# Séries et familles sommables

## 1 Introduction aux séries

### 1.1 Série, somme, premiers exemples

**Définition** **(Série, sommes partielles)** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on appelle $p^{ème}$ *somme partielle de* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ le nombre $U_p = \sum_{k=0}^{p} u_k$. La suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée la *série de terme général* $u_n$ et notée $\sum u_n$.

Une série n'est donc jamais qu'une suite, et dire que la série $\sum u_n$ converge (resp. diverge) revient simplement à dire que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge (resp. diverge). La *nature* de la série $\sum u_n$ est par définition sa convergence ou sa divergence.

Mais si les séries ne sont que des suites, pourquoi se doter d'une théorie des séries ? La théorie des suites n'est-elle pas suffisante ? Réponse : non.

— **Grande question de la théorie des suites :** À quelle condition la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ?

— **Grande question de la théorie des séries :** À quelle condition sur la SUITE $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la SÉRIE $\sum u_n$ est-elle convergente ? Cette question spécifique appelle des résultats spécifiques qui sont l'objet du chapitre.

Il est facile et utile de résumer ce chapitre par quelques intuitions simples. D'abord, si la série $\sum u_n$ converge, i.e. si la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un certain $S \in \mathbb{C}$ : $u_n = U_n - U_{n-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} S - S = 0.$ De fait, si on s'approche de $S$ en additionnant $u_0, u_1, u_2\ldots$, il paraît naturel qu'on finisse par ne plus ajouter grand-chose à mesure que $n$ grandit. LA RÉCIPROQUE EST ARCHI-FAUSSE, il ne suffit pas que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tende vers 0 pour que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Par exemple $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, mais nous savons bien que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc la série $\sum \frac{1}{n}$ diverge.

La convergence de la SÉRIE $\sum u_n$ repose schématiquement sur deux caractéristiques de la SUITE $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ :

— la taille de $u_n$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$,

— l'importance des compensations mutuelles que les nombres $u_0, u_1, u_2\ldots$ occasionnent quand on les additionne.

Le cas des suites POSITIVES nous occupera un certain temps. S'ils sont positifs, les réels $u_0, u_1, u_2\ldots$ s'empilent les uns sur les autres sans jamais se compenser quand on les additionne et la convergence de la série $\sum u_n$ ne dépend que de la taille asymptotique de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Le cas des suites réelles qui changent régulièrement de signe — ou plus généralement des suites complexes — est plus délicat et plus diversifié. Nous nous intéresserons au moins de près aux *séries alternées*, i.e. aux séries de la forme $\sum (-1)^n a_n$ dans lesquelles la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de signe constant. C'est le cas le plus simple de compensations des termes sommés entre eux, dont voici un premier exemple.

**Exemple** Les séries $\sum \frac{1}{n^2}$ et $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ convergent.

**Démonstration** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ et $V_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$. La suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante, donc pour montrer qu'elle converge, il nous reste à montrer qu'elle est majorée. Or pour tout $n \geqslant 2$ :

$$U_n = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant 1 + \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = 1 + \int_{1}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = 1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \leqslant 2. \qquad \text{Archi-classique !}$$

La suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ressemble quant à elle à la série $\sum \frac{1}{n}$ qui diverge, mais ses termes se compensent en partie les uns les autres car pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ : $V_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k(2k-1)}$. Cette expression montre que $(V_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante, mais aussi majorée donc convergente car pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ :

$V_{2n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k(2k-1)}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k^2}=\frac{U_n}{2}\leqslant 1.$ La suite $(V_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors vers la même limite car pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ : $V_{2n+1}=V_{2n}+\frac{1}{2n+1}$ et $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2n+1}=0$. Finalement, $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

En résumé, les réels $\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ se sont compensés de proche en proche et nous ont ramenés à une somme de termes plus petits en valeur absolue : $\frac{1}{2n(2n-1)}\approx\frac{1}{4n^2}$. La compensation a favorisé la convergence.

**Définition (Somme d'une série convergente, restes)** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On suppose que la série $\sum u_n$ converge.

- **Somme :** On pose $\sum_{k=0}^{+\infty}u_k=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}u_k$. Ce nombre est appelé la *somme* de la série $\sum u_n$.
- **Restes :** Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on appelle $n^{\text{ème}}$ *reste* de la série $\sum u_n$ le nombre $R_n=\sum_{k=0}^{+\infty}u_k-\sum_{k=0}^{n}u_k=\sum_{k=n+1}^{+\infty}u_k$. La suite des restes $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Comme dans le cas des suites, les premiers termes d'une série n'ont pas d'influence sur sa nature, i.e. sur sa convergence ou sa divergence. Ils affectent en revanche la valeur de sa somme lorsqu'elle est convergente.

Le but de la théorie des séries n'est pas tant de calculer les sommes de séries convergentes que de savoir tracer une frontière nette entre le monde des séries convergentes et le monde des séries divergentes. Le calcul des sommes de séries convergentes sera étudié spécifiquement dans la deuxième partie de ce chapitre sur les *familles sommables*.

**Définition-théorème (Série géométrique)** Soit $z\in\mathbb{C}$. La série $\sum z^n$, dite *série géométrique de raison $z$*, est convergente si et seulement si $|z|<1$. Dans ce cas : $\sum_{n=0}^{+\infty}z^n=\frac{1}{1-z}$.

**Démonstration** Pour tout $n\in\mathbb{N}$ : $\sum_{k=0}^{n}z^k=\begin{cases}\frac{1-z^{n+1}}{1-z} & \text{si } z\neq 1\\ n+1 & \text{si } z=1,\end{cases}$ donc évidemment...

**Exemple** La *série harmonique* $\sum\frac{1}{n}$ diverge ET POURTANT $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$.

**Démonstration**

- **Preuve n°1 :** Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ : $\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}\geqslant\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{2n}=\frac{n}{2n}=\frac{1}{2}$, or si la série $\sum\frac{1}{n}$ était convergente de somme $S$, on aurait : $\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}=\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}S-S=0$ — contradiction !
- **Preuve n°2 :** Pour tout $x>-1$ : $\ln(1+x)\leqslant x$, donc pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ :
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\geqslant\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)=\sum_{k=1}^{n}\Big(\ln(k+1)-\ln k\Big)=\ln(n+1)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty,$$
et on conclut par minoration.

## 1.2 Divergence grossière

**Théorème (Condition nécessaire de convergence d'une série)** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.
Si la série $\sum u_n$ converge : $\lim_{n\to+\infty}u_n=0$.

**Démonstration** Si $\sum u_n$ converge vers $S$ : $u_n=\sum_{k=0}^{n}u_k-\sum_{k=0}^{n-1}u_k\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}S-S=0.$

**Définition (Divergence grossière)** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On dit que la série $\sum u_n$ *diverge grossièrement* si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ N'admet PAS 0 pour limite. Dans ce cas, $\sum u_n$ diverge « tout court ».

**Attention !** La réciproque de l'implication : $\sum u_n$ converge $\implies$ $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ est fausse en général. Affirmer le contraire, c'est avouer qu'on n'a **ABSOLUMENT RIEN COMPRIS** à la théorie des séries. S'il suffisait de montrer que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ pour montrer que $\sum u_n$ converge, ce chapitre n'aurait pas lieu d'être. En résumé :

Une somme infinie de quantités qui tendent vers 0 peut ne pas converger.

**Exemple** Répétons-le, la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ diverge, **ET POURTANT** $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$.

## 1.3 Opérations sur les séries

**Théorème (Opérations sur les séries)** Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

- **Multiplication par un scalaire :** Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}^*$, les séries $\sum u_n$ et $\sum (\lambda u_n)$ ont même nature.
- **Somme :** Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, la série $\sum (u_n + v_n)$ converge aussi.
  Si la série $\sum u_n$ converge alors que la série $\sum v_n$ diverge, la série $\sum (u_n + v_n)$ diverge.
- **Parties réelle et imaginaire :** La série $\sum u_n$ converge si et seulement si les séries $\sum \mathrm{Re}(u_n)$ et $\sum \mathrm{Im}(u_n)$ convergent.

**Démonstration** Le résultat est vrai pour les suites, et justement les séries sont des suites.

**Attention !**

- Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ divergent toutes les deux, on ne peut rien dire en général de $\sum (u_n + v_n)$. Par exemple, la série $\sum \frac{1}{n}$ diverge, donc la série $\sum \frac{1}{n} + \sum \frac{1}{n} = \sum \frac{2}{n}$ aussi, mais la série $\sum \frac{1}{n} - \sum \frac{1}{n} = 0$ converge.
- Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, on ne peut rien dire en général de la série $\sum u_n v_n$. Nous verrons bientôt que la série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge, et pourtant la série $\sum \left( \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \times \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right) = \sum \frac{1}{n}$ diverge.

## 1.4 Comparaison série-intégrale et séries de Riemann

Nous avons déjà pratiqué pas mal les comparaisons série-intégrale au chapitre « Analyse asymptotique de niveau 2 », qui comparent typiquement la somme $\sum_{k=0}^{n} f(k)$ à l'intégrale $\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t$ pour une fonction **MONOTONE** $f$.

**Définition-théorème (Séries de Riemann, fonction $\zeta$)** Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La *série de Riemann* $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$. On pose le cas échéant $\zeta(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$. On rappelle que $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$.

La série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ diverge et joue le rôle d'une frontière entre le cas convergent et le cas divergent des séries de Riemann. Convergence au-delà, divergence en deçà.

La fonction $\zeta$ est une fonction usuelle majeure des mathématiques, intimement liée à la répartition des nombres premiers en dépit des apparences !

**Démonstration** Pour $\alpha \leqslant 0$ : $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \neq 0$ donc la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ diverge (grossièrement). Désormais $\alpha > 0$. La fonction $t \longmapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est dans ce cas décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, donc pour tous $k \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [k, k+1]$ : $\frac{1}{(k+1)^\alpha} \leqslant \frac{1}{t^\alpha} \leqslant \frac{1}{k^\alpha}$, puis par croissance de l'intégrale : $\frac{1}{(k+1)^\alpha} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \leqslant \frac{1}{k^\alpha}$.

