Séries

1 Introduction aux séries

1.1 Série, somme, premiers exemples

Définition **(Série, sommes partielles)** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ ($n^{\text{ème}}$ *somme partielle*). La suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée la *série de terme général* u_n et notée $\sum u_n$.

Explication

- Une série n'est jamais qu'une suite. Dire que la série $\sum u_n$ converge (resp. diverge) revient donc simplement à dire que la suite des sommes partielles $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge (resp. diverge), et la nature de la série $\sum u_n$ est par définition sa convergence ou sa divergence.
- Mais si les séries ne sont que des suites, pourquoi se doter d'une théorie des séries ? La théorie des suites n'est-elle pas suffisante ? La réponse est non.
  - — Grande question de la théorie des suites : à quelle condition la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ?
  - — Grande question de la théorie des séries : à quelle condition sur la SUITE $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la SÉRIE $\sum u_n$ est-elle convergente ?

  Cette question spécifique appelle des résultats spécifiques qui sont l'objet du chapitre.

Définition **(Somme d'une série convergente, restes)** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On suppose que la série $\sum u_n$ converge.

- La limite finie : $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k$ est notée $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ et appelée la *somme* de la série.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, si on pose : $R_n = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ ($n^{\text{ème}}$ *reste* de la série), alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n = 0$.

Explication Comme dans le cas des suites, les premiers termes d'une série n'ont pas d'influence sur sa nature, i.e. sur sa convergence ou sa divergence. Ils affectent en revanche la valeur de sa somme lorsqu'elle est convergente.

Définition-théorème **(Série géométrique)** Soit $q \in \mathbb{C}$. La série $\sum q^n$, dite *série géométrique de raison* q, est convergente si et seulement si : $|q| < 1$. En outre, dans ce cas : $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \dfrac{1}{1-q}$.

Démonstration Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \\ n+1 & \text{si } q = 1. \end{cases}$ Le résultat découle donc de nos connaissances sur la limite de la SUITE géométrique $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$. ■

Exemple La série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge.

Démonstration Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons : $U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$. La suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est évidemment croissante, donc pour montrer qu'elle converge, il nous reste à montrer qu'elle est majorée. Or pour tout $n \geqslant 2$:

$$U_n = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = 1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \leqslant 2.$$

Exemple La série $\sum \frac{1}{n}$, dite *série harmonique*, diverge — ET POURTANT : $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Démonstration

- **Preuve n°1 :** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geqslant \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$, or si la série $\sum \frac{1}{n}$ était convergente de somme S, on aurait : $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} S - S = 0$ — contradiction !
- **Preuve n°2 :** Pour tout $x \in \,]-1,+\infty[$: $\ln(1+x) \leqslant x$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geqslant \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \big(\ln(k+1) - \ln k\big) = \ln(n+1).$$

Aussitôt, par minoration : $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = +\infty$, donc de nouveau, $\sum \frac{1}{n}$ diverge.

1.2 Divergence grossière

Théorème (Condition nécessaire de convergence d'une série) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.
Si la série $\sum u_n$ converge : $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Démonstration Si $\sum u_n$ converge, disons vers S : $u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k - \sum_{k=0}^{n-1} u_k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} S - S = 0$. ■

Définition (Divergence grossière) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On dit que la série $\sum u_n$ *diverge grossièrement* si : $\lim_{n\to+\infty} u_n \neq 0$.
Dans ce cas, $\sum u_n$ diverge « tout court ».

✖ **ATTENTION !** ✖ La réciproque de l'implication : $\sum u_n$ converge $\implies \lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ est fausse en général. Affirmer le contraire, c'est avouer qu'on n'a **ABSOLUMENT RIEN COMPRIS** à la théorie des séries. S'il suffisait de montrer que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ pour montrer que $\sum u_n$ converge, ce chapitre spécifique n'existerait pas ! En résumé :

Une somme infinie de quantités qui tendent vers 0 peut ne pas converger.

Exemple Comme on l'a vu, la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ diverge — ET POURTANT : $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$.

1.3 LIEN SUITE-SÉRIE

Théorème (Lien suite-série) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. La SUITE $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et la SÉRIE $\sum (a_{n+1} - a_n)$ ont même nature.

