Sommes, produits, coefficients binomiaux

1 Sommes

- Pour tous $z_m, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ avec : $m \leqslant n$, la somme $z_m + z_{m+1} + \ldots + z_n$ sera notée $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} z_k$. Par exemple :

  Par exemple : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \underbrace{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}}_{\text{Forme } \textit{in extenso} \text{ de la somme}},$ $\qquad \displaystyle\sum_{p=3}^{2n} \sqrt{p} = \sqrt{3} + \sqrt{4} + \sqrt{5} + \ldots + \sqrt{2n-1} + \sqrt{2n},$

  et pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$: $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} \alpha = \underbrace{\alpha}_{k=m} + \underbrace{\alpha}_{k=m+1} + \ldots + \underbrace{\alpha}_{k=n} = \underbrace{\alpha + \ldots + \alpha}_{n-m+1 \text{ fois}} = (n - m \boxed{+1})\,\alpha.$

- Plus généralement encore, pour toute famille $(z_i)_{i \in I}$ de nombres complexes indexée par un ensemble FINI I, la somme de tous les nombres z_i, i décrivant I, sera notée $\displaystyle\sum_{i \in I} z_i$. Par exemple, si $I = \{1, 4, 7, 18\}$: $\displaystyle\sum_{i \in I} z_i = z_1 + z_4 + z_7 + z_{18}$.

- Il arrive aussi souvent que l'ensemble I soit un ensemble de couples. Par exemple, si : $I = [\![0, m]\!] \times [\![1, n]\!] = \{(i,j)\}_{0 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant n}$, la somme $\displaystyle\sum_{i \in I} z_i$ sera plutôt notée $\displaystyle\sum_{\substack{0 \leqslant i \leqslant m \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} z_{ij}$.

  D'apparence plus compliquée, cette somme n'est jamais que la somme des termes du tableau à deux entrées ci-contre.

$i \backslash j$	1	2	$\cdots$	n
0	z_{01}	z_{02}	$\cdots$	z_{0n}
1	z_{11}	z_{12}	$\cdots$	z_{1n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
m	z_{m1}	z_{m2}	$\cdots$	z_{mn}

  Que se passe-t-il par exemple quand on multiplie deux sommes $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} a_i$ et $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} b_j$? On obtient en développant une somme de mn termes qu'on peut écrire ensuite à l'aide d'un seul $\sum$.

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \times \sum_{j=1}^{n} b_j = (a_1 + \ldots + a_m)(b_1 + \ldots + b_n) = a_1 b_1 + a_1 b_2 + \ldots + a_m b_{n-1} + a_m b_n = \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} a_i b_j.$$

Théorème (Produit de deux $\sum$) Pour tous $a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{C}$: $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} a_i \times \sum_{j=1}^{n} b_j = \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} a_i b_j.$

- À présent, quelles lettres peut-on choisir quand on veut écrire une somme sous la forme d'un $\sum$? C'est simple, on l'écrit in extenso, on regarde quelles variables apparaissent dans cette écriture in extenso et on choisit pour indice du symbole $\sum$ N'IMPORTE QUELLE AUTRE LETTRE. Par exemple, pour : $1 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 100^2$, on peut choisir n'importe quelle lettre : $\displaystyle\sum_{n=1}^{100} n^2 = \sum_{k=1}^{100} k^2 = \sum_{i=1}^{100} i^2 = \sum_{p=1}^{100} p^2 \ldots$ tandis que pour : $1 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$, la lettre « n » doit être écartée : $\cancel{\displaystyle\sum_{n=1}^{n} n^2} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \sum_{i=1}^{n} i^2 = \sum_{p=1}^{n} p^2 \ldots$

- Et quand plusieurs sommes apparaissent dans un même calcul, doit-on leur donner des indices différents ? Que penser par exemple des écritures suivantes : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{j=1}^{n} b_j$? Les deux sont convenables et racontent en dépit des apparences la même histoire in extenso :

$$(a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \ldots + (a_n + b_n) = (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) + (b_1 + b_2 + \ldots + b_n).$$

L'indice d'une somme a en réalité une zone d'influence très restreinte comme l'indique la figure ci-contre. Un indice « mort » peut être recyclé à volonté. La seule chose qu'il faut éviter, c'est la schizophrénie, le fait qu'une même lettre possède plusieurs significations au même instant.

