STRUCTURE D'ESPACE VECTORIEL

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ est l'un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Tous les résultats présentés demeurent cela dit vrais sur un corps $\mathbb{K}$ quelconque.

La structure d'*espace vectoriel* est un nouvel exemple fondamental de structure algébrique — après les groupes et les anneaux. Cependant, alors que vous n'aviez pratiquement rien à savoir sur les groupes et les anneaux, vous en saurez bientôt beaucoup sur les espaces vectoriels, dont la théorie est appelée l'*algèbre linéaire*. C'est parti !

1 ESPACES VECTORIELS ET COMBINAISONS LINÉAIRES

1.1 ESPACES VECTORIELS

Définition (Espace vectoriel) On appelle $\mathbb{K}$-*espace vectoriel* ou *espace vectoriel sur* $\mathbb{K}$ tout triplet $(E,+,\cdot)$ vérifiant les propriétés suivantes :

— $(E,+)$ est un groupe commutatif dont l'élément neutre est noté 0_E ou 0 et appelé le *vecteur nul de* E,

— $\cdot$ est une application de $\mathbb{K}\times E$ dans E. À partir d'un élément λ de $\mathbb{K}$ et d'un élément x de E, $\cdot$ fournit un élément de E noté $\lambda\cdot x$ ou plus simplement λx. Par définition, cette application $\cdot$ doit satisfaire les propriétés suivantes :

$\longrightarrow$ pour tout $x\in E$: $\quad 1\cdot x = x$,

$\longrightarrow$ pour tous $x,y\in E$ et $\lambda\in\mathbb{K}$: $\quad \lambda\cdot(x+y)=(\lambda\cdot x)+(\lambda\cdot y)$,

$\longrightarrow$ pour tous $x\in E$ et $\lambda,\mu\in\mathbb{K}$: $\quad (\lambda+\mu)\cdot x=(\lambda\cdot x)+(\mu\cdot x)$,

$\longrightarrow$ pour tous $x\in E$ et $\lambda,\mu\in\mathbb{K}$: $\quad \lambda\cdot(\mu\cdot x)=(\lambda\mu)\cdot x$.

Les éléments d'un espace vectoriel E sont appelés des *vecteurs*. L'application $\cdot$, qui n'est pas une loi interne sur E puisqu'à travers elle des éléments de $\mathbb{K}$ agissent sur des vecteurs, est qualifiée de *loi externe*. En tant qu'ils agissent via $\cdot$ sur les vecteurs de E, les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés des *scalaires*. La loi $+$ est appelée *addition* et la loi $\cdot$ *multiplication par un scalaire*. Le corps $\mathbb{K}$ est qualifié de *corps de base* pour E.

Les règles de calcul de cette définition sont exactement celles auxquelles les vecteurs du plan et de l'espace obéissent. Par analogie, le mot *vecteur* sera désormais employé pour désigner de nombreux objets mathématiques que nous n'avions pas l'habitude d'appeler des vecteurs jusqu'ici, mais que nous gagnerons à visualiser comme tels. Il est très important de se représenter les espaces vectoriels, même les plus abstraits, comme des mondes géométriques semblables au plan ou à l'espace. La pertinence d'une telle représentation sera plus claire quand nous aurons un peu avancé dans la théorie.

La tradition veut qu'on ne mette pas de flèches sur les vecteurs en algèbre linéaire. On continue cependant d'en mettre quand on fait de la géométrie classique dans le plan et dans l'espace.

Théorème (Règles de calcul dans un espace vectoriel) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

(i) Pour tous $x\in E$ et $\lambda\in\mathbb{K}$: $\quad \lambda\cdot x=0_E \iff \lambda=0 \text{ ou } x=0_E$.

(ii) Pour tout $x\in E$: $\quad -x=(-1)\cdot x$, où $-x$ est l'opposé de x dans E et -1 l'opposé de 1 dans $\mathbb{K}$.

Démonstration

(i) Trois étapes. Soient $x\in E$ et $\lambda\in\mathbb{K}$.

— Comme : $\quad 0\cdot x=(0+0)\cdot x=0\cdot x+0\cdot x$, alors après simplification dans le groupe $(E,+)$: $\quad 0\cdot x=0_E$.

— Comme : $\quad \lambda\cdot 0_E=\lambda\cdot(0_E+0_E)=\lambda\cdot 0_E+\lambda\cdot 0_E$, alors après simplification : $\quad \lambda\cdot 0_E=0_E$.

— Si $\lambda\cdot x=0_E$ avec $\lambda\neq 0$: $\quad x=1\cdot x=\left(\frac{1}{\lambda}\times\lambda\right)\cdot x=\frac{1}{\lambda}\cdot(\lambda\cdot x)=\frac{1}{\lambda}\cdot 0_E=0_E$.

(ii) Pour tout $x\in E$: $\quad x+(-1)\cdot x=1\cdot x+(-1)\cdot x=(1-1)\cdot x=0\cdot x=0_E$, donc $-x=(-1)\cdot x$.

