Rudiments de logique et vocabulaire ensembliste

Nous étudierons ce chapitre en parallèle de l'annexe « Raisonner, rédiger », qui contient à bien des égards les enseignements les plus importants de l'année.

1 Connecteurs logiques et quantificateurs

- On appelle *proposition* toute phrase p au sujet de laquelle on peut poser la question : « p est-elle vraie ? » La plupart des phrases grammaticalement correctes sont des propositions, mais par exemple : « Dis-le-moi ! », « Bonjour » ou « Comment vas-tu ? » n'en sont pas, la question : « Est-il vrai que bonjour ? » n'a aucun sens.
- La *valeur de vérité* d'une proposition est le vrai (V) ou le faux (F) — mais pas les deux. Deux propositions de même valeur de vérité sont dites *équivalentes*. Pour démontrer une proposition p, vous n'êtes pas obligés de démontrer p elle-même, vous pouvez démontrer n'importe quelle proposition équivalente.

Exemple « Socrate n'est pas immortel » et : « Socrate est mortel » sont deux propositions équivalentes. Démontrer l'une, c'est démontrer l'autre.

- À partir des propositions : « J'ai faim » et : « J'ai soif », on peut construire une nouvelle proposition : « J'ai faim **et** (j'ai) soif ». Plus généralement, nous appellerons *connecteur logique* tout procédé de construction d'une proposition à partir d'une ou de plusieurs autres propositions. Exemples courants : « et », « ou », « si, alors », « parce que »...
- Un connecteur logique est dit *vérifonctionnel* si la valeur de vérité d'une proposition construite à l'aide de ce connecteur dépend seulement de la valeur de vérité des propositions utilisées dans la construction. Pour savoir, par exemple, si la proposition : p et q est vraie, on n'a pas besoin de savoir exactement ce que cachent p et q — leur signification — on a juste besoin de connaître leurs valeurs de vérité respectives. Si les deux sont vraies, la proposition : p et q est vraie, et sinon elle est fausse. On peut résumer cela comme ci-contre au moyen d'une *table de vérité*.

p	q	p et q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

  En mathématiques, les connecteurs logiques utilisés sont tous vérifonctionnels.
- Pour votre culture, remarquez bien que certains connecteurs logiques ne sont pas vérifonctionnels. C'est le cas du connecteur « parce que ». Imaginez un contexte dans lequel il est vrai que : « Je me suis dépêché parce que j'étais en retard ». Les deux propositions : « Je suis en retard » et « Je me suis dépêché » sont vraies. Pourtant, si on remplace : « J'étais en retard » par : « La glace est un solide » — proposition également vraie — la nouvelle proposition : « Je me suis dépêché parce que la glace est un solide » est fausse. Or, si « parce que » était vérifonctionnel, cette proposition serait aussi vraie que celle dont nous sommes partis.

1.1 Négation, conjonction, disjonction

Définition (Négation, conjonction, disjonction)

- La proposition : non p est vraie si p est fausse et fausse si p est vraie.
- La proposition : p et q est vraie si p et q sont vraies toutes les deux et fausse sinon.
- La proposition : p ou q est vraie si l'une **au moins** des propositions p et q est vraie (éventuellement les deux, donc) et fausse dans le seul cas où p et q sont fausses toutes les deux.

p	non p
V	F
F	V

p	q	p et q	p ou q
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	F

✖ **Attention !** ✖ Dans le langage usuel, « ou » oppose parfois les termes qu'il relie. Dans l'expression : « fromage ou dessert » des restaurants, « ou » est *exclusif* car il exclut la possibilité qu'on choisisse les deux — vous pouvez toujours essayer ! En mathématiques, « ou » est toujours *inclusif*, la proposition : p ou q est vraie même quand p ET q sont vraies.

Théorème (Double négation, négation d'une conjonction/disjonction)

- Les propositions p et : non (non p) sont équivalentes.
- Les propositions : non (p et q) et : (non p) ou (non q) sont équivalentes.
- Les propositions : non (p ou q) et : (non p) et (non q) sont équivalentes.