…bla bla bla $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} z_k$ bla bla bla…

Naissance de l'indice k

Mort de k — courte vie que la vie d'un indice !

- Une même somme peut toujours être écrite de différentes manières indépendamment du choix de la lettre-indice, et le passage d'une écriture à une autre est appelé *changement d'indice*. Deux exemples vaudront ici mieux qu'un long discours.

$$\sum_{k=1}^{n} z_k = z_1 + z_2 + \ldots + z_n = \sum_{p=0}^{n-1} z_{p+1}$$

Changement d'indice $k = p+1$

k	1	2	3	$\cdots$	$n-1$	n
p	0	1	2	$\cdots$	$n-2$	$n-1$

$$\sum_{k=0}^{n} z_k = z_0 + z_1 + \ldots + z_n = \sum_{p=0}^{n} z_{n-p}$$

Changement d'indice $k = n-p$

k	0	1	2	$\cdots$	$n-1$	n
p	n	$n-1$	$n-2$	$\cdots$	1	0

Nous verrons parfois des changements d'indice plus compliqués. Ce qu'il faut toujours garantir, c'est qu'on n'a ni supprimé ni ajouté aucun terme à la somme initiale — on a juste changé le nom de l'indice.

- Il arrive souvent qu'on tombe au cours d'un calcul sur une somme de la forme : $\displaystyle\sum_{k=\cdots}^{\cdots} (z_{k+1} - z_k)$, dite *somme télescopique*. Ces sommes se calculent merveilleusement bien.

$$\sum_{k=m}^{n} (z_{k+1} - z_k) = (z_{n+1} \overbrace{-z_n) + (z_n}^{\text{simplification}} \overbrace{-z_{n-1}) + (z_{n-1}}^{\text{simplification}} - z_{n-2}) + \ldots + (z_{m+2} \overbrace{-z_{m+1}) + (z_{m+1}}^{\text{simplification}} - z_m) = z_{n+1} - z_m.$$

Par exemple : $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{p}\right) = \sum_{p=1}^{n} \Big(\ln(p+1) - \ln p\Big) = \ln(n+1).$ Autre exemple, la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$ vaut à la fois : $\displaystyle 1 - \frac{1}{n+1}$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$, donc : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}.$

Théorème (Simplification télescopique) Pour tous $z_m, \ldots, z_{n+1} \in \mathbb{C}$ avec $m \leqslant n$: $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} (z_{k+1} - z_k) = z_{n+1} - z_m.$

- Retour à présent sur les *sommes doubles*. La somme des termes d'un tableau à deux entrées peut être calculée en sommant par paquets d'abord sur les lignes, ou bien d'abord sur les colonnes.

Somme des termes d'un tableau carré : $\displaystyle\sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} z_{ij}$, aussi notée $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} z_{ij}$

$i \backslash j$	1	2	$\cdots$	n	
1	z_{11}	z_{12}	$\cdots$	z_{1n}	$\longrightarrow \displaystyle\sum_{j=1}^{n} z_{1j}$
2	z_{21}	z_{22}	$\cdots$	z_{2n}	$\longrightarrow \displaystyle\sum_{j=1}^{n} z_{2j}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
n	z_{n1}	z_{n2}	$\cdots$	z_{nn}	$\longrightarrow \displaystyle\sum_{j=1}^{n} z_{nj}$
	$\downarrow \displaystyle\sum_{i=1}^{n} z_{i1}$	$\downarrow \displaystyle\sum_{i=1}^{n} z_{i2}$	$\cdots$	$\downarrow \displaystyle\sum_{i=1}^{n} z_{in}$	

$$\left.\sum_{j=1}^{n} z_{1j}, \ldots, \sum_{j=1}^{n} z_{nj}\right\} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} z_{ij} \qquad \left.\sum_{i=1}^{n} z_{i1}, \ldots, \sum_{i=1}^{n} z_{in}\right\} \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} z_{ij}$$