Exemple $(\mathbb{K},+,\times)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Démonstration Cela résulte directement de la définition des corps. Il suffit de considérer la multiplication $\times$ sur $\mathbb{K}$ comme une loi de composition EXTERNE. On obtient alors toutes les propriétés voulues sans aucun travail.

Théorème (Espace vectoriel produit) Soient $E_1,\dots,E_n$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Le produit $E_1\times\dots\times E_n$ est un groupe commutatif pour la loi $+$ définie pour tous $(x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n)\in E_1\times\dots\times E_n$ par :
$$(x_1,\dots,x_n)+(y_1,\dots,y_n)=(x_1+y_1,\dots,x_n+y_n).$$
On le munit d'une loi externe $\cdot$ en posant pour tous $\lambda\in\mathbb{K}$ et $(x_1,\dots,x_n)\in E_1\times\dots\times E_n$:
$$\lambda\cdot(x_1,\dots,x_n)=\big(\lambda\cdot x_1,\dots,\lambda\cdot x_n\big).$$
Le triplet $\big(E_1\times\dots\times E_n,+,\cdot\big)$ est alors un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Ici : $0_{E_1\times\dots\times E_n}=(0_{E_1},\dots,0_{E_n})$.

Démonstration Nous nous contenterons de deux axiomes sur les quatre de la définition. Pour tous $\lambda\in\mathbb{K}$ et $(x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n)\in E_1\times\dots\times E_n$: $1\cdot(x_1,\dots,x_n)=\big(1\cdot x_1,\dots,1\cdot x_n\big)=(x_1,\dots,x_n)$ et :
$$\begin{aligned}\lambda\cdot\Big((x_1,\dots,x_n)+(y_1,\dots,y_n)\Big)&=\lambda\cdot(x_1+y_1,\dots,x_n+y_n)=\Big(\lambda\cdot(x_1+y_1),\dots,\lambda\cdot(x_n+y_n)\Big)\\&=\Big(\lambda\cdot x_1+\lambda\cdot y_1,\dots,\lambda\cdot x_n+\lambda\cdot x_n\Big)=(\lambda\cdot x_1,\dots,\lambda\cdot x_n)+(\lambda\cdot y_1,\dots,\lambda\cdot y_n)\\&=\lambda\cdot(x_1,\dots,x_n)+\lambda\cdot(y_1,\dots,y_n).\end{aligned}$$

Exemple (Familles de scalaires) En particulier, $\mathbb{K}^n=\overbrace{\mathbb{K}\times\dots\times\mathbb{K}}^{n\text{ termes}}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.
Nous retrouvons ici le cadre des vecteurs du plan avec $\mathbb{R}^2$ et celui des vecteurs de l'espace avec $\mathbb{R}^3$.
Par exemple : $(1,4,-3)+2\cdot(0,2,5)=(1,8,7)$.

Exemple (Matrices) Pour tous $n,p\in\mathbb{N}^*$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour ses lois usuelles d'addition et de multiplication par un scalaire.
Par exemple, pour $n=2$ et $p=3$: $3\cdot\begin{pmatrix}1&0&2\\0&3&-1\end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix}1&1&3\\4&2&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&2&12\\8&13&7\end{pmatrix}$.

Démonstration $\big(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),+\big)$ est déjà un groupe commutatif et les autres axiomes se vérifient aisément.

Exemple (Polynômes) $\mathbb{K}[X]$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour ses lois usuelles d'addition et de multiplication par un scalaire.

Démonstration $\big(\mathbb{K}[X],+\big)$ est déjà un groupe commutatif et les autres axiomes se vérifient aisément.

Théorème (Espaces vectoriels d'applications) Soient X un ensemble non vide et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. L'ensemble E^X est un groupe commutatif pour la loi $+$ définie pour tous $f,g\in E^X$ par :
$$\forall x\in X,\quad (f+g)(x)=f(x)+g(x).$$
On le munit d'une loi externe $\cdot$ en posant pour tous $f\in E^X$ et $\lambda\in\mathbb{K}$: $\forall x\in X,\quad (\lambda\cdot f)(x)=\lambda\cdot\big(f(x)\big)$.
Le triplet $\big(E^X,+,\cdot\big)$ est alors un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Ici, 0_{E^X} est l'application nulle $x\longmapsto 0_E$ de X dans E.

Démonstration Nous nous contenterons de deux axiomes sur les quatre. Soient $\lambda\in\mathbb{K}$ et $f,g\in E^X$. Alors $1\cdot f=f$ car pour tout $x\in X$: $(1\cdot f)(x)=1\cdot\big(f(x)\big)=f(x)$, et $\lambda\cdot(f+g)=\lambda\cdot f+\lambda\cdot g$ car pour tout $x\in X$:
$$\big(\lambda\cdot(f+g)\big)(x)=\lambda\cdot\big((f+g)(x)\big)=\lambda\cdot\big(f(x)+g(x)\big)=\lambda\cdot\big(f(x)\big)+\lambda\cdot\big(g(x)\big)=(\lambda\cdot f)(x)+(\lambda\cdot g)(x).$$

Exemple (Fonctions et suites)

- Pour tout intervalle I, l'ensemble $\mathbb{K}^I$ des fonctions de I dans $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour l'addition des fonctions et leur multiplication par un élément de $\mathbb{K}$.
- L'ensemble $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour l'addition des suites et leur multiplication par un élément de $\mathbb{K}$.

