RUDIMENTS DE LOGIQUE ET VOCABULAIRE ENSEMBLISTE

Nous étudierons ce chapitre en parallèle de l'annexe « Raisonner, rédiger » qui, en dépit de ce statut, est sans doute le texte mathématique le plus important de l'année.

1 CONNECTEURS LOGIQUES ET QUANTIFICATEURS

On appelle *proposition* toute phrase p au sujet de laquelle on peut poser la question « p est-elle vraie ? » La plupart des phrases grammaticalement correctes sont des propositions, mais par exemple « Dis-le-moi ! », « Bonjour » ou « Comment vas-tu ? » n'en sont pas, la question « Est-il vrai que bonjour ? » n'a aucun sens.

La *valeur de vérité* d'une proposition est le vrai ou le faux — mais pas les deux. Deux propositions de même valeur de vérité sont dites *équivalentes*. Pour démontrer une proposition p, vous n'êtes pas obligés de démontrer p elle-même, vous pouvez démontrer n'importe quelle proposition équivalente. Par exemple, démontrer que « Socrate n'est pas immortel », c'est pareil que démontrer que « Socrate est mortel ».

À partir des propositions « J'ai faim » et « J'ai soif », on peut construire une nouvelle proposition « J'ai faim ET (j'ai) soif ». Plus généralement, nous appellerons *connecteur logique* tout procédé de construction d'une proposition à partir d'une ou de plusieurs autres propositions. Exemples courants : « et », « ou », « si, alors », « parce que »...

Un connecteur logique est dit *vérifonctionnel* si la valeur de vérité d'une proposition construite à l'aide de ce connecteur dépend seulement de la valeur de vérité des propositions utilisées dans la construction. Pour savoir, par exemple, si la proposition : p et q est vraie, on n'a pas besoin de savoir exactement ce que cachent p et q — leur signification — on a juste besoin de connaître leurs valeurs de vérité respectives. Si les deux sont vraies, la proposition : p et q est vraie, et sinon elle est fausse.

En mathématiques, les connecteurs logiques utilisés sont tous vérifonctionnels.

Pour votre culture, remarquez bien que certains connecteurs logiques ne sont pas vérifonctionnels. C'est le cas du connecteur « parce que ». Imaginez un contexte dans lequel il est vrai que « Je me suis dépêché parce que j'étais en retard ». Les deux propositions « Je suis en retard » et « Je me suis dépêché » sont vraies. Pourtant, si on remplace « J'étais en retard » par « La glace est un solide » — proposition également vraie — la nouvelle proposition « Je me suis dépêché parce que la glace est un solide » est fausse. Or, si « parce que » était vérifonctionnel, cette proposition serait aussi vraie que celle dont nous sommes partis. En résumé, la relation de causalité dont « parce que » porte le témoignage échappe complètement aux mathématiques.

1.1 NÉGATION, CONJONCTION, DISJONCTION

Définition (Négation, conjonction, disjonction)

- **Négation :** La proposition : non p est vraie si p est fausse et fausse si p est vraie.
- **Conjonction :** La proposition : p et q est vraie si p et q sont vraies toutes les deux et fausse sinon.
- **Disjonction :** La proposition : p ou q est vraie si l'une AU MOINS des propositions p et q est vraie, éventuellement les deux, et fausse dans le seul cas où p et q sont fausses toutes les deux.

Attention ! Dans le langage usuel, « ou » oppose parfois les termes qu'il relie. Dans l'expression « fromage ou dessert » des restaurants, « ou » est *exclusif* car il exclut la possibilité qu'on choisisse les deux — vous pouvez toujours essayer ! En mathématiques, « ou » est toujours *inclusif*, la proposition : p ou q est vraie même quand p ET q sont vraies.

On a interdit depuis le début qu'une proposition soit à la fois vraie et fausse, mais interdit aussi qu'une proposition soit autre chose que vraie ou fausse. Ces deux principes s'appellent le *principe de non-contradiction* et le *principe du tiers exclu*.

Il est ensuite important de savoir nier une conjonction ou une disjonction. Dire que : p et q est vraie, c'est dire que les deux propositions p et q sont vraies. Affirmer le contraire revient donc à dire que l'une des propositions est fausse, i.e. à affirmer que la proposition : (non p) ou (non q) est vraie.

