Relations binaires

Dans tout ce chapitre, E est un ensemble quelconque.

1 Relations binaires sur un ensemble

Les relations sont partout — et dans le monde mathématique, et dans la vraie vie. Nous passons notre temps à comparer des objets, à les mettre en rapport les uns avec les autres selon tel ou tel aspect. Les phrases suivantes, pourtant diverses, sont toutes l'affirmation d'un lien entre deux objets : « Minou et Matou ont la même couleur de poils », « $3 \leqslant 5$ », « Truc est amoureux de Bidule », « 4 divise 12 », « $1+\mathrm{i}$ et $1-\mathrm{i}$ ont le même module », etc.

De quelle manière pourrions-nous définir proprement la notion de relation en mathématiques ? Quel **objet** la relation $<$ est-elle sur l'ensemble $[\![1,3]\!]$? Ce qui est sûr, c'est qu'elle est entièrement caractérisée par les affirmations : $1<2$, $1<3$ et $2<3$. Formellement, nous pourrions définir la relation $<$ comme l'ensemble $\big\{(1,2),(1,3),(2,3)\big\}$ des couples $(x,y) \in [\![1,3]\!]^2$ pour lesquels $x<y$, car connaître cet ensemble, c'est exactement connaître la relation $<$. La relation $\leqslant$ sur $[\![1,3]\!]$ serait quant à elle l'ensemble $\big\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,2),(2,3),(3,3)\big\}$. Plus généralement :

Définition (Relation binaire sur un ensemble) On appelle *relation binaire sur E* toute partie de $E \times E$.

Si $\mathcal{R}$ est une telle relation, la proposition $(x,y) \in \mathcal{R}$ sera notée de préférence $x \,\mathcal{R}\, y$ pour tous $x,y \in E$, et lue « x est en relation avec y par $\mathcal{R}$ ».

Attention ! Parce que le couple (x,y) n'est pas le couple (y,x), la relation $x \,\mathcal{R}\, y$ peut être vraie sans que la relation $y \,\mathcal{R}\, x$ le soit. Dieu que l'amour est cruel !

Exemple Vous connaissez depuis toujours certaines relations binaires :

— la relation d'égalité $=$ sur E, — les relations $\leqslant$ et $<$ sur $\mathbb{R}$, — la relation d'inclusion $\subset$ sur $\mathscr{P}(E)$,

— la relation $\leqslant$ sur $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, définie pour toutes fonctions $f,g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ par : $f \leqslant g \iff \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \leqslant g(x)$,

— la relation de divisibilité $\mid$ sur $\mathbb{Z}$, définie pour tous $m,n \in \mathbb{Z}$ par : $m \mid n \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ n = km$,

— pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la relation $\equiv\ [\alpha]$ de congruence modulo α sur $\mathbb{R}$, définie pour tous $x,y \in \mathbb{R}$ par :

$$x \equiv y\ [\alpha] \iff \exists k \in \mathbb{Z},\quad x = y + k\alpha.$$

Définition (Propriétés des relations binaires) Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur E.

- **Réflexivité :** On dit que $\mathcal{R}$ est *réflexive* si : $\forall x \in E,\quad x \,\mathcal{R}\, x$.
- **Transitivité :** On dit que $\mathcal{R}$ est *transitive* si : $\forall x,y,z \in E,\quad \big(x \,\mathcal{R}\, y \text{ et } y \,\mathcal{R}\, z\big) \implies x \,\mathcal{R}\, z$.
- **Symétrie :** On dit que $\mathcal{R}$ est *symétrique* si : $\forall x,y \in E,\quad x \,\mathcal{R}\, y \implies y \,\mathcal{R}\, x$.
- **Antisymétrie :** On dit que $\mathcal{R}$ est *antisymétrique* si : $\forall x,y \in E,\quad \big(x \,\mathcal{R}\, y \text{ et } y \,\mathcal{R}\, x\big) \implies x = y$.