Démonstration Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par simplification télescopique : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) = a_n - a_0$. ■

Explication On peut donc étudier une suite en se servant des techniques spécifiques de la théorie des séries, ou au contraire étudier une série au moyen des techniques spécifiques de la théorie des suites.

Exemple La série $\sum \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ diverge.

Démonstration La SUITE $(\ln n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ diverge, donc la SÉRIE $\sum \Big(\ln(n+1) - \ln n\Big)$ également.

1.4 OPÉRATIONS SUR LES SÉRIES

Théorème (Opérations sur les séries) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

- Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}^*$, les séries $\sum u_n$ et $\sum (\lambda u_n)$ ont même nature.
- Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, la série $\sum (u_n + v_n)$ converge aussi.
- Si la série $\sum u_n$ converge alors que la série $\sum v_n$ diverge, la série $\sum (u_n + v_n)$ diverge.

Démonstration Le résultat est vrai pour les suites, et justement les séries sont des suites. ■

ATTENTION !

- Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ divergent toutes les deux, on ne peut rien dire en général de $\sum (u_n + v_n)$. Par exemple, la série $\sum \frac{1}{n}$ diverge, donc la série : $\sum \frac{1}{n} + \sum \frac{1}{n} = \sum \frac{2}{n}$ aussi, mais la série : $\sum \frac{1}{n} - \sum \frac{1}{n} = 0$ converge.
- Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, on ne peut rien dire en général de la série $\sum u_n v_n$. Nous verrons plus tard que la série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge, et pourtant la série : $\sum \left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \times \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) = \sum \frac{1}{n}$ diverge.

1.5 COMPARAISON SÉRIE-INTÉGRALE

Nous avons déjà pratiqué pas mal les comparaisons série-intégrale, notamment au chapitre « Analyse asymptotique de niveau 2 ». En résumé, il s'agit de comparer la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} f(k)$ à l'intégrale $\displaystyle\int_0^n f(t)\,dt$ pour une fonction MONOTONE $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ donnée.

Définition-théorème (Séries de Riemann) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$, qu'on appelle une *série de Riemann*, converge si et seulement si : $\alpha > 1$.

Démonstration Si $\alpha \leqslant 0$: $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^\alpha} \neq 0$ donc la série $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ diverge — grossièrement. Nous supposerons désormais $\alpha > 0$. La fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ est dans ce cas continue et décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, donc pour tous $k \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [k, k+1]$: $\dfrac{1}{(k+1)^\alpha} \leqslant \dfrac{1}{t^\alpha} \leqslant \dfrac{1}{k^\alpha}$, puis par croissance de l'intégrale : $\dfrac{1}{(k+1)^\alpha} \leqslant \displaystyle\int_k^{k+1} \dfrac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \leqslant \dfrac{1}{k^\alpha}$.

- **Cas où $\alpha \in]0,1[$:** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} \geqslant \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \int_1^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \frac{(n+1)^{1-\alpha}-1}{1-\alpha}$, donc comme $1-\alpha > 0$: $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} = +\infty$ par minoration. La série $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ diverge.
- **Cas où $\alpha = 1$:** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \geqslant \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \int_1^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \ln(n+1)$, donc par minoration : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = +\infty$ — nouvelle preuve que la série harmonique $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge.
- **Cas où $\alpha > 1$:** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^\alpha} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} = \frac{1}{(n+1)^\alpha} \geqslant 0$, donc la suite $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante. Pour montrer qu'elle converge, d'après le théorème de la limite monotone, il nous reste à montrer qu'elle est majorée. Or c'est le cas car pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, sachant que $\alpha - 1 > 0$:
$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k+1)^\alpha} \leqslant 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = 1 + \int_1^n \frac{1}{t^\alpha} = 1 + \frac{1}{\alpha-1} - \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} \leqslant 1 + \frac{1}{\alpha-1}.$$ ■

Exemple La série $\sum \dfrac{1}{n\ln n}$ diverge.

Démonstration La fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{t\ln t}$ est continue et décroissante sur $]1,+\infty[$ comme on le vérifie aisément, donc pour tout $n \geqslant 2$: $\displaystyle\sum_{k=2}^n \frac{1}{k\ln k} = \sum_{k=2}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{k\ln k} \geqslant \sum_{k=2}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln t} = \int_2^n \frac{\mathrm{d}t}{t\ln t} = \ln\ln n - \ln\ln 2$. On conclut par minoration : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=2}^n \frac{1}{k\ln k} = +\infty$.