De même, dire que : p ou q est vraie, c'est dire que l'une des propositions p et q est vraie. Affirmer le contraire revient donc à dire que les deux propositions sont fausses, i.e. à affirmer que la proposition : (non p) et (non q) est vraie.

Théorème (Règles de calcul sur la négation, la conjonction et la disjonction)

- **Principe de non-contradiction :** La proposition : p et (non p) est fausse. Toute proposition de cette forme est appelée une *contradiction*.
- **Principe du tiers exclu :** La proposition : p ou (non p) est vraie.
- **Double négation :** Les propositions p et : non (non p) sont équivalentes.
- **Négation d'une conjonction :** Les propositions : non (p et q) et : (non p) ou (non q) sont équivalentes.
- **Négation d'une disjonction :** Les propositions : non (p ou q) et : (non p) et (non q) sont équivalentes.

Exemple « On n'a qu'à prendre un pot de vanille et un pot de chocolat, je suppose que $\overbrace{\text{tu aimes l'un des deux parfums}}^{p \text{ ou } q}$? »
« Justement non, $\underbrace{\text{je n'aime ni l'un ni l'autre.}}_{\text{Négation : (non } p) \text{ et (non } q)}$ »

1.2 Implication, équivalence

Quand on dit qu'une proposition p en implique une autre q, la seule chose qu'on affirme, c'est que si p est vraie, q l'est **FORCÉMENT, NÉCESSAIREMENT, OBLIGATOIREMENT**. Dire que l'implication est fausse revient donc à dire que le passage de p à q n'est **PAS SYSTÉMATIQUE**, i.e. que p est vraie sans que q le soit. Dans toute autre situation, l'implication est vraie.

Définition (Implication, équivalence)

- **Implication :** La proposition : $p \Longrightarrow q$, qu'on lit : « p implique q » ou : « si p, alors q », est fausse dans le seul cas où p est vraie et q fausse. On appelle p son *antécédent* et q son *conséquent*.
- **Équivalence :** La proposition : $p \Longleftrightarrow q$, qu'on lit : « p si et seulement si q » ou « p et q sont équivalentes », est vraie si p et q ont la même valeur de vérité, et fausse sinon.

Un petit point de vocabulaire.

— On dit que q est une *condition nécessaire* pour que p soit vraie si, lorsque p est vraie, q l'est aussi nécessairement — autrement dit si l'implication : $p \Longrightarrow q$ est vraie.

— On dit que q est une *condition suffisante* pour que p soit vraie s'il suffit que q soit vraie pour que p le soit aussi — autrement dit si l'implication : $q \Longrightarrow p$ est vraie.

Attention !

- Affirmer que l'implication : $p \Longrightarrow q$ est vraie n'implique ni que p est vraie, ni que q est vraie. Il est parfaitement vrai que « Si Pinocchio est président de la République, alors il est chef des armées », et pourtant Pinocchio n'est pas plus président de la République qu'il n'est chef des armées.
- Une implication : $p \Longrightarrow q$ peut être vraie alors que p et q n'ont rien de commun, car après tout seules leurs valeurs de vérité comptent — vérifonctionnalité oblige. Par exemple, il est vrai que « Si $0 = 0$, alors les oiseaux ont des plumes ». Il en résulte, au contraire de ce que vous croyez sans doute, que l'implication n'a rien à voir avec la causalité du connecteur « parce que ». Dans : $p \Longrightarrow q$, p n'est pas la cause de q, pas du tout. La proposition « S'il y a de la fumée, alors il y a du feu » est vraie, par exemple, et pourtant c'est le feu la cause et la fumée l'effet.
- L'implication : $p \Longrightarrow q$ est toujours vraie quand p est fausse. Par exemple, « si $0 \neq 0$, alors $0 = 0$ », ce qui choque souvent les débutants. Est-ce si choquant cela dit ? Tout le monde accepte la proposition « Pour tout $x \in \mathbb{R}$, si x est un entier naturel, alors x est positif », et pourtant le réel x y est quelconque. L'implication est toujours vraie, mais selon la valeur de x, elle est du type « vrai $\Longrightarrow$ vrai » ($x \in \mathbb{N}$), « faux $\Longrightarrow$ vrai » ($x \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{N}$) ou « faux $\Longrightarrow$ faux » ($x \in \mathbb{R}_-^*$).

Définition (Réciproque, contraposée)

ATTENTION
à la permutation
de p et q !