Exemple

- La relation d'égalité $=$ sur E est réflexive, transitive, symétrique et antisymétrique.
- Les relations $\leqslant$ sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ sont réflexives, transitives et antisymétriques. Elles ne sont pas symétriques car par exemple $1 \leqslant 2$ mais $2 \nleqslant 1$, et de même $(x \longmapsto 1) \leqslant (x \longmapsto 2)$ mais $(x \longmapsto 2) \nleqslant (x \longmapsto 1)$.
- La relation $<$ sur $\mathbb{R}$ est transitive et antisymétrique, mais elle n'est ni réflexive, ni symétrique.
- La relation $\mid$ de divisibilité sur $\mathbb{Z}$ est réflexive et transitive, mais elle n'est pas antisymétrique car par exemple $-2 \mid 2$ et $2 \mid -2$ alors que $-2 \neq 2$.
- La relation d'inclusion $\subset$ sur $\mathscr{P}(E)$ est réflexive, transitive et antisymétrique.
- La relation « avoir le même signe » sur $\mathbb{R}^*$ est réflexive, transitive et symétrique.

2 Relations d'équivalence

Définition (Relation d'équivalence) On appelle *relation d'équivalence sur E* toute relation binaire sur E à la fois réflexive, transitive et symétrique.

Les relations d'équivalence sont généralement notées $\sim$ ou $\simeq$ ou $\approx$ ou $\equiv$…

Exemple La relation d'égalité $=$ sur E et la relation « avoir le même signe » sur $\mathbb{R}^*$ sont des relations d'équivalence.

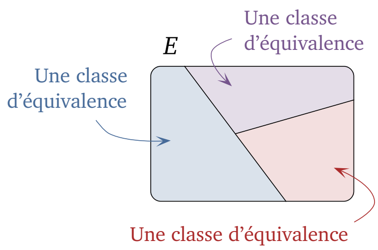
Exemple Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la relation $\equiv\ [\alpha]$ de congruence modulo α sur $\mathbb{R}$ est une relation d'équivalence.
De manière analogue, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la relation $\equiv\ [n]$ de congruence modulo n sur $\mathbb{Z}$ est une relation d'équivalence.

Démonstration

- **Réflexivité :** Pour tout $a \in \mathbb{R}$: $\quad a = a + 0 \times \alpha \quad$ et $\quad 0 \in \mathbb{Z}, \quad$ donc $a \equiv a\ [\alpha]$.
- **Transitivité :** Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. Si $a \equiv b\ [\alpha]$ et $b \equiv c\ [\alpha]$: $\quad a = b + k\alpha \quad$ et $\quad b = c + l\alpha \quad$ pour certains $k, l \in \mathbb{Z}$, donc : $\quad a = b + k\alpha = (c + l\alpha) + k\alpha = c + (k + l)\alpha \quad$ avec $k + l \in \mathbb{Z}$, donc $a \equiv c\ [\alpha]$.
- **Symétrie :** Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Si $a \equiv b\ [\alpha]$: $\quad a = b + k\alpha \quad$ pour un certain $k \in \mathbb{Z}$, donc $b = a + (-k)\alpha$ avec $-k \in \mathbb{Z}$, donc $b \equiv a\ [\alpha]$.

Théorème (Classes d'équivalence d'une relation d'équivalence, ensemble quotient) Soit $\sim$ une relation d'équivalence sur E.

- **Classes d'équivalence :** Pour tout $x \in E$, l'ensemble $\big\{y \in E \mid\ x \sim y\big\}$ est appelé la *classe d'équivalence de x (pour $\sim$)*. Ces classes d'équivalence forment une partition de E.
- **Ensemble quotient :** L'ensemble des classes d'équivalences de E pour $\sim$ est appelé l'*ensemble quotient de E par $\sim$* et souvent noté $E/\!\sim$.



