Représentation matricielle des applications linéaires

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ est l'un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Tous les résultats présentés dans ce chapitre demeurent vrais si $\mathbb{K}$ est un corps quelconque, mais nous ne nous en préoccuperons pas ici. Les lettres $n, p, q\dots$ désignent des entiers naturels non nuls.

1 Rappels sur la matrice d'une famille de vecteurs dans une base

Pour plus de détails, refaites donc un tour du côté de notre précédent chapitre « Structure d'espace vectoriel ».

Définition (Matrice d'une famille finie de vecteurs dans une base finie)

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $\mathcal{X} = (x_1, \dots, x_p)$ une famille finie de vecteurs de E. Pour tout $j \in [\![1, p]\!]$ on note $(a_{1j}, \dots, a_{nj})$ les coordonnées de x_j dans $\mathcal{B}$. La matrice $\big(a_{ij}\big)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$, notée $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{X})$, est alors appelée *matrice de $\mathcal{X}$ dans $\mathcal{B}$*.

$$\begin{array}{rcl} & \begin{array}{ccccc} x_1 & & x_j & & x_j \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \end{array} & \\ \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{X}) = & \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow e_1 \\ \\ \leftarrow e_i \\ \\ \leftarrow e_n \end{array} \end{array}$$

Coordonnées de x_j dans $\mathcal{B}$ écrites en colonne

Exemple Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{B}$ une base de E. Alors pour tout $x \in E$, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$ est tout simplement la colonne des coordonnées de x dans $\mathcal{B}$.

Théorème (Interprétation vectorielle de l'inversibilité, cas des familles de vecteurs) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{F}$ une famille de n vecteurs de E. Alors $\mathcal{F}$ est une base de E si et seulement si $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$ est inversible.

Rappelons que le rang d'une matrice peut être défini de deux manières — soit comme le rang de la famille de ses colonnes, soit comme le rang de l'application linéaire canoniquement associée.

Théorème (Rang d'une famille de vecteurs, rang d'une matrice associée) Soient $E \neq \{0_E\}$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{X}$ une famille finie de vecteurs de E. Alors : $\mathrm{rg}(\mathcal{X}) = \mathrm{rg}\big(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{X})\big)$.

✎ **En pratique** ✎ Tout rang d'une famille de vecteurs peut donc être calculé comme le rang d'une matrice grâce à l'algorithme du pivot.

Démonstration Introduisons les vecteurs de $\mathcal{B}$ et $\mathcal{X}$: $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{X} = (x_1, \dots, x_p)$, ainsi que les colonnes $C_1, \dots, C_p$ de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{X})$ et φ l'isomorphisme $(\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \longmapsto \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$ de $\mathbb{K}^n$ sur E.
Pour tout $j \in [\![1, p]\!]$: $\varphi(C_j) = x_j$, donc $\varphi_{|\mathrm{Vect}(C_1, \dots, C_p)}$ est un isomorphisme de $\mathrm{Vect}(C_1, \dots, C_p)$ sur $\mathrm{Vect}(\mathcal{X})$, donc : $\mathrm{rg}(\mathcal{X}) = \dim \mathrm{Vect}(\mathcal{X}) = \dim \mathrm{Vect}(C_1, \dots, C_p) = \mathrm{rg}(C_1, \dots, C_p) = \mathrm{rg}\big(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{X})\big)$. ■

2 Matrice d'une application linéaire dans des bases

Définition (Matrice d'une application linéaire dans des bases finies) Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions respectives p et n, $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de E, $\mathscr{C} = (f_1, \ldots, f_n)$ une base de F et $f \in \mathscr{L}(E,F)$. On appelle *matrice de f dans $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$* et on note $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$ la matrice de la famille $f(\mathscr{B}) = \big(f(e_1), \ldots, f(e_p)\big)$ dans la base $\mathscr{C}$.

Si : $E = F$ et $\mathscr{B} = \mathscr{C}$, la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}}(f)$ est simplement notée $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$.

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}\big(f(\mathscr{B})\big) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} f(e_1) & & f(e_j) & & f(e_p) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \boxed{a_{1j}} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \leftarrow f_1 \\ \\ \leftarrow f_i \\ \\ \leftarrow f_n \end{array}$$

Coordonnées de $f(e_j)$ dans $\mathscr{B}$ écrites en colonne

✌ **Explication** ✌ On connaît tout d'une application linéaire quand on connaît la valeur qu'elle prend sur une base, donc on connaît tout d'une application linéaire quand on connaît sa matrice dans deux bases données. Un exercice peut ainsi commencer sans la moindre ambiguïté de la manière suivante : « On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ de matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ dans la base canonique. » Il faut alors comprendre que : $f(1) = 3X + 1$, $f(X) = 4X^2 + X$ et $f\left(X^2\right) = 5X^2 + 4X + 2$.

Exemple Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et si $\mathscr{B}$ est une base de E : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathrm{Id}_E) = I_n$.

Exemple On note T l'endomorphisme $P \longmapsto X^2P'' + P(1)$ de $\mathbb{R}_3[X]$ et $\mathscr{B}_3$ la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.

Alors : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_3}(T) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

Démonstration $T(1) = 1$, $T(X) = 1$, $T\left(X^2\right) = 2X^2 + 1$ et $T\left(X^3\right) = 6X^3 + 1$.

Théorème (Matrice dans les bases canoniques de l'application linéaire canoniquement associée à une matrice) Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Si on note $\widehat{A}$ l'application linéaire canoniquement associée à A et $\mathscr{B}_p$ et $\mathscr{B}_n$ les bases canoniques respectives de $\mathbb{K}^p$ et $\mathbb{K}^n$, alors : $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_p,\mathscr{B}_n}\big(\widehat{A}\big)$.

Démonstration Réfléchissez, il suffit d'appliquer scrupuleusement la définition. Ce petit résultat doit couler dans vos veines. ■

Exemple On note φ l'application linéaire canoniquement associée à la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathscr{B}'_2$ la famille $\big((0,1),(1,0)\big)$ et $\mathscr{B}'_3$ la famille $\big((1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\big)$. Ces familles $\mathscr{B}'_2$ et $\mathscr{B}'_3$ sont alors respectivement des bases de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$, et : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'_2,\mathscr{B}'_3}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Conclusion naturelle : si on change les bases, on change la matrice !