Démonstration

p	non p	non (non p)
V	F	V
F	V	F

Colonnes identiques

p	q	non p	non q	p et q	non (p et q)	(non p) ou (non q)	p ou q	non (p ou q)	(non p) et (non q)
V	V	F	F	V	F	F	V	F	F
V	F	F	V	F	V	V	V	F	F
F	V	V	F	F	V	V	V	F	F
F	F	V	V	F	V	V	F	V	V

Colonnes identiques Colonnes identiques

Exemple « On n'a qu'à prendre un pot de vanille et un pot de chocolat, je suppose que $\overbrace{\text{tu aimes l'un des deux parfums}}^{p \text{ ou } q}$? »

« Justement non, $\underbrace{\text{je n'aime ni l'un ni l'autre}}_{\text{Négation : (non } p) \text{ et (non } q)}$. »

1.2 Implication, équivalence

Définition (Implication, équivalence)

- La proposition : $p \Longrightarrow q$, qu'on lit : « p implique q » ou : « si p, alors q », est fausse dans le seul cas où p est vraie et q fausse. On appelle p son *antécédent* et q son *conséquent*.
- La proposition : $p \Longleftrightarrow q$, qu'on lit : « p si et seulement si q » ou « p et q sont équivalentes », est vraie si p et q ont la même valeur de vérité, et fausse sinon.

p	q	$p \Longrightarrow q$	$p \Longleftrightarrow q$
V	V	V	V
V	F	F	F
F	V	V	F
F	F	V	V

✌ **Explication** ✌ Un petit point de vocabulaire.

- On dit que q est une *condition nécessaire* pour que p soit vraie si lorsque p est vraie, q l'est aussi nécessairement, forcément, obligatoirement — autrement dit si l'implication : $p \Longrightarrow q$ est vraie.
- On dit que q est une *condition suffisante* pour que p soit vraie s'il suffit que q soit vraie pour que p le soit aussi — autrement dit si l'implication : $q \Longrightarrow p$ est vraie.

✖ **Attention !** ✖

- Affirmer que : $p \Longrightarrow q$ est vraie n'implique ni que p est vraie, ni que q est vraie. Il est parfaitement vrai que : « Si Pinocchio est président de la République, alors il est chef des armées », et pourtant Pinocchio n'est pas plus président de la République qu'il n'est chef des armées.
- Une implication : $p \Longrightarrow q$ peut être vraie alors que p et q n'ont rien de commun, car après tout seules leurs valeurs de vérité comptent — vérifonctionnalité oblige. Par exemple il est vrai que : « Si $0 = 0$, alors les oiseaux ont des plumes ». Il en résulte, au contraire de ce que vous croyez sans doute, que l'implication n'a rien à voir avec la causalité du connecteur « parce que ». Dans : $p \Longrightarrow q$, p n'est pas la cause de q, pas du tout. La proposition : « S'il y a de la fumée, alors il y a du feu » est vraie, par exemple, et pourtant c'est le feu la cause et la fumée l'effet.
- L'implication : $p \Longrightarrow q$ est toujours vraie quand p est fausse. Par exemple : « Si $0 \neq 0$, alors $0 = 0$ » !

Explication Les exemples précédents peuvent donner l'impression légitime que l'implication a été mal définie ci-dessus, et pourtant non. Avions-nous le choix en réalité ? Seules les deux dernières lignes : « p est fausse » de la table de vérité de l'implication nous dérangent. Le tableau ci-dessous montre que tout autre choix pour ces lignes nous aurait ramené à un autre connecteur de sens différent.

p	q	$p \Longrightarrow q$	q	$p \Longleftrightarrow q$	p et q
V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	F	F
F	V	V	V	F	F
F	F	V	F	V	F

Définition (Réciproque, contraposée)

- On appelle *réciproque* de l'implication : $p \Longrightarrow q$ la proposition : $q \Longrightarrow p$.
- On appelle *contraposée* de l'implication : $p \Longrightarrow q$ la proposition : $(\text{non } q) \Longrightarrow (\text{non } p)$.