- **Cas où $\alpha \in ]0,1[$ :** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ : $\displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} \geqslant \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \int_1^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \frac{(n+1)^{1-\alpha}-1}{1-\alpha}$, or $1-\alpha > 0$, donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} = +\infty$ par minoration. La série $\displaystyle\sum \frac{1}{n^\alpha}$ diverge.
- **Cas où $\alpha = 1$ :** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ : $\displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \geqslant \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \int_1^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \ln(n+1)$, donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = +\infty$ par minoration — nouvelle preuve que la série harmonique diverge.
- **Cas où $\alpha > 1$ :** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^\alpha} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} = \frac{1}{(n+1)^\alpha} \geqslant 0$, donc la suite $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante. Pour montrer qu'elle converge, il nous reste à montrer qu'elle est majorée d'après le théorème de la limite monotone. Or c'est le cas car pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, sachant que $\alpha - 1 > 0$ :
$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k+1)^\alpha} \leqslant 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = 1 + \int_1^n \frac{1}{t^\alpha} = 1 + \frac{1}{\alpha-1} - \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} \leqslant 1 + \frac{1}{\alpha-1}.$$

**Exemple** La série $\displaystyle\sum \frac{1}{n\ln n}$ diverge.

**Démonstration** Par décroissance de la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{t\ln t}$ sur $]1,+\infty[$, pour tout $n \geqslant 2$ :
$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k\ln k} = \sum_{k=2}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{k\ln k} \geqslant \sum_{k=2}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln t} = \int_2^n \frac{\mathrm{d}t}{t\ln t} = \ln\ln n - \ln\ln 2, \quad \text{donc } \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=2}^n \frac{1}{k\ln k} = +\infty.$$

## 2 Séries à termes positifs

On s'intéresse à présent aux séries dont le terme général est positif, mais les résultats que nous allons démontrer s'adaptent aisément au cas négatif. L'essentiel est donc, dans ce paragraphe, que le terme général soit **de signe constant**, et même **à partir d'un certain rang**.

✖ **Attention !** Quand vous utilisez les théorèmes de ce paragraphe, vérifiez bien la **positivité** des suites étudiées !

**Théorème (Adaptation aux séries du théorème de la limite monotone)** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^\mathbb{N}$ **positive**. La série $\sum u_n$ converge si et seulement si elle est majorée.

En cas de divergence, toujours grâce à la positivité : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^n u_k = +\infty$.

**Démonstration** La suite $\displaystyle\left(\sum_{k=0}^n u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante car pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} u_k - \sum_{k=0}^n u_k = u_{n+1} \geqslant 0$. Elle converge donc en effet si et seulement si elle est majorée d'après le théorème de la limite monotone.

**Théorème (Comparaison par des inégalités)** Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^\mathbb{N}$. On suppose que $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ — ou du moins à partir d'un certain rang.

(i) Si la série $\sum v_n$ converge, la série $\sum u_n$ converge aussi.

(ii) Si la série $\sum u_n$ diverge, la série $\sum v_n$ diverge aussi.

**Démonstration** Pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $\displaystyle\sum_{k=0}^n u_k \leqslant \sum_{k=0}^n v_k$.

(i) Si la série $\sum v_n$ converge, la série $\sum u_n$ est majorée, donc converge d'après l'adaptation aux séries du théorème de la limite monotone.

(ii) Si la série $\sum u_n$ diverge : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^n u_k = +\infty$ d'après l'adaptation aux séries du théorème de la limite monotone, donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^n v_k = +\infty$ par minoration, donc la série $\sum v_n$ diverge.

**Exemple** La série $\sum \frac{1}{n^2(2+\sin n)}$ converge.

**Démonstration** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ : $0 \leqslant \frac{1}{n^2(2+\sin n)} \leqslant \frac{1}{n^2}$, or la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ converge car $2 > 1$, donc la série $\sum \frac{1}{n^2(2+\sin n)}$ converge aussi d'après le théorème de comparaison par des inégalités.

**Exemple** La série $\sum \frac{\mathrm{e}^{\cos n}}{\sqrt{n}}$ diverge.

**Démonstration** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ : $0 \leqslant \frac{1}{\mathrm{e}\sqrt{n}} \leqslant \frac{\mathrm{e}^{\cos n}}{\sqrt{n}}$, or la série $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge car $\frac{1}{2} \leqslant 1$, donc la série $\sum \frac{\mathrm{e}^{\cos n}}{\sqrt{n}}$ diverge aussi d'après le théorème de comparaison par des inégalités.

**Théorème (Comparaison par des équivalents)** Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On suppose que ces suites sont **POSITIVES** et que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$. Les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont alors même nature.

**Attention !** On a vite fait d'oublier l'hypothèse fondamentale de **POSITIVITÉ** !

**Démonstration** La relation d'équivalence sur les suites étant symétrique, il nous suffit de montrer que si $\sum v_n$ converge, $\sum u_n$ converge aussi. Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$ par hypothèse, donc $\left|\frac{u_n}{v_n}\right| < 2$ à partir d'un certain rang, ou encore $0 \leqslant u_n \leqslant 2v_n$. Par comparaison du coup, si la série $\sum v_n$ converge, la série $\sum u_n$ converge aussi. ■

**Exemple** La série $\sum \frac{1}{n^2\left(n+\sqrt{n}\right)}$ converge.

**Démonstration** Cette série est à termes positifs et : $\frac{1}{n^2\left(n+\sqrt{n}\right)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^3}$, or la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^3}$ converge car $3 > 1$, donc la série $\sum \frac{1}{n^2\left(n+\sqrt{n}\right)}$ par comparaison.

## 3 Lien suite-série

Le *lien suite-série* est d'une grande banalité à ce stade de l'année, mais il faut connaître plus que le résultat, il faut surtout en comprendre la philosophie.

**Théorème (Lien suite-série)** Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. La **SUITE** $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et la **SÉRIE** $\sum (a_{n+1} - a_n)$ ont même nature.

**Démonstration** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par simplification télescopique : $\sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) = a_n - a_0$. ■

On peut donc étudier une suite en se servant des techniques spécifiques de la théorie des séries, ou au contraire étudier une série au moyen des techniques spécifiques de la théorie des suites.

Aviez-vous compris que la simplification télescopique est l'analogue discret du théorème fondamental du calcul intégral ? La suite $(a_{n+1} - a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est en quelque sorte la « dérivée » de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, tout comme la fonction $f'$ définie par une limite de taux d'accroissement est la dérivée de la fonction $f$. Or comment passe-t-on de $f'$ à $f$ ? On somme au sens du calcul intégral, tout comme on le fait avec les suites dans le cadre d'une simplification télescopique :

$$\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x = f(b) - f(a) \qquad \text{dans un cas et :} \qquad \sum_{k=m}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) = a_n - a_m \qquad \text{dans l'autre.}$$

Au chapitre « Dérivabilité », nous avons appris à exploiter $f'$, i.e. à remonter de $f'$ à $f$, au moyen du théorème des accroissements finis. D'après l'inégalité des accroissements finis, quand nous savons borner $f'$, nous savons aussi borner $f$. Bref, la taille de $f'$ conditionne celle de $f$. Le lien suite-série est l'analogue de cette idée dans le cas discret. Typiquement, si la suite $(a_{n+1} - a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend suffisamment vers 0, i.e. si la série $\sum (a_{n+1} - a_n)$ converge, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge elle aussi.

**Exemple** La série $\sum \frac{1}{n}$ diverge. Encore !

**Démonstration** **(Preuve n°3)** La SUITE $(\ln n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ diverge, donc la SÉRIE $\sum\big(\ln(n+1)-\ln n\big)=\sum\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ également. Comme cette série est à termes positifs et $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{n}$, la série $\sum\frac{1}{n}$ diverge.

Nous pouvons en fait pousser le lien suite-série un peu plus loin sur le même exemple.

**Exemple** Il existe un réel $\gamma$, appelé *constante d'Euler*, pour lequel : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\underset{n\to+\infty}{=}\ln n+\gamma+\mathrm{o}(1)$. Encore !

**Démonstration** Posons $a_n=\ln n-\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$. Nous voulons prouver que la SUITE $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge. En vertu du lien suite-série, il nous suffit pour cela de montrer que la SÉRIE $\sum(a_{n+1}-a_n)$ converge. Or pour tout $n\geqslant 2$ : $a_n-a_{n-1}=\left(\ln n-\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)-\left(\ln(n-1)-\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}\right)=-\frac{1}{n}-\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{2n^2}$. Cet équivalent prouve d'abord que la série $\sum(a_{n+1}-a_n)$ est à termes positifs à partir d'un certain rang, mais comme la série de Riemann $\sum\frac{1}{n^2}$ converge, il prouve aussi que la série $\sum(a_{n+1}-a_n)$ converge par comparaison. Conclusion : la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

# 4 CONVERGENCE ABSOLUE ET SÉRIES ALTERNÉES

## 4.1 CONVERGENCE ABSOLUE

**Définition** **(Convergence absolue)** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On dit que la série $\sum u_n$ est *absolument convergente* ou qu'elle *converge absolument* si la série $\sum|u_n|$ converge.

**Exemple** La série $\sum\frac{(-1)^n}{n^2}$ converge absolument car, comme $2>1$, la série de Riemann $\sum\frac{1}{n^2}$ converge.

Une question se pose naturellement après cette définition — une série absolument convergente est-elle convergente ? — et la réponse est oui.

**Théorème** **(La convergence absolue implique la convergence)** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Si la série $\sum u_n$ converge absolument, elle converge « tout court ».