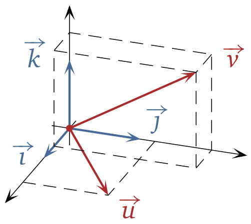
Exemple Tout $\mathbb{C}$-espace vectoriel est aussi un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Démonstration Si E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, $\lambda\cdot x$ est défini pour tous $\lambda\in\mathbb{C}$ et $x\in E$, donc en particulier pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$. Cela justifie qu'on puisse considérer E comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

1.2 Combinaisons linéaires

Définition (Combinaisons linéaires d'un nombre fini de vecteurs) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $x_1, \ldots, x_n \in E$. On appelle *combinaison linéaire de* $x_1, \ldots, x_n$ tout vecteur de E de la forme $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n$ pour certains $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$.

La notion de combinaison linéaire est géométriquement très simple à représenter dans le plan ou dans l'espace. Sur la figure ci-contre, $\vec{u}$ est combinaison linéaire de $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ mais ce n'est pas le cas de $\vec{v}$. Par contre, dans l'espace, tout vecteur est combinaison linéaire de $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ et $\vec{k}$.



Attention ! (Péché d'identification)

En général : $\quad \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = \sum_{k=1}^{n} \mu_k x_k \quad \cancel{\implies} \quad \lambda_k = \mu_k$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$.

Par exemple : $\quad (1,1) + 2(0,1) + 2(1,0) = (3,3) = 2(1,1) + (0,1) + (1,0)$.

Exemple Dans $\mathbb{R}^2$, $(2,7)$ est combinaison linéaire des vecteurs $(5,-2)$ et $(1,-3)$: $\quad (2,7) = (5,-2) - 3(1,-3)$.

Démonstration

C'est l'EXISTENCE de solutions qui compte.

$$(2,7) \text{ est combinaison linéaire de } (5,-2) \text{ et } (1,-3) \iff \boxed{\exists\, \lambda, \mu \in \mathbb{R},} \quad (2,7) = \lambda(5,-2) + \mu(1,-3)$$

$$\iff \exists\, \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad \left\{ \begin{array}{rcrcl} 5\lambda & + & \mu & = & 2 \\ -2\lambda & - & 3\mu & = & 7. \end{array} \right.$$

Nous sommes ainsi ramenés à la résolution d'un système linéaire. Or pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$:

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} 5\lambda & + & \mu & = & 2 \\ -2\lambda & - & 3\mu & = & 7 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcrcl} 5\lambda & + & \mu & = & 2 \\ 13\lambda & & & = & 13 \end{array} \right. \quad L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1 \quad \iff \quad \lambda = 1 \quad \text{et} \quad \mu = -3.$$

Le système étudié possède des solutions, c'est exactement le résultat voulu.

Exemple Dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas combinaison linéaire des vecteurs $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Démonstration $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ est combinaison linéaire de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\iff \exists\, x, y, z \in \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\iff \boxed{\exists\, x, y, z \in \mathbb{R},} \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & z & = & -1 \\ & & 3y & - & z & = & 2 \\ x & + & y & & & = & 2 \\ & & 2y & + & z & = & 0. \end{array} \right.$$

C'est l'EXISTENCE de solutions qui compte.

Résolvons ce système. Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & z & = & -1 \\ & & 3y & - & z & = & 2 \\ x & + & y & & & = & 2 \\ & & 2y & + & z & = & 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & z & = & -1 \\ & & 3y & - & z & = & 2 \\ & & 3y & - & z & = & 3 \\ & & 2y & + & z & = & 0 \end{array} \right. \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_1$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & z & = & -1 \\ & & 3y & - & z & = & 3 \\ & & & & 0 & = & 1 \\ & & 2y & + & z & = & 0 \end{array} \right. \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_2.$$

Ce dernier système n'a pas de solution — d'où le résultat.

Exemple Soit $n \in \mathbb{N}$. Tout polynôme de $\mathbb{K}[X]$ de degré INFÉRIEUR OU ÉGAL à n est combinaison linéaire des polynômes $1, X, X^2, \ldots, X^n$ puisqu'on peut l'écrire $\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ pour certains $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$.

Définition (Famille presque nulle de scalaires) On dit qu'une famille d'éléments de $\mathbb{K}$ indexée par I est *presque nulle* si tous ses éléments sont nuls SAUF UN NOMBRE FINI D'ENTRE EUX.

Dans le cas où I est un ensemble FINI, la précision « presque nulle » est évidemment sans intérêt.

Quand j'aurai besoin de mêler un quantificateur et une famille presque nulle, je m'autoriserai la notation suivante, bien pratique mais d'une correction toute relative : $\forall (\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I$ presque nulle, $\ldots$ De fait, certains auteurs notent $\mathbb{K}^{(I)}$ l'ensemble des familles presque nulles d'éléments de $\mathbb{K}$ indexées par I, mais cette notation n'est pas au programme donc je ne l'emploierai pas. Ne la confondez pas en tout cas avec la notation $\mathbb{K}^I$ qui désigne l'ensemble de TOUTES les familles d'éléments de $\mathbb{K}$ indexées par I.