Attention ! Dans une contraposée, on ajoute certes des négations, mais on **PERMUTE** aussi les deux propositions.

Théorème (Règles de calcul sur l'implication et l'équivalence)

- Les propositions : $p \Longrightarrow q$ et : $(\text{non } p)$ ou q sont équivalentes.
  Par négation, les propositions : non $(p \Longrightarrow q)$ et : p et $(\text{non } q)$ sont aussi équivalentes.
- Toute implication est équivalente à sa contraposée. En d'autres termes, les propositions : $p \Longrightarrow q$ et : $(\text{non } q) \Longrightarrow (\text{non } p)$ sont équivalentes.
- L'équivalence est une double implication. En d'autres termes, les propositions : $p \Longleftrightarrow q$ et : $(p \Longrightarrow q)$ et $(q \Longrightarrow p)$ sont équivalentes.

Explication En vertu du dernier point, au lieu de dire que p et q sont équivalentes, on dit souvent que q est une *condition nécessaire et suffisante* pour que p soit vraie.

Démonstration

p	q	non p	non q	(non p) ou q	$p \Longrightarrow q$	$(\text{non } q) \Longrightarrow (\text{non } p)$	$q \Longrightarrow p$	$(p \Longrightarrow q)$ et $(q \Longrightarrow p)$	$p \Longleftrightarrow q$
V	V	F	F	V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V	V	F	F	F
F	F	V	V	V	V	V	V	V	V

Colonnes identiques   Colonnes identiques

Exemple

- Est-il vrai que $\overbrace{\text{si j'ai 18 ans, alors j'ai le droit de vote}}^{p \Longrightarrow q}$? Non, car je peux très bien $\overbrace{\text{avoir 18 ans}}^{p \text{ est vraie}}$ mais un casier judiciaire tel que $\underbrace{\text{le droit de vote m'a été supprimé}}_{q \text{ est fausse}}$. Ceci illustre l'équivalence de : non $(p \Longrightarrow q)$ et : p et $(\text{non } q)$.
- Il est équivalent de dire : « $\underbrace{\text{S'il pleut, alors il y a des nuages}}_{p \Longrightarrow q}$ » et : « $\underbrace{\text{S'il n'y a pas de nuages, alors il ne pleut pas.}}_{(\text{non } q) \Longrightarrow (\text{non } p)}$ »

1.3 Quantificateurs

On appelle *prédicat* toute propriété portant sur un ou plusieurs objets donnés en arguments. Par exemple, « être un oreiller » est un prédicat, et si nous le notons $\mathscr{O}$, la notation : $\mathscr{O}(x)$ signifie que : « x est un oreiller ». De même, « être plus âgé que » est un prédicat à deux arguments, et si nous le notons $\mathscr{A}$, la notation : $\mathscr{A}(x,y)$ pourra signifier : « x est plus âgé que y » et nous aurons peut-être d'ailleurs intérêt à préférer la notation : $x \mathscr{A} y$. Les symboles bien connus $=$, $\leqslant$ et $<$ sont des prédicats à deux arguments.

Définition (Quantificateur universel $\forall$, quantificateur existentiel $\exists$)

- La proposition : $\forall x, \quad \mathscr{P}(x)$ est vraie si tout objet mathématique a la propriété $\mathscr{P}$, et fausse sinon, c'est-à-dire si au moins un objet n'a pas la propriété $\mathscr{P}$.

  On a plutôt affaire, en pratique, à des propositions de la forme : $\forall x \in E, \quad \mathscr{P}(x)$ où E est un ensemble. Une telle proposition n'est qu'un résumé pour : $\forall x, \quad \big(x \in E \implies \mathscr{P}(x)\big)$ et signifie donc que tout élément de E a la propriété $\mathscr{P}$.