Somme des termes d'un tableau triangulaire avec diagonale : $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} z_{ij}$

$i \backslash j$	1	2	$\cdots$	n	
1	z_{11}	z_{12}	$\cdots$	z_{1n}	$\longrightarrow \displaystyle\sum_{j=1}^{n} z_{1j}$
2		z_{22}	$\cdots$	z_{2n}	$\longrightarrow \displaystyle\sum_{j=2}^{n} z_{2j}$
$\vdots$			$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
n				z_{nn}	$\longrightarrow \displaystyle\sum_{j=n}^{n} z_{nj}$
	$\downarrow \displaystyle\sum_{i=1}^{1} z_{i1}$	$\downarrow \displaystyle\sum_{i=1}^{2} z_{i2}$	$\cdots$	$\downarrow \displaystyle\sum_{i=1}^{n} z_{in}$	

$$\left.\sum_{j=1}^{n} z_{1j}, \ldots, \sum_{j=n}^{n} z_{nj}\right\} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} z_{ij} \qquad \left.\sum_{i=1}^{1} z_{i1}, \ldots, \sum_{i=1}^{n} z_{in}\right\} \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} z_{ij}$$

On traite de même le cas des sommes de la forme $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} z_{ij}$ — tableaux triangulaires sans diagonale.

Théorème (Permutation des $\sum$) Pour toute famille $(z_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ de nombres complexes :

$$\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} z_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} z_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} z_{ij}, \qquad \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} z_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} z_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} z_{ij}, \qquad \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} z_{ij} = \sum_{j=2}^{n}\sum_{i=1}^{j-1} z_{ij} = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} z_{ij}.$$

✎ **En pratique** ✎ Nous aurons souvent à inverser des sommes cette année. Retenez bien l'idée générale suivante :

> Quand on ne sait pas quoi faire de deux sommes emboîtées « $\sum_i \sum_j z_{ij}$ », on peut toujours essayer de les permuter !

- Les sommes de la forme $\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} z_{ij}$ sont plus courantes qu'il n'y paraît, on les rencontre par exemple naturellement quand on calcule le carré d'une somme. Le calcul qui suit repose essentiellement sur l'idée que le tableau ci-contre est symétrique par rapport à sa diagonale.

$i \backslash j$	1	2	$\cdots$	n
1	z_1^2	$z_1 z_2$	$\cdots$	$z_1 z_n$
2	$z_2 z_1$	z_2^2	$\cdots$	$z_2 z_n$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
n	$z_n z_1$	$z_n z_2$	$\cdots$	z_n^2

$$\left(\sum_{k=1}^n z_k\right)^2 = \sum_{i=1}^n z_i \times \sum_{j=1}^n z_j = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} z_i z_j = \overbrace{\sum_{\substack{1 \leqslant i,j \leqslant n \\ i<j}} z_i z_j}^{\text{Termes au-dessus de la diagonale}} + \overbrace{\sum_{\substack{1 \leqslant i,j \leqslant n \\ i=j}} z_i z_j}^{\text{Termes diagonaux}} + \overbrace{\sum_{\substack{1 \leqslant i,j \leqslant n \\ i>j}} z_i z_j}^{\text{Termes sous la diagonale}}$$

$$= \sum_{i=1}^n z_i^2 + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} z_i z_j.$$

Par exemple : $(a+b)^2 = \left(a^2+b^2\right) + 2ab$ et $(a+b+c)^2 = \left(a^2+b^2+c^2\right) + 2(ab+ac+bc)$.

