RELATIONS BINAIRES

Dans tout ce chapitre, E est un ensemble quelconque.

1 RELATIONS BINAIRES SUR UN ENSEMBLE

- Les relations sont partout — et dans le monde mathématique, et dans la vraie vie. Nous passons notre temps à comparer des objets, à les mettre en rapport les uns avec les autres selon tel ou tel aspect. Les phrases suivantes, pourtant diverses, sont toutes l'affirmation d'un lien entre deux objets : « Minou et Matou ont la même couleur de poils », « $3 \leqslant 5$ », « Machin est amoureux de Bidule », « 4 divise 12 », « Pierre est plus âgé que Paul », « $1+i$ et $1-i$ ont le même module », etc.
- De quelle manière pourrions-nous définir proprement la notion de relation en mathématiques ? Quel **OBJET** la relation $<$ est-elle sur l'ensemble $[\![1,4]\!]$? Ce qui est sûr, c'est qu'elle est régie par les relations suivantes :
$$1<2, \qquad 1<3, \qquad 1<4, \qquad 2<3, \qquad 2<4 \qquad \text{et} \qquad 3<4.$$
Formellement, nous pouvons **DÉFINIR** la relation $<$ comme l'ensemble : $\big\{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)\big\}$ des couples $(x,y) \in [\![1,4]\!]^2$ pour lesquels : $x<y$, car connaître cet ensemble, c'est exactement connaître la relation $<$. Dans ce cas, la relation $\leqslant$ sur $[\![1,4]\!]$ est l'ensemble : $\big\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,3),(2,4),(3,3),(3,4)\big\}$. Ces remarques préliminaires conduisent à la définition suivante :

Définition (Relation binaire sur un ensemble) On appelle *relation binaire sur E* toute partie de $E \times E$.

Si $\mathscr{R}$ est une telle relation, la proposition : $(x,y) \in \mathscr{R}$ sera notée de préférence : $x \mathscr{R} y$ pour tous $x,y \in E$, et lue : « x est en relation avec y par $\mathscr{R}$ ».

✖ **ATTENTION !** ✖ Parce que le couple (x,y) n'est pas le couple (y,x), la relation : $x \mathscr{R} y$ peut être vraie sans que la relation : $y \mathscr{R} x$ le soit. Vous savez sans doute qu'on peut être amoureux sans être aimé en retour.

Exemple Vous connaissez depuis toujours certaines relations binaires :

— la relation d'égalité $=$ sur E, — les relations $\leqslant$ et $<$ sur $\mathbb{R}$, — la relation d'inclusion $\subset$ sur $\mathscr{P}(E)$,

— la relation $\leqslant$ sur $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, définie pour toutes fonctions $f,g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ par : $f \leqslant g \iff \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \leqslant g(x)$,

— la relation de divisibilité $|$ sur $\mathbb{Z}$, définie pour tous $m,n \in \mathbb{Z}$ par : $m|n \iff \exists\, k \in \mathbb{Z}/\ n=km$,

— pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la relation $\equiv\ [\alpha]$ de congruence modulo α sur $\mathbb{R}$, définie pour tous $x,y \in \mathbb{R}$ par :
$$x \equiv y\ [\alpha] \iff \exists\, k \in \mathbb{Z}/\ x=y+k\alpha.$$

Définition (Propriétés des relations binaires) Soit $\mathscr{R}$ une relation binaire sur E.

- On dit que $\mathscr{R}$ est *réflexive* si : $\forall x \in E,\ x \mathscr{R} x$.
- On dit que $\mathscr{R}$ est *transitive* si : $\forall x,y,z \in E,\ \big(x \mathscr{R} y \text{ et } y \mathscr{R} z\big) \implies x \mathscr{R} z$.
- On dit que $\mathscr{R}$ est *symétrique* si : $\forall x,y \in E,\ x \mathscr{R} y \implies y \mathscr{R} x$.
- On dit que $\mathscr{R}$ est *antisymétrique* si : $\forall x,y \in E,\ \big(x \mathscr{R} y \text{ et } y \mathscr{R} x\big) \implies x=y$.