- La proposition : $\exists\, x / \quad \mathscr{P}(x)$ est vraie si au moins un objet mathématique a la propriété $\mathscr{P}$, et fausse sinon, c'est-à-dire si aucun objet n'a la propriété $\mathscr{P}$.

  On a plutôt affaire, en pratique, à des propositions de la forme : $\exists\, x \in E / \quad \mathscr{P}(x)$ où E est un ensemble. Une telle proposition n'est qu'un résumé pour : $\exists\, x / \quad \big(x \in E \text{ et } \mathscr{P}(x)\big)$ et signifie donc qu'au moins un élément de E a la propriété $\mathscr{P}$.

Exemple Il est vrai que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2 \neq -1$ car le carré d'un réel est toujours positif.

Il est vrai également que : $\exists\, z \in \mathbb{C} / \quad z^2 = -1$ car, par exemple : $i^2 = -1$.

Théorème (Négation des quantificateurs)

- Les propositions : non $\big(\forall x \in E, \quad \mathscr{P}(x)\big)$ et : $\exists\, x \in E / \quad$ non $\mathscr{P}(x)$ sont équivalentes.
- Les propositions : non $\big(\exists\, x \in E / \quad \mathscr{P}(x)\big)$ et : $\forall x \in E, \quad$ non $\mathscr{P}(x)$ sont équivalentes.

Exemple Il est équivalent de dire :

— d'une part : $\underbrace{\text{« Il est faux que tout homme a les yeux bleux »}}_{\text{non } (\forall x \in E,\ \mathscr{P}(x))}$ et $\underbrace{\text{« Certains hommes n'ont pas les yeux bleus »}}_{\exists\, x \in E /\ \text{non } \mathscr{P}(x)}$,

— d'autre part : $\underbrace{\text{« Il est faux que certains hommes ont des cornes »}}_{\text{non } (\exists\, x \in E /\ \mathscr{P}(x))}$ et : $\underbrace{\text{« Tout homme est sans cornes »}}_{\forall x \in E,\ \text{non } \mathscr{P}(x)}$.

À présent, pour nier une phrase contenant un ou plusieurs quantificateurs, on réécrit cette phrase en remplaçant tous les « $\forall$ » par des « $\exists$ » et tous les « $\exists$ » par des « $\forall$ », puis on nie le prédicat final.

Exemple La négation de la proposition : $\forall \varepsilon > 0, \quad \exists\, \alpha > 0 / \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \big(|x-1| < \alpha \implies \big|\sqrt{x} - 1\big| < \varepsilon\big)$

$\updownarrow \quad \updownarrow \quad \updownarrow \quad \updownarrow$ Négation

est : $\exists\, \varepsilon > 0 / \quad \forall \alpha > 0, \quad \exists\, x \in \mathbb{R} / \quad \big(|x-1| < \alpha \quad \text{et} \quad \big|\sqrt{x} - 1\big| \geqslant \varepsilon\big)$.

Autre opération courante, la permutation des quantificateurs. On peut toujours permuter les quantificateurs universels « $\forall$ » ENTRE EUX, et les quantificateurs existentiels « $\exists$ » ENTRE EUX.

Exemple Les propositions $\forall x \in \mathbb{R}_+, \ \forall y \in \mathbb{R}_-, \ x \geqslant y$ et : $\forall y \in \mathbb{R}_-, \ \forall x \in \mathbb{R}_+, \ x \geqslant y$ sont équivalentes.

Les propositions $\exists\, x \in \mathbb{R}_+ / \ \exists\, y \in \mathbb{R}_- / \ x \geqslant y$ et : $\exists\, y \in \mathbb{R}_- / \ \exists\, x \in \mathbb{R}_+ / \ x \geqslant y$ sont équivalentes.

✖ **ATTENTION !** ✖ La permutation d'un « $\forall$ » et d'un « $\exists$ » n'est pas automatique en revanche.