La notion d'ensemble quotient est hors programme mais il n'est pas inutile de l'avoir quelque part en tête. Vous noterez bien que le quotient $E/\!\sim$ est un ENSEMBLE D'ENSEMBLES, en l'occurrence un ensemble de parties de E.

Ce que ce théorème raconte, c'est que la relation d'équivalence $\sim$ peut être représentée comme une carte au sens géographique. Chaque classe d'équivalence est comme un pays à l'intérieur de E dont les éléments sont caractérisés par une nationalité. Le monde E se trouve ainsi partitionné en pays.

On peut dire les choses autrement. Toute relation d'équivalence peut être exprimée en français sous la forme « Avoir le même (…) » : « avoir le même signe », « avoir le même reste de division euclidienne par n », etc.

Démonstration Pour tout $x \in E$, notons $\mathrm{cl}(x)$ la classe d'équivalence de x pour $\sim$.

- Pour tout $x \in E$: $\quad x \sim x \quad$ par réflexivité, donc $x \in \mathrm{cl}(x)$, donc $\mathrm{cl}(x)$ est non vide. Rappelons à cette occasion que cette condition différencie les partitions des recouvrements disjoints.
- Clairement : $\quad E = \bigcup_{x \in E} \mathrm{cl}(x) \quad$ car $x \in \mathrm{cl}(x)$ pour tout $x \in E$.
- Soient $x, y \in E$. Pour montrer que $\mathrm{cl}(x)$ et $\mathrm{cl}(y)$ sont égales ou disjointes, supposons-les NON disjointes et montrons qu'elles sont égales. Par hypothèse, nous pouvons nous donner un élément z commun à $\mathrm{cl}(x)$ et $\mathrm{cl}(y)$. Par symétrie des rôles de x et y, il nous suffit de montrer que $\mathrm{cl}(x) \subset \mathrm{cl}(y)$.

  Soit $t \in \mathrm{cl}(x)$. D'abord $z \in \mathrm{cl}(y)$, donc $y \sim z$. Ensuite $z \in \mathrm{cl}(x)$, donc $x \sim z$, puis $z \sim x$. Enfin $t \in \mathrm{cl}(x)$, donc $x \sim t$. Conclusion : $\quad y \sim t \quad$ par transitivité.

Exemple La relation « avoir le même signe » sur $\mathbb{R}^*$ possède deux classes d'équivalence, la classe $\mathbb{R}_+^*$ et la classe $\mathbb{R}_-^*$. L'ensemble quotient associé est donc l'ensemble d'ensembles $\big\{\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}_-^*\big\}$.

Exemple Soit $\alpha > 0$. Les classes d'équivalences de $\mathbb{R}$ pour la relation de congruence modulo α sont exactement les ensembles $\alpha\mathbb{Z} + x$, x décrivant $[0, \alpha[$, sans répétition. L'ensemble quotient associé est donc l'ensemble $\big\{\alpha\mathbb{Z} + x \mid\ x \in [0, \alpha[\big\}$.

Démonstration Le théorème d'existence et d'unicité de la partie entière peut être formulé ainsi :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exists!(k, \varepsilon) \in \mathbb{Z} \times [0, 1[, \quad x = k + \varepsilon, \qquad \text{d'où en particulier :} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \exists!(k, \varepsilon) \in \mathbb{Z} \times [0, 1[, \quad \frac{x}{\alpha} = k + \varepsilon,$$
et finalement, après multiplication par α : $\quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \exists!\ \varepsilon \in [0, \alpha[, \quad x \equiv \varepsilon\ [\alpha]$. $\quad$ Cette proposition signifie que tout réel appartient à la classe d'équivalence pour $\equiv\ [\alpha]$ d'un et un seul élément de $[0, \alpha[$.