Exemple

- La relation d'égalité $=$ sur E est réflexive, transitive, symétrique et antisymétrique.
- Les relations $\leqslant$ sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ sont réflexives, transitives et antisymétriques. Elles ne sont pas symétriques car par exemple : $1 \leqslant 2$ mais : $2 \nleqslant 1$, et de même : $(x \longmapsto 1) \leqslant (x \longmapsto 2)$ mais : $(x \longmapsto 2) \nleqslant (x \longmapsto 1)$.
- La relation $<$ sur $\mathbb{R}$ est transitive et antisymétrique, mais elle n'est ni réflexive, ni symétrique.

- La relation $|$ de divisibilité sur $\mathbb{Z}$ est réflexive et transitive, mais elle n'est pas antisymétrique car par exemple : $-2|2$ et $2|-2$ alors que : $-2 \neq 2$.
- La relation d'inclusion $\subset$ sur $\mathscr{P}(E)$ est réflexive, transitive et antisymétrique.
- La relation « avoir le même signe » sur $\mathbb{R}^*$ est réflexive, transitive et symétrique.

Définition (Éléments comparables, relation binaire totale/partielle) Soit $\mathscr{R}$ une relation binaire sur E.

- Deux éléments $x \in E$ et $y \in E$ sont dits *comparables (par $\mathscr{R}$)* si : $x \mathscr{R} y$ ou $y \mathscr{R} x$ — éventuellement les deux.
- On dit que la relation $\mathscr{R}$ est *totale* si deux éléments quelconques de E sont toujours comparables par $\mathscr{R}$, i.e. si :

$$\forall x, y \in E, \qquad x \mathscr{R} y \quad \text{ou} \quad y \mathscr{R} x.$$

  Une relation non totale est dite *partielle*.

✖ **Attention !** ✖ Toute relation binaire n'est pas totale ! Quand vous voulez montrer que $x \mathscr{R} y$ pour certains $x, y \in E$, ne raisonnez pas par l'absurde en supposant que $y \mathscr{R} x$, il est possible qu'aucune de ces deux relations ne soit vraie.

Exemple

- La relation $\leqslant$ sur $\mathbb{R}$ est totale. En particulier, tous les réels sont comparables à 0 — positifs ou négatifs — et c'est pourquoi, par exemple, on a eu le droit de définir la fonction valeur absolue $|x|$ sur $\mathbb{R}$ en distinguant deux cas : $x \geqslant 0$ et $x < 0$.
- La relation $\leqslant$ sur $\mathbb{R}^\mathbb{R}$ est partielle car, par exemple, sin et cos ne sont pas comparables : $\sin \nleqslant \cos$ et $\cos \nleqslant \sin$.
- La relation de divisibilité $|$ sur $\mathbb{Z}$ est partielle car 2 et 3 ne sont comparables, on n'a ni : $2 \nmid 3$, ni : $3 \nmid 2$.
- La relation d'inclusion $\subset$ sur $\mathscr{P}(E)$ est partielle dès que E contient au moins deux éléments. En effet, pour tous a et b éléments DISTINCTS de E : $\{a\} \not\subset \{b\}$ et $\{b\} \not\subset \{a\}$.

2 Relations d'équivalence

Définition (Relation d'équivalence) On appelle *relation d'équivalence sur E* toute relation binaire sur E qui est à la fois réflexive, transitive et symétrique.

Les relations d'équivalence sont généralement notées $\sim$ ou $\simeq$ ou $\approx$ ou $\equiv$...

Exemple La relation d'égalité $=$ sur E et la relation « avoir le même signe » sur $\mathbb{R}^*$ sont des relations d'équivalence.

Exemple Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la relation $\equiv [\alpha]$ de congruence modulo α sur $\mathbb{R}$ est une relation d'équivalence.
De manière analogue, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la relation $\equiv [n]$ de congruence modulo n sur $\mathbb{Z}$ est une relation d'équivalence.