- **Réciproque :** On appelle *réciproque* de l'implication : $p \Longrightarrow q$ la proposition : $q \Longrightarrow p$.
- **Contraposée :** On appelle *contraposée* de l'implication : $p \Longrightarrow q$ la proposition : $(\text{non } q) \Longrightarrow (\text{non } p)$.

Par définition de l'implication, la proposition : $p \Longrightarrow q$ est fausse dans le seul cas où p est vraie mais q est fausse. La négation de cette implication est ainsi facile à écrire, c'est la proposition : p et (non q).

Théorème (Règles de calcul sur l'implication et l'équivalence)

- **Négation de l'implication :** Les propositions : $\text{non } (p \Longrightarrow q)$ et : p et (non q) sont équivalentes.
  Par négation, les propositions : $p \Longrightarrow q$ et : (non p) ou q sont aussi équivalentes.
- **Lien entre implication et contraposée :** Toute implication est équivalente à sa contraposée.
  En d'autres termes, les propositions : $p \Longrightarrow q$ et : $(\text{non } q) \Longrightarrow (\text{non } p)$ sont équivalentes.
- **Lien entre implication et équivalence :** Toute équivalence est une double implication.
  En d'autres termes, les propositions : $p \Longleftrightarrow q$ et : $(p \Longrightarrow q)$ et $(q \Longrightarrow p)$ sont équivalentes.

La contraposée : $(\text{non } q) \Longrightarrow (\text{non } p)$ est fausse dans le seul cas où (non q) est vraie mais (non p) est fausse, i.e. dans le seul cas où q est fausse et p est vraie, exactement comme l'implication : $p \Longrightarrow q$!

En vertu du dernier point, au lieu de dire que p et q sont équivalentes, on dit souvent que q est une *condition nécessaire et suffisante* pour que p soit vraie.

Exemple

- Est-il vrai que $\overbrace{\text{si j'ai 18 ans, alors j'ai le droit de vote}}^{p \Longrightarrow q}$? Non, car je peux très bien $\overbrace{\text{avoir 18 ans}}^{p \text{ est vraie}}$ mais un casier judiciaire tel que $\underbrace{\text{le droit de vote m'a été supprimé}}_{q \text{ est fausse}}$. Ceci illustre l'équivalence de : $\text{non } (p \Longrightarrow q)$ et : p et (non q).
- Il est équivalent de dire « $\underbrace{\text{S'il pleut, alors il y a des nuages}}_{p \Longrightarrow q}$ » et « $\underbrace{\text{S'il n'y a pas de nuages, alors il ne pleut pas}}_{(\text{non } q) \Longrightarrow (\text{non } p)}$ ».

1.3 QUANTIFICATEURS

On appelle *prédicat* toute propriété portant sur un ou plusieurs objets donnés en arguments. Par exemple, « être un chat » est un prédicat, et si nous le notons $\mathscr{C}$, la proposition « x est un chat » peut être notée $\mathscr{C}(x)$. De même, « être plus âgé que » est un prédicat à deux arguments, et si nous le notons $\mathscr{A}$, la proposition « x est plus âgé que y » peut être notée $\mathscr{A}(x, y)$, ou plus couramment $x \mathscr{A} y$. Les symboles usuels $=$, $\leqslant$ et $<$ sont des prédicats à deux arguments.

Définition (Quantificateur universel $\forall$, quantificateur existentiel $\exists$)

- **Quantificateur universel :** La proposition : $\forall x, \quad \mathscr{P}(x)$ est vraie si tout objet mathématique a la propriété $\mathscr{P}$, et fausse sinon, c'est-à-dire si au moins un objet n'a pas la propriété $\mathscr{P}$.

  On a plutôt affaire en pratique à des propositions de la forme : $\forall x \in E, \quad \mathscr{P}(x)$ où E est un ensemble. Une telle proposition n'est qu'un résumé pour : $\forall x, \quad \big(x \in E \Longrightarrow \mathscr{P}(x)\big)$ et signifie que tout élément de E a la propriété $\mathscr{P}$.
- **Quantificateur existentiel :** La proposition : $\exists\, x, \quad \mathscr{P}(x)$ est vraie si AU MOINS un objet mathématique a la propriété $\mathscr{P}$, et fausse sinon, c'est-à-dire si aucun objet n'a la propriété $\mathscr{P}$.