2 Séries à termes positifs

On étudie à présent les séries dont le terme général est positif — sous-entendu : ou nul. Ce qui est vrai de ces séries serait en fait vrai des séries dont le terme général est négatif ou nul. L'essentiel est donc, dans ce paragraphe, que le terme général soit **de signe constant** — et même **à partir d'un certain rang.**

✖ **Attention !** ✖ Quand vous utilisez les théorèmes de ce paragraphe, vérifiez bien la positivité des suites étudiées !

Théorème (Adaptation aux séries du théorème de la limite monotone) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^\mathbb{N}$ **positive**. La série $\sum u_n$ converge si et seulement si elle est majorée.

Démonstration La suite $\left(\displaystyle\sum_{k=0}^n u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante car pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} u_k - \sum_{k=0}^n u_k = u_{n+1} \geqslant 0$. Elle converge donc en effet si et seulement si elle est majorée d'après le théorème de la limite monotone. ■

Théorème (Comparaison par des inégalités) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On suppose que : $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ — en tout cas à partir d'un certain rang.

(i) Si la série $\sum v_n$ converge, la série $\sum u_n$ converge aussi.

(ii) Si la série $\sum u_n$ diverge, la série $\sum v_n$ diverge aussi.

Démonstration Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k \leqslant \sum_{k=0}^{n} v_k$.

(i) Si la série $\sum v_n$ converge, la série $\sum u_n$ est majorée, donc converge d'après le théorème de la limite monotone pour les séries à termes positifs.

(ii) Si la série $\sum u_n$ diverge : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k = +\infty$ d'après le théorème de la limite monotone pour les séries à termes positifs, donc : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} v_k = +\infty$ par minoration, donc la série $\sum v_n$ diverge. ■

Exemple La série $\displaystyle\sum \frac{1}{n^2(2+\sin n)}$ converge.

Démonstration Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\displaystyle 0 \leqslant \frac{1}{n^2(2+\sin n)} \leqslant \frac{1}{n^2}$, donc comme la série de Riemann $\displaystyle\sum \frac{1}{n^2}$ converge car : $2 > 1$, la série $\displaystyle\sum \frac{1}{n^2(2+\sin n)}$ converge aussi d'après le théorème de comparaison par des inégalités.

Exemple La série $\displaystyle\sum \frac{\mathrm{e}^{\cos n}}{\sqrt{n}}$ diverge.

Démonstration Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\displaystyle 0 \leqslant \frac{1}{\mathrm{e}\sqrt{n}} \leqslant \frac{\mathrm{e}^{\cos n}}{\sqrt{n}}$, donc comme la série $\displaystyle\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge car : $\displaystyle\frac{1}{2} \leqslant 1$, la série $\displaystyle\sum \frac{\mathrm{e}^{\cos n}}{\sqrt{n}}$ diverge aussi d'après le théorème de comparaison par des inégalités.

Théorème (Comparaison par des équivalents) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On suppose que ces suites sont **POSITIVES** — en tout cas à partir d'un certain rang — et que : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$. Les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont alors même nature.

✖ **ATTENTION !** ✖ On a vite fait d'oublier l'hypothèse fondamentale de **POSITIVITÉ** !

Démonstration La relation d'équivalence sur les suites étant symétrique, il nous suffit de montrer que si la série $\sum v_n$ converge, la série $\sum u_n$ converge aussi. Or par hypothèse : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$ donc : $\displaystyle\left|\frac{u_n}{v_n}\right| < 2$ à partir d'un certain rang, ou encore : $0 \leqslant u_n \leqslant 2v_n$. Par comparaison du coup, si la série $\sum v_n$ converge, la série $\sum u_n$ converge aussi. ■

Exemple La série $\displaystyle\sum \frac{1}{n^2\left(n+\sqrt{n}\right)}$ converge.

Démonstration Cette série est à termes positifs et : $\displaystyle\frac{1}{n^2\left(n+\sqrt{n}\right)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^3}$. Comme la série de Riemann $\displaystyle\sum \frac{1}{n^3}$ converge car : $3 > 1$, c'est aussi le cas de la série $\displaystyle\sum \frac{1}{n^2\left(n+\sqrt{n}\right)}$.