Démonstration Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

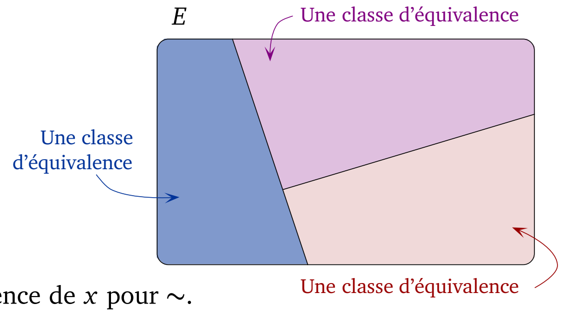
- **Réflexivité :** Pour tout $a \in \mathbb{R}$: $a = a + 0 \times \alpha$ avec : $0 \in \mathbb{Z}$, donc : $a \equiv a\ [\alpha]$.
- **Transitivité :** Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. On suppose que : $a \equiv b\ [\alpha]$ et $b \equiv c\ [\alpha]$, i.e. : $a = b + k\alpha$ et $b = c + l\alpha$ pour certains $k, l \in \mathbb{Z}$. Alors : $a = b + k\alpha = (c + l\alpha) + k\alpha = c + (k+l)\alpha$ avec : $k + l \in \mathbb{Z}$, donc : $a \equiv c\ [\alpha]$.
- **Symétrie :** Soient $a, b \in \mathbb{R}$. On suppose que : $a \equiv b\ [\alpha]$, i.e. : $a = b + k\alpha$ pour un certain $k \in \mathbb{Z}$. Alors : $b = a + (-k)\alpha$ avec : $-k \in \mathbb{Z}$, donc : $b \equiv a\ [\alpha]$.

Théorème (Classes d'équivalence d'une relation d'équivalence, ensemble quotient) Soit $\sim$ une relation d'équivalence sur E.

- Pour tout $x \in E$, l'ensemble $\left\{y \in E / \quad x \sim y\right\}$ est appelé la *classe d'équivalence de* x *(pour* $\sim$*)*.

  Les classes d'équivalences pour $\sim$ forment une *partition de* E. Cela revient à dire qu'elle sont non vides, que leur réunion est E tout entier, et qu'elles sont deux à deux égales ou disjointes.
- L'ensemble des classes d'équivalences de E pour $\sim$ est appelé l'*ensemble quotient de* E *par* $\sim$ et souvent noté $E/\sim$.

La notion d'ensemble quotient est hors programme mais il n'est pas inutile de l'avoir quelque part en tête. Vous noterez bien que le quotient $E/\sim$ est un **ENSEMBLE D'ENSEMBLES**, en l'occurrence un ensemble de parties de E.



Ce que ce théorème raconte, c'est que la relation d'équivalence $\sim$ peut être représentée comme une carte au sens géographique. Chaque classe d'équivalence est comme un pays à l'intérieur de E dont les éléments sont caractérisés par une certaine nationalité. Le monde E se trouve ainsi partitionné en pays.

On peut dire les choses autrement. Toute relation d'équivalence peut être exprimée en français sous la forme « Avoir le même (...) » : « avoir le même signe », « avoir le même reste de division euclidienne par n », etc.

Démonstration Pour tout $x \in E$, notons $\mathrm{cl}(x)$ la classe d'équivalence de x pour $\sim$.

- Pour tout $x \in E$: $\quad x \sim x \quad$ par réflexivité, donc : $\quad x \in \mathrm{cl}(x)$, $\quad$ donc en particulier $\mathrm{cl}(x)$ est non vide.
- Clairement : $\quad E = \bigcup_{x \in E} \mathrm{cl}(x)$, $\quad$ car pour tout $x \in E$: $\quad x \in \mathrm{cl}(x)$.
- Soient $x, y \in E$. Pour montrer que $\mathrm{cl}(x)$ et $\mathrm{cl}(y)$ sont égales ou disjointes, supposons-les **NON** disjointes et montrons qu'elles sont alors égales. Nous pouvons nous donner un élément z commun à $\mathrm{cl}(x)$ et $\mathrm{cl}(y)$. Par symétrie des rôles de x et y, il nous suffit de montrer que : $\quad \mathrm{cl}(x) \subset \mathrm{cl}(y)$. $\quad$ Soit $t \in \mathrm{cl}(x)$.

$$z \in \mathrm{cl}(x) \quad \text{donc :} \quad \left.\begin{array}{rll} z \in \mathrm{cl}(y) & \text{donc :} & y \sim z \\ x \sim z, & \text{puis :} & z \sim x \\ t \in \mathrm{cl}(x) & \text{donc :} & x \sim t \end{array}\right\} \quad \text{donc :} \quad y \sim t \quad \text{par transitivité.} \qquad \blacksquare$$

Exemple La relation « avoir le même signe » sur $\mathbb{R}^*$ possède deux classes d'équivalence, la classe $\mathbb{R}_+^*$ et la classe $\mathbb{R}_-^*$. L'ensemble quotient associé est donc l'ensemble d'ensembles $\left\{\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}_-^*\right\}$.