Exemple Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Nous établirons au prochain chapitre « Arithmétique des entiers relatifs » le *théorème de la division euclidienne* suivant : $\forall a \in \mathbb{Z}, \quad \exists!\, r \in [\![0, n-1]\!], \quad a \equiv r\ [n]$, selon lequel tout entier relatif appartient à la classe d'équivalence pour $\equiv [n]$ d'un et un seul élément de $[\![0, n-1]\!]$, donc que les classes d'équivalence de $\mathbb{Z}$ pour cette relation sont exactement $n\mathbb{Z}$, $n\,\mathbb{Z}+1, \ldots, n\mathbb{Z}+n-1$. On note traditionnellement $\dfrac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$ l'ensemble quotient $\left\{n\mathbb{Z}, n\mathbb{Z}+1, \ldots, n\mathbb{Z}+n-1\right\}$.

3 Relations d'ordre

Définition (Relation d'ordre, relation d'ordre totale)

- **Relation d'ordre :** On appelle (*relation d'*)*ordre sur* E toute relation binaire sur E à la fois réflexive, transitive et antisymétrique.

  Les relations d'ordre sont généralement notées $\leqslant$ ou $\preccurlyeq$ ou $\lesssim$ ou $\precsim$...
- **Relation d'ordre totale :** Soit $\preccurlyeq$ une relation d'ordre sur E. On dit que $\preccurlyeq$ est *totale* si :
$$\forall x, y \in E, \quad x \mathscr{R} y \quad \text{ou} \quad y \mathscr{R} x.$$
  Dans le cas contraire, on dit que $\preccurlyeq$ est *partielle*.

Quand $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre, la relation $x \preccurlyeq y$ est généralement lue « x est plus petit que y », mais rien ne s'oppose à ce qu'on la lise « x est plus grand que y », c'est pure affaire de convention et il convient seulement d'être cohérent. Être plus grand en vieillesse, c'est être plus petit en jeunesse.

Une relation d'ordre hiérarchise les éléments qu'elle compare, mais qu'attendons-nous intuitivement des notions de classement, hiérarchie, ordre, préférence ?

— Essentiellement la transitivité, c'est ce qui compte le plus. Si A est plus grand que B et B plus grand que C, alors A est plus grand que C. Toute entorse à la transitivité contredit l'idée d'une hiérarchie.

— La réflexivité est imposée dans la définition des relations d'ordre mais aurait pu ne pas l'être. L'exiger revient simplement à privilégier les relations « inférieur **OU ÉGAL** » aux relations d'infériorité stricte.

— L'antisymétrie est un autre choix conventionnel. La relation « être plus âgé (ou du même âge) que » est transitive et réflexive sur l'ensemble des êtres humains, mais pas antisymétrique car deux individus peuvent être nés au même instant. Bien que non antisymétrique, cette relation a pour nous la saveur d'une relation hiérarchique.

En résumé, les relations d'ordre sont des exemples importants de hiérarchies, mais ne formalisent pas toutes les hiérarchies concevables.

Exemple

- La relation $\leqslant$ est une relation d'ordre totale sur $\mathbb{R}$. En particulier, les réels sont tous comparables à 0 — positifs ou négatifs — et c'est pour cela qu'on a pu définir la valeur absolue $|x|$ d'un réel x en distinguant les cas $x \geqslant 0$ et $x < 0$.
- La relation $\leqslant$ est une relation partielle d'ordre sur $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Les fonctions cosinus et sinus, par exemple, ne sont pas comparables : $\sin \nleqslant \cos$ et $\cos \nleqslant \sin$.
- La relation d'inclusion $\subset$ est une relation d'ordre sur $\mathscr{P}(E)$, partielle dès que E contient au moins deux éléments. En effet, pour tous a et b éléments **DISTINCTS** de E : $\{a\} \not\subset \{b\}$ et $\{b\} \not\subset \{a\}$.

Exemple La relation de divisibilité $|$ n'est pas une relation d'ordre sur $\mathbb{Z}$, mais c'en est une sur $\mathbb{N}$, partielle car 2 et 3 ne sont comparables : $2 \nmid 3$ et $3 \nmid 2$.