Démonstration

- La famille $\mathscr{B}'_2$ est une base de $\mathbb{R}^2$ car sa matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ dans la base canonique est inversible — d'inverse elle-même. Même idée pour $\mathscr{B}'_3$, sa matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ dans la base canonique est inversible car triangulaire à coefficients diagonaux non nuls après échange de ses première et troisième colonne.

- Ensuite : $\varphi(0,1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (0,1,1) = (1,1,1) - (1,0,0)$.
  De même : $\varphi(1,0) = (1,1,-1) = -(1,1,1) + 2(1,1,0)$. Les coordonnées de $\varphi(0,1)$ dans $\mathscr{B}_3'$ sont donc $(1,0,-1)$ et celles de $\varphi(1,0)$ sont $(-1,2,0)$. C'est le résultat voulu.

Théorème (Rang d'une application linéaire, rang d'une matrice associée) Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, $\mathscr{B}$ une base de E, $\mathscr{C}$ une base de F et $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Alors : $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}\big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)\big)$.

En pratique Tout rang d'une application linéaire peut donc être calculé comme le rang d'une matrice grâce à l'algorithme du pivot.

Démonstration D'après le théorème analogue pour les familles de vecteurs :

$$\mathrm{rg}\big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)\big) = \mathrm{rg}\Big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}\big(f(\mathscr{B})\big)\Big) = \mathrm{rg}\big(f(\mathscr{B})\big) = \dim \mathrm{Vect}\big(f(\mathscr{B})\big) = \dim \mathrm{Im}\, f = \mathrm{rg}(f). \quad \blacksquare$$

Théorème (Calcul matriciel de l'image d'un vecteur par une application linéaire) Soient $E \neq \{0_E\}$ et $F \neq \{0_F\}$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, $\mathscr{B}$ une base de E, $\mathscr{C}$ une base de F, $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et $x \in E$.
Alors : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}\big(u(x)\big) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x)$.

Explication L'ÉVALUATION pour une application linéaire se traduit matriciellement en termes de PRODUIT.

Démonstration Introduisons les vecteurs de $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$: $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ et $\mathscr{C} = (f_1, \ldots, f_n)$, ainsi que les coordonnées de x dand $\mathscr{B}$: $X = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x)$ et la matrice de u dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$: $U = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)$.

$$u(x) = u\left(\sum_{j=1}^p x_j e_j\right) = \sum_{j=1}^p x_j u(e_j) = \sum_{j=1}^p x_j \sum_{i=1}^n u_{ij} f_i = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^p u_{ij} x_j\right) f_i,$$

donc les coordonnées de $u(x)$ dans $\mathscr{C}$ sont $\left(\sum_{j=1}^p u_{1j} x_j, \ldots, \sum_{j=1}^p u_{nj} x_j\right)$, i.e. le produit $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x)$. $\blacksquare$

Exemple On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ de matrice $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ dans la base canonique.

Alors : $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Vect}\big(3, 2X^2 + X\big)$ et $\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Vect}\big(X^2 - 2X\big)$.

Démonstration Pour commencer :

$$\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Vect}\Big(f(1), f(X), f\big(X^2\big)\Big) = \mathrm{Vect}\big(3, 2X^2 + X + 3, 4X^2 + 2X + 6\big) = \mathrm{Vect}\big(3, 2X^2 + X + 3\big) = \mathrm{Vect}\big(3, 2X^2 + X\big).$$

Ensuite, pour tout $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$: $P \in \mathrm{Ker}\, f \iff f(P) = 0 \iff \begin{pmatrix} 3 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 3c & + & 3b & + & 6a & = & 0 \\ & & b & + & 2a & = & 0 \\ & & 2b & + & 4a & = & 0 \end{array} \right. \underset{L_1 \leftarrow L_1 - 3L_2}{\iff} \quad c = 0 \quad \text{et} \quad b = -2a \iff P = aX^2 - 2aX.$$

Conclusion : $\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Vect}\big(X^2 - 2X\big)$.

ATTENTION ! Deux remarques sur l'exemple précédent.

- Les coordonnées de $aX^2 + bX + c$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ sont (c, b, a) **ET NON PAS** (a, b, c).
- On raisonne matriciellement sur un squelette numérique, mais il ne faut pas oublier à la fin de l'exemple précédent de réincarner le résultat dans le monde vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$. La réponse : $\mathrm{Ker}\, R = \mathrm{Vect}\big((0, -2, 1)\big)$ n'est pas correcte.

Théorème (Un dictionnaire entre les points de vue vectoriel et matriciel sur les applications linéaires)

(i) Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies respectives p et n, $\mathscr{B}$ une base de E et $\mathscr{C}$ une base de F. L'application $f \longmapsto \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$ est un isomorphisme de $\mathscr{L}(E,F)$ sur $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

(ii) Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies non nulles de bases respectives $\mathscr{B}, \mathscr{C}, \mathscr{D}$ et $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$. Alors : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{D}}(g \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{D}}(g) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$.

(iii) Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de MÊMES DIMENSIONS finies non nulles, $\mathscr{B}$ une base de E, $\mathscr{C}$ une base de F et $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Alors f est un isomorphisme de E sur F si et seulement si $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$ est inversible.

Dans ce cas, en outre : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{B}}\left(f^{-1}\right) = \left(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)\right)^{-1}$.

✌ Explication ✌

- En résumé, l'assertion (i) exprime deux choses :
  - — une propriété de linéarité : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(\lambda f + \mu g) = \lambda\, \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) + \mu\, \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(g)$ avec des notations évidentes,
  - — une propriété de bijectivité déjà mentionnée informellement plus haut — on connaît entièrement f quand on connaît $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$.

  Elle relie aussi en passant deux résultats bien connus : $\dim \mathscr{M}_{n,p} = np$ et $\dim \mathscr{L}(E,F) = \dim E \times \dim F$.
- L'assertion (ii) montre que le PRODUIT est aux matrices ce que la COMPOSITION est aux applications linéaires. Nous connaissions déjà ce résultat dans le cas particulier des applications linéaires canoniquement associées à des matrices.