Définition (Combinaisons linéaires d'un nombre quelconque de vecteurs) Soient E un espace vectoriel et $(x_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E. On appelle *combinaison linéaire de* $(x_i)_{i\in I}$ tout vecteur de E de la forme $\sum_{i\in I} \lambda_i x_i$ où $(\lambda_i)_{i\in I}$ est une famille PRESQUE NULLE d'éléments de $\mathbb{K}$.

Attention ! Pour un nombre FINI de vecteurs, pas besoin de familles PRESQUE NULLES de scalaires !

Nous pourrons maintenant parler des combinaisons linéaires d'un nombre INFINI de vecteurs, mais chacune de ces combinaisons linéaires reste fondamentalement une somme FINIE. Les vraies sommes infinies n'ont aucun sens sans une notion de passage à la limite adéquat.

Exemple $\mathbb{K}[X]$ est l'ensemble des combinaisons linéaires de la famille $\left(X^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$.

Rappelons à ce sujet que la notation $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$ des polynômes, très pratique, désigne en fait une somme FINIE.

1.3 SOUS-ESPACES VECTORIELS

Définition (Sous-espace vectoriel) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F une partie de E STABLE PAR ADDITION ET MULTIPLICATION PAR UN SCALAIRE. On dit que F est un *sous-espace vectoriel de* E si F est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour les lois de E.

Si F un sous-espace vectoriel de E, F est un sous-groupe additif de E, donc : $\boxed{0_F = 0_E \in F.}$

Exemple Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $\left\{0_E\right\}$ et E sont deux sous-espaces vectoriels de E.

Exemple L'ensemble $F = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \quad x^2+x+y^2=0\right\}$ N'est PAS un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

Démonstration F n'est pas stable par multiplication par un scalaire car $(-1,0)\in F$, mais $(-2,0)\notin F$.

Théorème (Caractérisation des sous-espaces vectoriels) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F une partie de E. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) F est un sous-espace vectoriel de E.

(ii) — $0_E \in F$.
— F est stable par combinaison linéaire : $\forall x,y\in F, \quad \forall \lambda\in\mathbb{K}, \quad \lambda x + y \in F$.

Démonstration

(i) $\Longrightarrow$ (ii) Si F est un sous-espace vectoriel de E, on a vu que $0_E = 0_F \in F$. De plus, pour tous $x,y\in E$ et $\lambda\in\mathbb{K}$, λx et y sont éléments de F car F est stable par multiplication par un scalaire, et enfin $\lambda x + y \in F$ car F est stable par addition.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) Si l'assertion (ii) est vraie, F est stable par différence — pour $\lambda = -1$ — donc est un sous-groupe additif de E. Les autres axiomes de la définition des espaces vectoriels ne requièrent aucune vérification particulière car une relation vraie sur E tout entier l'est aussi sur F.

C'est **TOUJOURS** le résultat précédent qu'il faut utiliser pour montrer qu'une partie d'un espace vectoriel en est un sous-espace vectoriel. Si on utilisait la **DÉFINITION** des sous-espaces vectoriels, on serait obligé de vérifier beaucoup d'axiomes dont la **CARACTÉRISATION** fait l'économie.

Par ailleurs, pour montrer qu'un ensemble muni d'une addition et d'une multiplication par un scalaire est un espace vectoriel, il suffit souvent de montrer qu'il est **SOUS**-espace d'un autre espace vectoriel connu.

Théorème (Ensemble des solutions d'un système linéaire HOMOGÈNE) Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. L'ensemble des solutions du système linéaire **HOMOGÈNE** $AX = 0$ d'inconnue $X \in \mathbb{K}^p$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^p$.

En particulier, toute droite de $\mathbb{R}^2$ **PASSANT PAR** $(0,0)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$, et toute droite et tout plan de $\mathbb{R}^3$ **PASSANT PAR** $(0,0,0)$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

Démonstration Notons S l'ensemble $\left\{X \in \mathbb{K}^p \mid \ AX = 0\right\}$ inclus dans $\mathbb{K}^p$. Évidemment $0 \in S$ car $A \times 0 = 0$. Montrons ensuite que S est stable par combinaison linéaire. Pour tous $X, X' \in S$ et $\lambda \in \mathbb{K}$:

$$A(\lambda X + X') = \lambda AX + AX' = \lambda \times 0 + 0 = 0, \qquad \text{donc } \lambda X + X' \in S.$$

Exemple Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble des matrices triangulaires supérieures de taille n à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Démonstration Cet ensemble est inclus dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et contient la matrice nulle. Ensuite, nous savons déjà que toute combinaison linéaire de matrices triangulaires supérieures est encore une matrice triangulaire supérieure.

Définition-théorème (Espaces vectoriels $\mathbb{K}_n[X]$) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble des polynômes de degré **INFÉRIEUR OU ÉGAL** à n, noté $\mathbb{K}_n[X]$, est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.