**Démonstration**

- **Cas où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est réelle :** La série $\sum|u_n|$ converge et $0\leqslant u_n+|u_n|\leqslant 2|u_n|$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, donc la série $\sum\big(u_n+|u_n|\big)$ converge. Par différence, la série $\sum u_n$ converge à son tour.
- **Cas général :** La série $\sum|u_n|$ converge et $0\leqslant\big|\mathrm{Re}(u_n)\big|\leqslant|u_n|$ et $0\leqslant\big|\mathrm{Im}(u_n)\big|\leqslant|u_n|$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, donc les séries $\sum\big|\mathrm{Re}(u_n)\big|$ et $\sum\big|\mathrm{Im}(u_n)\big|$ convergent toutes les deux. Les séries $\sum\mathrm{Re}(u_n)$ et $\sum\mathrm{Im}(u_n)$ convergent donc d'après le premier point. Par combinaison linéaire, la série $\sum u_n=\sum\big(\mathrm{Re}(u_n)+\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(u_n)\big)$ converge à son tour.

**Exemple** La série $\sum\frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{n^2+1}$ converge.

**Démonstration** Il nous suffit de montrer que la série $\sum\frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{n^2+1}$ converge absolument, i.e. que la série $\sum\frac{1}{n^2+1}$ converge. Or c'est le cas d'après le théorème de comparaison par des inégalités car d'une part, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ : $0\leqslant\frac{1}{n^2+1}\leqslant\frac{1}{n^2}$, et d'autre part, la série de Riemann $\sum\frac{1}{n^2}$ converge.

**Attention !** La réciproque du théorème précédent est **FAUSSE** ! Une série peut converger sans converger absolument. C'est le cas de la série $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ que nous avons déjà étudiée. On dit qu'elle est *semi-convergente*.

**Définition (Semi-convergence)** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On dit que la série $\sum u_n$ est *semi-convergente* si elle est convergente mais **PAS** absolument convergente.

## 4.2 Comparaison par des grands O

**Théorème (Comparaison par des grands O)** Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On suppose que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **POSITIVE**, que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}(v_n)$ et que la série $\sum v_n$ converge. Dans ces conditions, la série $\sum u_n$ converge (absolument).

Rappelons que si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(v_n)$, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}(v_n)$. Le théorème de comparaison par des grands O est ainsi souvent utilisé avec des petits o sans qu'on prenne la peine de revenir à des grands O.

En particulier, comme la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge pour tout $\alpha > 1$, il est courant qu'on utilise la forme suivante du théorème de comparaison par des grands O :

Si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ pour un certain $\alpha > 1$, la série $\sum u_n$ converge (absolument).

**Démonstration** Par hypothèse, il existe un rang $N$ et un réel $K > 0$ pour lesquels $|u_n| \leqslant K\,|v_n|$ pour tout $n \geqslant N$, i.e. $0 \leqslant |u_n| \leqslant K v_n$. Comme la série $\sum v_n$ converge, la série $\sum |u_n|$ converge aussi.

**Exemple** La série $\sum \frac{\lfloor\sqrt{n}\rfloor \mathrm{e}^{\cos n}}{n^3 - n}$ converge.

**Démonstration** $\frac{\lfloor\sqrt{n}\rfloor \mathrm{e}^{\cos n}}{n^3 - n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}^{\cos n}}{n^{\frac{5}{2}}} \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$, or la série de Riemann à termes positifs $\sum \frac{1}{n^2}$ converge car $2 > 1$, donc $\sum \frac{\lfloor\sqrt{n}\rfloor \mathrm{e}^{\cos n}}{n^3 - n}$ converge aussi.

## 4.3 Règle de d'Alembert

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, la série géométrique $\sum z^n$ converge si et seulement si $|z| < 1$. On peut dès lors espérer que si une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ressemble assez fortement à une suite géométrique de raison $z$, la convergence de la série $\sum u_n$ soit intimement liée à la valeur de $z$ et à sa position par rapport à 1 en module. Ce sera cela, la *règle de d'Alembert*. Officiellement, cette règle est hors programme en MPSI, mais vous l'étudierez en deuxième année.

Par exemple, la suite $\left(3^n n^2\right)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas géométrique, mais elle est « presque géométrique de raison 3 » au sens où $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3^{n+1}(n+1)^2}{3^n n^2} = 3$. De même, sans être géométrique, la suite $\left(\frac{\ln n}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est « presque géométrique de raison $\frac{1}{2}$ » au sens où $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2^{-(n+1)}\ln(n+1)}{2^{-n}\ln n} = \frac{1}{2}$. En ce sens, toute suite de la forme $\left(n^\alpha(\ln n)^\beta\right)_{n\geqslant 2}$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ est « presque géométrique de raison 1 ». Cette expression « presque géométrique » n'a bien sûr rien d'officiel et ne doit pas être utilisée sur une copie, mais elle est assez parlante.

**Théorème (Règle de d'Alembert)** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On suppose $u_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ — ou au moins à partir d'un certain rang.

(i) Si $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| < 1$, la série $\sum u_n$ converge (absolument).

(ii) Si $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| > 1$, la série $\sum u_n$ diverge (grossièrement).

✖ **Attention !** La règle de d'Alembert est muette lorsque la limite vaut 1, on appelle ce cas le *cas douteux de la règle de d'Alembert*. Pensez aux séries de Riemann, qui peuvent converger ou diverger selon la valeur de l'exposant choisi. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{(n+1)^\alpha}{n^\alpha}\right| = 1$.

**Démonstration** Faisons l'hypothèse que la limite $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|$ existe et notons-la $\ell$. La preuve qui suit consiste à COMPARER LA SÉRIE $\sum u_n$ À UNE SÉRIE GÉOMÉTRIQUE dont nous maîtrisons parfaitement la nature.

(i) **Cas où $\ell < 1$ :** Posons $\varepsilon = \dfrac{1-\ell}{2}$ de manière à garantir l'inégalité $0 \leqslant \ell < \ell + \varepsilon < 1$. À partir d'un certain rang $N$ : $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| < \ell + \varepsilon$, donc $\dfrac{|u_{n+1}|}{(\ell+\varepsilon)^{n+1}} \leqslant \dfrac{|u_n|}{(\ell+\varepsilon)^n}$.
Décroissante positive, la suite $\left(\dfrac{|u_n|}{(\ell+\varepsilon)^n}\right)_{n\geqslant N}$ est bornée, donc $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\big((\ell+\varepsilon)^n\big)$. Or comme $0 \leqslant \ell+\varepsilon < 1$, la série géométrique $\sum (\ell+\varepsilon)^n$ converge, donc la série $\sum u_n$ converge (absolument).

(ii) **Cas où $\ell > 1$ :** À partir d'un certain rang $N$ : $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| \geqslant 1$, donc la suite $\big(|u_n|\big)_{n\geqslant N}$ est croissante — et strictement positive par ailleurs — donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n \neq 0$. La série $\sum u_n$ diverge (grossièrement). ■

Le calcul de la limite $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|$ est plus facile à mener si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie à l'aide de produits et de quotients. On peut notamment espérer des simplifications au numérateur et au dénominateur dans ce cas.

**Exemple** La série $\sum \dfrac{n^4}{3^n}$ converge d'après la règle de d'Alembert car : $\left|\dfrac{3^{-(n+1)}(n+1)^4}{3^{-n}n^4}\right| = \dfrac{1}{3}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^4 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{3}$ et $\dfrac{1}{3} < 1$. On n'est bien sûr pas obligé d'utiliser la règle de d'Alembert, on peut aussi remarquer que $\dfrac{n^4}{3^n} \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ par croissances comparées et conclure à l'aide du théorème de comparaison par des grands O.

**Exemple** La série $\sum \dfrac{z^n}{n!}$ converge pour tout $z \in \mathbb{C}$.
Souvenez-vous, nous avons vu au chapitre « Nombres complexes et trigonométrie » que l'exponentielle complexe peut être définie comme la somme de cette série, de sorte que pour tout $z \in \mathbb{C}$ : $\mathrm{e}^z = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$. Nous démontrerons bientôt qu'avec cette définition : $\mathrm{e}^{z+z'} = \mathrm{e}^z\mathrm{e}^{z'}$ pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$.

**Démonstration** Soit $z \in \mathbb{C}$. Si $z = 0$, la série $\sum \dfrac{z^n}{n!}$ converge. Sinon : $\left|\dfrac{\frac{z^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{z^n}{n!}}\right| = \dfrac{|z|}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc la série $\sum \dfrac{z^n}{n!}$ converge d'après la règle de d'Alembert.

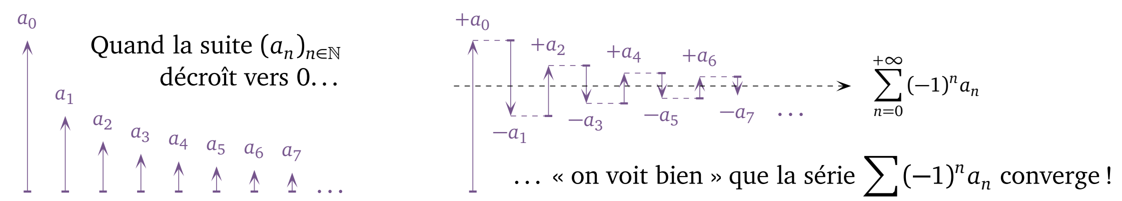
## 4.4 Séries alternées

Les *séries alternées* et le *critère spécial des séries alternées* sont hors programme en MPSI, mais vous les étudierez en deuxième année.

**Définition (Série alternée)** On appelle *série alternée* toute série de la forme $\sum (-1)^n a_n$ avec $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^\mathbb{N}$ de signe constant.

**Exemple** Les séries $\sum \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$ et $\sum \dfrac{(-1)^n \mathrm{e}^{-n}}{n^2+1}$ sont alternées.

**Théorème (Critère spécial des séries alternées)** Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^\mathbb{N}$ DÉCROISSANTE DE LIMITE NULLE. La série alternée $\sum (-1)^n a_n$ converge.