Exemple Soit $\alpha > 0$. Les classes d'équivalences de $\mathbb{R}$ pour la relation de congruence modulo α sont exactement les ensembles $\alpha\mathbb{Z} + x$, x décrivant $[0, \alpha[$, sans répétition. L'ensemble quotient associé est donc l'ensemble $\left\{\alpha\mathbb{Z} + x\right\}_{0 \leqslant x < \alpha}$.

Démonstration Le théorème d'existence et d'unicité de la partie entière peut être formulé de la manière suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exists\,!\,(k, \varepsilon) \in \mathbb{Z} \times [0, 1[/ \quad x = k + \varepsilon, \qquad \text{d'où en particulier :} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \exists\,!\,(k, \varepsilon) \in \mathbb{Z} \times [0, 1[/ \quad \frac{x}{\alpha} = k + \varepsilon,$$

et finalement, après multiplication par α : $\quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \exists\,!\; \varepsilon \in [0, \alpha[/ \quad x \equiv \varepsilon\ [\alpha]$. $\quad$ Cette proposition signifie que tout réel appartient à la classe d'équivalence pour $\equiv [\alpha]$ d'un et un seul élément de $[0, \alpha[$ — d'où le résultat.

Exemple Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Nous établirons au prochain chapitre « Arithmétique des entiers relatifs » le *théorème de la division euclidienne* suivant : $\quad \forall a \in \mathbb{Z}, \quad \exists\,!\; r \in [\![0, n-1]\!]/ \quad a \equiv r\ [n]$, $\quad$ selon lequel tout entier relatif appartient à la classe d'équivalence pour $\equiv [n]$ d'un et un seul élément de $[\![0, n-1]\!]$, donc que les classes d'équivalence de $\mathbb{Z}$ pour cette relation sont exactement $n\mathbb{Z}$, $n\,\mathbb{Z}+1, \ldots, n\mathbb{Z}+n-1$. On note traditionnellement $\dfrac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$ l'ensemble quotient $\left\{n\mathbb{Z}, n\mathbb{Z}+1, \ldots, n\mathbb{Z}+n-1\right\}$.

3 Relations d'ordre

Définition (Relation d'ordre) On appelle (*relation d'*) *ordre sur E* toute relation binaire sur E qui est à la fois réflexive, transitive et antisymétrique.

Les relations d'ordre sont généralement notées $\leqslant$ ou $\preccurlyeq$ ou $\lesssim$ ou $\precsim$…

Exemple Les relations $\leqslant$ sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ sont des relations d'ordre, ainsi que la relation d'inclusion $\subset$ sur $\mathscr{P}(E)$.

Exemple La relation de divisibilité $|$ n'est pas une relation d'ordre sur $\mathbb{Z}$, mais c'en est une sur $\mathbb{N}$.

Démonstration Nous avons déjà vu que la relation $|$ sur $\mathbb{Z}$ n'est pas antisymétrique. Travaillons donc sur $\mathbb{N}$.

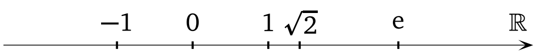
- **Réflexivité :** Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $n|n$ car : $n = 1 \times n$.
- **Transitivité :** Soient $n, n', n'' \in \mathbb{N}$ tels que : $n|n'$ et $n'|n''$. Montrons que : $n|n''$. Par hypothèse : $n' = kn$ et $n'' = k'n'$ pour certains $k, k' \in \mathbb{N}$, donc : $n'' = k'n' = kk'n$ avec $kk' \in \mathbb{N}$, donc : $n|n''$.
- **Antisymétrie :** Soient $n, n' \in \mathbb{N}$ tels que : $n|n'$ et $n'|n$. Montrons que : $n = n'$. Par hypothèse : $n' = kn$ et $n = k'n'$ pour certains $k, k' \in \mathbb{N}$, donc : $n = k'n' = kk'n$.
  - — Si $n = 0$: $n' = kn = 0$ donc : $n = n'$.
  - — Si $n \neq 0$: $kk' = 1$. Or k et k' sont des **entiers naturels**, donc : $k = k' = 1$, donc : $n = k'n' = n'$.