  On a plutôt affaire en pratique à des propositions de la forme : $\exists\, x \in E, \quad \mathscr{P}(x)$ où E est un ensemble. Une telle proposition n'est qu'un résumé pour : $\exists\, x, \quad \big(x \in E \text{ et } \mathscr{P}(x)\big)$ et signifie qu'AU MOINS un élément de E a la propriété $\mathscr{P}$.

Exemple Il est vrai que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2 \neq -1$ car le carré d'un réel est toujours positif.
Il est vrai également que : $\exists\, z \in \mathbb{C}, \quad z^2 = -1$ car par exemple $\mathrm{i}^2 = -1$.

Attention ! Les symboles $\forall$ et $\exists$ NE sont PAS des abréviations et NE doivent JAMAIS être employés au cœur d'une phrase en français pour dire « pour tout » ou « il existe ». Pourquoi ? Parce que ça ne se fait pas, de même que cela ne se fait pas de manger en public à même l'assiette avec sa bouche, sans les mains et sans couverts. Par exemple, on n'écrit pas « $\forall n \in \mathbb{N}$, la fonction $x \longmapsto e^{nx}$ est croissante sur $\mathbb{R}$ », ni « $\exists$ un entier naturel plus petit que tous les autres ». Ce que vous pouvez faire, c'est inclure une proposition quantifiée dans une phrase en français en l'annonçant avec deux points « : ».

Réfléchissez-y en français à voix haute, les négations suivantes sont en principe très naturelles.

Théorème (Négation des quantificateurs)

- **Négation d'un $\forall$:** Les propositions : $\text{non}\left(\forall x \in E, \quad \mathscr{P}(x)\right)$ et : $\exists x \in E, \quad \text{non}\ \mathscr{P}(x)$ sont équivalentes.
- **Négation d'un $\exists$:** Les propositions : $\text{non}\left(\exists x \in E, \quad \mathscr{P}(x)\right)$ et : $\forall x \in E, \quad \text{non}\ \mathscr{P}(x)$ sont équivalentes.

Exemple Il est équivalent de dire :

— d'une part « $\overbrace{\text{Il est faux que tout homme a les yeux bleux}}^{\text{non}\,(\forall x \in E,\ \mathscr{P}(x))}$ » et « $\overbrace{\text{Certains hommes n'ont pas les yeux bleus}}^{\exists x \in E,\ \text{non}\ \mathscr{P}(x)}$ »,

— d'autre part « $\underbrace{\text{Il est faux que certains hommes ont des cornes}}_{\text{non}\,(\exists x \in E,\ \mathscr{P}(x))}$ » et « $\underbrace{\text{Tout homme est sans cornes}}_{\forall x \in E,\ \text{non}\ \mathscr{P}(x)}$ ».

Pour nier une phrase contenant un ou plusieurs quantificateurs, on réécrit cette phrase en remplaçant tous les $\forall$ par des $\exists$ et tous les $\exists$ par des $\forall$, puis on nie le prédicat final.

Exemple La négation de la proposition :

$$\begin{array}{rcccccc} & \forall \varepsilon > 0, & \exists \alpha > 0, & \forall x \in \mathbb{R}, & \Big(|x-1| < \alpha & \Longrightarrow & \left|\sqrt{x}-1\right| < \varepsilon\Big) \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow \text{ Négation} & \\ \text{est :} & \exists \varepsilon > 0, & \forall \alpha > 0, & \exists x \in \mathbb{R}, & \Big(|x-1| < \alpha & \text{et} & \left|\sqrt{x}-1\right| \geqslant \varepsilon\Big). \end{array}$$

Autre opération courante, la permutation des quantificateurs. On peut toujours permuter les quantificateurs universels $\forall$ ENTRE EUX, et les quantificateurs existentiels $\exists$ ENTRE EUX.

Exemple Les propositions $\forall x \in \mathbb{R}_+, \ \forall y \in \mathbb{R}_-, \ x \geqslant y$ et : $\forall y \in \mathbb{R}_-, \ \forall x \in \mathbb{R}_+, \ x \geqslant y$ sont équivalentes.
Les propositions $\exists x \in \mathbb{R}_+, \ \exists y \in \mathbb{R}_-, \ x \geqslant y$ et : $\exists y \in \mathbb{R}_-, \ \exists x \in \mathbb{R}_+, \ x \geqslant y$ sont équivalentes.