Démonstration Vous démontrerez seuls l'assertion (i).

(ii) Introduisons les vecteurs de $\mathscr{B}$: $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$. Pour tout $j \in [\![1,n]\!]$:

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{D}}(g\circ f)\times\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(e_j) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{D}}\big(g\circ f(e_j)\big) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{D}}(g)\times\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}\big(f(e_j)\big) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{D}}(g)\times\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)\times\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(e_j),$$

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(e_j) = \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$$

position j

mais n'oublions pas que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(e_j)$ est le $j^{\text{ème}}$ vecteur de la base canonique de $\mathbb{K}^n$. Nous venons donc de montrer que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{D}}(g \circ f)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{D}}(g) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$ ont les mêmes $j^{\text{èmes}}$ colonnes, et ce pour tout $j \in [\![1,n]\!]$. Comme voulu : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{D}}(g \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{D}}(g) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$.

(iii) Si f est bijective et si on pose $n = \dim F$: $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{B}}\left(f^{-1}\right) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(\mathrm{Id}_F) = I_n$, donc $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$ est inversible d'inverse $\mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{B}}\left(f^{-1}\right)$.

Réciproquement, si $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$ est inversible, notons g l'unique application linéaire de F dans E pour laquelle : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(g) = A^{-1}$. Aussitôt : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(g) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) = A^{-1}A = I_n$ et : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(f \circ g) = I_n$, donc : $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_F$, et enfin f est bijective de E sur F. ■

Exemple L'endomorphisme ω de $\mathbb{R}_3[X]$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ est $\Omega = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ est la symétrie par rapport à $\mathrm{Vect}\big(X^3+X^2+X, X^2+1\big)$ parallèlement à $\mathrm{Vect}\big(X^3+X+1, X^3+X^2\big)$.

Démonstration

- Par définition, ω est linéaire. Montrer que c'est une symétrie revient donc à montrer que : $\omega^2 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_3[X]}$, ou encore matriciellement que : $\Omega^2 = I_4$ — ce qui est très facile à vérifier.
- Cherchons le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$ par rapport auquel θ est une symétrie : $\mathrm{Ker}\,\big(\omega - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_3[X]}\big)$. Pour tout $P = aX^3 + bX^2 + cX + d \in \mathbb{R}_3[X]$: $P \in \mathrm{Ker}\,\big(\omega - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_3[X]}\big) \iff \omega(P) = P$

$$\iff \Omega\begin{pmatrix}d\\c\\b\\a\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}d\\c\\b\\a\end{pmatrix} \qquad \iff \left\{\begin{array}{rcl} b - a &=& d \\ -d + c + b - a &=& c \\ 2c + b - 2a &=& b \\ -d + 2c + b - 2a &=& a \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} -d + b - a &=& 0 \\ -d + b - a &=& 0 \\ c - a &=& 0 \\ -d + 2c + b - 3a &=& 0 \end{array}\right. \qquad \iff \left\{\begin{array}{rcl} -d + b - a &=& 0 \\ c - a &=& 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \qquad \exists\, \lambda,\mu\in\mathbb{R}/ \quad \left\{\begin{array}{rcl} a & = & \lambda \\ b & = & \lambda+\mu \\ c & = & \lambda \\ d & = & \mu. \end{array}\right. \qquad \text{Ainsi :} \quad \mathrm{Ker}\,\big(\omega-\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_3[X]}\big)=\mathrm{Vect}\big(X^3+X^2+X, X^2+1\big).$$

- On montre de la même manière que : $\mathrm{Ker}\,\big(\omega+\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_3[X]}\big)=\mathrm{Vect}\big(X^3+X+1, X^3+X^2\big)$.

Définition-théorème (Condition nécessaire et suffisante d'inversibilité d'une matrice de Vandermonde) Soient $x_1,\dots,x_n\in\mathbb{K}$.

On appelle *matrice de Vandermonde de* $x_1,\dots,x_n$ la matrice : $\left(x_i^{j-1}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}=\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$.

Cette matrice est inversible si et seulement si les scalaires $x_1,\dots,x_n$ sont distincts.

Démonstration

- Si deux des scalaires $x_1,\dots,x_n$ sont égaux, leur matrice de Vandermonde possède deux lignes égales, donc n'est pas inversible.
- Réciproquement, supposons $x_1,\dots,x_n$ distincts et notons φ l'application linéaire $P\longmapsto\big(P(x_1),\dots,P(x_n)\big)$ de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ dans $\mathbb{K}^n$. Cette application est injective car pour tout $P\in\mathrm{Ker}\,\varphi$: $P(x_1)=\ldots=P(x_n)=0$, donc le polynôme P possède n racines distinctes alors qu'il est de degré au plus $n-1$ — ainsi $P=0$. Or : $\dim\mathbb{K}_{n-1}[X]=n=\dim\mathbb{K}^n$, donc son injectivité fait de φ un isomorphisme de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ sur $\mathbb{K}^n$.

  En particulier, la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ au départ et la base canonique de $\mathbb{K}^n$ à l'arrivée est inversible d'après le théorème précédent, or cette matrice est exactement la matrice de Vandermonde de $x_1,\dots,x_n$. ■

✌ **Explication** ✌ **(Interprétation géométrique des blocs)** Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E de dimensions respectives p et q et $\mathscr{B}=(e_1,\dots,e_{p+q})$ une base de E adaptée à la décomposition : $E=F\oplus G$. Pour rappel, cela signifie que $(e_1,\dots,e_p)$ est une base de F et $(e_{p+1},\dots,e_{p+q})$ une base de G.

Soit $f\in\mathscr{L}(E)$. La matrice de f dans $\mathscr{B}$ s'écrit : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)=\begin{pmatrix} A & C \\ B & D\end{pmatrix}$ pour certaines matrices $A\in\mathscr{M}_p(\mathbb{K})$, $B\in\mathscr{M}_{q,p}(\mathbb{K})$, $C\in\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $D\in\mathscr{M}_q(\mathbb{K})$. Nous allons tâcher de comprendre sur deux situations importantes de quelle manières les blocs A, B, C et D peuvent être interprétés géométriquement.