- Vrai : $\begin{cases} \text{« Dans toute cerise il y a un noyau »} \\ \forall c \text{ cerise}, \quad \exists\, n \text{ noyau} / \quad n \text{ est dans } c. \end{cases}$ Faux : $\begin{cases} \text{« Il existe un noyau qui se trouve dans toutes les cerises »} \\ \exists\, n / \quad \forall c, \quad n \text{ est dans } c. \end{cases}$

  Conclusion : quand une proposition « $\forall\, \exists$ » est vraie, la proposition « $\exists\, \forall$ » correspondante PEUT être fausse. N'apprenez pas ce résultat par cœur, vous le retrouverez rapidement au feeling dans chaque cas particulier.

- Vrai : $\begin{cases} \text{« Il existe une planète dont tous les Terriens sont originaires »} \\ \exists\, p \text{ planète} / \quad \forall t \text{ Terrien}, \quad t \text{ est originaire de } p. \end{cases}$

  Vrai aussi : $\begin{cases} \text{« Chaque Terrien a une planète d'origine »} \\ \forall t, \quad \exists\, p / \quad t \text{ est originaire de } p, \end{cases}$ mais avec une signification plus faible.

  Conclusion : quand une proposition « $\exists\, \forall$ » est vraie, la proposition « $\forall\, \exists$ » l'est aussi.

Définition (Pseudo-quantificateur $\exists$!) La proposition : $\exists\,!\; x \in E/ \quad \mathscr{P}(x)$ est vraie si l'ensemble E contient EXACTEMENT un élément de propriété $\mathscr{P}$.

Exemple Il est vrai que : $\exists\,!\; n \in \mathbb{N}/ \quad 1 \leqslant 2n \leqslant 3$ et l'entier n en question est tout simplement 1.

2 Vocabulaire ensembliste

2.1 Appartenance et inclusion

- Les notions intuitives d'*ensemble* et d'*appartenance* sont supposées connues, les ensembles sont des sacs de billes dont les éléments sont les billes. Pour tout ensemble E, la relation : « x est un élément de E » ou : « x appartient à E » est notée : $x \in E$ — et sa négation : $x \notin E$. L'*ensemble vide* — celui qui n'a pas d'élément — est noté $\varnothing$.
- Un ensemble peut être défini de deux manières — soit *en extension*, soit *en compréhension*.
  - Définir un ensemble *en extension*, c'est donner la liste complète explicite de tous ses éléments. On note cette liste entre accolades, l'ordre des éléments listés n'ayant aucune importance. Par exemple, $\{0,1,2\}$ est un ensemble, le même que $\{2,1,0\}$. Un ensemble de la forme $\{x\}$ est appelé un *singleton* tandis qu'un ensemble de la forme $\{x,y\}$ avec : $x \neq y$ est appelé une *paire*. Il est bien évident qu'on ne peut définir en extension que des ensembles FINIS, incapables que nous sommes d'écrire une liste infinie de symboles.
  - Définir un ensemble *en compréhension*, c'est le définir par une propriété $\mathscr{P}$ que ses éléments vérifient et sont seuls à vérifier. On note $\big\{x/ \quad \mathscr{P}(x)\big\}$ l'ensemble des objets qui satisfont la propriété $\mathscr{P}$, mais en pratique, l'ensemble $\big\{x/ \quad x \in E \text{ et } \mathscr{P}(x)\big\}$ des éléments de E qui vérifient $\mathscr{P}$ est plutôt noté $\big\{x \in E/ \quad \mathscr{P}(x)\big\}$.
    Un ensemble du genre $\big\{x/ \quad \exists\, n \in \mathbb{N}/ \quad x = 2^n\big\}$, composé des entiers $2^0, 2^1, 2^2, 2^3 \ldots$, est aussi noté $\big\{2^n\big\}_{n\in\mathbb{N}}$. Plus généralement, si I est un ensemble, l'ensemble des objets x_i qu'on obtient en faisant défiler i dans I, est noté $\{x_i\}_{i\in I}$.

