{\ln \ln x}{\ln x}} = \mathrm{e}^{\frac{\ln \ln x}{\ln x} \times \ln x} = \mathrm{e}^{\ln \ln x} = \ln x$.

Théorème (Propriétés algébriques des puissances) La nouvelle définition des puissances généralise bien l'ancienne.

(i) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, les définitions : $x^n = x \times x \times \ldots \times x$ (n fois) et : $x^n = e^{n \ln x}$ coïncident.

(ii) Pour tous $x, x' \in \mathbb{R}_+^*$ et $y, y' \in \mathbb{R}$:

$$\ln\left(x^y\right) = y \ln x, \qquad x^{y+y'} = x^y x^{y'}, \qquad x^{yy'} = \left(x^y\right)^{y'}, \qquad (xx')^y = x^y x'^y \qquad \text{et} \qquad x^{-y} = \frac{1}{x^y} = \left(\frac{1}{x}\right)^y.$$

Démonstration

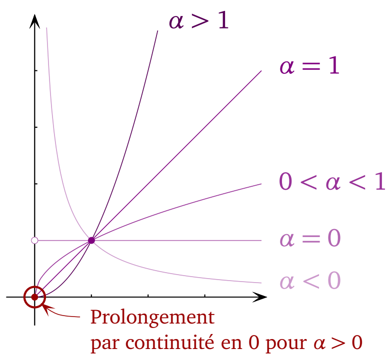
(i) Tout simplement : $e^{n \ln x} = e^{\overbrace{\ln x + \ldots + \ln x}^{n \text{ fois}}} = \overbrace{e^{\ln x} \times \ldots \times e^{\ln x}}^{n \text{ fois}} = \overbrace{x \times \ldots \times x}^{n \text{ fois}}.$

(ii) $\ln\left(x^y\right) = \ln\left(e^{y \ln x}\right) = y \ln x.$ $\qquad x^{y+y'} = e^{(y+y')\ln x} = e^{y \ln x + y' \ln x} = e^{y \ln x} e^{y' \ln x} = x^y x^{y'}.$

$x^{yy'} = e^{yy' \ln x} = e^{y' \ln(x^y)} = \left(x^y\right)^{y'}.$ $\qquad (xx')^y = e^{y \ln(xx')} = e^{y \ln x + y \ln x'} = e^{y \ln x} e^{y \ln x'} = x^y x'^y.$

$x^{-y} = e^{-y \ln x} = \dfrac{1}{e^{y \ln x}} = \dfrac{1}{x^y}$ et $x^{-y} = e^{-y \ln x} = e^{y \ln\left(\frac{1}{x}\right)} = \left(\dfrac{1}{x}\right)^y.$ ∎

Théorème (Étude des fonctions puissances) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.



(i) La fonction $x \longmapsto x^\alpha$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ de dérivée $x \longmapsto \alpha x^{\alpha - 1}$.

(ii) **Positions relatives :**

Pour tous $x \in]0,1]$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$: $\quad \alpha \leqslant \beta \implies x^\beta \leqslant x^\alpha.$

Pour tous $x \in [1, +\infty[$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$: $\quad \alpha \leqslant \beta \implies x^\alpha \leqslant x^\beta.$

En particulier :

— pour $x \in]0,1]$: $\quad 0 \leqslant \ldots \leqslant x^3 \leqslant x^2 \leqslant x \leqslant 1 \leqslant \dfrac{1}{x} \leqslant \dfrac{1}{x^2} \leqslant \dfrac{1}{x^3} \leqslant \ldots$

— pour $x \in [1, +\infty[$: $\quad 0 \leqslant \ldots \leqslant \dfrac{1}{x^3} \leqslant \dfrac{1}{x^2} \leqslant \dfrac{1}{x} \leqslant 1 \leqslant x \leqslant x^2 \leqslant x^3 \leqslant \ldots$

(iii) **Prolongement par continuité en 0 pour $\alpha > 0$:** Dans le cas où $\alpha > 0$, on prolonge la fonction $x \longmapsto x^\alpha$ en 0 en posant : $0^\alpha = 0$. La nouvelle fonction ainsi obtenue est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$ tout entier, y compris en 0. Un tel prolongement est appelé *prolongement par continuité*.