- **À quelle condition a-t-on : $B=0$?**

$$B=0 \quad\iff\quad \forall j\in[\![1,p]\!],\quad f(e_j)\in\mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_p) \quad\iff\quad \forall x\in F,\quad f(x)\in F \quad\iff\quad F \text{ est stable par } f.$$

  Dans ces conditions, la restriction $f|_F$ est un endomorphisme de F, et de plus : $A=\mathrm{Mat}_{(e_1,\dots,e_p)}\big(f|_F\big)$.

- **À quelle condition a-t-on : $B=C=0$?** Comme au point précédent : $B=C=0$ si et seulement si F et G sont tous les deux stables par f. Dans ces conditions, les restrictions $f|_F$ et $f|_G$ sont des endomorphismes de F et G respectivement, et de plus : $A=\mathrm{Mat}_{(e_1,\dots,e_p)}\big(f|_F\big)$ et $D=\mathrm{Mat}_{(e_{p+1},\dots,e_{p+q})}\big(f|_G\big)$.

Exemple Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E de dimensions respectives q et r et $\mathscr{B}$ une base de E adaptée à la décomposition : $E=F\oplus G$. Notons p la projection sur F parallèlement à G et s la symétrie par rapport à F parallèlement à G. Alors : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(p)=\begin{pmatrix} I_q & \\ & 0_r\end{pmatrix}$ et $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(s)=\begin{pmatrix} I_q & \\ & -I_r\end{pmatrix}$.

Démonstration Introduisons les vecteurs de $\mathscr{B}$: $\mathscr{B}=(e_1,\dots,e_{q+r})$. Par définition d'une projection :

$$\forall i\in[\![1,q]\!],\quad p(e_i)=e_i \qquad\text{et}\qquad \forall j\in[\![q+1,q+r]\!],\quad p(e_j)=0_E,$$

et par définition d'une symétrie : $\forall i\in[\![1,q]\!],\quad s(e_i)=e_i$ et $\forall j\in[\![q+1,q+r]\!],\quad s(e_j)=-e_j$. Le résultat en découle.

L'exemple qui suit est emblématique de nombreux exercices. En dimension finie, on peut calculer la matrice d'un endomorphisme dans n'importe quelle base, mais n'y a-t-il pas des bases dans lesquelles le résultat est plus simple et plus joli que dans d'autres ? L'étude de cette question est une branche de l'algèbre linéaire que vous étudierez davantage en deuxième année, appelée *réduction*. *Réduire* un endomorphisme, c'est trouver une base dans laquelle sa matrice est jolie — par exemple diagonale, triangulaire, pleine de zéros...

Exemple Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3 et $f \in \mathscr{L}(E)$. On suppose que : $f^2 = 0_{\mathscr{L}(E)}$ mais $f \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$.

Dans une certaine base de E, f a pour matrice : $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Démonstration

- **Analyse :** Soit (e_1, e_2, e_3) une base de E. On suppose que : $\mathrm{Mat}_{(e_1,e_2,e_3)}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, i.e. que : $f(e_1) = f(e_2) = 0_E$ et $f(e_3) = e_1$. Nous en tirons trois choses, d'abord que (e_1, e_2) est une famille libre de $\mathrm{Ker}\, f$, ensuite que : $e_3 \notin \mathrm{Ker}\, f$, et enfin que e_3 devra être défini AVANT e_1 dans la synthèse puisque : $e_1 = f(e_3)$.
- **Synthèse :** Commençons par calculer $\dim \mathrm{Ker}\, f$. Par hypothèse : $f^2 = 0_{\mathscr{L}(E)}$, donc : $\mathrm{Im}\, f \subset \mathrm{Ker}\, f$, donc d'après le théorème du rang : $\dim E - \dim \mathrm{Ker}\, f \leqslant \dim \mathrm{Ker}\, f$, i.e. : $\dim \mathrm{Ker}\, f \geqslant \frac{3}{2}$. Or n'oublions pas que : $f \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$, donc : $\dim \mathrm{Ker}\, f < \dim E = 3$. Conclusion : $\dim \mathrm{Ker}\, f = 2$.

  Donnons-nous à présent un vecteur quelconque e_3 de $E \setminus \mathrm{Ker}\, f$ et posons : $e_1 = f(e_3)$. Clairement : $e_1 \in \mathrm{Ker}\, f \setminus \{0_E\}$ car : $f^2 = 0_{\mathscr{L}(E)}$ et $e_3 \notin \mathrm{Ker}\, f$. Complétons alors la famille libre (e_1) de $\mathrm{Ker}\, f$ en une base (e_1, e_2) de $\mathrm{Ker}\, f$. La famille (e_1, e_2, e_3) est libre car : $e_3 \notin \mathrm{Ker}\, f$, donc est une base de E car : $\dim E = 3$. En outre, tout a été fait pour qu'on ait : $\mathrm{Mat}_{(e_1,e_2,e_3)}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3 Changements de bases, équivalence et similitude

3.1 Changements de bases

Définition-théorème (Matrice de passage d'une base à une autre) Soient $E \neq \{0_E\}$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}'$ et $\mathscr{B}''$ trois bases de E.

On appelle *matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$* la matrice : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\mathrm{Id}_E)$ souvent notée $P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$.

Alors : (i) $P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$ est inversible d'inverse $P_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}}$. (ii) $P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} P_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}''} = P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}''}$.

Démonstration

(i) $P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$ est la matrice d'un isomorphisme : $P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'\,-1} = \left(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\mathrm{Id}_E)\right)^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}\left(\mathrm{Id}_E^{-1}\right) \overset{\mathrm{Id}_E^{-1}=\mathrm{Id}_E}{=} P_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}}$.

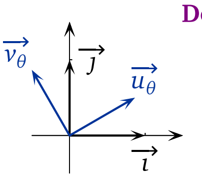
(ii) $P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} P_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}''} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\mathrm{Id}_E) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'',\mathscr{B}'}(\mathrm{Id}_E) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'',\mathscr{B}}(\mathrm{Id}_E \circ \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'',\mathscr{B}}(\mathrm{Id}_E) = P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}''}$. ■

Théorème (Changement de base pour un vecteur) Soient $E \neq \{0_E\}$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E. On pose : $P = P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$. Pour tout $x \in E$ de coordonnées X dans $\mathscr{B}$ et X' dans $\mathscr{B}'$: $X = PX'$.