Exemple Il existe un réel γ, appelé *constante d'Euler*, pour lequel : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{=} \ln n+\gamma+\mathrm{o}(1)$.

Démonstration Posons pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $\displaystyle a_n=\ln n-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$. Nous souhaitons prouver que la **SUITE** $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge. En vertu du lien suite-série, il nous suffit pour cela de montrer que la **SÉRIE** $\sum(a_{n+1}-a_n)$ converge. Rappelons au passage que : $\displaystyle\ln(1+x)\underset{x\to0}{=}x-\frac{x^2}{2}+\mathrm{o}\big(x^2\big)$. Du coup pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$a_{n+1}-a_n=\left(\ln(n+1)-\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}\right)-\left(\ln n-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)=\ln(n+1)-\ln n-\frac{1}{n+1}=-\frac{1}{n+1}-\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{2(n+1)^2}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{2n^2}.$$

Cet équivalent prouve d'abord que la série $\sum(a_{n+1}-a_n)$ est à termes positifs à partir d'un certain rang — en fait dès le rang 1, mais peu importe — mais aussi, puisque la série de Riemann $\sum\frac{1}{n^2}$ converge car : $2>1$, que la série $\sum(a_{n+1}-a_n)$ converge aussi par comparaison. Conclusion : la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

3 Convergence absolue et séries alternées

3.1 Convergence absolue

Définition (Convergence absolue) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On dit que la série $\sum u_n$ est *absolument convergente* ou qu'elle *converge absolument* si la série $\sum|u_n|$ converge.

Exemple La série $\displaystyle\sum\frac{(-1)^n}{n^2}$ converge absolument car la série de Riemann $\displaystyle\sum\frac{1}{n^2}$ converge car : $2>1$.

Une question se pose naturellement après cette définition — une série absolument convergente est-elle convergente ? — et la réponse est oui.

Théorème (La convergence absolue implique la convergence) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Si la série $\sum u_n$ converge absolument, elle converge « tout court ».

Démonstration

- **Cas où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est réelle :** Comme : $0\leqslant u_n+|u_n|\leqslant 2|u_n|$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ et comme la série $\sum|u_n|$ converge par hypothèse, le théorème de comparaison par des inégalités montre que la série $\sum\big(u_n+|u_n|\big)$ converge. Par différence, la série $\sum u_n$ converge à son tour.

- **Cas général :** Comme $0\leqslant\big|\mathrm{Re}(u_n)\big|\leqslant|u_n|$ et $0\leqslant\big|\mathrm{Im}(u_n)\big|\leqslant|u_n|$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, le théorème de comparaison par des inégalités montre que les séries $\sum\big|\mathrm{Re}(u_n)\big|$ et $\sum\big|\mathrm{Im}(u_n)\big|$ convergent toutes les deux. Les séries $\sum\mathrm{Re}(u_n)$ et $\sum\mathrm{Im}(u_n)$ convergent donc d'après le premier point. Par combinaison linéaire, la série : $\sum u_n=\sum\big(\mathrm{Re}(u_n)+\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(u_n)\big)$ converge à son tour. ■

Exemple La série $\sum \frac{(-1)^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}}{n^2+1}$ converge.

Démonstration Il nous suffit de montrer que la série $\sum \frac{(-1)^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}}{n^2+1}$ converge absolument, i.e. que la série $\sum \frac{1}{n^2+1}$ converge. Or c'est le cas d'après le théorème de comparaison par des inégalités car : $0 \leqslant \frac{1}{n^2+1} \leqslant \frac{1}{n^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et car la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ converge car : $2 > 1$.

✖ **Attention !** ✖ La réciproque du théorème précédent est **FAUSSE** ! Une série peut converger sans converger absolument. C'est le cas de la série $\sum (-1)^n \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor^{-1}$ — on dit qu'elle est *semi-convergente*.

— Comme : $0 \leqslant \frac{2}{n} \leqslant \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor^{-1}$ pour tout $n \geqslant 2$ et comme la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ diverge, la série $\sum \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor^{-1}$ diverge d'après le théorème de comparaison par des inégalités.