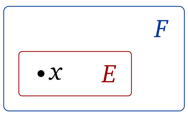
  Soyons bien clairs, il n'y a pas deux sortes d'ensembles en mathématiques, seulement deux manières de les définir. Un même ensemble peut être présenté en extension ou en compréhension. Par exemple : $\{0,1\} = \big\{n \in \mathbb{N}/ \quad n^2 = n\big\}$.

Définition (Égalité et inclusion) Soient E et F deux ensembles.

- Les ensembles E et F sont égaux s'ils ont exactement les mêmes éléments, i.e. si : $\forall x, \quad \big(x \in E \iff x \in F\big)$.
- On dit que E est *inclus dans* F, ou que F *contient* E, ou que E est une *partie de* F, ce qu'on note $E \subset F$ si tout élément de E est élément de F, i.e. si : $\forall x, \quad \big(x \in E \implies x \in F\big)$, ou encore, en résumé : $\forall x \in E, \quad x \in F$.

  Clairement : $E = F \iff E \subset F$ et $F \subset E$.

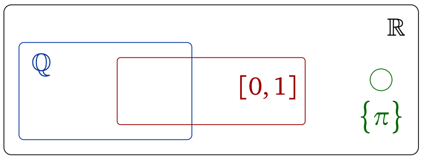
✖ Attention ! ✖ Appartenance et inclusion se ressemblent, prenez soin de ne pas les confondre. Ci-contre, il est vrai que : $x \in E$, $E \subset F$ et : $x \in F$, mais en revanche : $E \notin F$, $x \not\subset E$ et : $x \not\subset F$.

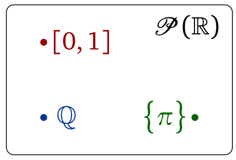


Exemple $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ mais : $\mathbb{N} \notin \mathbb{Z}$. Par rapport à $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$ est donc un sac dans un sac et non une bille dans un sac.
$-1 \in \mathbb{Z}$ mais : $-1 \not\subset \mathbb{Z}$. Par rapport à $\mathbb{Z}$, -1 est donc une bille dans un sac et non un sac dans un sac.

Définition (Ensemble des parties d'un ensemble) Soit E un ensemble. L'ensemble des parties de E est noté $\mathscr{P}(E)$.
Ainsi, pour tout ensemble A : $A \in \mathscr{P}(E) \iff A \subset E$.

✖ **Attention !** ✖ Dire que A **appartient à** $\mathscr{P}(E)$ équivaut à dire que A est **incluse dans** E. Il faut ici bien comprendre la différence entre appartenance et inclusion. La figure ci-contre illustre dans un cas particulier cette dualité. Ce qui dans $\mathbb{R}$ apparaît comme une partie apparaît dans $\mathscr{P}(\mathbb{R})$ comme un élément, un « point ».





Exemple Pour tout ensemble E : $E \in \mathscr{P}(E)$ et $\varnothing \in \mathscr{P}(E)$.

Démonstration Montrer que : $E \in \mathscr{P}(E)$, c'est montrer que : $E \subset E$, i.e. que : $\forall x \in E,\ x \in E$, et bien sûr c'est vrai !

Montrons maintenant que : $\varnothing \in \mathscr{P}(E)$, i.e. : $\varnothing \subset E$, i.e. : $\underbrace{\forall x,\ \Big(\underbrace{\underbrace{x \in \varnothing}_{\text{Faux...}} \Longrightarrow x \in E}_{\text{... donc vrai...}}\Big)}_{\text{... donc vrai !}}$. Et voilà.

Exemple $\mathscr{P}\big(\{0,1,2\}\big) = \Big\{ \underbrace{\varnothing}_{\text{0 élément}} , \underbrace{\{0\},\{1\},\{2\}}_{\text{1 élément}} , \underbrace{\{0,1\},\{0,2\},\{1,2\}}_{\text{2 éléments}} , \underbrace{\{0,1,2\}}_{\text{3 éléments}} \Big\}$.