Théorème (Carré d'un $\sum$) Pour tous $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$:

$$\left(\sum_{k=1}^n z_k\right)^2 = \sum_{k=1}^n z_k^2 + 2 \underbrace{\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} z_i z_j}_{\text{Doubles produits}}.$$

La fin du paragraphe recense quelques formules particulières qu'il est indispensable de connaître PAR CŒUR.

Théorème (Calcul de $\sum_{k=0}^n k$ et $\sum_{k=0}^n k^2$) Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Démonstration

- Posons : $S = \sum_{k=0}^n k$ et calculons de deux manières la somme de tous les termes du tableau suivant :

0	1	2	$\cdots$	$n-1$	n	$\longrightarrow S$
n	$n-1$	$n-2$	$\cdots$	1	0	$\longrightarrow S$
$\downarrow n$	$\downarrow n$	$\downarrow n$	$\cdots$	$\downarrow n$	$\downarrow n$	$\}\ n(n+1)$

$\left.\begin{matrix} S \\ S \end{matrix}\right\} 2S$

Conclusion : $2S = n(n+1)$,

i.e. : $S = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

- **Initialisation :** Évidente. **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que : $\sum_{k=0}^n k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Alors : $$\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \sum_{k=0}^n k^2 + \underbrace{(n+1)^2}_{k=n+1} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{n+1}{6}\Big(n(2n+1) + 6(n+1)\Big)$$
$$= \frac{n+1}{6}\left(2n^2+7n+6\right) = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$
C'est bien le résultat voulu. ■

Théorème (Sommes géométriques) Pour tous $m, n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{C}$ tels que $m \leqslant n$:

$$\sum_{k=m}^n x^k = \begin{cases} \overset{\text{Premier terme}}{x^m} \times \dfrac{x^{\overbrace{n-m+1}^{\text{Nombre de termes}}} - 1}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ n-m+1 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

Démonstration Posons : $S=\sum_{k=m}^{n} x^k$. Si $x=1$: $S=\sum_{k=m}^{n} 1=n-m+1$. Supposons donc $x\neq 1$.
Alors : $S=x^m+x^{m+1}+\ldots+x^n$ et $xS=x^{m+1}+x^{m+2}+\ldots+x^{n+1}$, donc par différence :

$$(x-1)S=x^{n+1}-x^m, \qquad \text{d'où enfin : } S=\frac{x^{n+1}-x^m}{x-1}=x^m\times\frac{x^{n-m+1}-1}{x-1}.$$

■

Théorème **(Formule « a^n-b^n »)** Pour tous $n\in\mathbb{N}^*$ et $a,b\in\mathbb{C}$:

$$a^n-b^n=(a-b)\sum_{k=0}^{n-1}a^kb^{n-k-1}=(a-b)\left(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\ldots+ab^{n-2}+b^{n-1}\right).$$

✌ **Explication** ✌ Dans la somme, les puissances de a diminuent à mesure que les puissances de b augmentent. Pour $n=2$, le résultat est connu : $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$, pour $n=3$: $a^3-b^3=(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)$, et enfin pour $n=4$: $a^4-b^4=(a-b)\left(a^3+a^2b+ab^2+b^3\right)$.

Démonstration Posons : $S=\sum_{k=0}^{n-1}a^kb^{n-k-1}=a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\ldots+ab^{n-2}+b^{n-1}$. Alors :

$$aS=a^n+a^{n-1}b+a^{n-2}b^2+\ldots+a^2b^{n-2}+ab^{n-1} \qquad \text{et} \qquad bS=a^{n-1}b+a^{n-2}b^2+a^{n-3}b^3+\ldots+ab^{n-1}+b^n,$$

donc par différence, comme voulu : $(a-b)S=a^n-b^n$. ■

2 Produits

Nous passerons plus vite sur les produits que sur les sommes — c'est pareil ! Pour toute famille $(z_i)_{i\in I}$ de nombres complexes indexée par un ensemble FINI I, le produit de tous les nombres z_i, i décrivant I, sera noté $\prod_{i\in I} z_i$.