Démonstration L'égalité : $x = \mathrm{Id}_E(x)$ s'écrit matriciellement dans les bases adaptées : $X = PX'$. ■

Exemple Soit $\theta \in \mathbb{R}$ fixé. Notons $\mathscr{B} = \left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et posons : $\begin{cases} \vec{u_\theta} = \cos\theta\, \vec{\imath} + \sin\theta\, \vec{\jmath} \\ \vec{v_\theta} = -\sin\theta\, \vec{\imath} + \cos\theta\, \vec{\jmath}. \end{cases}$
On définit ainsi une base $\mathscr{B}_\theta$ de $\mathbb{R}^2$.

En outre, soit $\vec{u} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Les coordonnées de $\vec{u}$ dans $\mathscr{B}$ sont bien sûr $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Si nous notons $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ les coordonnées de $\vec{u}$ dans la base $\mathscr{B}_\theta$: $\begin{cases} x = x'\cos\theta - y'\sin\theta \\ y = x'\sin\theta + y'\cos\theta \end{cases}$ et $\begin{cases} x' = x\cos\theta + y\sin\theta \\ y' = -x\sin\theta + y\cos\theta. \end{cases}$



Démonstration

- D'abord : $\text{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}_\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, matrice de déterminant : $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \neq 0$ donc inversible. Comme voulu, $\mathscr{B}_\theta$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
- Ensuite, sachant que $P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}_\theta} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$: $X = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} X'$. Pour l'autre formule, simplement calculer l'inverse de $P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}_\theta}$: $P_{\mathscr{B}_\theta}^{\mathscr{B}} = \left(P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}_\theta}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

Théorème (Changement de bases pour une application linéaire) Soient $E \neq \{0_E\}$ et $F \neq \{0_F\}$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E, $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ deux bases de F et $f \in \mathscr{L}(E,F)$.
On pose : $P = P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$, $Q = P_{\mathscr{C}}^{\mathscr{C}'}$, $A = \text{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$ et $A' = \text{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{C}'}(f)$. Alors : $A' = Q^{-1}AP$.

✌ **Explication** ✌ Il est important de se donner des mots pour décrire chacune des données de cet énoncé. Tout simplement, E est l'espace de départ de f, F son espace d'arrivée, $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ sont les « anciennes » bases, i.e. les bases avant changement de bases, et $\mathscr{B}'$ et $\mathscr{C}'$ les « nouvelles » bases, i.e. les bases après changement. Départ/arrivée/ancien/nouveau !

$$\begin{tikzcd} E, \mathscr{B}' \arrow[r, "\text{Id}_E, P"] \arrow[d, "f, A'"'] & E, \mathscr{B} \arrow[d, "f, A"] \\ F, \mathscr{C}' \arrow[r, "\text{Id}_F, Q"'] & F, \mathscr{C} \end{tikzcd}$$

Démonstration Le diagramme ci-contre peut presque tenir lieu de preuve. L'égalité : $f \circ \text{Id}_E = \text{Id}_F \circ f$ s'écrit matriciellement : $AP = QA'$, i.e. : $A' = Q^{-1}AP$. ■

✖ **Attention !** ✖ Il y a **deux** formules de changement de bases, une pour les vecteurs et une pour les applications linéaires, merci de ne pas les confondre !

Théorème (Changement de bases et matrice J_r) Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions respectives p et n et $f \in \mathscr{L}(E,F)$ de rang r. Alors pour une certaine base $\mathscr{B}$ de E et une certaine base $\mathscr{C}$ de F : $\text{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) = J_r$, où J_r est la matrice de taille $n \times p$ suivante : $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Démonstration Soient $\mathscr{B} = (e_i)_{1 \leqslant j \leqslant p}$ une base de E et $\mathscr{C} = (f_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une base de F. Est-il possible d'imposer à ces bases que la matrice de f y soit J_r ?

- Pour que les $p-r$ dernières colonnes de $\text{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$ soient nulles, il faut et il suffit que les vecteurs $e_{r+1}, \ldots, e_p$ soient éléments de $\text{Ker}\, f$ et linéairement indépendants. Comme $\text{Ker}\, f$ est de dimension $p-r$ d'après le théorème du rang, nous n'avons qu'à choisir pour famille $(e_j)_{r+1 \leqslant j \leqslant p}$ une base de $\text{Ker}\, f$ et la compléter simplement en une base $\mathscr{B}$ de E.
- Pour que les r premières colonnes de $\text{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$ soient ce qu'on veut, on peut poser : $f_j = f(e_j)$ pour tout $j \in [\![1, r]\!]$, puis compléter en une base $\mathscr{C}$ de F, **mais ce n'est possible que si la famille** $(f_j)_{1 \leqslant j \leqslant r}$ **est libre**. Or la famille $(e_j)_{1 \leqslant j \leqslant r}$ engendre par construction un supplémentaire I de $\text{Ker}\, f$ dans E, donc $f|_I$ est un isomorphisme de I sur $\text{Im}\, f$. La famille $(f_j)_{1 \leqslant j \leqslant r} = \big(f(e_j)\big)_{1 \leqslant j \leqslant r}$ est ainsi libre.

Ces deux points garantissent bien l'existence de deux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ pour lesquelles : $\text{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) = J_r$. ■

3.2 Matrices équivalentes

Définition-théorème (Matrices équivalentes)

- Soient $A, B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On dit que B est *équivalente à A* s'il existe deux matrices $P \in \text{GL}_p(\mathbb{K})$ et $Q \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ inversibles pour lesquelles : $B = Q^{-1}AP$.
- **Premier exemple fondamental :** Si, à partir d'une matrice $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on obtient une matrice B après un certain nombre d'opérations élémentaires, les matrices A et B sont équivalentes.
- **Deuxième exemple fondamental :** Soient $E \neq \{0_E\}$ et $F \neq \{0_F\}$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E, $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ deux bases de F et $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Les matrices $\text{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$ et $\text{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{C}'}(f)$ sont alors équivalentes.