Attention ! L'ensemble des polynômes de degré **ÉGAL** à n **N'**est **PAS** un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$, il ne contient même pas le polynôme nul !

Démonstration Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour commencer $\mathbb{K}_n[X] \subset \mathbb{K}[X]$, et $0 \in \mathbb{K}_n[X]$ car $\deg(0) = -\infty \leqslant n$. Montrons ensuite que $\mathbb{K}_n[X]$ est stable par combinaison linéaire. Pour tous $P, Q \in \mathbb{K}_n[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$:

$$\deg(\lambda P + Q) \leqslant \max\left\{\deg(P), \deg(Q)\right\} \leqslant n, \qquad \text{donc } \lambda P + Q \in \mathbb{K}_n[X].$$

Exemple

- Pour tout intervalle I, les ensembles $\mathscr{C}(I,\mathbb{K})$, $\mathscr{D}(I,\mathbb{K})$ et $\mathscr{C}^1(I,\mathbb{K})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^I$.
- L'ensemble des suites convergentes à valeurs dans $\mathbb{K}$ est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

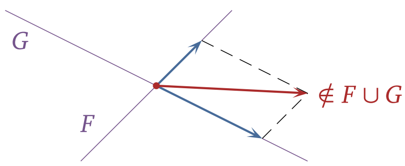
Exemple L'ensemble $F = \left\{f \in \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid \ f(0) = 0\right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Démonstration Pour commencer $F \subset \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, et $x \longmapsto 0$ est continue sur $\mathbb{R}$ de valeur 0 en 0, donc appartient à F. Montrons ensuite que F est stable par combinaison linéaire. Pour tous $f, g \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, la fonction $\lambda f + g$ est continue sur $\mathbb{R}$ et $(\lambda f + g)(0) = \lambda f(0) + g(0) = 0 + 0 = 0$, donc $\lambda f + g \in F$.

Théorème (Intersection de sous-espaces vectoriels) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Toute intersection de sous-espaces vectoriels de E est encore un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration Soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E. Montrons que $F = \bigcap_{i \in I} F_i$, qui est une partie de E, en est un sous-espace vectoriel. Pour commencer $0_E \in F$ car $0_E \in F_i$ pour tout $i \in I$, F_i étant un sous-espace vectoriel de E. Montrons ensuite que F est stable par combinaison linéaire. Soient $x, y \in F$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Pour tout $i \in I$: $\quad \lambda x + y \in F_i \quad$ car F_i est un sous-espace vectoriel de E et $x, y \in F_i$, donc $\lambda x + y \in F$.

Attention ! La réunion de deux sous-espaces vectoriels **N'**est **PAS** un sous-espace vectoriel en général — pourquoi diable serait-elle stable par addition ?



1.4 Sous-espaces affines

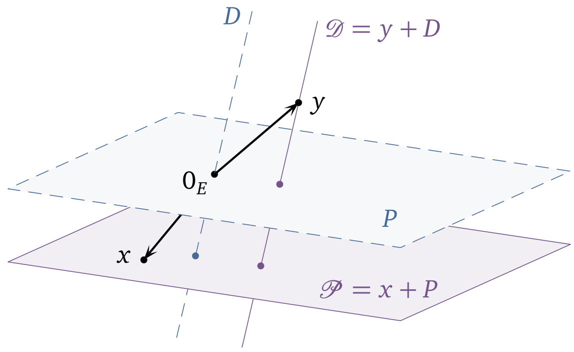
Les éléments d'un espace vectoriel E sont naturellement des vecteurs, mais dans le plan et dans l'espace, nous savons bien que nous pouvons identifier les points et les vecteurs via le choix d'un point de référence ou *origine* O. Une telle origine étant fixée, toute relation $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{u}$ nous autorise à identifier le point M et le vecteur $\overrightarrow{u}$.

Plus généralement, tout élément d'un espace vectoriel quelconque E peut être vu comme un point via le choix du vecteur nul $O = 0_E$ comme origine. Si pour tous $A, B \in E$, on note $\overrightarrow{AB}$ le vecteur $B - A$, alors pour tout $M \in E$, l'identification points-vecteurs s'écrit simplement : $\underset{\text{Point}}{M} = \underset{\text{Vecteur}}{\overrightarrow{OM}}$.

Définition (Sous-espace affine, direction) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On appelle *sous-espace affine de E* toute partie $\mathscr{F}$ de E de la forme $\mathscr{F} = x + F = \left\{ f + x \mid f \in F \right\}$ où F est un sous-espace vectoriel de E et x est vecteur de E.

Le sous-espace vectoriel F associé au sous-espace affine $\mathscr{F}$ est unique. On l'appelle la *direction de $\mathscr{F}$* et ses éléments sont appelés les *vecteurs directeurs de $\mathscr{F}$*.

Nous noterons souvent les sous-espaces vectoriels avec des majuscules droites $(F, G, H\ldots)$ et les sous-espaces affines avec des majuscules rondes $(\mathscr{F}, \mathscr{G}, \mathscr{H}\ldots)$.