Exemple Pour tout $\alpha\in\mathbb{C}$: $\prod_{k=m}^{n}\alpha = \overbrace{\alpha\times\alpha\times\ldots\times\alpha}^{n-m+1 \text{ fois}} = \alpha^{n-m+1}$.

Définition **(Factorielle)**

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on appelle *factorielle n* ou *n factorielle* et on note $n!$ l'entier : $n!=\prod_{k=1}^{n}k=1\times2\times3\times\ldots\times n$.

Par convention : $0!=1$. **Relation de récurrence :** Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $n!=n\times(n-1)!$.

Exemple $n^n = \prod_{k=1}^{n} n = \overbrace{n\times n\times\ldots\times n}^{n \text{ fois}}.$ Ne pas confondre avec : $n! = \prod_{k=1}^{n}k = 1\times2\times3\times\ldots\times n$.

Théorème **(Simplification télescopique)** Pour tous $z_m,\ldots,z_{n+1}\in\mathbb{C}^*$ avec $m\leqslant n$: $\prod_{k=m}^{n}\frac{z_{k+1}}{z_k}=\frac{z_{n+1}}{z_m}$.

Théorème **(Permutation des $\prod$)** Pour toute famille $(z_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ de nombres complexes :

$$\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n} z_{ij}=\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{n}z_{ij}=\prod_{j=1}^{n}\prod_{i=1}^{n}z_{ij}, \qquad \prod_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} z_{ij}=\prod_{j=1}^{n}\prod_{i=1}^{j}z_{ij}=\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=i}^{n}z_{ij}, \qquad \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} z_{ij}=\prod_{j=2}^{n}\prod_{i=1}^{j-1}z_{ij}=\prod_{i=1}^{n-1}\prod_{j=i+1}^{n}z_{ij}.$$

Exemple $$\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n}(ij^2)=\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{n}(ij^2)=\prod_{i=1}^{n}\left(i^n\left(\prod_{j=1}^{n}j\right)^2\right)=\prod_{i=1}^{n}\left(i^n n!^2\right)=\left(\prod_{i=1}^{n}i\right)^n(n!)^{2n}=(n!)^n\times(n!)^{2n}=(n!)^{3n}.$$

$$1^2 i\times 2^2 i\times\ldots\times n^2 i = i^n\times\left(1\times 2\times\ldots\times n\right)^2$$

$$1^n n!^2\times 2^n n!^2\times\ldots\times n^n n!^2 = \left(1\times 2\times\ldots\times n\right)^n\times(n!)^{2n}$$

3 Coefficients binomiaux et formule du binôme

Vous avez déjà rencontré les coefficients binomiaux en Première dans un contexte probabiliste où l'on vous demandait de compter le nombre de chemins d'un certain graphe. Totalement différente et bien plus féconde, la présentation qui suit risque de vous surprendre. Nous relierons ces deux présentations un peu plus loin.

Définition (Coefficients binomiaux) Pour tous $n\in\mathbb{N}$ et $k\in\mathbb{Z}$, on appelle (*coefficient binomial*) *k parmi n*, noté $\binom{n}{k}$, le nombre : $$\binom{n}{k}=\begin{cases}\dfrac{n!}{k!(n-k)!} & \text{si : } 0\leqslant k\leqslant n\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

Autre expression pour $0\leqslant k\leqslant n$, après simplification des factorielles :
$$\binom{n}{k}=\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!}.$$

En particulier, pour $n\geqslant 0$: $\binom{n}{0}=1$, pour $n\geqslant 1$: $\binom{n}{1}=n$ et pour $n\geqslant 2$: $\binom{n}{2}=\dfrac{n(n-1)}{2}$.