Démonstration Nous avons déjà vu que la relation $|$ sur $\mathbb{Z}$ n'est pas antisymétrique. Travaillons donc sur $\mathbb{N}$.

- **Réflexivité :** Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $n \mid n$ car $n = 1 \times n$.
- **Transitivité :** Soient $n, n', n'' \in \mathbb{N}$ des entiers pour lesquels $n \mid n'$ et $n' \mid n''$. Aussitôt $n' = kn$ et $n'' = k'n'$ pour certains $k, k' \in \mathbb{N}$, donc : $n'' = k'n' = kk'n$ avec $kk' \in \mathbb{N}$, donc $n \mid n''$.
- **Antisymétrie :** Soient $n, n' \in \mathbb{N}$ des entiers pour lesquels $n \mid n'$ et $n' \mid n$. Aussitôt $n' = kn$ et $n = k'n'$ pour certains $k, k' \in \mathbb{N}$, donc $n = k'n' = kk'n$.

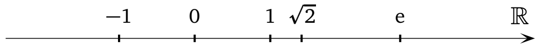
  — Si $n = 0$: $n' = kn = 0$, donc $n = n'$.

  — Si $n \neq 0$: $kk' = 1$, or k et k' sont des **ENTIERS NATURELS**, donc $k = k' = 1$, donc $n = k'n' = n'$.

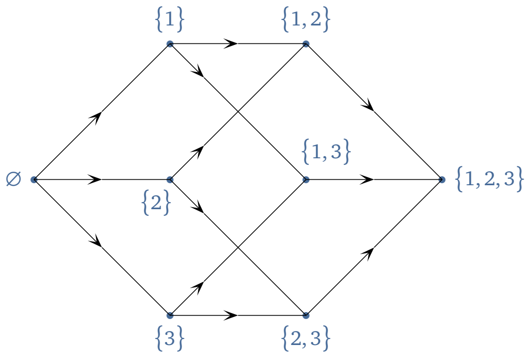
Remarque importante. Les relations d'ordre excluent les boucles. Une boucle de la forme $x_1 \preccurlyeq x_2 \preccurlyeq x_3 \preccurlyeq \ldots \preccurlyeq x_n \preccurlyeq x_1$ entre des éléments distincts avec $n \geqslant 2$ est inconcevable car la transitivité et l'antisymétrie forcent l'égalité $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

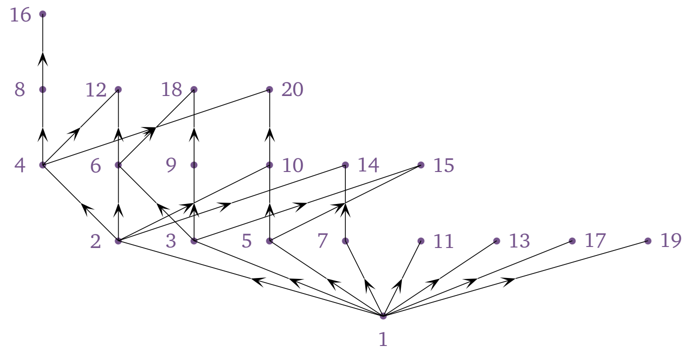
Sans boucles, les relations d'ordre ont comme une orientation naturelle. De même que les fleuves et les rivières coulent en direction de la mer sans jamais boucler, on va toujours de l'avant quand on parcourt une relation d'ordre, on ne tourne jamais en rond et c'est ça qui nous fait dire que certains éléments sont plus petits/grands que d'autres.

La relation d'ordre $\leqslant$ sur $\mathbb{R}$ est **TOTALE** et c'est pour cela que nous nous représentons $\mathbb{R}$ comme une ligne unique et non pas comme un réseau fluvial compliqué doté d'une foule d'affluents.