Démonstration Pour le premier exemple fondamental, se souvenir du fait que les opérations élémentaires peuvent être vues comme des multiplications par des matrices inversibles. Le deuxième exemple fondamental n'est qu'une reformulation du théorème de changement de base pour une application linéaire. ■

Théorème (Propriétés de la relation d'équivalence)

(i) **Relation d'équivalence :** La relation d'équivalence sur $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est une… relation d'équivalence — mais pas dans le même sens !

(ii) **Caractérisation par le rang :** Deux matrices de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont équivalentes si et seulement si elles ont le même rang. Cela revient aussi à dire que toute matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ de rang r est équivalente à J_r.

Démonstration

(i) Soient $A, B, C \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Réflexivité : A est équivalente à A car I_p et I_n sont inversibles et : $A = I_n^{-1} A I_p$.

Symétrie : Si B est équivalente à A, i.e. : $B = Q^{-1}AP$ pour certaines matrices $P \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ et $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, alors P^{-1} et Q^{-1} sont inversibles et : $A = \left(Q^{-1}\right)^{-1} B P^{-1}$, donc A est équivalente à B.

Transitivité : Si B est équivalente à A et C équivalente à B, i.e. : $B = Q^{-1}AP$ et $C = Q'^{-1}BP'$ pour certaines matrices $P, P' \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ et $Q, Q' \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, alors PP' et QQ' sont inversibles et :

$$C = Q'^{-1}BP' = Q'^{-1}Q^{-1}APP' = (QQ')^{-1}A(PP'), \qquad \text{donc } C \text{ est équivalente à } A.$$

(ii) Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ de rang r. Notons $\widehat{A}$ l'application linéaire canoniquement associée à A et $\mathscr{B}_n$ et $\mathscr{B}_p$ les bases canoniques respectives de $\mathbb{K}^n$ et $\mathbb{K}^p$. D'après un théorème précédent : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(A) = J_r$ pour certaines bases $\mathscr{B}$ de $\mathbb{K}^p$ et $\mathscr{C}$ de $\mathbb{K}^n$, donc si on pose : $P = P_{\mathscr{B}_p}^{\mathscr{B}}$ et $Q = P_{\mathscr{B}_n}^{\mathscr{C}}$, alors : $J_r = Q^{-1}AP$, donc en effet A et J_r sont équivalentes. ■

Le résultat qui suit n'est pas tout à fait à sa place dans ce paragraphe sur les matrices équivalentes, mais il découle de la caractérisation précédente.

Théorème (Invariance du rang par transposition) Pour tout $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$: $\mathrm{rg}\left({}^{\mathrm{t}}A\right) = \mathrm{rg}(A)$.

Démonstration D'après le théorème précédent, A est équivalente à J_r pour : $r = \mathrm{rg}(A)$, donc par simple transposition dans la définition, ${}^{\mathrm{t}}A$ est équivalente à ${}^{\mathrm{t}}J_r$ — attention, J_r est de taille $n \times p$ tandis que ${}^{\mathrm{t}}J_r$ est de taille $p \times n$. Conclusion : $\mathrm{rg}\left({}^{\mathrm{t}}A\right) = \mathrm{rg}\left({}^{\mathrm{t}}J_r\right) = r = \mathrm{rg}(J_r) = \mathrm{rg}(A)$. ■

La définition et les résultats qui suivent n'ont rien à voir avec les matrices équivalentes, mais ils requièrent l'invariance du rang par transposition, donc nous ne pouvions pas les énoncer jusqu'ici.

Définition-théorème (Matrices extraites) Soient $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

(i) **Définition :** On appelle *matrice extraite de A* toute matrice de la forme $\begin{pmatrix} a_{i_1 j_1} & \cdots & a_{i_1 j_{p'}} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i_{n'} j_1} & \cdots & a_{i_{n'} j_{p'}} \end{pmatrix}$ où $i_1, \ldots, i_{n'}, j_1, \ldots, j_{p'}$ sont des entiers tels que : $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_{n'} \leqslant n$ et $1 \leqslant j_1 < \ldots < j_{p'} \leqslant p$.

(ii) **Rang d'une matrice extraite :** Pour toute matrice B extraite de A : $\mathrm{rg}(B) \leqslant \mathrm{rg}(A)$.

(iii) **Caractérisation du rang par les matrices carrées extraites :** Le rang de A est la taille maximale des matrices inversibles qu'on peut extraire de A.

Démonstration

(ii) La matrice B est obtenue à partir de A par supression d'un certain nombre de lignes et de colonnes. Notons B' la matrice intermédiaire obtenue quand on supprime seulement les colonnes. On passe de A à B' par une suppression de colonnes, puis de B' à B par une suppression de lignes. Le rang d'une matrice étant par définition le rang de la famille de ses colonnes : $\mathrm{rg}(A) \geqslant \mathrm{rg}(B') = \mathrm{rg}\left({}^{\mathrm{t}}B'\right) \geqslant \mathrm{rg}\left({}^{\mathrm{t}}B\right) = \mathrm{rg}(B)$.

(iii) Il nous suffit d'établir l'équivalence suivante — avec $r \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathrm{rg}(A) \geqslant r \qquad \Longleftrightarrow \qquad \text{On peut extraire de } A \text{ une matrice inversible de taille } r.$$

- Si on peut extraire de A une matrice inversible de taille r : $\mathrm{rg}(A) \geqslant r$ d'après (ii).
- Réciproquement, supposons : $\mathrm{rg}(A) \geqslant r$. On peut donc extraire de la famille des colonnes de A une famille libre de r vecteurs, ce qui revient à dire matriciellement que nous pouvons extraire de A une matrice $B \in \mathcal{M}_{n,r}(\mathbb{K})$ de rang r par suppression de certaines colonnes. Par le même raisonnement, nous pouvons extraire de ${}^tB$ une matrice $C \in \mathcal{M}_r(\mathbb{K})$ de rang r par suppression de certaines colonnes — i.e. par suppression de certaines lignes de B. La matrice ${}^tC$ est finalement une matrice extraite de A inversible de taille r. ■

Exemple La matrice $\begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 5 & 11 \end{pmatrix}$ est extraite de $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & 10 \\ 2 & 5 & 8 & 11 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}$ — on a retenu les lignes 1 et 2 et les colonnes 2 et 4.