**Démonstration** Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k$ et montrons que les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes. Elles seront alors convergentes de même limite, la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergera d'après le théorème des suites extraites et nous aurons ainsi prouvé que la série $\sum (-1)^n a_n$ converge.

Or par hypothèse : $S_{2n+1} - S_{2n} = (-1)^{2n+1} a_{2n+1} = -a_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Ensuite, la suite $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante car pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $S_{2(n+1)} - S_{2n} = (-1)^{2n+1} a_{2n+1} + (-1)^{2n+2} a_{2n+2} = a_{2n+2} - a_{2n+1} \leqslant 0$, et la suite $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante pour une raison analogue.

**Définition-théorème (Séries de Riemann alternées)** Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La *série de Riemann alternée* $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 0$.

Pour $\alpha \in \,]0,1]$, la série $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ est semi-convergente — elle converge, mais pas absolument.

**Démonstration** La série $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ diverge (grossièrement) si $\alpha \leqslant 0$, mais si au contraire $\alpha > 0$, elle converge d'après le critère spécial des séries alternées car la suite $\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante de limite nulle.

Il ne faut généralement pas appliquer le critère spécial des séries alternées directement quand on étudie une série alternée. L'hypothèse de décroissance peut être difficile à vérifiée, voire fausse. Dans les exemples importants qui suivent, le terme général est cassé en morceaux simples dont on se demande à part s'ils sont associés à des séries convergentes ou divergentes.

**Exemple** La série $\sum \frac{(-1)^n}{n^{\frac34} + n^{\frac14}\sin(\ln n)}$ converge.

**Démonstration** La monotonie de la suite $\left(\frac{1}{n^{\frac34} + n^{\frac14}\sin(\ln n)}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ paraît délicate à étudier, le critère spécial des séries alternées ne nous sera donc pas utile directement. Petit rappel : $\frac{1}{1+u} \underset{u\to0}{=} 1 - u + \mathrm{o}(u) \underset{u\to0}{=} 1 + \mathrm{O}(u)$.

$$\frac{(-1)^n}{n^{\frac34} + n^{\frac14}\sin(\ln n)} = \frac{(-1)^n}{n^{\frac34}} \times \frac{1}{1 + \frac{\sin(\ln n)}{\sqrt{n}}} \underset{n\to+\infty}{=} \frac{(-1)^n}{n^{\frac34}}\left(1 + \mathrm{O}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{(-1)^n}{n^{\frac34}} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{\frac54}}\right).$$

Or la série de Riemann alternée $\sum \frac{(-1)^n}{n^{\frac34}}$ converge car $\frac34 > 0$ et la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^{\frac54}}$ aussi car $\frac54 > 1$. Par somme, par comparaison par des grands O, la série $\sum \frac{(-1)^n}{n^{\frac34} + n^{\frac14}\sin(\ln n)}$ converge (absolument).

**Exemple** La série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$ diverge.

**Démonstration** La monotonie de la suite $\left(\frac{1}{\sqrt{n} + (-1)^n}\right)_{n\geqslant 2}$ paraît délicate à étudier, le critère spécial des séries alternées ne nous sera donc pas utile directement. Rappel : $\frac{1}{1+u} \underset{u\to0}{=} 1 - u + u^2 + \mathrm{o}(u^2) \underset{u\to0}{=} 1 - u + \mathrm{O}(u^2)$.

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \times \frac{1}{1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} \underset{n\to+\infty}{=} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left(1 - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \mathrm{O}\left(\frac1n\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac1n + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{\frac32}}\right).$$

Or la série de Riemann alternée $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge car $\frac12 > 0$, la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^{\frac32}}$ aussi car $\frac32 > 1$ et la série harmonique $\sum \frac1n$ diverge. Par somme, la série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$ diverge par comparaison par des grands O.

**Attention !** Le théorème de comparaison par des équivalents requiert la **POSITIVITÉ** des suites en présence, mais nous n'avons pas donné de contre-exemple jusqu'ici. Tout simplement : $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et la série de Riemann alternée $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge car $\frac12 > 0$, pourtant $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$ diverge d'après l'exemple précédent.

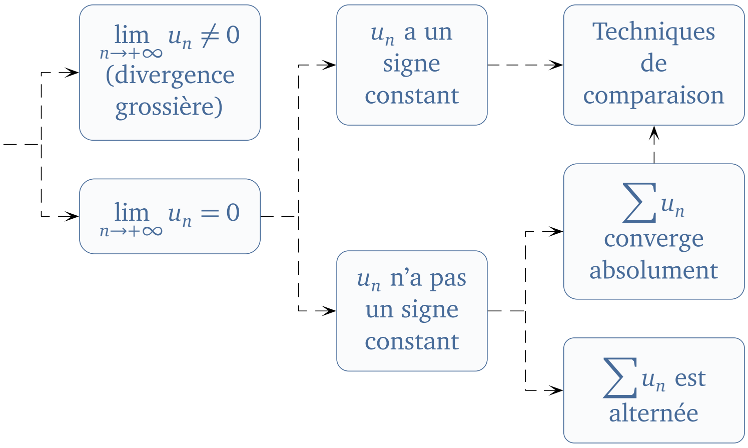
**Exemple** Pour tout $\alpha > 1$ : $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^\alpha} = \left(1 - \frac{1}{2^\alpha}\right)\zeta(\alpha)$ et $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^\alpha} = \left(1 - \frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)\zeta(\alpha)$.

En particulier : $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$ et $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} = \frac{\pi^2}{12}$.

**Démonstration** $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(2k+1)^\alpha}=\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k^\alpha}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k)^\alpha}=\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k^\alpha}-\frac{1}{2^\alpha}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\alpha}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\left(1-\frac{1}{2^\alpha}\right)\zeta(\alpha).$

Ensuite, la série $\displaystyle\sum\frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha}$ converge d'après le critère spécial des series alternées, il nous suffit donc de calculer la limite de l'une de ses suites extraites. Or : $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k-1}}{k^\alpha}=\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k^\alpha}-2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k)^\alpha}$ — on retire deux fois les termes d'indice pair pour faire surgir le $(-1)^{k-1}$ — donc : $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k-1}}{k^\alpha}=\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k^\alpha}-\frac{1}{2^{\alpha-1}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\alpha}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\left(1-\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)\zeta(\alpha).$

## 5 Récapitulatif des techniques de convergence




Le schéma ci-contre rassemble et ordonne les résultats de convergence de ce chapitre. Il mérite un sérieux coup d'œil même si, comme souvent en mathématiques, ces résultats **NE PERMETTENT PAS DE CONCLURE DANS TOUS LES CAS**. La méthode qui marche tout le temps n'existe pas !

C'en est maintenant fini des séries, passons à autre chose. Nous savons parfaitement définir et manipuler les sommes **FINIES** de nombres complexes — changer d'indice, casser, regrouper, permuter... Nous savons aussi définir les sommes de séries **CONVERGENTES**, mais nous n'avons pas vraiment appris à les manipuler. Hélas, les sommes infinies posent problème car on ne peut pas y regrouper les termes comme on veut en général. Étonnant ! Intéressons-nous par exemple à la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ qui vaut $\ln 2$ et ôtons-lui sa moitié. On obtient $\dfrac{\ln 2}{2}$ bien sûr. Et si on prend des libertés avec l'ordre des termes ?

$$\begin{array}{rcl}
\ln 2-\dfrac{\ln 2}{2} & = & 1-\dfrac12+\dfrac13-\dfrac14+\dfrac15-\dfrac16+\dfrac17-\dfrac18+\dfrac19-\dfrac1{10}+\dfrac1{11}-\dfrac1{12}+\dfrac1{13}-\dfrac1{14}\ \ldots\\
 & & \quad -\dfrac12\qquad\ +\dfrac14\qquad\ -\dfrac16\qquad\ +\dfrac18\qquad\ -\dfrac1{10}\qquad\ +\dfrac1{12}\qquad\ -\dfrac1{14}\ \ldots\\
 & = & 1\ \boxed{-\ 1}+\dfrac13+\dfrac15\ \boxed{-\dfrac13}+\dfrac17+\dfrac19\ \boxed{-\dfrac15}+\dfrac1{11}+\dfrac1{13}\ \boxed{-\dfrac17}\ \ldots\\
\text{On réordonne.} & \overset{??}{=} & 1\ \boxed{-\ 1}+\dfrac13\ \boxed{-\dfrac13}+\dfrac15\ \boxed{-\dfrac15}+\dfrac17\ \boxed{-\dfrac17}+\dfrac19\ \boxed{-\dfrac19}\ \ldots = 0.\quad \text{Oups !}
\end{array}$$

Vous voilà donc prévenus. Avec les sommes infinies, l'ordre des termes compte en général, mais tout espoir n'est pas perdu et nous allons voir que bien souvent, tout est permis.

Dans ce qui suit, $I, J, K\ldots$ désignent des ensembles quelconques et on notera $\mathscr{P}_f(I)$ l'ensemble des parties **FINIES** de $I$.

## 6 Somme d'une famille quelconque d'éléments de $[0,+\infty]$

Commençons par quelques rappels et compléments sur la demi-droite achevée $[0,+\infty]$.

— La relation d'ordre $\leqslant$ est totale sur $[0,+\infty]$ et on définit dans $[0,+\infty]$ comme dans $\mathbb{R}$ ou $\overline{\mathbb{R}}$ les notions de partie majorée/minorée, de plus grand/petit élément et de borne supérieure/inférieure. La *propriété de la borne supérieure dans* $[0,+\infty]$ énonce que **TOUTE** partie $A$ de $[0,+\infty]$ possède une borne supérieure que nous noterons $\sup A$ et qui peut valoir $+\infty$. Pour les parties non vides majorées de $\mathbb{R}_+$, cette borne supérieure dans $[0,+\infty]$ coïncide bien sûr avec celle à laquelle nous sommes habitués dans $\mathbb{R}$.