Attention ! La permutation d'un $\forall$ et d'un $\exists$ n'est pas automatique en revanche.

- Vrai : $\begin{cases} \text{« Dans toute cerise il y a un noyau. »} \\ \forall c \text{ cerise}, \quad \exists n \text{ noyau}, \quad n \text{ est dans } c. \end{cases}$ Faux : $\begin{cases} \text{« Il existe un noyau qui se trouve dans toutes les cerises. »} \\ \exists n, \quad \forall c, \quad n \text{ est dans } c. \end{cases}$

  Conclusion : quand une proposition $\forall\,\exists$ est vraie, la proposition $\exists\,\forall$ correspondante PEUT être fausse. N'apprenez pas ce résultat par cœur, vous le retrouverez rapidement au feeling dans chaque cas particulier.

- Vrai : $\begin{cases} \text{« Il existe une planète dont tous les Terriens sont originaires. »} \\ \exists p \text{ planète}, \quad \forall t \text{ Terrien}, \quad t \text{ est originaire de } p. \end{cases}$

  Vrai aussi : $\begin{cases} \text{« Tout Terrien a une planète d'origine. »} \\ \forall t, \quad \exists p, \quad t \text{ est originaire de } p, \end{cases}$ mais avec une signification plus faible.

  Plus généralement, quand une proposition « $\exists\,\forall$ » est vraie, la proposition « $\forall\,\exists$ » l'est aussi.

Définition (Pseudo-quantificateur $\exists!$) La proposition : $\exists!\ x \in E, \quad \mathscr{P}(x)$ est vraie si l'ensemble E contient EXACTEMENT un élément de propriété $\mathscr{P}$.

Exemple Il est vrai que : $\exists!\, n \in \mathbb{N}, \quad 1 \leqslant 2n \leqslant 3$ et l'entier n en question est tout simplement 1.

2 Vocabulaire ensembliste

2.1 Appartenance et inclusion

Les notions intuitives d'*ensemble* et d'*appartenance* sont supposées connues, les ensembles sont des sacs de billes dont les éléments sont les billes. Pour tout ensemble E, la relation « x est un élément de E » ou « x appartient à E » est notée $x \in E$ et sa négation $x \notin E$. Il existe un et un seul ensemble sans élément, appelé l'*ensemble vide* et noté $\varnothing$.

Un ensemble peut être défini de deux manières — soit *en extension*, soit *en compréhension*.

— Définir un ensemble *en extension*, c'est donner la liste complète explicite de tous ses éléments. On note cette liste entre accolades et l'ordre des éléments listés n'a aucune importance. Par exemple, $\{0,1,2\}$ est un ensemble, le même que $\{2,1,0\}$. Un ensemble de la forme $\{x\}$ est appelé un *singleton* tandis qu'un ensemble de la forme $\{x,y\}$ avec $x \neq y$ est appelé une *paire*. Il est bien évident qu'on ne peut définir en extension que des ensembles **finis**, incapables que nous sommes d'écrire une liste infinie de symboles.

— Définir un ensemble *en compréhension*, c'est le définir par une propriété $\mathscr{P}$ que ses éléments vérifient et sont seuls à vérifier. On note $\big\{x \mid \ \mathscr{P}(x)\big\}$ l'ensemble des objets qui satisfont la propriété $\mathscr{P}$, mais en pratique, l'ensemble $\big\{x \mid \ x \in E \ \text{ et } \ \mathscr{P}(x)\big\}$ des éléments de E qui satisfont $\mathscr{P}$ est plutôt noté $\big\{x \in E \mid \ \mathscr{P}(x)\big\}$.
L'ensemble $\big\{x \mid \ \exists\, n \in \mathbb{N}, \quad x = 2^n\big\}$ des entiers $2^0, 2^1, 2^2, 2^3 \dots$ est aussi noté $\big\{2^n \mid \ n \in \mathbb{N}\big\}$. Plus généralement, l'ensemble des objets x_i qu'on obtient en faisant défiler i dans un certain ensemble d'indices I est noté $\big\{x_i \mid \ i \in I\big\}$.

Soyons bien clairs, il n'y a pas deux sortes d'ensembles en mathématiques, seulement deux manières de les décrire. Un même ensemble peut être présenté en extension ou en compréhension. Par exemple : $\{0,1\} = \big\{n \in \mathbb{N} \mid \ n^2 = n\big\}$.