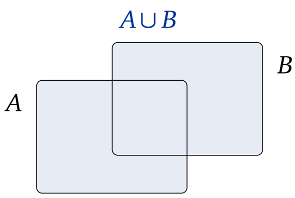
2.2 Opérations sur les ensembles

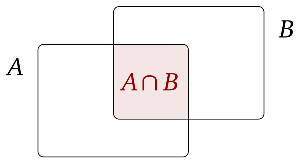
Définition (Réunion, intersection) Soient A et B deux ensembles.

- On appelle *réunion de A et B*, notée $A \cup B$, l'ensemble des x tels que : $x \in A$ ou $x \in B$.
- On appelle *intersection de A et B*, notée $A \cap B$, l'ensemble des x tels que : $x \in A$ et $x \in B$.

Association d'idées

$\boxed{\cup/\text{ou}/\exists}$





Association d'idées

$\boxed{\cap/\text{et}/\forall}$

Ces définitions se généralisent au cas de plus de deux ensembles. Soit $\{A_i\}_{i\in I}$ un ensemble d'ensembles — cela veut dire que I est un ensemble, et que pour tout $i \in I$, A_i est un ensemble.

- On appelle *réunion des A_i, i décrivant I*, notée $\bigcup_{i\in I} A_i$, l'ensemble des x tels que : $\exists\, i \in I/\ \ x \in A_i$,

  i.e. tels que x est dans l'un des A_i.

- On appelle *intersection des A_i, i décrivant I*, notée $\bigcap_{i\in I} A_i$, l'ensemble des x tels que : $\forall i \in I,\ \ x \in A_i$,

  i.e. tels que x est dans tous les A_i.

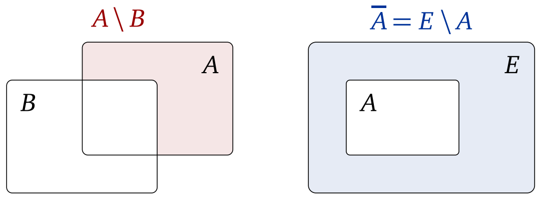
Exemple Soient A et B deux ensembles. Alors : $A \subset B \iff A \cup B = B \iff A \cap B = A$.

Définition (Ensembles disjoints) Soient A et B deux ensembles et $\{A_i\}_{i\in I}$ un ensemble d'ensembles.

- On dit que A et B sont *disjoints* si : $A \cap B = \varnothing$, autrement dit si A et B n'ont aucun élément commun. Leur réunion $A \cup B$ est dans ce cas notée plutôt $A \sqcup B$.
- Dans le cas où les ensembles A_i, i décrivant I, sont deux à deux disjoints, leur réunion $\bigcup_{i\in I} A_i$ est notée plutôt $\bigsqcup_{i\in I} A_i$.

Définition (Différence, complémentaire)

- Soient A et B deux ensembles.
On appelle *différence de B dans A*, notée $A \setminus B$, l'ensemble des x tels que : $\quad x \in A \quad$ et $\quad x \notin B$.
- Soient E un ensemble et A une partie de E. L'ensemble $E \setminus A$ est appelé le *complémentaire de A dans E*. Il est noté $\overline{A}$ ou A^c quand il n'y a pas d'ambiguïté concernant l'ensemble E.



Exemple Soient E un ensemble et A et B deux parties de E.

- Si : $\quad A \subset B, \quad$ alors : $\quad \overline{B} \subset \overline{A}$.
- Si : $\quad A \cup B = E \quad$ et si : $\quad A \cap B = \varnothing, \quad$ alors : $\quad B = \overline{A}$.