L'ensemble vide est comme souvent l'occasion d'une petite bizarrerie. Dans $\mathbb{R}$, $\varnothing$ n'a pas de borne supérieure. Dans $\overline{\mathbb{R}}$, $\varnothing$ admet... $-\infty$ pour borne supérieure. Et maintenant dans $[0,+\infty]$ : $\sup\varnothing=0$. Pourquoi ? Parce que dans $[0,+\infty]$, le plus petit majorant de $\varnothing$ est 0.

— L'addition et la multiplication sont des lois internes sur $[0,+\infty]$, on sait additionner et multiplier tout élément de $[0,+\infty]$ avec tout élément de $[0,+\infty]$... **VRAIMENT TOUJOURS ?!** Le seul problème que l'addition pourrait poser concerne la rencontre de $+\infty$ et $-\infty$, mais nous travaillons ici dans $[0,+\infty]$. La multiplication pose quant à elle un sérieux problème a priori, mais nous allons passer outre en décrétant que :

$$\boxed{0\times(+\infty)=(+\infty)\times 0=0.}\qquad \text{Allons-y franchement !}$$

— Comme dans $\mathbb{R}$, on peut montrer que pour toutes parties $A$ et $B$ de $[0,+\infty]$ et pour tout $\lambda\in[0,+\infty]$ :

$$\boxed{A\subset B \implies \sup A\leqslant \sup B,}\qquad \boxed{\sup(\lambda A)=\lambda\sup A}\qquad \text{et si } A\neq\varnothing \text{ et } B\neq\varnothing : \quad \boxed{\sup(A+B)=\sup A+\sup B.}$$

Nous pouvons maintenant rentrer dans le vif du sujet.

- Donnons-nous d'abord une famille $(x_i)_{i\in I}$ d'éléments de $[0,+\infty]$ indexée par un ensemble **FINI** $I$. Pour toute partie finie $J$ de $I$ : $\displaystyle\sum_{j\in J}x_j\leqslant\sum_{i\in I}x_i$ par positivité, donc $\displaystyle\sum_{i\in I}x_i$ majore l'ensemble $A=\left\{\sum_{j\in J}x_j \;\middle|\; J\in\mathscr{P}_f(I)\right\}$. Cela dit, $\displaystyle\sum_{i\in I}x_i$ appartient à $A$ par finitude de $I$, donc $\displaystyle\sum_{i\in I}x_i=\max A=\sup A=\sup_{J\in\mathscr{P}_f(I)}\sum_{j\in J}x_j$.
- Intéressons-nous ensuite à une série **CONVERGENTE** $\sum u_n$ de réels positifs. Pour toute partie finie $J$ de $\mathbb{N}$, par positivité : $\displaystyle\sum_{j\in J}u_j\leqslant\sum_{j=0}^{\max J}u_j\leqslant\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}u_k=\sum_{n=0}^{+\infty}u_n$, donc $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}u_n$ majore l'ensemble $A=\left\{\sum_{j\in J}u_j \;\middle|\; J\in\mathscr{P}_f(\mathbb{N})\right\}$. Or $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}u_n$ est aussi la limite d'une suite d'éléments de $A$ car, toujours par positivité : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k\in[\![0,n]\!]}u_k$, donc d'après la caractérisation séquentielle de la borne supérieure : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}u_n=\sup A=\sup_{J\in\mathscr{P}_f(\mathbb{N})}\sum_{j\in J}u_j$.

Ces deux calculs suggèrent qu'une définition de la somme d'un nombre quelconque de réels positifs est à notre portée.

**Définition-théorème (Somme d'une famille quelconque d'éléments de $[0,+\infty]$)** Pour toute famille $(x_i)_{i\in I}$ d'éléments de $[0,+\infty]$, on appelle *somme de la famille* $(x_i)_{i\in I}$ l'élément $\displaystyle\sum_{i\in I}x_i=\sup_{J\in\mathscr{P}_f(I)}\sum_{j\in J}x_j$ de $[0,+\infty]$.

**Cas particuliers :**

(i) Si $I$ est un ensemble fini et si les $x_i$ sont des réels positifs, cette nouvelle somme des $x_i$ coïncide avec leur somme au sens banal du terme.

(ii) Pour toute série $\sum u_n$ de réels **POSITIFS** : $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}u_n=\begin{cases}\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}u_n & \text{si la série converge}\\ +\infty & \text{si la série diverge.}\end{cases}$

(iii) Si l'un des $x_i$ vaut $+\infty$ : $\displaystyle\sum_{i\in I}x_i=+\infty$.

Cette définition à base de borne supérieure sur toutes les sommes finies suggère dès à présent que le calcul de $\displaystyle\sum_{i\in I}x_i$ ne devrait pas trop dépendre de l'ordre dans lequel on choisit de sommer. La notation $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}u_n$ de la théorie des séries indique au contraire qu'on somme les $u_n$ dans l'ordre naturel — $u_0$, puis $u_1$, puis $u_2$...

**Démonstration**

(ii) Dans le cas divergent, pour tout $N\in\mathbb{N}$ : $\displaystyle\sum_{k=0}^{N}u_k=\sum_{k\in[\![0,N]\!]}u_k\leqslant\sum_{n\in\mathbb{N}}u_n$ par définition de la borne supérieure, donc $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}u_n=+\infty$ après passage à la limite.

(iii) Si l'un des $x_i$ vaut $+\infty$, toute somme finie qui contient ce terme vaut $+\infty$, donc $\displaystyle\sum_{i\in I}x_i=+\infty$. ∎

✖ **Attention !** Une somme peut valoir $+\infty$ sans qu'aucun de ses termes vaille $+\infty$. Par exemple : $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n}=+\infty$.

Le théorème qui suit est **LE** gros théorème de cette fin de chapitre. Nous serons plus tranquilles une fois qu'il sera prouvé.

**Théorème (Théorème de sommation par paquets)** Pour tout recouvrement disjoint $(I_k)_{k\in K}$ de $I$ et toute famille $(x_i)_{i\in I}$ d'éléments de $[0,+\infty]$ : $\displaystyle\sum_{i\in I}x_i=\sum_{k\in K}\sum_{j\in I_k}x_j$.

En résumé, on regroupe les termes comme on veut quand on somme des éléments de $[0,+\infty]$. C'est plus que magnifique, mais vous noterez bien que les sommes du théorème sont toutes autorisées à valoir $+\infty$.

**Démonstration** Commençons par bien comprendre ce que chacun des trois sommes du théorème signifie :

$$\sum_{i\in I} x_i \overset{(1)}{=} \sup_{J\in\mathscr{P}_f(I)} \sum_{i\in J} x_i, \qquad \sum_{j\in I_k} x_j \overset{(2)}{=} \sup_{J_k\in\mathscr{P}_f(I_k)} \sum_{j\in J_k} x_j \quad \text{pour tout } k\in K, \qquad \sum_{k\in K}\sum_{j\in I_k} x_j \overset{(3)}{=} \sup_{L\in\mathscr{P}_f(K)} \sum_{k\in L}\sum_{j\in I_k} x_j.$$

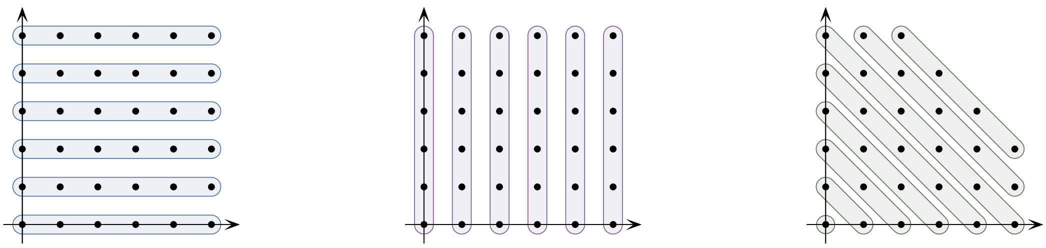
- Montrons que $\displaystyle\sum_{i\in I} x_i \leqslant \sum_{k\in K}\sum_{j\in I_k} x_j$, i.e. que pour toute partie finie $J$ de $I$ : $\displaystyle\sum_{i\in J} x_i \overset{(1)}{\leqslant} \sum_{k\in K}\sum_{j\in I_k} x_j$.
  Fixons $J$ dans $\mathscr{P}_f(I)$ et posons $L=\big\{k\in K \mid \ J\cap I_k\neq\varnothing\big\}$, puis pour tout $k\in L$ : $J_k=J\cap I_k$, qui est une partie finie de $I_k$. La famille $(J_k)_{k\in L}$ est un recouvrement disjoint de $J$ car :
  $$\bigsqcup_{k\in L} J_k = \bigsqcup_{k\in L}(J\cap I_k) = \bigsqcup_{k\in K}(J\cap I_k) = J\cap \bigsqcup_{k\in K} I_k = J\cap I = J.$$
  Il en découle que $\displaystyle |J| = \sum_{k\in L}|J_k| \geqslant \sum_{k\in L} 1 = |L|$, donc que $L$ est fini. Finalement :
  $$\sum_{i\in J} x_i = \sum_{k\in L}\sum_{j\in J_k} x_j \overset{(2)}{\leqslant} \sum_{k\in L}\sum_{j\in I_k} x_j \overset{(3)}{\leqslant} \sum_{k\in K}\sum_{j\in I_k} x_j.$$
- Montrons maintenant que $\displaystyle\sum_{k\in K}\sum_{j\in I_k} x_j \leqslant \sum_{i\in I} x_i$, i.e. que pour toute partie finie $L$ de $K$ : $\displaystyle\sum_{k\in L}\sum_{j\in I_k} x_j \overset{(3)}{\leqslant} \sum_{i\in I} x_i$.
  Fixons $L$ dans $\mathscr{P}_f(K)$. Pour toute partie finie $J_k$ de $I_k$, $k$ décrivant $L$, les ensembles $J_k$ sont disjoints et $\displaystyle\bigsqcup_{k\in L} J_k$ est une partie finie de $I$, donc $\displaystyle\sum_{k\in L}\sum_{j\in J_k} x_j = \sum_{i\in \bigsqcup_{k\in L} J_k} x_i \overset{(1)}{\leqslant} \sum_{i\in I} x_i$. A fortiori : $\displaystyle\sum_{k\in L}\sum_{j\in I_k} x_j \overset{(2)}{\leqslant} \sum_{i\in I} x_i$.