Définition (Cardinal d'un ensemble fini) Pour tout ensemble **fini** E, on appelle *cardinal de E* et on note $|E|$ (ou $\mathrm{card}(E)$ ou $\#E$) le nombre d'éléments de E.

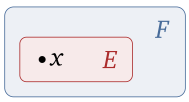
Exemple Pour tous $a, b \in \mathbb{Z}$, on note $[\![a,b]\!]$ l'ensemble des **entiers** compris entre a et b : $[\![a,b]\!] = \big\{n \in \mathbb{Z} \mid \ a \leqslant n \leqslant b\big\}$.
Si $a \leqslant b$: $\big|[\![a,b]\!]\big| = b - a \boxed{+1}$. Par exemple, $[\![0,2]\!] = \{0,1,2\}$ contient $2 - 0 + 1 = 3$ éléments.

Définition (Égalité et inclusion) Soient E et F deux ensembles.

- **Égalité :** E et F sont égaux s'ils ont exactement les mêmes éléments : $\forall x, \quad \big(x \in E \iff x \in F\big)$.
- **Inclusion :** On dit que E est *inclus dans* F, que F *contient* E ou que E est une *partie de* F, ce qu'on note $E \subset F$, si tout élément de E est élément de F : $\forall x, \quad \big(x \in E \implies x \in F\big)$, i.e. en résumé : $\forall x \in E, \quad x \in F$.

  Clairement : $E = F \quad \iff \quad E \subset F \ \text{ et } \ F \subset E$.

Attention ! $\boxed{\text{Appartenance} \neq \text{Inclusion}}$

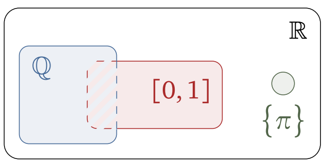


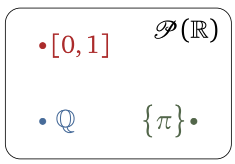
Sur la figure ci-contre : $x \in E, \quad E \subset F \quad \text{et} \quad x \in F, \quad$ mais : $E \notin F, \quad x \not\subset E \quad \text{et} \quad x \not\subset F$.

Exemple $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ mais $\mathbb{N} \notin \mathbb{Z}$. Par rapport à $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$ est un sac dans un sac et non une bille dans un sac.
$-1 \in \mathbb{Z}$ mais $-1 \not\subset \mathbb{Z}$. Par rapport à $\mathbb{Z}$, -1 est une bille dans un sac et non un sac dans un sac.

Définition (Ensemble des parties d'un ensemble) Soit E un ensemble.
On note $\mathscr{P}(E)$ l'ensemble des parties de E : $\mathscr{P}(E) = \big\{A \mid \ A \subset E\big\}$.
Ainsi, pour tout ensemble A : $A \in \mathscr{P}(E) \iff A \subset E$.

Attention ! Dire que A **appartient** à $\mathscr{P}(E)$ équivaut à dire que A est **incluse** dans E. Sur la figure ci-contre, tout ce qui apparaît dans $\mathbb{R}$ comme une partie apparaît dans $\mathscr{P}(\mathbb{R})$ comme un élément, un « point ».





Exemple Pour tout ensemble E : $\quad E \in \mathscr{P}(E) \quad$ et $\quad \varnothing \in \mathscr{P}(E)$.

Démonstration Montrer que $E \in \mathscr{P}(E)$ revient à montrer que $E \subset E$, i.e. que : $\quad \forall x \in E, \quad x \in E, \quad$ et bien sûr c'est vrai !

Montrons maintenant que $\varnothing \in \mathscr{P}(E)$, i.e. que $\varnothing \subset E$, i.e. que : $\quad \underbrace{\forall x, \quad \Big(\underbrace{\underbrace{x \in \varnothing}_{\text{Faux...}} \Longrightarrow x \in E}_{\text{... donc vrai...}} \Big)}_{\text{... donc vrai ! Et voilà.}}$.

Exemple $\mathscr{P}\big(\{0,1,2\}\big) = \Big\{ \underbrace{\varnothing}_{\text{Cardinal 0}} , \underbrace{\{0\},\{1\},\{2\}}_{\text{Cardinal 1}} , \underbrace{\{0,1\},\{0,2\},\{1,2\}}_{\text{Cardinal 2}} , \underbrace{\{0,1,2\}}_{\text{Cardinal 3}} \Big\}$.