— Pour tout $n \geqslant 2$: $\sum_{k=2}^{n} (-1)^k \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor^{-1} = 1-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\ldots = \begin{cases} \frac{2}{n} & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est impair,} \end{cases}$ donc : $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=2}^{n} (-1)^k \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor^{-1} = 0$, donc la série $\sum (-1)^n \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor^{-1}$ converge.

Définition (Semi-convergence) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On dit que la série $\sum u_n$ est *semi-convergente* si elle est convergente mais **PAS** absolument convergente.

3.2 Comparaison par des grands O

Théorème (Comparaison par des grands O) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On suppose que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **POSITIVE**, que : $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n)$ et que la série $\sum v_n$ converge. Dans ces conditions, la série $\sum u_n$ converge absolument — donc converge.

✎ **En pratique** ✎

- Rappelons que si : $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$, alors : $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n)$. Le théorème de comparaison par des grands O est ainsi souvent utilisé avec des petits o sans qu'on prenne la peine de revenir à des grands O.
- En particulier, comme la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge pour tout $\alpha > 1$, il est courant qu'on utilise la forme suivante du théorème de comparaison par des grands O :

Si : $\lim_{n\to+\infty} n^\alpha u_n = 0$ pour un certain $\alpha > 1$, la série $\sum u_n$ converge absolument — donc converge.

Démonstration Par hypothèse, il existe un rang N et un un réel $K > 0$ tels que pour tout $n \geqslant N$: $|u_n| \leqslant K|v_n|$, i.e. : $0 \leqslant |u_n| \leqslant K v_n$, ce qui nous ramène simplement au théorème de comparaison par des inégalités. ■

Exemple La série $\sum \frac{\lfloor \sqrt{n} \rfloor e^{\cos n}}{n^3-n}$ converge.

Démonstration Pour commencer : $\frac{\lfloor \sqrt{n} \rfloor e^{\cos n}}{n^3-n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{e^{\cos n}}{n^{\frac{5}{2}}} \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Or la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ est à termes positifs et converge car : $2 > 1$, donc la série $\sum \frac{\lfloor \sqrt{n} \rfloor e^{\cos n}}{n^3-n}$ converge aussi d'après le théorème de comparaison par des grands O.

3.3 Règle de d'Alembert

Le résultat suivant est hors programme en MPSI, mais vous l'étudierez en deuxième année.

Théorème (Règle de d'Alembert) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On suppose que : $u_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ — en tout cas à partir d'un certain rang.

(i) Si : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| < 1$, la série $\sum u_n$ converge absolument — donc converge.

(ii) Si : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| > 1$, la série $\sum u_n$ diverge grossièrement — donc diverge.

✖ **Attention !** ✖ La règle de d'Alembert ne nous dit RIEN si : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = 1$. Ce cas limite est appelé souvent le *cas douteux* de la règle de d'Alembert.

Démonstration Faisons l'hypothèse que la limite $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|$ existe et notons-la ℓ. La preuve qui suit consiste à COMPARER LA SÉRIE $\sum u_n$ À UNE SÉRIE GÉOMÉTRIQUE — dont nous maîtrisons parfaitement la nature.

(i) **Cas où $\ell < 1$:** Posons : $\varepsilon = \dfrac{1-\ell}{2}$ de manière à avoir : $0 \leqslant \ell < \ell+\varepsilon < 1$. On peut affirmer que : $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| < \ell+\varepsilon$ à partir d'un certain rang N, et donc que pour tout $n \geqslant N$: $\dfrac{|u_{n+1}|}{(\ell+\varepsilon)^{n+1}} \leqslant \dfrac{|u_n|}{(\ell+\varepsilon)^n}$. Décroissante positive, la suite $\left(\dfrac{|u_n|}{(\ell+\varepsilon)^n}\right)_{n\geqslant N}$ est alors bornée, donc : $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\Big((\ell+\varepsilon)^n\Big)$. Or la série géométrique $\sum (\ell+\varepsilon)^n$ converge car : $0 \leqslant \ell+\varepsilon < 1$, donc la série $\sum u_n$ converge absolument d'après le théorème de comparaison par des grands O.