✖ **Attention !** ✖ Pour $\alpha \in]0,1[$, la fonction $x \longmapsto x^\alpha$ est continue en 0 mais elle y a une tangente verticale, signe qu'elle n'est pas dérivable en 0. C'est notamment ce qui arrive à la fonction racine carrée $\sqrt{\cdot}$.

Démonstration

(i) $x \overset{f}{\longmapsto} e^{\alpha \ln x}$ est dérivable comme composée et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$: $\quad f'(x) = \dfrac{\alpha}{x}\, e^{\alpha \ln x} = \alpha x^{-1} x^\alpha = \alpha x^{\alpha - 1}.$

(ii) Soient $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ avec : $\alpha \leqslant \beta$.

— Si $x \in]0,1]$: $\ln x \leqslant 0$, donc : $\beta \ln x \leqslant \alpha \ln x$, et donc : $x^\beta = e^{\beta \ln x} \leqslant e^{\alpha \ln x} = x^\alpha$.

— Si $x \in [1, +\infty[$: $\ln x \geqslant 0$, donc : $\alpha \ln x \leqslant \beta \ln x$, et donc : $x^\alpha = e^{\alpha \ln x} \leqslant e^{\beta \ln x} = x^\beta$.

(iii) Pour $\alpha > 0$: $\lim\limits_{x \to 0} x^\alpha = 0$, donc on obtient une fonction continue en 0 en posant : $0^\alpha = 0$. ∎

Théorème (Croissances comparées des fonctions logarithme, exponentielle et puissances) Le principe général, c'est que l'exponentielle est plus puissante que les puissances, qui sont elles-mêmes plus puissantes que le logarithme.

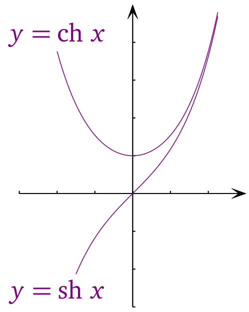
Précisément, pour tous $\alpha > 0$ et $\beta > 0$: $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^\alpha}{e^x} = 0, \qquad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha} = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim\limits_{x \to 0} x^\alpha |\ln x|^\beta = 0.$

4.4 Fonctions hyperboliques sh, ch et th

Définition-théorème (Fonctions sinus hyperbolique et cosinus hyperbolique) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on appelle *sinus hyperbolique de x* le réel : $\operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ et *cosinus hyperbolique de x* le réel : $\operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.

Les fonctions sinus hyperbolique et cosinus hyperbolique, respectivement impaire et paire, sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ avec : $\operatorname{sh}' = \operatorname{ch}$ et $\operatorname{ch}' = \operatorname{sh}$.

Enfin, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$.



Démonstration Les variations de ch et sh sont étudiées sur le tableau ci-contre, et pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = \big(\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x\big) \times \big(\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x\big) = e^x \times e^{-x} = 1$. ■

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\operatorname{ch} x$		$+$	
$\operatorname{sh} x$	$\nearrow$	0	$\nearrow$
$\operatorname{sh} x$	$-$	0	$+$
$\operatorname{ch} x$	$\searrow$	1	$\nearrow$

Exemple Les solutions de l'équation : $\operatorname{ch} x = 2$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ sont :

$$\ln\big(2+\sqrt{3}\big) \qquad \text{et} \qquad \ln\big(2-\sqrt{3}\big).$$

Démonstration Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\operatorname{ch} x = 2 \iff \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = 2 \iff e^x - 4 + e^{-x} = 0$

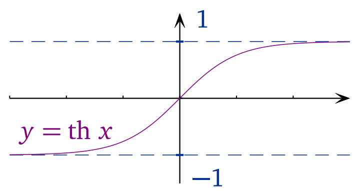
$$\overset{\times e^x}{\iff} \quad \big(e^x\big)^2 - 4e^x + 1 = 0 \quad \overset{\text{Second degré en } e^x}{\iff} \quad e^x = \frac{4+\sqrt{12}}{2} \quad \text{ou} \quad e^x = \frac{4-\sqrt{12}}{2}$$

$$\iff \quad e^x = 2+\sqrt{3} \quad \text{ou} \quad e^x = 2-\sqrt{3} \quad \underset{2-\sqrt{3}>0}{\overset{2+\sqrt{3}>0}{\iff}} \quad x = \ln\big(2+\sqrt{3}\big) \quad \text{ou} \quad x = \ln\big(2-\sqrt{3}\big).$$