Le concept de relation d'ordre appelle quelques commentaires.

- Qu'attendons-nous intuitivement des notions de classement, hiérarchie, ordre, préférence ?
  - — Essentiellement la transitivité en fait, c'est ce qui compte le plus. Si A est plus grand que B et B plus grand que C, alors A est plus grand que C. Toute entorse à la transitivité contredit l'idée d'une hiérarchie.
  - — La réflexivité est imposée dans la définition des relations d'ordre mais aurait pu ne pas l'être. L'exiger revient simplement à privilégier les relations du type « inférieur **ou égal** ».
  - — L'antisymétrie est un autre choix conventionnel. La relation « être plus âgé (ou du même âge) que » sur l'ensemble des êtres humains est transitive et réflexive, mais non antisymétrique car deux individus distincts peuvent être nés au même instant. Bien que non antisymétrique, cette relation n'en est pas moins conçue intuitivement comme une relation de hiérarchie.

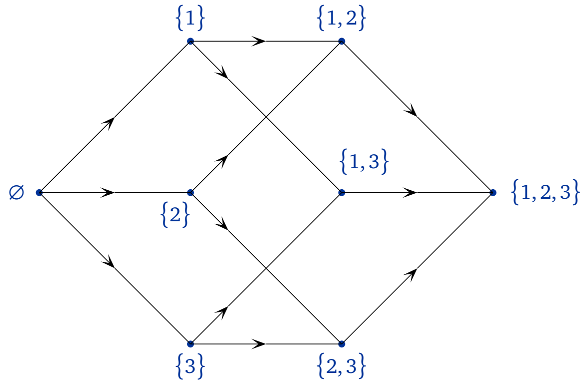
  Les relations d'ordre sont ainsi des exemples importants de hiérarchies, mais ne formalisent pas toutes les hiérarchies concevables.
- Il est d'usage, pour une relation notée $\preccurlyeq$, qu'on lise la relation : $x \preccurlyeq y$ ainsi : « x est plus petit que y ». Rien ne s'oppose cela dit à ce qu'on dise plutôt : « x est plus grand que y », c'est pure affaire de convention et il faut seulement être cohérent. Être plus grand en vieillesse, c'est aussi être plus petit en jeunesse par exemple.
- Enfin, les relations d'ordre excluent les boucles. Une boucle de la forme : $x_1 \preccurlyeq x_2 \preccurlyeq x_3 \preccurlyeq \ldots \preccurlyeq x_n \preccurlyeq x_1$ dans laquelle les éléments sont **distincts** et $n \geqslant 2$ est inconcevable, car la transitivité et l'antisymétrie de $\preccurlyeq$ forceraient l'égalité : $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

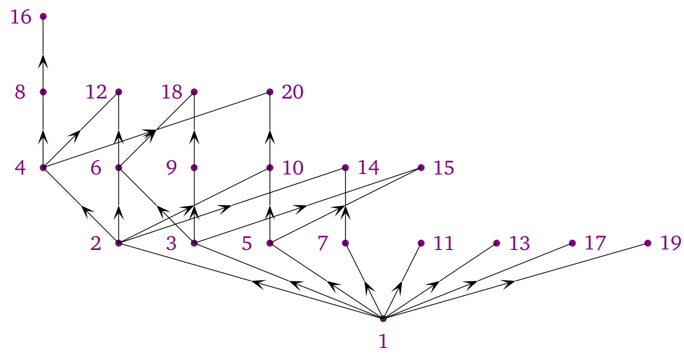
  Sans boucles, les relations d'ordre ont comme une orientation naturelle, en les parcourant on va toujours de l'avant, on ne revient jamais en arrière, on ne tourne jamais en rond. C'est un peu comme les réseaux fluviaux, les fleuves et les rivières coulent tous en direction de la mer et ne bouclent jamais. C'est précisément cette orientation qui nous invite à considérer que certains éléments sont plus petits/grands que d'autres.

  La relation $\leqslant$ sur $\mathbb{R}$ est une relation d'ordre **totale**. C'est bien pour cela qu'on peut la représenter comme une ligne unique, une fibre unique orientée contenant tous les réels.