(ii) **Cas où $\ell > 1$:** À partir d'un certain rang : $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| \geqslant 1$, donc la suite $\big(|u_n|\big)_{n\geqslant N}$ est croissante — et strictement positive par ailleurs — donc : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n \neq 0$. La série $\sum u_n$ diverge grossièrement. ■

✎ **En pratique** ✎ Le calcul de : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|$ est plus facile à faire si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie à l'aide de produits et de quotients. On peut notamment espérer des simplifications au numérateur et au dénominateur dans ce cas.

Exemple La série $\sum \dfrac{n^4}{3^n}$ converge d'après la règle de d'Alembert car : $\left|\dfrac{\frac{(n+1)^4}{3^{n+1}}}{\frac{n^4}{3^n}}\right| = \dfrac{1}{3}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^4 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{3}$ avec : $\dfrac{1}{3} < 1$. On n'est pas obligé d'utiliser ici la règle de d'Alembert, on peut aussi remarquer que : $\dfrac{n^4}{3^n} \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ par croissances comparées et conclure à l'aide du théorème de comparaison par des grands O.

Exemple La série $\sum \dfrac{z^n}{n!}$ converge pour tout $z \in \mathbb{C}$.

On définit souvent la fonction exponentielle comme la somme de cette série, de sorte que pour tout $z \in \mathbb{C}$: $\displaystyle \mathrm{e}^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$.
L'intérêt de cette définition est qu'elle nous donne directement une définition sur tout $\mathbb{C}$, et non pas une définition sur $\mathbb{R}$ qu'on devrait compléter ensuite par une exponentielle « $i\theta$ » à base de sinus et cosinus comme nous l'avons fait en début d'année. En réalité, c'est plutôt les fonctions sinus et cosinus qu'on pourrait définir ensuite à partir de l'exponentielle complexe — et même le nombre π !
La difficulté bien sûr, c'est que la définition : $\displaystyle \mathrm{e}^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ ne nous dit pas immédiatement que pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$: $\mathrm{e}^{z+z'} = \mathrm{e}^z \mathrm{e}^{z'}$, ni que la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée elle-même. Vous verrez cela l'an prochain.

Démonstration Soit $z \in \mathbb{C}$. Si : $z = 0$, la série $\sum \frac{z^n}{n!}$ converge. Sinon : $\left| \dfrac{\dfrac{z^{n+1}}{(n+1)!}}{\dfrac{z^n}{n!}} \right| = \dfrac{|z|}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc la série $\sum \frac{z^n}{n!}$ converge absolument d'après la règle de d'Alembert — donc converge.

3.4 Séries alternées

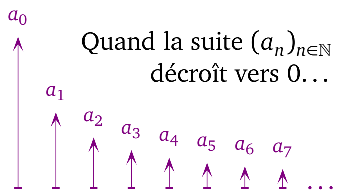
La définition et le résultat suivants sont hors programme en MPSI, mais vous les étudierez en deuxième année.

Définition (Série alternée) On appelle *série alternée* toute série de la forme $\sum (-1)^n a_n$ avec $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ de signe constant.

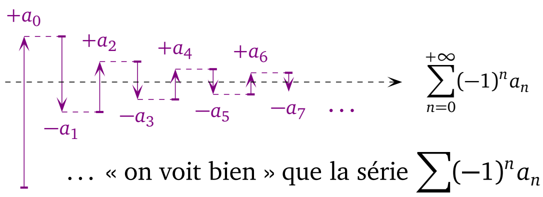
Exemple Les séries $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ et $\sum \frac{(-1)^n e^{-n}}{n^2+1}$ sont alternées.

Théorème (Théorème des séries alternées) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ DÉCROISSANTE DE LIMITE NULLE. La série alternée $\sum (-1)^n a_n$ converge.

Explication



Quand la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroît vers 0...



... « on voit bien » que la série $\sum (-1)^n a_n$ converge !

Démonstration Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k$. Nous allons montrer que les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes, cela montrera qu'elles sont convergentes de même limite d'après le théorème des suites adjacentes, et donc que la SUITE $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge d'après le théorème des suites extraites. Comme voulu, on aura prouvé que la SÉRIE $\sum (-1)^n a_n$ converge.