Définition-théorème (Fonction tangente hyperbolique) La fonction *tangente hyperbolique* est définie sur $\mathbb{R}$ par la relation : $\operatorname{th} = \dfrac{\operatorname{sh}}{\operatorname{ch}}$.

Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et impaire et : $\operatorname{th}' = 1 - \operatorname{th}^2 = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2}$.

Elle possède enfin une asymptote d'équation $y = 1$ au voisinage de $+\infty$ (resp. $y = -1$ au voisinage de $-\infty$).



Démonstration La fonction th est dérivable par quotient et : $\operatorname{th}' = \dfrac{\operatorname{sh}' \times \operatorname{ch} - \operatorname{ch}' \times \operatorname{sh}}{\operatorname{ch}^2} = \dfrac{\operatorname{ch}^2 - \operatorname{sh}^2}{\operatorname{ch}^2}$, quantité qui vaut à la fois : $\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2}$ et $1 - \dfrac{\operatorname{sh}^2}{\operatorname{ch}^2} = 1 - \operatorname{th}^2$. L'étude des variations est très simple à mener. Pour la limite en $+\infty$: $\operatorname{th} x = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \dfrac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 1$. ■

4.5 Tableau récapitulatif des dérivées usuelles

Par convention, $0^\alpha = 0$ si $\alpha > 0$.

Fonction	Ensemble de définition	Ensemble de dérivabilité	Dérivée
e^x	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	e^x
$\ln x$	$\mathbb{R}_+^*$	$\mathbb{R}_+^*$	$\dfrac{1}{x}$
$x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$	$\mathbb{R}$ si $\alpha \in \mathbb{N}$ $\mathbb{R}^*$ si $\alpha \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ $\mathbb{R}_+^*$ si $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$	$\mathbb{R}$ si $\alpha \in \mathbb{N}$ $\mathbb{R}^*$ si $\alpha \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ $\mathbb{R}_+^*$ si $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$	$\alpha\, x^{\alpha-1}$
$\text{sh}\, x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\text{ch}\, x$
$\text{ch}\, x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\text{sh}\, x$
$\text{th}\, x = \dfrac{\text{sh}\, x}{\text{ch}\, x}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$1 - \text{th}^2 x = \dfrac{1}{\text{ch}^2 x}$

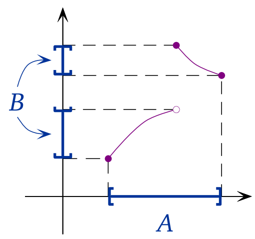
5 Introduction aux bijections et aux réciproques

5.1 Notions de bijection et de réciproque

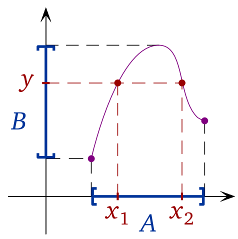
Définition (Bijection) Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}$ et $f : A \longrightarrow B$ une fonction. On dit que f est *bijective de A sur B*, ou que f est une *bijection de A sur B*, ou que f *réalise une bijection de A sur B*, si tout élément de B possède un et un seul antécédent par f, i.e. si :

$$\forall y \in B, \quad \exists\,!\, x \in A / \quad y = f(x).$$

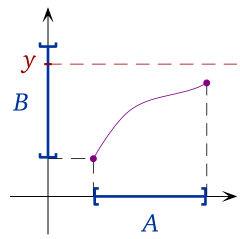
Explication



Fonction bijective de A sur B



Fonction NON bijective de A sur B, y a PLUSIEURS antécédents.



Fonction NON bijective de A sur B, y n'a AUCUN antécédent.

Attention !