  On a représenté ci-dessous à gauche la relation $\subset$ sur l'ensemble des parties de $\{1, 2, 3\}$ et à droite la relation de divisibilité $|$ sur $[\![1, 20]\!]$. Le fait que ces relations ne sont pas totales se visualise bien, il ne suffit pas d'**une** fibre pour représenter ces relations, il en faut plusieurs.





Définition (Relation stricte associée à une relation d'ordre) Soit $\preccurlyeq$ une relation d'ordre sur E. La relation $\prec$ sur E définie pour tous $x, y \in E$ par : $x \prec y \iff x \preccurlyeq y$ et $x \neq y$ est transitive et antisymétrique, appelée la *relation stricte associée à* $\preccurlyeq$.

Démonstration

- **Transitivité :** Soient $x, y, z \in E$. On suppose que : $x \prec y$ et $y \prec z$. En particulier : $x \preccurlyeq y$ et $y \preccurlyeq z$, donc : $x \preccurlyeq z$ par transitivité de $\preccurlyeq$. L'égalité : $x = z$ est-elle possible ? Si $x = z$, alors : $x \preccurlyeq y$ et $y \preccurlyeq x$, donc : $x = y$ par antisymétrie de $\preccurlyeq$ — or : $x \neq y$ par hypothèse. Comme voulu : $x \preccurlyeq z$ et $x \neq z$, i.e. : $x \prec z$.
- **Antisymétrie :** Soient $x, y \in E$. On suppose que : $x \prec y$ et $y \prec x$. En particulier : $x \preccurlyeq y$ et $y \preccurlyeq x$, donc : $x = y$ par antisymétrie de $\preccurlyeq$. ■

Exemple Naturellement, la relation usuelle $<$ sur $\mathbb{R}$ est la relation stricte de la relation $\leqslant$.

La fin du chapitre généralise rapidement certaines notions du chapitre « Compléments sur les réels ».

Définition (Majorant/minorant) Soient $\preccurlyeq$ une relation d'ordre sur E et A une partie de E.

- On dit que A est *majorée (pour* $\preccurlyeq$*)* s'il existe $M \in E$ tel que : $\forall a \in A, \quad a \preccurlyeq M$.
  Un tel M est appelé UN *majorant de* A. On dit aussi que A est *majorée par* M ou encore que M *majore* A.
- On dit que A est *minorée (pour* $\preccurlyeq$*)* s'il existe $m \in E$ tel que : $\forall a \in A, \quad m \preccurlyeq a$.
  Un tel m est appelé UN *minorant de* A. On dit aussi que A est *minorée par* m ou encore que m *minore* A.
- On dit que A est *bornée (pour* $\preccurlyeq$*)* si elle est à la fois majorée et minorée.

Exemple

- L'ensemble $\{8, 10, 12\}$ est minoré par 2 et majoré par 120 pour la relation de divisibilité $|$ sur $\mathbb{N}$.
- $\mathscr{P}(E)$ est minoré par $\varnothing$ et majoré par E pour la relation d'inclusion $\subset$.

Définition (Plus grand/petit élément, maximum/minimum) Soient $\preccurlyeq$ une relation d'ordre sur E et A une partie de E.

- On appelle *plus grand élément de* A ou *maximum de* A tout élément de A qui majore A.
  S'IL EN EXISTE UN, un tel plus grand élément est unique et donc appelé LE plus grand élément de A, noté $\max A$.
- On appelle *plus petit élément de* A ou *minimum de* A tout élément de A qui minore A.
  S'IL EN EXISTE UN, un tel plus petit élément est unique et donc appelé LE plus petit élément de A, noté $\min A$.

Démonstration Pour l'unicité, même preuve qu'au chapitre « Compléments sur les réels ». ■

Exemple On travaille dans cet exemple avec la relation d'inclusion $\subset$ sur $\mathscr{P}(E)$ et on suppose que E possède au moins deux éléments. L'ensemble des singletons de E ne possède alors pas de plus grand élément.

Démonstration Par l'absurde, si l'ensemble des singletons de E possède un plus grand élément $\{e\}$, alors pour tout $x \in E$: $\{x\} \subset \{e\}$, i.e. : $x = e$, donc : $E = \{e\}$ — contradiction car E possède au moins deux éléments.