Théorème (Propriétés de la réunion, de l'intersection et du passage au complémentaire)

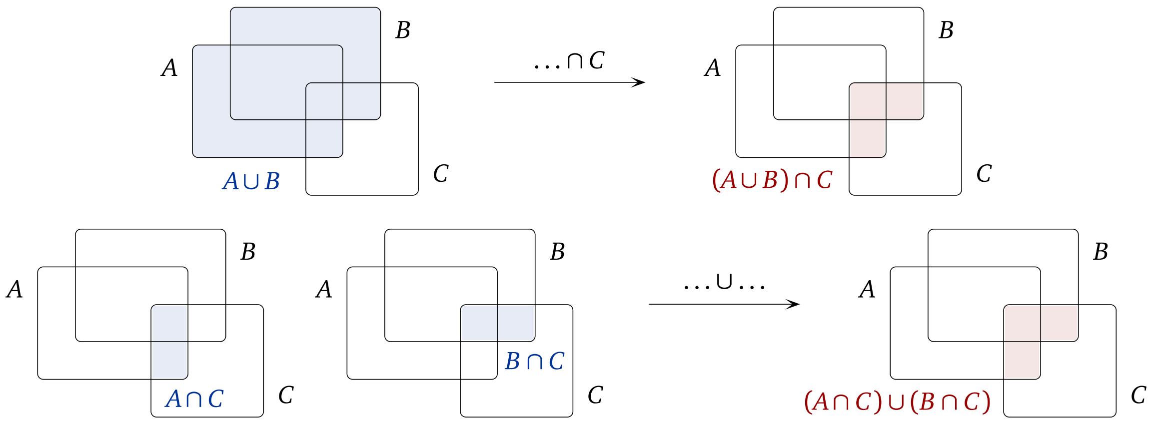
- Soient $\{A_i\}_{i \in I}$ un ensemble d'ensembles et B un ensemble.

$$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cap B = \bigcup_{i \in I} (A_i \cap B) \qquad \text{et} \qquad \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \cup B = \bigcap_{i \in I} (A_i \cup B).$$

- Soient E un ensemble et $\{A_i\}_{i \in I}$ un ensemble de parties de E.

$$\overline{\bigcup_{i\in I} A_i} = \bigcap_{i \in I} \overline{A_i} \qquad \text{et} \qquad \overline{\bigcap_{i\in I} A_i} = \bigcup_{i \in I} \overline{A_i}.$$

✌ **Explication** ✌ Ces égalités gagnent à être comprises sur des dessins. Par exemple :



Définition (Produit cartésien) Soient $E_1, \ldots, E_n$ des ensembles non vides. L'ensemble des familles $(x_1, \ldots, x_n)$ dans lesquelles $x_1 \in E_1, \ldots, x_n \in E_n$ est appelé le *produit (cartésien) de $E_1, \ldots, E_n$* et noté $E_1 \times \ldots \times E_n$.

Dans le cas où : $\quad E_1 = \ldots = E_n = E, \quad$ ce produit est plutôt noté E^n.

Exemple L'ensemble $\mathbb{R}^2$ est l'ensemble des couples de réels, i.e. l'ensemble des (x, y) avec $x, y \in \mathbb{R}$. On peut le représenter graphiquement comme un plan muni d'un repère, le couple (x, y) étant identifié au point de coordonnées (x, y).

✖ **Attention !** ✖ Ne confondez pas la **famille** $(x_1, \ldots, x_n)$ avec l'**ensemble** $\{x_1, \ldots, x_n\}$. Dans un ensemble, les éléments sont donnés sans ordre alors que dans une famille l'ordre compte. Par exemple : $\quad \{1, 2, 3\} = \{2, 3, 1\} \quad$ mais : $\quad (1, 2, 3) \neq (2, 3, 1)$.

✌ **Explication** ✌ Il revient au même d'écrire : $\quad \forall x \in E, \ \forall y \in F \quad$ et : $\quad \forall (x, y) \in E \times F$. Pour finir, l'étrange : $\quad \forall x, y \in E \quad$ n'est jamais qu'un résumé pour : $\quad \forall x \in E, \ \forall y \in E$.