- Une bijection n'est pas forcément strictement monotone. La figure de gauche le montre bien.
- À moins qu'il n'y ait pas d'ambiguïté, il faut toujours préciser « de A sur B » quand on évoque la bijectivité d'une fonction. À ce propos, on ne confondra pas « de A DANS B » avec « de A SUR B » :
  - Dire qu'une fonction est définie de A DANS B, c'est dire que ses valeurs sont toutes DES éléments de B mais pas forcément TOUS les éléments de B. Il y en a peut-être qu'elle n'atteint pas. C'est le même « dans » que dans l'expression « à valeurs dans B ».
  - Dire qu'une fonction est bijective de A SUR B, c'est au contraire affirmer en particulier qu'elle atteint TOUS les éléments de B, que son image est B tout entier.

Définition (Identité) Soit A une partie de $\mathbb{R}$. On appelle *identité de A* et on note Id_A la fonction $\left\{\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & A \\ x & \longmapsto & x. \end{array}\right.$

Définition (Réciproque) Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}$ et $f : A \longrightarrow B$ une fonction. On appelle *réciproque de f* toute fonction $g : B \longrightarrow A$ pour laquelle : $\quad g \circ f = \mathrm{Id}_A \quad$ et $\quad f \circ g = \mathrm{Id}_B$.

✌ **Explication** ✌ Les identités : $\quad \forall x \in A, \quad g \circ f(x) = x \quad$ et : $\quad \forall y \in B, \quad f \circ g(y) = y \quad$ expriment l'idée que g défait le travail que f opère — et vice versa. Ce que l'une tricote, l'autre le détricote.

Exemple

- Les fonctions exponentielle et logarithme sont réciproques l'une de l'autre car pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\quad \ln e^x = x \quad$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$: $\quad e^{\ln x} = x$.
- Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Les fonctions $x \longmapsto x^\alpha$ et $x \longmapsto x^{\frac{1}{\alpha}}$ sont réciproques l'une de l'autre car pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$: $\quad \left(x^\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}} = x$ et $\quad \left(x^{\frac{1}{\alpha}}\right)^\alpha = x$. $\quad$ C'est en particulier le cas des fonctions $x \longmapsto x^n$ et $x \longmapsto \sqrt[n]{x}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ sur $\mathbb{R}_+$.

Théorème (Bijectivité et réciproque) Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}$ et $f : A \longrightarrow B$ une fonction.

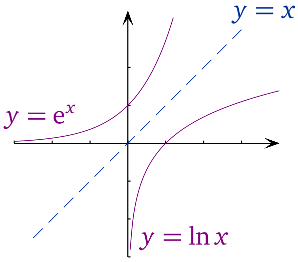
f est bijective de A sur B si et seulement si f possède une réciproque définie sur B et à valeurs dans A.

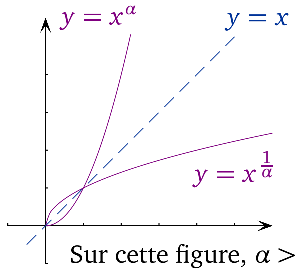
Une telle réciproque est alors unique, appelée LA réciproque de f et notée f^{-1}. Pour tous $x \in A$ et $y \in B$:

$$y = f(x) \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = f^{-1}(y).$$

Cette équivalence signifie géométriquement que le graphe de f et celui de f^{-1} sont symétriques l'un de l'autre par rapport à la droite d'équation $y = x$.

✌ **Explication** ✌ La symétrie des graphes de f et f^{-1} par rapport à la droite d'équation $y = x$ se visualise aisément sur les figures ci-contre. La fonction exponentielle est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$, tandis qu'à l'inverse la fonction logarithme est bijective de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^*$, la fonction $x \longmapsto x^\alpha$ est bijective de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}_+^*$ de réciproque $x \longmapsto x^{\frac{1}{\alpha}}$.





Sur cette figure, $\alpha > 1$.

Démonstration Pour ne pas perdre de temps, nous laisserons de côté l'unicité de la réciproque.