Et maintenant, quelques découpages classiques à méditer sans modération.

$$\mathbb{N}=(2\mathbb{N})\sqcup(2\mathbb{N}+1), \qquad \mathbb{Z}=\mathbb{N}\sqcup(-\mathbb{N}^*), \qquad \mathbb{N}=\bigsqcup_{k\in\mathbb{N}}[\![2^k,2^{k+1}-1]\!] = \{1\}\sqcup[\![2,3]\!]\sqcup[\![4,7]\!]\sqcup[\![8,15]\!]\sqcup\ldots,$$

$$\mathbb{N}^2=\bigsqcup_{i\in\mathbb{N}}\big(\{i\}\times\mathbb{N}\big) \quad \text{(partition en lignes)}, \qquad \mathbb{N}^2=\bigsqcup_{j\in\mathbb{N}}\big(\mathbb{N}\times\{j\}\big) \quad \text{(partition en colonnes)}$$

$$\mathbb{N}^2=\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}}\big\{(k,n-k) \mid \ k\in[\![0,n]\!]\big\} \quad \text{(partition en lignes obliques de pente } -1\text{)}.$$



Les règles de calculs suivantes ne risquent pas de vous dépayser, vous les connaissez parfaitement dans le cas des sommes finies et la morale de l'histoire est simple, tout se passe au mieux tant qu'on somme des éléments de $[0,+\infty]$.

**Théorème (Règles de calcul sur les sommes quelconques d'éléments de $[0,+\infty]$)** Soient $(x_i)_{i\in I}$, $(y_i)_{i\in I}$, $(u_{ij})_{(i,j)\in I\times J}$, $(a_i)_{i\in I}$, $(b_j)_{j\in J}$ des familles d'éléments de $[0,+\infty]$ et $\lambda\in[0,+\infty]$.

(i) **Changement d'indice :** Pour toute bijection $\varphi$ de $J$ sur $I$ : $\displaystyle\sum_{i\in I} x_i = \sum_{j\in J} x_{\varphi(j)}$.

En particulier, pour $I=J=\mathbb{N}$, la somme $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ est *invariante par permutation*, i.e. ne dépend pas de l'ordre de sommation.

(ii) **Restriction :** Pour toute partie $I'$ de $I$ : $\displaystyle\sum_{i'\in I'} x_{i'} \leqslant \sum_{i\in I} x_i$.

(iii) **Linéarité :** $\displaystyle\sum_{i\in I}(\lambda x_i + y_i) = \lambda\sum_{i\in I} x_i + \sum_{i\in I} y_i$.

(iv) **Croissance :** Si $x_i\leqslant y_i$ pour tout $i\in I$ : $\displaystyle\sum_{i\in I} x_i \leqslant \sum_{i\in I} y_i$.

(v) **Théorème de Fubini :** $\displaystyle\sum_{(i,j)\in I\times J} u_{ij} = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} u_{ij} = \sum_{j\in J}\sum_{i\in I} u_{ij}$.

(vi) **Familles « produits » :** $\displaystyle\sum_{(i,j)\in I\times J} a_i b_j = \sum_{i\in I} a_i \times \sum_{j\in J} b_j$.

**Démonstration**

(i) $I=\varphi(J)=\bigsqcup_{j\in J}\{\varphi(j)\}$, donc $\sum_{i\in I}x_i=\sum_{j\in J}x_{\varphi(j)}$ d'après le théorème de sommation par paquets.

(ii) $I=I'\sqcup(I\setminus I')$, donc d'après le théorème de sommation par paquets : $\sum_{i\in I}x_i=\sum_{i'\in I'}x_{i'}+\overbrace{\sum_{i\in I\setminus I'}x_i}^{\in[0,+\infty]}\geqslant\sum_{i'\in I'}x_{i'}$.

(iii) En notant $A$ l'ensemble $\left\{\sum_{j\in J}x_j\ \middle|\ J\in\mathscr{P}_f(I)\right\}$ : $\lambda\sum_{i\in I}x_i=\lambda\sup A=\sup(\lambda A)=\sum_{i\in I}\lambda x_i$.

Pour l'additivité, posons $z_{i1}=x_i$ et $z_{i2}=y_i$ pour tout $i\in I$ et découpons $I\times\{1,2\}$ de deux manières différentes : $\big(I\times\{1\}\big)\sqcup\big(I\times\{2\}\big)=I\times\{1,2\}=\bigsqcup_{i\in I}\{(i,1),(i,2)\}$, puis appliquons deux fois le théorème de sommation par paquets : $\sum_{i\in I}z_{i1}+\sum_{i\in I}z_{i2}=\sum_{(i,j)\in I\times\{1,2\}}z_{ij}=\sum_{i\in I}(z_{i1}+z_{i2})$, i.e. $\sum_{i\in I}x_i+\sum_{i\in I}y_i=\sum_{i\in I}(x_i+y_i)$.

(iv) Le résultat est clair si l'un des $x_i$ vaut $+\infty$. Si au contraire aucun $x_i$ ne vaut $+\infty$ : $y_i-x_i\in[0,+\infty]$, donc par linéarité : $\sum_{i\in I}y_i=\sum_{i\in I}\big(x_i+(y_i-x_i)\big)=\sum_{i\in I}x_i+\sum_{i\in I}(y_i-x_i)=\sum_{i\in I}x_i+\underbrace{\sum_{i\in I}(y_i-x_i)}_{\in[0,+\infty]}\geqslant\sum_{i\in I}x_i$.

(v) $\bigsqcup_{i\in I}(\{i\}\times J)=I\times J=\bigsqcup_{j\in J}(I\times\{j\})$, donc $\sum_{i\in I}\sum_{j\in J}u_{ij}=\sum_{(i,j)\in I\times J}u_{ij}=\sum_{j\in J}\sum_{i\in I}u_{ij}$ après une double application du théorème de sommation par paquets.

(vi) $\sum_{(i,j)\in I\times J}a_ib_j\overset{\text{Fubini}}{=}\sum_{j\in J}\sum_{i\in I}a_ib_j\overset{\text{(ii)}}{=}\sum_{j\in J}\left(b_j\sum_{i\in I}a_i\right)\overset{\text{(ii)}}{=}\sum_{i\in I}a_i\times\sum_{j\in J}b_j$.

**Exemple** $\sum_{n=2}^{+\infty}\big(\zeta(n)-1\big)=\sum_{n=2}^{+\infty}\sum_{p=2}^{+\infty}\frac{1}{p^n}=\sum_{p=2}^{+\infty}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{p^n}=\sum_{p=2}^{+\infty}\frac{1}{p^2}\times\frac{1}{1-\frac{1}{p}}=\sum_{p=2}^{+\infty}\frac{1}{p(p-1)}=\sum_{p=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{p-1}-\frac{1}{p}\right)=1.$

**Exemple** $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{2^n}=\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^n}=\sum_{\substack{n,k\in\mathbb{N}^*\\k\leqslant n}}\frac{1}{2^n}=\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{1}{2^n}=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{2^k}\times\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{2^k}=2\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2.$

**Exemple** $\sum_{p,q\in\mathbb{N}}\frac{p^q}{\mathrm{e}^{2p}q!}=\sum_{p=0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-2p}\sum_{q=0}^{+\infty}\frac{p^q}{q!}=\sum_{p=0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-2p}\mathrm{e}^{p}=\sum_{p=0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-p}=\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-1}}=\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}.$

**Exemple** $\sum_{n,p\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{np(n+p-1)}=\sum_{k=2}^{+\infty}\sum_{\substack{n,p\in\mathbb{N}^*\\n+p=k}}\frac{1}{np(n+p-1)}=\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k-1}\sum_{n=1}^{k-1}\frac{1}{n(k-n)}=\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k-1}\sum_{n=1}^{k-1}\frac{1}{k}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{k-n}\right)$ après décomposition en éléments simples.

Poursuivons : $\sum_{n,p\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{np(n+p-1)}=\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k(k-1)}\left(2\sum_{n=1}^{k-1}\frac{1}{n}\right)=2\sum_{\substack{n,k\in\mathbb{N}^*\\n<k}}\frac{1}{nk(k-1)}=2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)=2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{3}.$

**Exemple** Pour quelles valeurs de $\alpha\in\mathbb{R}$ la somme $\sum_{p,q\in\mathbb{N}^*}\frac{pq}{(p+q)^\alpha}$ est-elle réelle ?

$$\sum_{p,q\in\mathbb{N}^*}\frac{pq}{(p+q)^\alpha}=\sum_{k=2}^{+\infty}\sum_{\substack{p,q\in\mathbb{N}^*\\p+q=k}}\frac{pq}{(p+q)^\alpha}=\sum_{k=2}^{+\infty}\sum_{p=1}^{k-1}\frac{p(k-p)}{k^\alpha}=\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k^\alpha}\left(k\times\frac{(k-1)k}{2}-\frac{(k-1)k(2k-1)}{6}\right)=\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{k-1}{k^{\alpha-1}}\left(\frac{k}{2}-\frac{2k-1}{6}\right)$$

$$=\frac{1}{6}\sum_{k=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{k^{\alpha-3}}-\frac{1}{k^{\alpha-1}}\right)=\begin{cases}+\infty & \text{si } \alpha\leqslant 4\\ \dfrac{\zeta(\alpha-3)-\zeta(\alpha-1)}{6} & \text{si } \alpha>4.\end{cases}$$

Pour $\alpha\leqslant 4$ : $\left(\frac{1}{n^{\alpha-3}}-\frac{1}{n^{\alpha-1}}\right)\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{n^{\alpha-3}}$, la série à termes positifs $\sum\frac{1}{n^{\alpha-3}}$ diverge.