Triangle de Pascal

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	$\cdots$
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
$\vdots$	$\vdots$						$\ddots$

Théorème (Propriétés des coefficients binomiaux)

(i) **Symétrie :** Pour tout $n\in\mathbb{N}$ et $k\in\mathbb{Z}$: $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$.

(ii) **Formule du capitaine :** Pour tous $n,k\in\mathbb{N}^*$: $\binom{n}{k}=\dfrac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$.

(iii) **Formule de Pascal :** Pour tous $n\in\mathbb{N}$ et $k\in\mathbb{Z}$: $\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}=\binom{n+1}{k}$.

(iv) **Intégralité :** Pour tous $n\in\mathbb{N}$ et $k\in\mathbb{Z}$, $\binom{n}{k}$ est un entier naturel.

✌ **Explication** ✌

Symétrie

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	$\cdots$
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
$\vdots$	$\vdots$						$\ddots$

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	$\cdots$
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
$\vdots$	$\vdots$						$\ddots$

Formule de Pascal

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$$

Quant à l'appellation « formule du capitaine », elle n'est pas universelle et ne sera justifiée qu'en milieu-fin d'année.

Démonstration

(i) Si $k<0$: $n-k>n$ donc : $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}=0$ — raisonnement analogue si $k>n$.

Si $0\leqslant k\leqslant n$: $0\leqslant n-k\leqslant n$ donc : $\binom{n}{n-k}=\dfrac{n!}{(n-k)!\big(n-(n-k)\big)!}=\dfrac{n!}{(n-k)!k!}=\binom{n}{k}$.

(ii) Si $k\leqslant n$: $\binom{n}{k}=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}=\dfrac{n\times(n-1)!}{k\times(k-1)!(n-k)!}=\dfrac{n}{k}\times\dfrac{(n-1)!}{(k-1)!\big((n-1)-(k-1)\big)!}=\dfrac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$.

(iii) Si $k<0$ ou si $k>n+1$: $\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}=0+0=0=\binom{n+1}{k}$.

Si $k=0$ ou si $k=n+1$: $\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}=1=\binom{n+1}{k}$.

Enfin, si $1\leqslant k\leqslant n$:

$$\binom{n+1}{k}-\binom{n}{k-1}\overset{\text{(ii)}}{=}\frac{n+1}{k}\binom{n}{k-1}-\binom{n}{k-1}=\frac{n-k+1}{k}\binom{n}{k-1}$$
$$=\frac{n-k+1}{k}\times\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}=\frac{n!}{k!(n-k)!}=\binom{n}{k}.$$

(iv) Nous allons montrer par récurrence la proposition : $\forall k\in\mathbb{Z},\ \binom{n}{k}\in\mathbb{N}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Initialisation : Pour tout $k\in\mathbb{Z}$: $\binom{0}{k}=\begin{cases}1 & \text{si } k=0\\ 0 & \text{sinon,}\end{cases}$ donc : $\binom{0}{k}\in\mathbb{N}$.

Hérédité : Soit $n\in\mathbb{N}$. On suppose que : $\forall k\in\mathbb{Z},\ \binom{n}{k}\in\mathbb{N}$. Aussitôt pour tout $k\in\mathbb{Z}$: $\binom{n}{k-1}\in\mathbb{N}$ et $\binom{n}{k}\in\mathbb{N}$, donc par somme d'après la formule de Pascal : $\binom{n+1}{k}\in\mathbb{N}$. ■

Théorème (Formule du binôme) Pour tous $n\in\mathbb{N}$ et $a,b\in\mathbb{C}$: $(a+b)^n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k}$.

✌ **Explication** ✌ Pour $n=2$: $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$. Pour $n=3$: $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$.

Pour $n=4$: $(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$. Pour $n=5$: $(a+b)^5=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$.

✖ **ATTENTION !** ✖ Gare à ceux qui confondent la formule du binôme avec la formule « a^n-b^n » !

Démonstration On fixe $a,b\in\mathbb{C}$ et on raisonne par récurrence sur n.