Exemple $\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \geqslant 3$ car la matrice extraite $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ est inversible — pourquoi, d'ailleurs ?

3.3 Matrices semblables et trace d'un endomorphisme

Définition-théorème (Matrices semblables)

- Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que B est *semblable à* A (*sur* $\mathbb{K}$) s'il existe une matrice $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ inversible pour laquelle : $B = P^{-1}AP$.
- **Exemple fondamental :** Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E et $f \in \mathcal{L}(E)$. Les matrices $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$ sont alors semblables.

Démonstration Dans l'exemple fondamental, si on pose : $P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$, alors : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = P^{-1}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)P$ par changement de base. ■

✖ **Attention !** ✖ On a vite fait de confondre équivalence et similitude. La relation de similitude **n'est définie que** pour des matrices **carrées**, et dans son exemple fondamental, on travaille avec des **endo**morphismes et on a les **mêmes bases au départ et à l'arrivée** — donc deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ au lieu des quatre $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{C}'$ de l'équivalence.

Théorème (Propriétés de la relation de similitude)

(i) **Relation d'équivalence :** La relation de similitude sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une relation d'équivalence.

(ii) **Invariance du rang et de la trace par similitude :** Deux matrices semblables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ont même trace et même rang.

Démonstration

(i) Reprendre la preuve du résultat analogue pour les matrices équivalentes.

(ii) Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si A et B sont semblables, disons : $B = P^{-1}AP$ avec $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, elles sont en particulier équivalentes, donc de même rang, et : $\mathrm{tr}(B) = \mathrm{tr}\big(P^{-1}(AP)\big) = \mathrm{tr}\big((AP)P^{-1}\big) = \mathrm{tr}(A)$ d'après les propriétés de la trace. ■

Exemple Les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ ne sont pas semblables car elles n'ont pas la même trace, mais elles sont équivalentes car on passe de l'une à l'autre par une opération élémentaire très simple — n'est-ce pas ?

Exemple Les matrices $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont semblables.

Démonstration Notons (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Comme : $f(e_1) = (0,0,0)$, $f(e_2) = e_1$ et $f(e_3) = e_1 + e_3$, la matrice de f dans la base (e_3, e_1, e_2) est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, donc les matrices $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ sont semblables.
De la même manière : $f(e_1) = (0,0,0)$, $f(4e_2) = 4e_1$ et $f(2e_3) = 2e_1 + 2e_3$, donc la matrice de f dans la base $(e_1, 4e_2, 2e_3)$ est $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, donc les matrices $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont semblables.

Définition (Trace d'un endomorphisme en dimension finie) Soit $E \neq \{0_E\}$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

- **Définition :** Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. La trace de la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ ne dépend pas du choix de la base $\mathcal{B}$ de E choisie. On l'appelle *trace de f*, notée $\mathrm{tr}(f)$ ou $\mathrm{Tr}(f)$.
- **Linéarité :** Pour tous $f, g \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$: $\mathrm{tr}(\lambda f + \mu g) = \lambda \mathrm{tr}(f) + \mu \mathrm{tr}(g)$.
- **Effet sur une composée :** Pour tous $f, g \in \mathcal{L}(E)$: $\mathrm{tr}(f \circ g) = \mathrm{tr}(g \circ f)$.

Démonstration Il nous suffit de justifier la définition. Or pour toutes bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ de E, les matrices $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$ étant semblables, nous venons de voir qu'elles ont même trace. ■

Exemple Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et p un projecteur de E. Alors : $\mathrm{tr}(p) = \mathrm{rg}(p)$.

Démonstration Nous avons vu dans un précédent exemple que si $\mathcal{B}$ est une base de E adaptée à la décomposition : $E = \mathrm{Im}\, p \oplus \mathrm{Ker}\, p$ et si on pose : $n = \dim E$ et $r = \mathrm{rg}(p)$, alors : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(p) = \begin{pmatrix} I_r & \\ & 0_{n-r} \end{pmatrix}$.
A fortiori : $\mathrm{tr}(p) = \mathrm{tr}\Big(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(p)\Big) = \mathrm{tr}\begin{pmatrix} I_r & \\ & 0_{n-r} \end{pmatrix} = r = \mathrm{rg}(p)$.

3.4 Introduction à la diagonalisation d'une matrice carrée

Les concepts de ce dernier paragraphe ne sont pas au programme de MPSI, il font partie du domaine de la *réduction* dont nous avons parlé plus haut et vous les étudierez en deuxième année. Cependant, parce qu'ils apparaissent sous forme cachée dans de nombreux exercices de première année, je préfère vous les livrer en partie dès maintenant, cela ne pourra que vous aider à comprendre la logique des exercices en question.

Je me contenterai toutefois de vous initier au point de vue matriciel de la *diagonalisation*, i.e. à la diagonalisation des matrices carrées. On peut sans difficulté étendre ce qui suit au cas des endomorphismes en dimension finie.

Définition (Valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres d'une matrice carrée) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle *valeur propre de A* tout scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ pour lequel : $\mathrm{Ker}\,(A - \lambda I_n) \neq \{0\}$, i.e. pour lequel il existe un vecteur NON NUL $X \in \mathbb{K}^n$ tel que : $AX = \lambda X$.

Un tel vecteur X est alors appelé un *vecteur propre de A associé à la valeur propre λ*.

Enfin, l'ensemble $\mathrm{Ker}\,(A - \lambda I_n)$ de ces vecteurs propres — vecteur nul en plus — est appelé le *sous-espace propre de A associé à la valeur propre λ*.

Exemple On pose : $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 3 & -1 & -3 \\ -3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$. La matrice A possède exactement deux valeurs propres, à savoir 2 et -1.

De plus : $\quad \mathrm{Ker}\,(A-2I_3)=\mathrm{Vect}\big((1,1,0),(1,0,1)\big)$ et $\mathrm{Ker}\,(A+I_3)=\mathrm{Vect}\big((1,-1,1)\big)$.