## 7 Familles sommables

Il est réjouissant de savoir additionner avec légèreté les réels positifs, mais on est souvent conduit à additionner des réels quelconques, voire des nombres complexes. La situation est alors plus périlleuse mais pas inextricable grâce au concept de *famille sommable*. Notez bien qu'on ne définit pas la notion de somme dans un premier temps, mais une condition abstraite appelée *sommabilité*. Les sommes viendront ensuite.

**Définition (Famille sommable)** Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille de nombres complexes. On dit que $(x_i)_{i\in I}$ est *sommable* si $\sum_{i\in I}|x_i| < +\infty$. L'ensemble des familles sommables de $\mathbb{C}^I$ à valeurs dans $\mathbb{K}\in\{\mathbb{R},\mathbb{C}\}$ est noté $\ell^1(I,\mathbb{K})$.

Toute famille FINIE de nombres complexes est évidemment sommable. En outre, pour $I=\mathbb{N}$, une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres complexes est sommable si et seulement la série $\sum x_n$ converge absolument.

Pour finir, pour toutes familles $(x_i)_{i\in I}$ et $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de nombres complexes pour lesquelles $|x_i|\leqslant y_i$ pour tout $i\in I$, la sommabilité de $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ entraîne celle de $(x_i)_{i\in I}$ car $\sum_{i\in I}|x_i|\leqslant\sum_{i\in I}y_i<+\infty$. À utiliser sans modération !

À présent, on pose pour tout $x\in\mathbb{R}$ : $x^+=\dfrac{|x|+x}{2}$ et $x^-=\dfrac{|x|-x}{2}$, appelés respectivement *partie positive* et *partie négative de* $x$. Très clairement : $0\leqslant x^+\leqslant|x|$, $0\leqslant x^-\leqslant|x|$, $x^++x^-=|x|$ et $x^+-x^-=x$.

Donnons-nous ensuite une famille sommable $(x_i)_{i\in I}$ de RÉELS. Les familles $\left(x_i^+\right)_{i\in I}$ et $\left(x_i^-\right)_{i\in I}$ sont à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ et leurs sommes sont des réels car $\sum_{i\in I}x_i^\pm\leqslant\sum_{i\in I}|x_i|<+\infty$. On définit alors la *somme de la famille* $(x_i)_{i\in I}$ en posant :

$$\sum_{i\in I}x_i=\sum_{i\in I}x_i^+-\sum_{i\in I}x_i^-.$$

Sous réserve de sommabilité, on donne ainsi un sens à $\sum_{i\in I}x_i$ sans hypothèse sur le signe des $x_i$, mais en se ramenant au cas positif. Bien sûr, si les $x_i$ sont positifs, la nouvelle somme des $x_i$ coïncide avec celle du paragraphe précédent.

Et si les $x_i$ sont des COMPLEXES ? Dans ce cas, les familles $\big(\mathrm{Re}(x_i)\big)_{i\in I}$ et $\big(\mathrm{Im}(x_i)\big)_{i\in I}$ sont sommables car par exemple $\sum_{i\in I}\big|\mathrm{Re}(x_i)\big|\leqslant\sum_{i\in I}|x_i|<+\infty$. On définit alors la *somme de la famille* $(x_i)_{i\in I}$ en ramenant au cas réel de la façon suivante :

$$\sum_{i\in I}x_i=\sum_{i\in I}\mathrm{Re}(x_i)+\mathrm{i}\sum_{i\in I}\mathrm{Im}(x_i).$$

En particulier : $\mathrm{Re}\left(\sum_{i\in I}x_i\right)=\sum_{i\in I}\mathrm{Re}(x_i)$ et $\mathrm{Im}\left(\sum_{i\in I}x_i\right)=\sum_{i\in I}\mathrm{Im}(x_i)$.

La philosophie des résultats suivants doit être bien comprise. On vérifie la sommabilité par un calcul de somme AVEC module, mais une fois qu'elle est vérifiée, tout est permis SANS module — changement d'indice, découpages, permutations...

**Théorème (Propriétés des familles sommables)** Soient $(x_i)_{i\in I}$, $(y_i)_{i\in I}$, $(u_{ij})_{(i,j)\in I\times J}$, $(a_i)_{i\in I}$, $(b_j)_{j\in J}$ des familles de nombres complexes et $\lambda\in\mathbb{C}$.

(i) **Restriction :** Si $(x_i)_{i\in I}$ est sommable, la famille $(x_{i'})_{i'\in I'}$ l'est aussi pour toute partie $I'$ de $I$.

(ii) **Linéarité :** L'ensemble $\ell^1(I,\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^I$. Plus précisément, si $(x_i)_{i\in I}$ et $(y_i)_{i\in I}$ sont sommables, la famille $(x_i+\lambda y_i)_{i\in I}$ l'est aussi et : $\sum_{i\in I}(\lambda x_i+y_i)=\lambda\sum_{i\in I}x_i+\sum_{i\in I}y_i$.

(iii) **Croissance :** Si $(x_i)_{i\in I}$ et $(y_i)_{i\in I}$ sont sommables et si $x_i\leqslant y_i$ pour tout $i\in I$ : $\sum_{i\in I}x_i\leqslant\sum_{i\in I}y_i$.

**Inégalité triangulaire :** Si $(x_i)_{i\in I}$ est sommable : $\left|\sum_{i\in I}x_i\right|\leqslant\sum_{i\in I}|x_i|$.

(iv) **Théorème de sommation par paquets :** Si $(x_i)_{i\in I}$ est sommable, alors pour tout recouvrement disjoint $(I_k)_{k\in K}$ de $I$, la famille $\left(\sum_{i\in I_k}x_i\right)_{k\in K}$ l'est aussi et : $\sum_{i\in I}x_i=\sum_{k\in K}\sum_{i\in I_k}x_i$.

(v) **Changement d'indice :** Si $(x_i)_{i\in I}$ est sommable, alors pour toute bijection $\varphi$ de $J$ sur $I$, la famille $\left(x_{\varphi(j)}\right)_{j\in J}$ l'est aussi et : $\sum_{i\in I}x_i=\sum_{j\in J}x_{\varphi(j)}$.
En particulier, pour $I=J=\mathbb{N}$, la somme d'une série absolument convergente est *invariante par permutation*, i.e. ne dépend pas de l'ordre de sommation.

**Théorème (Propriétés des familles sommables, suite)**

(vi) **Théorème de Fubini :** Si $(u_{ij})_{(i,j)\in I\times J}$ est sommable, les familles $\left(\sum_{j\in J} u_{ij}\right)_{i\in I}$ et $\left(\sum_{i\in I} u_{ij}\right)_{j\in J}$ le sont aussi et :

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} u_{ij} = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} u_{ij} = \sum_{j\in J}\sum_{i\in I} u_{ij}.$$

(vii) **Familles « produits » :** Si $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_j)_{j\in J}$ sont sommables, la famille $(a_i b_j)_{(i,j)\in I\times J}$ l'est aussi et :

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} a_i b_j = \sum_{i\in I} a_i \times \sum_{j\in J} b_j.$$

(viii) **Approximation par des sommes finies :** Si $(x_i)_{i\in I}$ est sommable :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists J \in \mathscr{P}_f(I), \quad \left|\sum_{i\in I} x_i - \sum_{j\in J} x_j\right| < \varepsilon.$$

**Démonstration** Hors programme ! Vous la trouverez cela dit en fin de chapitre si cela vous intéresse.

**Exemple** La famille $\left(\dfrac{\sin(p+q)}{p^2q^2}\right)_{p,q\in\mathbb{N}^*}$ est sommable car $\displaystyle\sum_{p,q\in\mathbb{N}^*} \frac{\left|\sin(p+q)\right|}{p^2q^2} \leqslant \sum_{p,q\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{p^2q^2} = \left(\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{p^2}\right)\left(\sum_{q=1}^{+\infty}\frac{1}{q^2}\right) < +\infty.$

**Exemple** Pour tout $z \in \mathbb{C}$, la famille $\left(z^{ij}\right)_{i,j\in\mathbb{N}^*}$ est sommable si et seulement si $|z| < 1$.

**Démonstration**

— Si $|z| < 1$ : $\displaystyle\sum_{i,j\in\mathbb{N}^*} \left|z^{ij}\right| = \sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{j=1}^{+\infty}\left(|z|^i\right)^j \overset{|z|^i<1}{=} \sum_{i=1}^{+\infty}\frac{|z|^i}{1-|z|^i} \leqslant \sum_{i=1}^{+\infty}\frac{|z|^i}{1-|z|} = \frac{|z|}{\left(1-|z|\right)^2} < +\infty.$

— Si $|z| \geqslant 1$ : $\displaystyle\sum_{i,j\in\mathbb{N}^*} \left|z^{ij}\right| = \sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{j=1}^{+\infty}\left(|z|^i\right)^j \overset{|z|^i\geqslant 1}{=} \sum_{i=1}^{+\infty} +\infty = +\infty.$

On n'est jamais sûr d'avoir le droit d'additionner les termes d'une famille de nombres complexes quelconques tant qu'on n'a pas prouvé sa sommabilité. Il est courant cela dit qu'on ne se préoccupe de la sommabilité qu'**APRÈS** avoir calculé la somme, mais il faut bien préciser le cas échéant qu'on travaille « sous réserve de sommabilité ».