- Supposons f bijective de A sur B : $\quad \forall y \in B, \quad \exists\,!\, x \in A / \quad y = f(x) \quad$ et introduisons l'application g qui, à tout $y \in B$, associe l'unique antécédent de y par f. Nous allons montrer que g est une réciproque de f.
  — Pour tout $y \in B$: $\quad y = f\big(g(y)\big) \quad$ par définition de $g(y)$ comme antécédent de y par f. Conclusion : $f \circ g = \mathrm{Id}_B$.
  — Pour tout $x \in A$, $g\big(f(x)\big)$ est par définition de g l'unique antécédent de $f(x)$ par f, or x est justement un tel antécédent de $f(x)$ par f, donc : $\quad g\big(f(x)\big) = x \quad$ par unicité. Conclusion : $\quad g \circ f = \mathrm{Id}_A$.
- Supposons réciproquement que f possède une réciproque g et montrons qu'alors f est bijective de A sur B. Soit $y \in B$. Nous devons prouver que y possède UN ET UN SEUL antécédent par f dans A.
  — Par définition de g : $\quad y = f\big(g(y)\big), \quad$ donc y possède AU MOINS UN antécédent par f.
  — Pour montrer qu'il en possède AU PLUS UN, donnons-nous-en deux x et x' : $\quad y = f(x) = f(x')$. $\quad$ Alors : $x = g\big(f(x)\big) = g\big(f(x')\big) = x' \quad$ par définition de g, donc : $\quad x = x' \quad$ — unicité. ■

Théorème **(Réciproque d'une fonction bijective monotone/impaire)** Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}$ et $f : A \longrightarrow B$ une fonction bijective de A sur B.

(i) Si f est monotone, elle l'est strictement et f^{-1} est strictement monotone de même sens de variation.

(ii) Si A est symétrique par rapport à 0 et si f est impaire, B est symétrique par rapport à 0 et f^{-1} est impaire.

Démonstration

(i) Dans le cas où f est croissante : $\forall x, y \in A, \quad x < y \implies f(x) \leqslant f(y)$. En fait f est STRICTEMENT croissante, car s'il était possible d'avoir : $f(x) = f(y)$, x et y seraient DEUX antécédents d'un même élément de B alors que f est supposée bijective.

Montrons que f^{-1} est strictement croissante. Soient $y, y' \in B$ avec : $y < y'$. Or si : $f^{-1}(y) \geqslant f^{-1}(y')$, alors par croissance de f : $y = f\big(f^{-1}(y)\big) \geqslant f\big(f^{-1}(y')\big) = y'$ — contradiction.

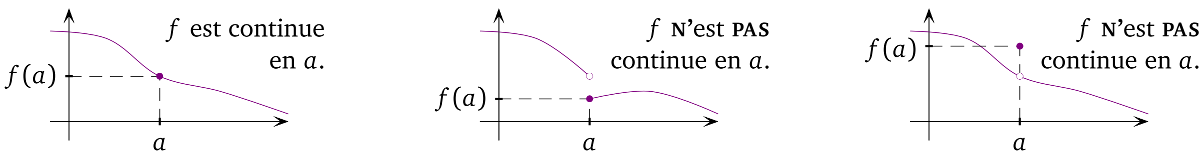
(ii) Soit $y \in B$, disons : $y = f(x)$ pour un certain $x \in A$. Or A est symétrique par rapport à 0, donc : $-x \in A$. Et comme f est impaire : $-y = -f(x) = f(-x) \in B$. Conclusion : B est symétrique par rapport à 0.

Par ailleurs : $f^{-1}(-y) = f^{-1}\big(-f(x)\big) = f^{-1}\big(f(-x)\big) = -x = -f^{-1}(y)$, donc f^{-1} est impaire. ■

5.2 LE TVI STRICTEMENT MONOTONE

Nous reviendrons très longuement et avec démonstrations sur les énoncés de ce paragraphe au chapitre « Continuité ».

Définition **(Continuité)** Soient I un intervalle, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $a \in I$.
On dit que f est *continue en a* si : $\lim\limits_{a} f = f(a)$.

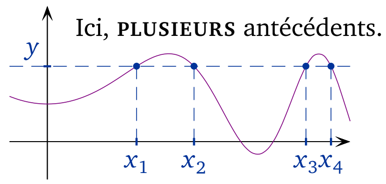


Théorème **(Dérivabilité et continuité)** Soient I un intervalle, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in I$. Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.