Attention ! Tout sous-espace VECTORIEL F de E est un sous-espace AFFINE de E puisque $F = 0_E + F$. La réciproque est fausse en revanche car un sous-espace affine ne contient pas 0_E en général.

Démonstration Montrons l'unicité de la direction de $\mathscr{F}$. Soient F et F' deux sous-espaces vectoriels de E et $x, x' \in E$ pour lesquels $\mathscr{F} = x + F = x' + F'$. Pour montrer que $F = F'$, il nous suffit par symétrie de prouver l'inclusion $F \subset F'$. Soit $f \in F$. Comme $x = x + 0_E \in x + F = x' + F'$: $x = x' + f_1'$ pour un certain $f_1' \in F'$. Or $x + f \in x + F$ également, donc $x + f = x' + f_2'$ pour un certain $f_2' \in F'$. Finalement $f = f_2' - f_1' \in F'$.

Théorème (Ensemble des solutions d'un système linéaire) Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathbb{K}^n$. Si le système linéaire $AX = B$ d'inconnue $X \in \mathbb{K}^p$ est COMPATIBLE, l'ensemble de ses solutions est un sous-espace affine de $\mathbb{K}^p$. Sa direction n'est autre que l'ensemble des solutions du système linéaire homogène associé.

En particulier, toute droite de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ et tout plan de $\mathbb{R}^3$ en sont des sous-espaces affines.

Démonstration Posons $\mathscr{S} = \left\{ X \in \mathbb{K}^p \mid AX = B \right\}$ et $S = \left\{ X \in \mathbb{K}^p \mid AX = 0 \right\}$. Le système étudié étant compatible, nous pouvons nous en donner une solution particulière X_{part} et d'après notre cours sur les systèmes linéaires : $\mathscr{S} = X_{\text{part}} + S$. Par ailleurs, nous avons déjà vu que S est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^p$.

Exemple La droite de $\mathbb{R}^3$ d'équation $\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$ est un sous-espace affine de direction la droite vectorielle d'équation $\begin{cases} x + y = 0 \\ x - y + z = 0. \end{cases}$

Exemple L'ensemble $\mathscr{E} = \left\{ P \in \mathbb{R}[X] \mid XP' + P = 2X \right\}$ est un sous-espace affine de $\mathbb{R}[X]$ de direction le sous-espace vectoriel $E = \left\{ P \in \mathbb{R}[X] \mid XP' + P = 0 \right\}$.

Démonstration Il n'est pas dur de vérifier que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$. Remarquons par ailleurs que $X \in \mathscr{E}$ — solution particulière ! Ainsi, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$:

$$P \in \mathscr{E} \iff XP' + P = 2X \iff X(P-X)' + (P-X) = 0 \iff P - X \in E \iff P \in X + E.$$

Conclusion : $\mathscr{E} = X + E$, ce qui confirme que $\mathscr{E}$ est un sous-espace affine de $\mathbb{R}[X]$ de direction E.

Théorème (Caractérisation des sous-espaces affines par leur direction et un point) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathscr{F}$ un sous-espace affine de E de direction F. Alors pour tout $A \in \mathscr{F}$: $\mathscr{F} = A + F$.

Ainsi, deux sous-espaces affines sont égaux si et seulement s'ils ont la même direction et un point en commun.

Démonstration Par définition : $\mathscr{F} = x + F$ pour un certain $x \in E$, donc $A = x + f$ pour un certain $f \in F$, puis $\mathscr{F} = x + F = (A - f) + F = A + (F - f)$. Or F est un sous-espace vectoriel de E, donc $F - f \subset F = (F + f) - f \subset F - f$, donc $\mathscr{F} = A + (F - f) = A + F$.

Théorème (Intersection de sous-espaces affines) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(\mathscr{F}_i)_{i \in I}$ une famille de sous-espaces affines de E. Pour tout $i \in I$, on note F_i la direction de $\mathscr{F}_i$.

On dit que les $\mathscr{F}_i$, i décrivant I, sont *concourants* ou *sécants* si $\bigcap_{i \in I} \mathscr{F}_i \neq \varnothing$. Dans ce cas, $\bigcap_{i \in I} \mathscr{F}_i$ est un sous-espace affine de E de direction $\bigcap_{i \in I} F_i$.

Attention ! Alors qu'une intersection de sous-espaces vectoriels contient toujours le vecteur nul, une intersection de sous-espaces affines peut vraiment être vide, pensez par exemple au cas de deux droites parallèles non confondues.

Démonstration Posons $\mathscr{F} = \bigcap_{i \in I} \mathscr{F}_i$ et $F = \bigcap_{i \in I} F_i$ et supposons $\mathscr{F} \neq \varnothing$. Un point A de $\mathscr{F}$ étant donné, nous avons vu plus haut que $\mathscr{F}_i = A + F_i$ pour tout $i \in I$. Il nous suffit dès lors de montrer que $\mathscr{F} = A + F$.