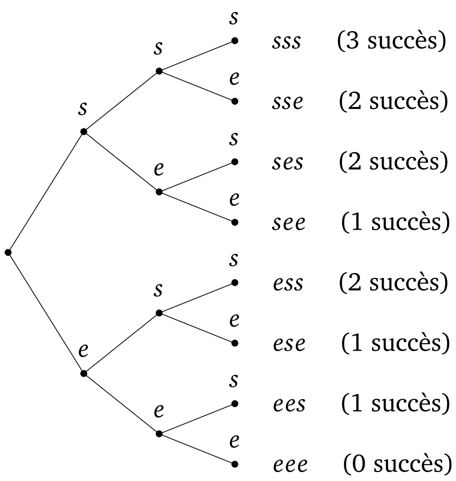
Initialisation : $(a+b)^0=1=\binom{0}{0}a^0b^{0-0}=\displaystyle\sum_{k=0}^{0}\binom{0}{k}a^kb^{0-k}$.

Hérédité : Soit $n\in\mathbb{N}$. On suppose que : $(a+b)^n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k}$.

$$(a+b)^{n+1}=(a+b)(a+b)^n=(a+b)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k}=a\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}a^lb^{n-l}+b\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k}$$
$$=\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}a^{l+1}b^{n-l}+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k+1}=\underbrace{a^{n+1}}_{l=n}+\sum_{l=0}^{n-1}\binom{n}{l}a^{l+1}b^{n-l}+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k+1}+\underbrace{b^{n+1}}_{k=0}$$
$$=a^{n+1}+\underbrace{\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}a^kb^{n-k+1}}_{\text{Changement d'indice } l=k-1}+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k+1}+b^{n+1}=a^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}\underbrace{\left(\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}\right)}_{\text{Formule de Pascal}}a^kb^{(n+1)-k}+b^{n+1}$$
$$=a^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}a^kb^{(n+1)-k}+b^{n+1}=\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^kb^{(n+1)-k}.$$ ■

Exemple Pour tout $n\in\mathbb{N}$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^k1^{n-k}=(1+1)^n=2^n$.

✌ **Explication** ✌ Nous pouvons enfin comprendre pourquoi la présentation précédente des coefficients binomiaux définit les mêmes coefficients binomiaux que la présentation qu'on vous en a proposée en Première. Par exemple, réalisons trois fois ($n=3$) de manière indépendante une même expérience aléatoire à deux issues succès (s) et échec (e).



En Première, pour tout $k \in [\![0,3]\!]$, on vous a défini $\binom{3}{k}$ comme le nombre de chemins qui comptabilisent exactement k succès sur le graphe ci-contre. Il en découle que : $\binom{3}{3} = 1$ (chemin sss), $\binom{3}{2} = 3$ (chemins ess, ses et sse), $\binom{3}{1} = 3$ (chemins ees, ese et see) et $\binom{3}{0} = 1$ (chemin eee).

À présent, quel rapport avec la définition : $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$? Développons simplement $(s+e)^3$:

$$(s+e)^3 = (s+e)(s+e)(s+e) = (s+e)\Big(ss+se+es+ee\Big) = \underbrace{sss+sse+ses+see+ess+ese+ees+eee}_{\text{Exactement les chemins du graphe précédent !}}$$

$$= \underbrace{sss}_{\text{3 succès}} + \underbrace{sse+ses+ess}_{\text{2 succès}} + \underbrace{see+ese+ees}_{\text{1 succès}} + \underbrace{eee.}_{\text{0 succès}}$$

Or la formule du binôme dit ceci : $(s+e)^3 = \binom{3}{3} s^3 + \binom{3}{2} s^2 e + \binom{3}{1} se^2 + \binom{3}{0} e^3$. Comme voulu, les points de vue « nombre de chemins avec exactement k succès » et « $\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ » définissent bien le même entier $\binom{n}{k}$ pour tout $k \in [\![0,n]\!]$.