✖ **ATTENTION !** ✖ La réciproque est fausse ! Pensez à la valeur absolue ou à la racine carrée en 0.

Théorème **(Théorème des valeurs intermédiaires ou TVI)**
Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que : $a < b$ et $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction CONTINUE.
Alors tout réel y compris entre $f(a)$ et $f(b)$ possède AU MOINS UN antécédent par f dans $[a, b]$:

$$\exists\, x \in [a, b] / \quad y = f(x).$$

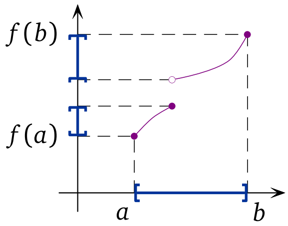


✖ **ATTENTION !** ✖ Avant de poursuivre, revenons un instant sur la notion d'image d'un intervalle par une fonction f.

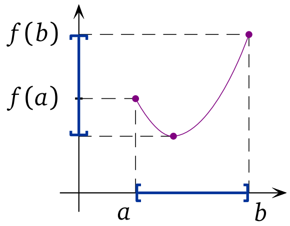
En général : $f\big([a, b]\big) \neq \big[f(a), f(b)\big], \quad f\big(]a, b[\big) \neq \big]f(a), f(b)\big[, \quad$ etc.

Nous allons voir que ces égalités en apparence naturelles se déduisent généralement de deux hypothèses importantes, la CONTINUITÉ et la STRICTE MONOTONIE.

Ici, f n'est pas continue sur $[a,b]$.



Ici, f n'est pas strictement monotone sur $[a,b]$.

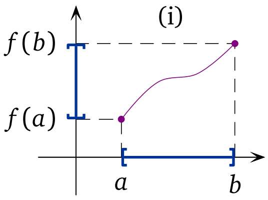


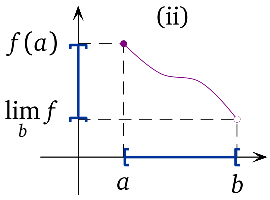
Théorème (TVI strictement monotone) Soient $a,b\in\mathbb{R}$ tels que : $a<b$.

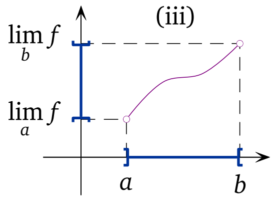
(i) Soit $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction CONTINUE et STRICTEMENT CROISSANTE.
Alors f est bijective de $[a,b]$ sur $\big[f(a),f(b)\big]$.

(ii) Soit $f:[a,b[\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction CONTINUE et STRICTEMENT DÉCROISSANTE.
Alors f est bijective de $[a,b[$ sur $\big]\lim_b f, f(a)\big]$.

(iii) Soit $f:]a,b[\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction CONTINUE et STRICTEMENT CROISSANTE.
Alors f est bijective de $]a,b[$ sur $\big]\lim_a f,\lim_b f\big[$.







Il existe bien sûr d'autres versions du théorème selon que f est croissante ou décroissante et définie ou non en a et b, avec éventuellement : $a=-\infty$ et $b=+\infty$.

✖ **ATTENTION !** ✖ Nous allons utiliser ce théorème une infinité de fois cette année. Brûleront donc en enfer tous ceux d'entre vous qui l'utiliseront sans soin. TROIS choses essentielles :

la CONTINUITÉ, la STRICTE MONOTONIE, les VALEURS/LIMITES AUX BORNES.

Exemple La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(0)=1$ et pour tout $x\in\mathbb{R}^*$: $f(x)=\dfrac{e^x-1}{x}$ est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