Démonstration Il s'agit seulement de résoudre pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$ le système : $AX=\lambda X$ d'inconnue $X\in\mathbb{R}^3$. Fixons donc un tel λ. Pour tout $X=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$:

$$AX=\lambda X \iff (A-\lambda I_3)X=0 \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -(\lambda+1)x & + & 3y & + & 3z & = & 0\\ 3x & - & (\lambda+1)y & - & 3z & = & 0\\ -3x & + & 3y & + & (5-\lambda)z & = & 0\end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -(\lambda+1)x & + & 3y & + & 3z & = & 0\\ (2-\lambda)x & + & (2-\lambda)y & & & = & 0\\ -3x & + & 3y & + & (5-\lambda)z & = & 0.\end{array}\right. \qquad L_2\leftarrow L_1+L_2$$

Du coup, si $\lambda=2$, la deuxième équation disparaît :

$$AX=2X \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -3x & + & 3y & + & 3z & = & 0\\ -3x & + & 3y & + & 3z & = & 0\end{array}\right. \iff x=y+z.$$

Conclusion : $\quad \mathrm{Ker}\,(A-2I_3)=\big\{(y+z,y,z)\big\}_{y,z\in\mathbb{R}}=\mathrm{Vect}\big((1,1,0),(1,0,1)\big)$. À présent, si $\lambda\neq 2$:

$$AX=\lambda X \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -(\lambda+1)x & + & 3y & + & 3z & = & 0\\ x & + & y & & & = & 0\\ -3x & + & 3y & + & (5-\lambda)z & = & 0\end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -(\lambda+4)x & & & + & 3z & = & 0\\ x & + & y & & & = & 0\\ -6x & & & + & (5-\lambda)z & = & 0\end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} L_1\leftarrow L_1-3L_2\\ \\ L_3\leftarrow L_3-3L_2\end{array}$$
$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -(\lambda+4)x & & & + & 3z & = & 0\\ x & + & y & & & = & 0\\ \left(2+\lambda-\lambda^2\right)x & & & & & = & 0\end{array}\right. \qquad L_3\leftarrow 3L_3-(5-\lambda)L_1$$
$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -(\lambda+4)x & & & + & 3z & = & 0\\ x & + & y & & & = & 0\\ (2-\lambda)(\lambda+1)x & & & & & = & 0.\end{array}\right.$$

Finalement, si $\lambda=-1$: $\quad AX=-X \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -3x & & & + & 3z & = & 0\\ x & + & y & & & = & 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} y & = & -x\\ z & = & x.\end{array}\right.$

Conclusion : $\quad \mathrm{Ker}\,(A+I_3)=\mathrm{Vect}\big((1,-1,1)\big)$. Enfin, si : $\lambda\neq 2$ et $\lambda\neq -1$, le système étudié admet $(0,0,0)$ pour unique solution, donc 2 et -1 sont les seules valeurs propres de A.

Définition-théorème (Matrice diagonalisable) Soit $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est *diagonalisable* (*sur* $\mathbb{K}$) si $\mathbb{K}^n$ possède une base constituée de vecteurs propres de A.

Dans ce cas, si on note $(X_1,\ldots,X_n)$ une telle base et $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ les valeurs propres associées, ainsi que P la matrice de colonnes $X_1,\ldots,X_n$, alors : $\quad A=P\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}P^{-1}$.

Démonstration Faisons l'hypothèse que A est diagonalisable et conservons les notations du théorème, mais notons en outre $\widehat{A}$ l'application linéaire canoniquement associée à A et $\mathscr{B}_n$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

Pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, par définition de X_i et λ_i : $\quad \widehat{A}(X_i)=\lambda_iX_i$, donc les coordonnées de $\widehat{A}(X_i)$ dans la base $(X_1,\ldots,X_n)$ sont $(0,\ldots,0,\lambda_i,0,\ldots,0)$. A fortiori : $\quad \mathrm{Mat}_{(X_1,\ldots,X_n)}\big(\widehat{A}\big)=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$.

Or par définition de P : $\quad P=P_{\mathscr{B}_n}^{(X_1,\ldots,X_n)}$, donc par changement de base : $\quad \mathrm{Mat}_{(X_1,\ldots,X_n)}\big(\widehat{A}\big)=P^{-1}\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_n}\big(\widehat{A}\big)P$,

et finalement comme voulu : $\quad A=P\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}P^{-1}$. ■

Exemple On pose : $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 3 & -1 & -3 \\ -3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$: $A^k = \begin{pmatrix} (-1)^k & a_k & a_k \\ a_k & (-1)^k & -a_k \\ -a_k & a_k & 2^k + a_k \end{pmatrix}$ avec : $a_k = 2^k - (-1)^k$.

Démonstration **Idée de la preuve :** Parce que les puissances d'une matrice diagonale sont très faciles à calculer, nous allons commencer par montrer que A est diagonalisable.

- Nous avons calculé les valeurs propres et les sous-espaces propres de A dans un exemple précédent. En l'occurrence, si nous posons : $e_1 = (1,1,0)$, $e_2 = (1,0,1)$ et $e_3 = (1,-1,1)$, alors :
$$Ae_1 = 2e_1, \qquad Ae_2 = 2e_2 \qquad \text{et} \qquad Ae_3 = -e_3.$$
Notons à présent P la matrice de (e_1, e_2, e_3) dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Il n'est pas dur de montrer que P est inversible d'inverse $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. En particulier, (e_1, e_2, e_3) est donc une base de $\mathbb{R}^3$, ce qui montre que A est diagonalisable, et P est la matrice de passage de la base canonique à (e_1, e_2, e_3).
Conclusion : $A = P \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1}$ par changement de base, où $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ n'est autre que la matrice de l'application linéaire canoniquement associée à A dans (e_1, e_2, e_3).
- Finalement, pour tout $k \in \mathbb{N}$: $A^k = \left(P \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1} \right)^k = P \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1} \times \ldots \times P \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1}$

$$= P \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^k P^{-1} = P \begin{pmatrix} 2^k & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^k \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} (-1)^k & a_k & a_k \\ a_k & (-1)^k & -a_k \\ -a_k & a_k & 2^k + a_k \end{pmatrix} \quad \text{si on pose :} \quad a_k = 2^k - (-1)^k.$$