On a représenté ci-dessous à gauche la relation $\subset$ sur l'ensemble des parties de $\{1,2,3\}$ et à droite la relation de divisibilité $|$ sur $[\![1,20]\!]$. Le fait que ces relations ne sont pas totales se visualise bien, il ne suffit pas d'**UNE** fibre pour représenter ces relations, il en faut plusieurs.





Définition (Relation stricte associée à une relation d'ordre) Soit $\preccurlyeq$ une relation d'ordre sur E. La relation $\prec$ sur E définie pour tous $x, y \in E$ par : $\quad x \prec y \quad \Longleftrightarrow \quad x \preccurlyeq y \quad \text{et} \quad x \neq y \quad$ est transitive et antisymétrique, appelée la *relation stricte associée à* $\preccurlyeq$.

Démonstration

- **Transitivité :** Soient $x, y, z \in E$. On suppose $x \prec y$ et $y \prec z$. En particulier $x \preccurlyeq y$ et $y \preccurlyeq z$, donc $x \preccurlyeq z$ par transitivité de $\preccurlyeq$. L'égalité $x = z$ est-elle possible ? Le cas échéant $x \preccurlyeq y$ et $y \preccurlyeq x$, donc $x = y$ par antisymétrie de $\preccurlyeq$ — contradiction. Bref : $\quad x \preccurlyeq z \quad \text{et} \quad x \neq z, \quad$ i.e. $x \prec z$.
- **Antisymétrie :** Soient $x, y \in E$. Si $x \prec y$ et $y \prec x$, alors $x \preccurlyeq y$ et $y \preccurlyeq x$, donc $x = y$ par antisymétrie de $\preccurlyeq$.

Exemple Naturellement, la relation usuelle $<$ sur $\mathbb{R}$ est la relation stricte de la relation $\leqslant$.

La fin du chapitre généralise rapidement certaines notions du chapitre « Compléments sur les réels ».

Définition (Majorant/minorant) Soient $\preccurlyeq$ une relation d'ordre sur E et A une partie de E.

- **Partie majorée/minorée :** On dit que A est *majorée (pour* $\preccurlyeq$*)* si : $\quad \exists M \in E, \quad \forall a \in A, \quad a \preccurlyeq M.$
  Un tel M est appelé **UN** *majorant de* A. On dit aussi que A est *majorée par* M ou encore que M *majore* A.

  On définit de même les notions de partie *minorée* et de *minorant*.
- **Partie bornée :** On dit que A est *bornée (pour* $\preccurlyeq$*)* si elle est à la fois majorée et minorée.

Exemple

- L'ensemble $\{8, 10, 12\}$ est minoré par 2 et majoré par 120 pour la relation de divisibilité $|$ sur $\mathbb{N}$.
- $\mathscr{P}(E)$ est minoré par $\varnothing$ et majoré par E pour la relation d'inclusion $\subset$.

Définition (Plus grand/petit élément, maximum/minimum) Soient $\preccurlyeq$ une relation d'ordre sur E et A une partie de E. On appelle *plus grand élément de* A ou *maximum de* A tout élément de A qui majore A.

S'IL EN EXISTE UN, un tel plus grand élément est unique et donc appelé **LE** plus grand élément de A, noté $\max A$.

On définit de même la notion de *plus petit élément* ou *minimum*.

Démonstration Pour l'unicité, même preuve qu'au chapitre « Compléments sur les réels ».

Exemple On travaille avec la relation d'inclusion $\subset$ sur $\mathscr{P}(E)$ et on suppose que E contient au moins deux éléments. L'ensemble des singletons de E ne possède alors pas de plus grand élément.

Démonstration Par l'absurde, si l'ensemble des singletons de E possède un plus grand élément $\{e\}$: $\{x\} \subset \{e\}$ pour tout $x \in E$, i.e. $x = e$, donc $E = \{e\}$ — contradiction car E possède au moins deux éléments.

Exemple On travaille dans cette série d'exemples avec la relation de divisibilité $|$ sur $\mathbb{N}$.