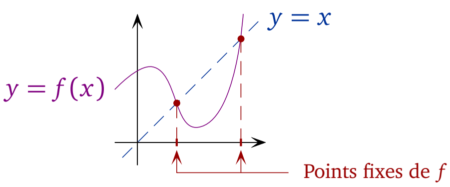
Démonstration

- **Continuité :** Comme quotient, f est continue sur $\mathbb{R}^*$ — et en 0 ? Par définition du nombre dérivé : $\lim_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{x}=\exp'(0)=e^0=1$, i.e. : $\lim_0 f=f(0)$ — continuité en 0. Ainsi f est continue sur $\mathbb{R}$ tout entier.
- **Stricte monotonie :** Comme quotient, f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et pour tout $x\in\mathbb{R}^*$: $f'(x)=\dfrac{e^x(x-1)+1}{x^2}$. Le signe de f' dépend donc du signe de la fonction dérivable $x\overset{g}{\longmapsto}e^x(x-1)+1$ sur $\mathbb{R}$, or pour tout $x\in\mathbb{R}$: $g'(x)=xe^x$. D'après le tableau ci-contre, f est finalement strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- **Étude aux bornes :** $\lim_{-\infty} f=0$ et $\lim_{+\infty} f=+\infty$.
- On conclut grâce au TVI strictement monotone.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	
$g(x)$		$+$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	$\|$	$+$	
$f(x)$	0		$\nearrow$		$+\infty$

Définition (Point fixe)

Soient A une partie de $\mathbb{R}$ et $f:A\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction. On appelle *point fixe de f* tout élément x de A pour lequel : $f(x)=x$.



✎ **En pratique** ✎ Étudier les POINTS FIXES DE f, c'est étudier les ZÉROS DE $x\longmapsto f(x)-x$.

Exemple La fonction $x \longmapsto e^{-x}$ possède un et un seul point fixe sur $\mathbb{R}$.

Démonstration La fonction $x \overset{f}{\longmapsto} e^{-x} - x$ est continue sur $\mathbb{R}$, strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions strictement décroissantes, et enfin : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, donc d'après le TVI strictement monotone, f s'annule une et une seule fois sur $\mathbb{R}$, ce qui est bien le résultat voulu.

5.3 Continuité et dérivabilité d'une réciproque

Les théorèmes de ce paragraphe seront démontrés dans les chapitres « Continuité » et « Dérivabilité ».

Théorème (Continuité et dérivabilité d'une réciproque) Soient I et J deux intervalles et $f : I \longrightarrow J$ une fonction bijective de I sur J.

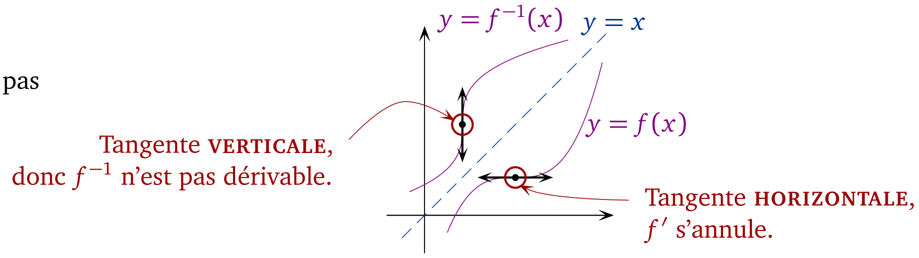
- **Continuité :** Si f est continue sur I, alors f^{-1} est continue sur J.
- **Dérivabilité :** Si f est dérivable sur I ET SI f' NE S'ANNULE PAS SUR I, alors f^{-1} est dérivable sur J et :

$$\left(f^{-1}\right)' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}.$$

Démonstration La continuité et la dérivabilité de f^{-1} demandent du travail, mais la formule de dérivation de f^{-1} en découle aisément ensuite, il suffit de dériver la relation « $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_J$ » : $\left(f^{-1}\right)' \times f' \circ f^{-1} = 1$. ■

✖ **Attention !** ✖

L'hypothèse selon laquelle f' ne s'annule pas est essentielle !



Exemple Faisons l'hypothèse que nous connaissons tout de l'exponentielle mais rien du logarithme. La fonction logarithme peut dans ce cas être DÉFINIE comme comme réciproque de l'exponentielle : $\ln = \exp^{-1}$. Or l'exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée $\exp' = \exp$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, donc en vertu du théorème précédent, la fonction logarithme est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$: $\ln'(x) = \left(\exp^{-1}\right)'(x) = \dfrac{1}{\exp' \circ \exp^{-1}(x)} = \dfrac{1}{\exp \circ \ln(x)} = \dfrac{1}{x}$.