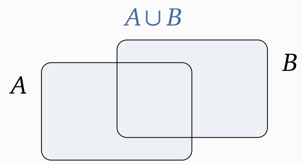
2.2 Opérations sur les ensembles

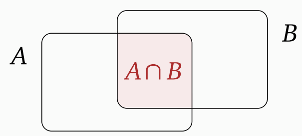
Définition (Réunion, intersection) Soient A et B deux ensembles.

- **Réunion de deux ensembles :** On appelle *réunion de A et B* l'ensemble $A \cup B = \big\{x \mid \quad x \in A \ \text{ ou } \ x \in B\big\}$.
- **Intersection de deux ensembles :** On appelle *intersection de A et B* l'ensemble $A \cap B = \big\{x \mid \quad x \in A \ \text{ et } \ x \in B\big\}$.

Association d'idées

$\cup$/ou/$\exists$





Association d'idées

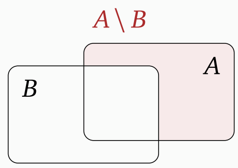
$\cap$/et/$\forall$

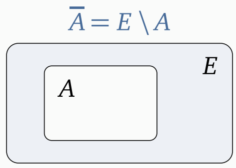
Ces définitions se généralisent au cas de plus de deux ensembles. Soit $\big\{A_i \mid \quad i \in I\big\}$ un ensemble d'ensembles — cela veut dire que I est un ensemble, et que pour tout $i \in I$, A_i est un ensemble.

- **Réunion :** On appelle *réunion des A_i, i décrivant I*, l'ensemble $\bigcup\limits_{i \in I} A_i = \big\{x \mid \quad \exists\, i \in I, \quad x \in A_i\big\}$, i.e. l'ensemble des objets qui appartiennent à l'un des A_i.
- **Intersection :** On appelle *intersection des A_i, i décrivant I*, l'ensemble $\bigcap\limits_{i \in I} A_i = \big\{x \mid \quad \forall i \in I, \quad x \in A_i\big\}$, i.e. l'ensemble des objets qui appartiennent à tous les A_i.

Exemple Pour tous ensembles A et B : $\quad A \subset B \quad \Longleftrightarrow \quad A \cup B = B \quad \Longleftrightarrow \quad A \cap B = A$. $\quad$ Faites un dessin pour vous en convaincre !

Définition (Différence, complémentaire)





- **Différence :** Soient A et B deux ensembles. On appelle *différence de B dans A* l'ensemble :
$$A \setminus B = \big\{x \mid \quad x \in A \quad \text{et} \quad x \notin B\big\}.$$
- **Complémentaire :** Soient E un ensemble et A une partie de E. L'ensemble $E \setminus A$ est appelé le *complémentaire de A dans E*. Il est noté $\overline{A}$ ou A^c quand l'ensemble E est fixé sans ambiguïté.

Exemple Soient E un ensemble et A et B deux parties de E. Tâchez de vous convaincre que si $A \subset B$, alors $\overline{B} \subset \overline{A}$, et que si $A \cup B = E$ et $A \cap B = \varnothing$, alors $B = \overline{A}$.

Définition (Ensembles disjoints, recouvrement disjoint, partition)

- **Ensembles disjoints :** Soient A et B deux ensembles. On dit que A et B sont *disjoints* si $A \cap B = \varnothing$, i.e. si A et B n'ont aucun élément commun. Leur réunion $A \cup B$ est dans ce cas notée plutôt $A \sqcup B$.

  Pour un ensemble $\big\{A_i \mid \quad i \in I\big\}$ d'ensembles deux à deux disjoints, la réunion $\bigcup\limits_{i \in I} A_i$ est notée plutôt $\bigsqcup\limits_{i \in I} A_i$.
- **Recouvrement disjoint, partition :** Soit E un ensemble. On appelle *recouvrement disjoint de E* tout ensemble $\big\{A_i \mid \quad i \in I\big\}$ de parties de E pour lesquelles $E = \bigsqcup\limits_{i \in I} A_i$. Si de plus A_i est non vide pour tout $i \in I$, on dit plutôt que $\big\{A_i \mid \quad i \in I\big\}$ est une *partition de E*.