Or par hypothèse : $S_{2n+1} - S_{2n} = (-1)^{2n+1} a_{2n+1} = -a_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Ensuite, la suite $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante car pour tout $n \in \mathbb{N}$: $S_{2(n+1)} - S_{2n} = (-1)^{2n+1} a_{2n+1} + (-1)^{2n+2} a_{2n+2} = a_{2n+2} - a_{2n+1} \leqslant 0$, et la suite $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante pour une raison analogue. ■

Définition-théorème (Séries de Riemann alternées) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La série $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$, qu'on appelle une *série de Riemann alternée*, converge si et seulement si : $\alpha > 0$.

Explication Pour $\alpha \in]0,1]$, la série $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ est semi-convergente — elle converge, mais pas absolument.

Démonstration Si : $\alpha \leqslant 0$, la série $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ diverge — grossièrement. Si : $\alpha > 0$, la suite $\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante de limite nulle, donc la série $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge d'après le théorème des séries alternées. ■

En pratique Il ne faut pas toujours vouloir appliquer le théorème des séries alternées directement, un mélange de techniques est souvent préférable. Étudiez attentivement les deux exemples qui suivent. Les développements limités permettent de casser une suite en morceaux pour lesquels il est facile de savoir si les séries associées convergent ou divergent.

Exemple La série $\sum \frac{(-1)^n}{n^{\frac{3}{4}} + n^{\frac{1}{4}} \sin(\ln n)}$ converge.

Démonstration La monotonie de la suite $\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{4}} + n^{\frac{1}{4}} \sin(\ln n)}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne semble pas simple à étudier, le théorème des séries alternées ne nous sera donc pas utile directement. Petit rappel : $\frac{1}{1+u} \underset{u\to 0}{=} 1 - u + \mathrm{o}(u) \underset{u\to 0}{=} 1 + \mathrm{O}(u)$.

$$\frac{(-1)^n}{n^{\frac{3}{4}} + n^{\frac{1}{4}} \sin(\ln n)} = \frac{(-1)^n}{n^{\frac{3}{4}}} \times \frac{1}{1 + \frac{\sin(\ln n)}{n^{\frac{1}{2}}}} \underset{n\to+\infty}{=} \frac{(-1)^n}{n^{\frac{3}{4}}} \left(1 + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{(-1)^n}{n^{\frac{3}{4}}} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{\frac{5}{4}}}\right).$$

Or la série de Riemann alternée $\sum \frac{(-1)^n}{n^{\frac{3}{4}}}$ converge car : $\frac{3}{4} > 0$, et la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^{\frac{5}{4}}}$ aussi car : $\frac{5}{4} > 1$, donc par somme, grâce au théorème de comparaison par des grands O, la série $\sum \frac{(-1)^n}{n^{\frac{3}{4}} + n^{\frac{1}{4}} \sin(\ln n)}$ converge absolument — donc converge.

Exemple La série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$ diverge.

Démonstration La monotonie de la suite $\left(\frac{1}{\sqrt{n} + (-1)^n}\right)_{n\geqslant 2}$ ne semble pas simple à étudier, le théorème des séries alternées ne nous sera donc pas utile directement. Rappel : $\frac{1}{1+u} \underset{u\to 0}{=} 1 - u + u^2 + \mathrm{o}\big(u^2\big) \underset{u\to 0}{=} 1 - u + \mathrm{O}\big(u^2\big)$.

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \times \frac{1}{1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} \underset{n\to+\infty}{=} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right).$$

Or la série de Riemann alternée $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge car : $\frac{1}{2} > 0$ et la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ aussi car : $\frac{3}{2} > 1$, tandis que la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ diverge, donc par somme, grâce au théorème de comparaison par des grands O, la série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$ diverge.

✖ **Attention !** ✖ Le théorème de comparaison par des équivalents requiert la **positivité** des suites en présence mais nous n'avons pas donné de contre-exemple jusqu'ici. Tout simplement, la série de Riemann alternée $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge car : $\frac{1}{2} > 0$, et par ailleurs : $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, pourtant la série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$ diverge d'après l'exemple précédent.

4 Récapitulatif des techniques de convergence

✎ En pratique ✎ Le schéma ci-contre rassemble et ordonne les résultats de convergence de ce chapitre. Il mérite un sérieux coup d'œil même si, comme souvent en mathématiques, ces résultats **ne permettent pas de conclure dans tous les cas.**