Exemple On travaille dans cette série d'exemples avec la relation de divisibilité $|$ sur $\mathbb{N}$.

(i) L'ensemble $\{2,3,6\}$ possède un plus grand élément — c'est 6 — mais pas de plus petit élément.

(ii) 0 est le plus grand élément de $\mathbb{N}$ — eh oui ! — et 1 est son plus petit élément.

(iii) L'ensemble $\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$ ne possède ni plus petit élément ni plus grand élément.

Démonstration

(ii) L'entier 0 est élément de $\mathbb{N}$ et plus grand que tout le monde car tout le monde le divise, donc c'est le plus grand élément de $\mathbb{N}$. L'entier 1 est élement de $\mathbb{N}$ et plus petit que tout le monde car il divise tout le monde, donc c'est le plus petit élément de $\mathbb{N}$.

(iii) Par l'absurde, supposons que $\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$ possède un plus petit élément m. En particulier : $m|2$ et $m|3$, donc : $m\big|(3-2)$, i.e. : $m|1$. Or le seul diviseur de 1 dans $\mathbb{N}$ étant 1 lui-même : $m=1$, et ceci est contradictoire car : $1\notin\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$ alors que, par hypothèse : $m\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$.

Par l'absurde, supposons maintenant que $\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$ possède un plus grand élément M. En particulier : $2M|M$ car : $2M\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$, donc : $M=2kM$ pour un certain $k\in\mathbb{N}$. Mais justement, k étant entier : $2k\neq 1$ donc : $M=0$. Nous obtenons bien là une contradiction car : $0\notin\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$ alors que, par hypothèse : $M\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$.

Définition (Borne supérieure/inférieure) Soient $\preccurlyeq$ une relation d'ordre et A une partie de E.

- **S'il existe**, le plus petit majorant de A pour $\preccurlyeq$ est appelé **la** *borne supérieure de A (pour $\preccurlyeq$)* et noté $\sup A$.
- **S'il existe**, le plus grand minorant de A pour $\preccurlyeq$ est appelé **la** *borne inférieure de A (pour $\preccurlyeq$)* et noté $\inf A$.

La différence essentielle entre les plus grands éléments et les bornes supérieures d'une partie A, c'est que les bornes supérieures n'appartiennent pas forcément à A.

Théorème (Lien entre les plus grands/petits éléments et les bornes supérieures/inférieures) Soient $\preccurlyeq$ une relation d'ordre et A une partie de E. **Si** A possède un plus grand (resp. petit) élément pour $\preccurlyeq$, alors A possède une borne supérieure (resp. inférieure) pour $\preccurlyeq$ et :

$$\sup A=\max A \qquad (\text{resp. } \inf A=\min A).$$

Démonstration Même preuve qu'au chapitre « Compléments sur les réels ». ■

Exemple Toute partie A de $\mathscr{P}(E)$ admet une borne supérieure et une borne inférieure au sens de l'inclusion $\subset$, en l'occurrence : $\sup A=\bigcup_{X\in A}X$ et $\inf A=\bigcap_{X\in A}X$.

Démonstration Contentons-nous du cas de la borne supérieure. Pour commencer, la réunion $\bigcup_{X\in A}X$ contient tous les éléments de A par définition, i.e. majore A au sens de l'inclusion. Ensuite, si $M\in\mathscr{P}(E)$ est un majorant de A : $X\subset M$ pour tout $X\in A$, donc : $\bigcup_{X\in A}X\subset M$, ce qui fait bien de $\bigcup_{X\in A}X$ le plus petit majorant de A.

Exemple Pour la relation de divisibilité $|$ sur $\mathbb{N}$, $\{6,8,10\}$ admet 2 pour borne inférieure et 120 pour borne supérieure. Nous y reviendrons plus longuement au chapitre « Arithmétique des entiers relatifs ».

Démonstration

- Soit m un minorant de $\{6,8,10\}$. Alors : $m|6$ et $m|8$ donc : $m\big|(8-6)$, i.e. : $m|2$. Les minorants de $\{6,8,10\}$ sont ainsi seulement 1 et 2, donc en effet 2 en est le plus grand minorant.
- Pour la borne supérieure de $\{6,8,10\}$, tâchez juste de vous convaincre intuitivement du résultat, nous manquons de théorèmes pour une justification propre.