(i) L'ensemble $\{2,3,6\}$ possède un plus grand élément — c'est 6 — mais pas de plus petit élément.

(ii) 0 est le plus grand élément de $\mathbb{N}$ — eh oui ! — et 1 est son plus petit élément.

(iii) L'ensemble $\mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ ne possède ni plus petit élément ni plus grand élément.

Démonstration

(ii) L'entier 0 est élément de $\mathbb{N}$ et plus grand que tout le monde car tout le monde le divise, donc c'est le plus grand élément de $\mathbb{N}$. L'entier 1 est élement de $\mathbb{N}$ et plus petit que tout le monde car il divise tout le monde, donc c'est le plus petit élément de $\mathbb{N}$.

(iii) Par l'absurde, faisons l'hypothèse que $\mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ possède un plus petit élément m. En particulier $m \mid 2$ et $m \mid 3$, donc par différence $m \mid 1$. Or le seul diviseur de 1 dans $\mathbb{N}$ étant 1 lui-même : $m = 1$, et ceci est contradictoire car $1 \notin \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ alors que par hypothèse $m \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$.

Par l'absurde, faisons l'hypothèse que $\mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ possède un plus grand élément M. En particulier $2M \mid M$ car $2M \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, donc $M = 2kM$ pour un certain $k \in \mathbb{N}$. Or k étant entier : $2k \neq 1$, donc $M = 0$. Nous obtenons là une contradiction car $0 \notin \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ alors que par hypothèse $M \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$.

Définition **(Borne supérieure/inférieure)** Soient $\preccurlyeq$ une relation d'ordre et A une partie de E. **S'IL EXISTE**, le plus petit majorant de A pour $\preccurlyeq$ est appelé **LA** *borne supérieure de A (pour $\preccurlyeq$)* et noté $\sup A$.

On définit de même la notion de *borne inférieure*.

La différence essentielle entre les plus grands éléments et les bornes supérieures d'une partie A, c'est que les bornes supérieures n'appartiennent pas forcément à A.

Théorème **(Max/min implique sup/inf)** Soient $\preccurlyeq$ une relation d'ordre et A une partie de E. Si A possède un plus grand (resp. petit) élément pour $\preccurlyeq$, A possède une borne supérieure (resp. inférieure) pour $\preccurlyeq$ et : $\sup A = \max A$ (resp. $\inf A = \min A$).

Démonstration Même preuve qu'au chapitre « Compléments sur les réels ».

Exemple Toute partie A de $\mathscr{P}(E)$ possède une borne supérieure et une borne inférieure pour la relation d'inclusion $\subset$, en l'occurrence : $\sup A = \bigcup\limits_{X \in A} X$ et $\inf A = \bigcap\limits_{X \in A} X$.

Démonstration Contentons-nous du cas de la borne supérieure. Pour commencer, la réunion $\bigcup\limits_{X \in A} X$ contient tous les éléments de A par définition, i.e. majore A au sens de l'inclusion. Ensuite, si $M \in \mathscr{P}(E)$ est un majorant de A : $X \subset M$ pour tout $X \in A$, donc $\bigcup\limits_{X \in A} X \subset M$, ce qui fait bien de $\bigcup\limits_{X \in A} X$ le plus petit majorant de A.

Exemple Pour la relation de divisibilité $|$ sur $\mathbb{N}$, $\{6,8,10\}$ admet 2 pour borne inférieure et 120 pour borne supérieure. Nous y reviendrons plus longuement au chapitre « Arithmétique des entiers relatifs ».

Démonstration

- Soit m un minorant de $\{6,8,10\}$. Alors $m \mid 6$ et $m \mid 8$, donc par différence $m \mid 2$. Les minorants de $\{6,8,10\}$ sont ainsi seulement 1 et 2, donc en effet 2 en est le plus grand minorant.
- Pour la borne supérieure de $\{6,8,10\}$, tâchez juste de vous convaincre intuitivement du résultat, nous manquons de théorèmes pour une justification propre.