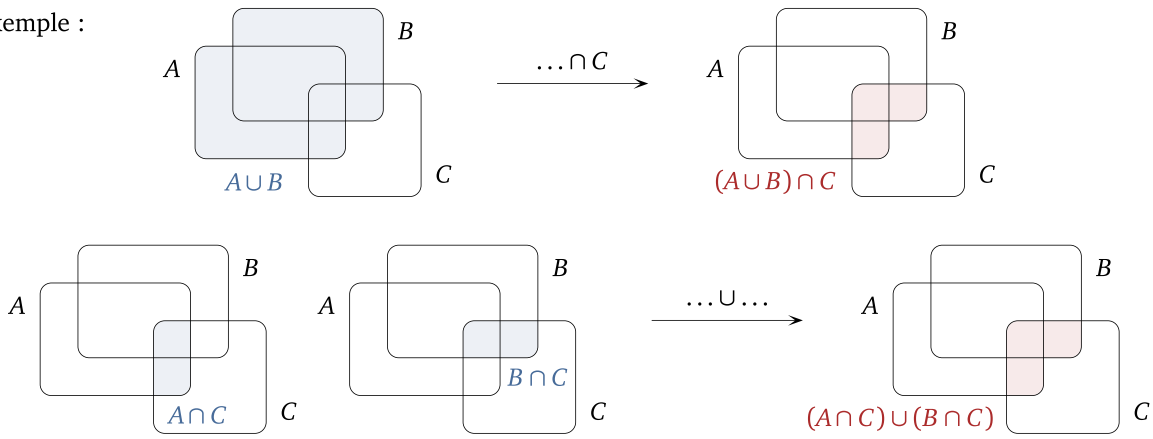
Exemple Soient E un ensemble. Pour toutes parties A et B de E, $\{A,\overline{A}\}$ et $\{A\cap B,\overline{A}\cap B,\overline{B}\}$ sont deux recouvrements disjoints de E. L'ensemble $\big\{\{x\} \mid \ x\in E\big\}$ des singletons de E est quant à lui une partition de E.

Théorème (Règles de calcul sur la réunion, l'intersection et le passage au complémentaire) Soient $\{A_i \mid \ i\in I\}$ un ensemble d'ensembles et B un ensemble.

$$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)\cap B = \bigcup_{i\in I}(A_i\cap B) \qquad \text{et} \qquad \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)\cup B = \bigcap_{i\in I}(A_i\cup B).$$

D'autre part, si les A_i sont tous des parties d'un même ensemble E : $\overline{\bigcup_{i\in I} A_i} = \bigcap_{i\in I}\overline{A_i}$ et $\overline{\bigcap_{i\in I} A_i} = \bigcup_{i\in I}\overline{A_i}$.

Par exemple :



Définition (Produit cartésien) Soient $E_1,\dots,E_n$ des ensembles. On appelle *produit (cartésien) de* $E_1,\dots,E_n$ l'ensemble des familles constituées d'un élément de E_1, …, d'un élément de E_n :

$$E_1\times\dots\times E_n = \big\{(x_1,\dots,x_n) \mid \ \forall i\in[\![1,n]\!], \quad x_i\in E_i\big\}.$$

Si $E_1=\dots=E_n=E$, ce produit est plutôt noté E^n.

Il revient au même d'écrire : $\forall x\in E,\ \forall y\in F$ et : $\forall (x,y)\in E\times F$. Si $E=F$, on résume souvent ces quantificateurs en écrivant simplement : $\forall x,y\in E$.

Exemple $\{1,2,3\}\times\{0,1\} = \big\{(1,0)\ ,\ (1,1)\ ,\ (2,0)\ ,\ (2,1)\ ,\ (3,0)\ ,\ (3,1)\big\}$.

Exemple $\mathbb{R}^2$ est l'ensemble des couples de réels. On peut le représenter graphiquement comme un plan muni d'un repère, tout couple (x,y) étant identifié au point de coordonnées (x,y).

Attention ! Famille $(x_1,\dots,x_n)$ $\neq$ Ensemble $\{x_1,\dots,x_n\}$

Alors que les éléments d'un ensemble sont donnés sans ordre et ne peuvent être comptés qu'une seule fois, l'ordre compte dans une famille et les répétitions sont possibles. Par exemple $\{1,2,3\}=\{2,3,1\}$, mais $(1,2,3)\neq(2,3,1)$. Également $\{1,2,1+1\}=\{1,2\}$, mais $(1,2,1+1)\neq(1,2)$.