**Exemple** On souhaite calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k(k+1)}\sum_{n=1}^{k}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$. **SOUS RÉSERVE DE SOMMABILITÉ** de la famille $\left(\dfrac{(-1)^{n-1}}{nk(k+1)}\right)_{n,k\in\mathbb{N}^*,\ n\leqslant k}$ :

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k(k+1)}\sum_{n=1}^{k}\frac{(-1)^{n-1}}{n} = \sum_{\substack{n,k\in\mathbb{N}^*\\ n\leqslant k}}\frac{(-1)^{n-1}}{nk(k+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k(k+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sum_{k=n}^{+\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\times\frac{1}{n} = \frac{\pi^2}{12}.$$

Mais de fait, la famille $\left(\dfrac{(-1)^{n-1}}{nk(k+1)}\right)_{n,k\in\mathbb{N}^*,\ n\leqslant k}$ est sommable car :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=n}^{+\infty}\left|\frac{(-1)^{n-1}}{nk(k+1)}\right| = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} < +\infty.$$

**Exemple** Soit $z \in \mathbb{C}$. On souhaite calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{n=k+1}^{+\infty}\frac{e^{\frac{2ik\pi}{n}}}{2^n}$. **SOUS RÉSERVE DE SOMMABILITÉ** de la famille $\left(\dfrac{e^{\frac{2ik\pi}{n}}}{2^n}\right)_{n,k\in\mathbb{N}^*,\ n>k}$ :

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{n=k+1}^{+\infty}\frac{e^{\frac{2ik\pi}{n}}}{2^n} = \sum_{\substack{k,n\in\mathbb{N}^*\\ n>k}}\frac{e^{\frac{2ik\pi}{n}}}{2^n} = \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{n-1}e^{\frac{2ik\pi}{n}} = \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{2^n}\left(-1+\sum_{k=0}^{n-1}e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)$$

$$= -\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{2^n} = -\frac{1}{4}\times\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} \qquad \text{car pour tout } n\geqslant 2 : \quad \sum_{k=0}^{n-1}e^{\frac{2ik\pi}{n}} = \sum_{\omega\in\mathbb{U}_n}\omega = 0.$$

Mais de fait, la famille $\left(\dfrac{e^{\frac{2ik\pi}{n}}}{2^n}\right)_{n,k\in\mathbb{N}^*,\ n>k}$ est sommable car :

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{n=k+1}^{+\infty}\left|\frac{e^{\frac{2ik\pi}{n}}}{2^n}\right| = \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{n=k+1}^{+\infty}\frac{1}{2^n} = \sum_{n=2}^{+\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2^n} = \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{n-1}{2^n} < +\infty.$$

Dernière notion du chapitre, le *produit de Cauchy* n'est qu'une simple application de la théorie des familles sommables, mais pas des moindres.

**Définition-théorème (Produit de Cauchy)** Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1(\mathbb{N},\mathbb{C})$. On appelle *produit de Cauchy de* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n\in\mathbb{N}$ par : $\displaystyle p_n = \sum_{\substack{0\leqslant i,j\leqslant n\\ i+j=n}} u_i v_j = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$.

La famille $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable et : $\displaystyle \sum_{n=0}^{+\infty} p_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \times \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.

On dit aussi que la **SÉRIE** $\sum p_n$ est le produit de Cauchy des **SÉRIES** $\sum u_n$ et $\sum v_n$.

**Démonstration** Nous savons déjà que la famille $(u_i v_j)_{i,j\in\mathbb{N}}$ est sommable et :

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} u_i \times \sum_{j\in\mathbb{N}} v_j = \sum_{i,j\in\mathbb{N}} u_i v_j = \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{\substack{0\leqslant i,j\leqslant n\\ i+j=n}} u_i v_j = \sum_{n\in\mathbb{N}} p_n.$$

Assurez-vous d'avoir bien compris le fond de l'affaire :

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} u_i \times \sum_{j\in\mathbb{N}} v_j = \underbrace{u_0 v_0}_{i+j=0} + \underbrace{u_0 v_1 + u_1 v_0}_{i+j=1} + \underbrace{u_0 v_2 + u_1 v_1 + u_2 v_0}_{i+j=2} + \ldots = \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{\substack{0\leqslant i,j\leqslant n\\ i+j=n}} u_i v_j.$$

**Attention !** Le résultat précédent peut être énoncé en termes de séries — si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent **ABSOLUMENT**, il en est de même de la série $\sum p_n$. La convergence **ABSOLUE** y est cependant cruciale. Posons pour le comprendre $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ et notons $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ le produit de Cauchy de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par elle-même. La série $\sum u_n$ converge d'après le critère spécial des séries alternées, mais la série $\sum p_n$ diverge (grossièrement) car pour tout $n\in\mathbb{N}$ : $\displaystyle |p_n| = \left|\sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}\right| = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(k+1)(n-k+1)}} \geqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(n+1)^2}} = 1.$

**Exemple** Pour tout $x\in\,]-1,1[$ : $\displaystyle \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$.

**Démonstration** La suite $\left(x^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable, donc par produit de Cauchy de cette suite avec elle-même :

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right)^2 = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n} x^k x^{n-k} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1}.$$

Rappelons tout de même que nous savons démontrer ce résultat en dérivant la relation : $\displaystyle \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, puis en faisant tendre $n$ vers $+\infty$.

**Exemple** Pour tous $a,b\in\mathbb{C}$ : $\displaystyle \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(a+b)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!} \times \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b^n}{n!}$, autrement dit $\mathrm{e}^{a+b} = \mathrm{e}^a\,\mathrm{e}^b$.

**Démonstration** Les suites $\left(\dfrac{a^n}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\dfrac{b^n}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sont sommables, donc par produit de Cauchy :

$$\mathrm{e}^a\,\mathrm{e}^b = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!} \times \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!} \times \frac{b^{n-k}}{(n-k)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(a+b)^n}{n!} = \mathrm{e}^{a+b}.$$

Bref, la relation $\mathrm{e}^{a+b} = \mathrm{e}^a\,\mathrm{e}^b$ n'est jamais qu'une version pour les séries de la formule du binôme !

Vous trouverez pour finir ci-dessous quelques éléments de preuve du théorème « Propriétés des familles sommables » que nous avons énoncé plus haut.

**Démonstration** Je ne traiterai que le cas réel ci-dessous. Le cas complexe se démontre essentiellement de la même façon, mais l'inégalité triangulaire est plus délicate à obtenir.

(i) Comme $(x_i)_{i\in I}$ est sommable : $\displaystyle \sum_{i'\in I'} |x_{i'}| \leqslant \sum_{i\in I} |x_i| < +\infty$, donc $(x_{i'})_{i'\in I'}$ est sommable aussi.

(ii) La famille $(\lambda x_i + y_i)_{i\in I}$ est sommable car $\displaystyle \sum_{i\in I} |\lambda x_i + y_i| \leqslant \sum_{i\in I} \big(|\lambda|.|x_i| + |y_i|\big) = |\lambda| \sum_{i\in I} |x_i| + \sum_{i\in I} |y_i| < +\infty$.

Contentons-nous maintenant de montrer l'additivité ($\lambda = 1$). Il n'est pas difficile de vérifier que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ : $\quad (x+y)^+ + x^- + y^- = (x+y)^- + x^+ + y^+ \quad$ et notez bien que les réels ainsi sommés sont tous positifs. Par linéarité dans le cas positif :

$$\sum_{i\in I}(x_i+y_i)^+ + \sum_{i\in I} x_i^- + \sum_{i\in I} y_i^- = \sum_{i\in I}\Big((x_i+y_i)^+ + x_i^- + y_i^-\Big) = \sum_{i\in I}\Big((x_i+y_i)^- + x_i^+ + y_i^+\Big) = \sum_{i\in I}(x_i+y_i)^+ + \sum_{i\in I} x_i^- + \sum_{i\in I} y_i^-,$$

donc : $\displaystyle \sum_{i\in I}(x_i+y_i) = \sum_{i\in I}(x_i+y_i)^+ - \sum_{i\in I}(x_i+y_i)^- = \sum_{i\in I} x_i^+ - \sum_{i\in I} x_i^- + \sum_{i\in I} y_i^+ - \sum_{i\in I} y_i^- = \sum_{i\in I} x_i + \sum_{i\in I} y_i.$

(iii) Pour la croissance : $\displaystyle \sum_{i\in I} y_i - \sum_{i\in I} x_i \overset{\text{(ii)}}{=} \sum_{i\in I}(y_i - x_i) \geqslant 0,$ $\quad$ et pour l'inégalité triangulaire :

$$\left|\sum_{i\in I} x_i\right| = \left|\overbrace{\sum_{i\in I} x_i^+}^{\geqslant 0} - \overbrace{\sum_{i\in I} x_i^-}^{\geqslant 0}\right| \leqslant \sum_{i\in I} x_i^+ + \sum_{i\in I} x_i^- \overset{\text{(ii)}}{=} \sum_{i\in I}\left(x_i^+ + x_i^-\right) = \sum_{i\in I} |x_i|.$$

(iv) La famille $(x_i)_{i\in I_k}$ est sommable pour tout $k \in K$ d'après (i), donc les familles $\left(x_i^+\right)_{i\in I_k}$ et $\left(x_i^-\right)_{i\in I_k}$ aussi. La famille $\displaystyle \left(\sum_{i\in I_k} x_i\right)_{k\in K}$ l'est ensuite à son tour car $\displaystyle \sum_{k\in K}\left|\sum_{i\in I_k} x_i\right| \overset{\text{(iii)}}{\leqslant} \sum_{k\in K}\sum_{i\in I_k} |x_i| = \sum_{i\in I} |x_i| < +\infty$, et on peut remplacer $x_i$ par $x_i^+$ et $x_i^-$ dans cette majoration. Finalement :

$$\sum_{i\in I} x_i = \sum_{i\in I} x_i^+ - \sum_{i\in I} x_i^- = \sum_{k\in K}\sum_{i\in I_k} x_i^+ - \sum_{k\in K}\sum_{i\in I_k} x_i^- \overset{\text{(ii)}}{=} \sum_{k\in K}\left(\sum_{i\in I_k} x_i^+ - \sum_{i\in I_k} x_i^-\right) \overset{\text{(ii)}}{=} \sum_{k\in K}\sum_{i\in I_k}\left(x_i^+ - x_i^-\right) = \sum_{k\in K}\sum_{i\in I_k} x_i. \quad ■$$