- Montrons que $\mathscr{F} \subset A + F$. Soit $M \in \mathscr{F}$. Pour tout $i \in I$: $M = A + f_i$ pour un certain $f_i \in F_i$, et ces f_i sont tous égaux, donc éléments de $\bigcap_{i \in I} F_i = F$. Comme voulu $M \in A + F$.
- Inversement $F \subset F_i$ pour tout $i \in I$, donc $A + F \subset A + F_i = \mathscr{F}_i$, donc $A + F \subset \mathscr{F}$.

1.5 Sous-espace vectoriel engendré par une partie

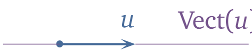
Définition (Sous-espace vectoriel engendré par une partie) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et X une partie de E.

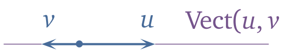
(i) L'intersection de tous les sous-espaces vectoriels de E contenant X est appelée le *sous-espace vectoriel (de E) engendré par X* et notée $\mathrm{Vect}(X)$. À ce titre, $\mathrm{Vect}(X)$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant X.

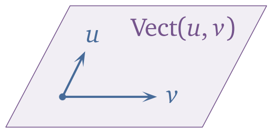
En particulier, tout sous-espace vectoriel de E qui contient X contient aussi $\mathrm{Vect}(X)$.

(ii) Si $X = \{x_i \mid i \in I\}$, $\mathrm{Vect}(X)$ est aussi l'ensemble des combinaisons linéaires de $(x_i)_{i \in I}$ et noté $\mathrm{Vect}(x_i)_{i \in I}$.

Quelques figures vaudront mieux qu'un long discours.







Démonstration

(i) En tant qu'intersection de sous-espaces vectoriels de E contenant X, $\mathrm{Vect}(X)$ est lui-même un sous-espace vectoriel de E contenant X, et il est inclus par définition dans tous les sous-espaces vectoriels de E contenant X, ce qui montre que tout sous-espace vectoriel de E qui contient X contient en réalité $\mathrm{Vect}(X)$ tout entier.

(ii) Notons V l'ensemble des combinaisons linéaires de $(x_i)_{i \in I}$ et montrons que $V = \mathrm{Vect}(X)$. Or $\mathrm{Vect}(X)$ est stable par combinaison linéaire en tant que sous-espace vectoriel de E et contient X, donc contient toute combinaison linéaire de $(x_i)_{i \in I}$, autrement dit $V \subset \mathrm{Vect}(X)$. Pour l'inclusion réciproque, d'après (i), il nous suffit de montrer que V est un sous-espace vectoriel de E contenant X.

Pour commencer $V \subset E$ et V contient à la fois 0_E et X car $0_E = \sum_{i \in I} 0 \cdot x_i$ et $x_j = 1 \cdot x_j + \sum_{i \neq j} 0 \cdot x_i$ pour tout $j \in I$. Ensuite, pour la stabilité par combinaison linéaire, soient $v, w \in V$ et $\alpha \in \mathbb{K}$, disons $v = \sum_{i \in I} \lambda_i x_i$ et $w = \sum_{i \in I} \mu_i x_i$ pour certaines familles presque nulles $(\lambda_i)_{i \in I}$ et $(\mu_i)_{i \in I}$ d'éléments de $\mathbb{K}$. La famille $(\alpha\lambda_i + \mu_i)_{i \in I}$ est aussi presque nulle et $\alpha v + w = \sum_{i \in I} (\alpha\lambda_i + \mu_i) x_i$, donc $\alpha v + w \in \mathrm{Vect}(X)$.

En pratique : Pour montrer qu'une partie d'un espace vectoriel en est un sous-espace vectoriel, il suffit très souvent de l'écrire comme un Vect.

Exemple Pour tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, par convention des sommes vides : $\mathrm{Vect}(\varnothing) = \{0_E\}$.

Exemple Le sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}\big((1,2)\big)$ est la droite de $\mathbb{R}^2$ passant par $(0,0)$ dirigée par $(1,2)$.

Exemple $\mathbb{K}[X] = \mathrm{Vect}\big(X^k\big)_{k \in \mathbb{N}}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\mathbb{K}_n[X] = \mathrm{Vect}\big(1, X, \ldots, X^n\big)$.

Exemple Dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{K})$, $\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right)$ est l'ensemble des matrices triangulaires supérieures.

Exemple Le plan $\mathscr{P}$ de $\mathbb{R}^3$ d'équation $2x-y+3z=2$ est le sous-espace affine de direction $\mathrm{Vect}\big((1,2,0),(0,3,1)\big)$ passant par $(0,-2,0)$. En résumé : $\mathscr{P}=(0,-2,0)+\mathrm{Vect}\big((1,2,0),(0,3,1)\big)$.

Démonstration $$\mathscr{P}=\big\{(x,2x+3z-2,z)\ |\ x,z\in\mathbb{R}\big\}=\big\{(0,-2,0)+x\,(1,2,0)+z\,(0,3,1)\ |\ x,z\in\mathbb{R}\big\}=(0,-2,0)+\mathrm{Vect}\big((1,2,0),(0,3,1)\big).$$

Exemple La droite $\mathscr{D}$ de $\mathbb{R}^3$ d'équation $\left\{\begin{array}{rcrcrcl}5x&+&y&-&z&=&2\\x&+&2y&+&z&=&1\end{array}\right.$ est le sous-espace affine de direction $\mathrm{Vect}\big((1,-2,3)\big)$ passant par $(0,1,-1)$. En résumé : $\mathscr{D}=(0,1,-1)+\mathrm{Vect}\big((1,-2,3)\big)$.

Démonstration Pour tout $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$: $$(x,y,z)\in\mathscr{D}\iff\left\{\begin{array}{rcrcrcl}5x&+&y&-&z&=&2\\2x&+&y&&&=&1\end{array}\right.\qquad L_2\leftarrow\frac{1}{3}L_1+\frac{1}{3}L_2$$ $$\iff y=1-2x\quad\text{et}\quad z=3x-1.$$

Enfin : $\mathscr{D}=\big\{(x,1-2x,3x-1)\ |\ x\in\mathbb{R}\big\}=\big\{(0,1,-1)+x\,(1,-2,3)\ |\ x\in\mathbb{R}\big\}=(0,1,-1)+\mathrm{Vect}\big((1,-2,3)\big)$.

Exemple Si le corps de base est $\mathbb{R}$: $\mathrm{Vect}(1)=\big\{a\times 1\ |\ a\in\mathbb{R}\big\}=\mathbb{R}$ et $\mathrm{Vect}(1,i)=\big\{a+ib\ |\ a,b\in\mathbb{R}\big\}=\mathbb{C}$.
Si par contre le corps de base est $\mathbb{C}$: $\mathrm{Vect}(1)=\big\{a\times 1\ |\ a\in\mathbb{C}\big\}=\mathbb{C}$.

Théorème (Propriétés des Vect) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, X et Y deux parties de E et $x,a,b\in E$.

(i) **Inclusion :** Si $X\subset Y$, alors $\mathrm{Vect}(X)\subset\mathrm{Vect}(Y)$.

(ii) **Ôter un vecteur :** Si $x\in X$ est combinaison linéaire de $X\setminus\{x\}$, alors $\mathrm{Vect}(X)=\mathrm{Vect}\big(X\setminus\{x\}\big)$.

(iii) **Remplacer un vecteur :** Si b est combinaison linéaire de $X\cup\{a\}$ avec un coefficient NON NUL sur a : $$\mathrm{Vect}\big(X\cup\{a\}\big)=\mathrm{Vect}\big(X\cup\{b\}\big).$$

Démonstration

(i) Toute combinaison linéaire de X est bien sûr une combinaison linéaire de Y !

(ii) Soit $x\in X$ combinaison linéaire de $X\setminus\{x\}$. D'après (i) : $\mathrm{Vect}\big(X\setminus\{x\}\big)\subset\mathrm{Vect}(X)$. Dans l'autre sens, $\mathrm{Vect}\big(X\setminus\{x\}\big)$ est un sous-espace vectoriel contenant $X\setminus\{x\}$, or il contient aussi x par hypothèse, donc X tout entier, donc $\mathrm{Vect}(X)$.

(iii) Dans un sens, $\mathrm{Vect}\big(X\cup\{a\}\big)$ contient X et a, donc aussi b par hypothèse, donc $X\cup\{b\}$, donc enfin $\mathrm{Vect}\big(X\cup\{b\}\big)$. Dans l'autre sens, remarquons que par hypothèse $b=\lambda a+x$ avec $\lambda\in\mathbb{K}$ NON NUL et où x est une combinaison linéaire de X. Ainsi $a=\dfrac{b-x}{\lambda}$, donc a est combinaison linéaire de $X\cup\{b\}$ avec un coefficient NON NUL sur b. L'inclusion $\mathrm{Vect}\big(X\cup\{a\}\big)\subset\mathrm{Vect}\big(X\cup\{b\}\big)$ se montre par conséquent comme on a prouvé l'autre, les rôles de a et b étant finalement symétriques.

Exemple Dans $\mathbb{R}^3$: $$\mathrm{Vect}\Big((1,1,0),(0,1,0),\overbrace{(1,3,0)}^{\substack{\text{Combinaison linéaire}\\ \text{de }(1,1,0)\text{ et }(0,1,0)}}\Big)=\mathrm{Vect}\big((1,1,0),(0,1,0)\big)=\mathrm{Vect}\big((1,1,0)-(0,1,0),(0,1,0)\big)$$ $$=\mathrm{Vect}\big((1,0,0),(0,1,0)\big)=\mathbb{R}^2\times\{0\}.$$

2 Familles de vecteurs

2.1 Parties et familles génératrices

Définition (Partie/famille génératrice) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et X une partie de E. On dit que la partie X est *génératrice de* E ou *engendre* E si tout élément de E est combinaison linéaire de X, i.e. si $E = \mathrm{Vect}(X)$.

Si $X = \left\{x_i \mid \ i \in I\right\}$, on dit aussi que la famille $(x_i)_{i\in I}$ est *génératrice de* E ou *engendre* E.

Exemple $\left(X^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ engendre $\mathbb{K}[X]$ et $\left(1, X, X^2, \ldots, X^n\right)$ engendre $\mathbb{K}_n[X]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exemple Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$: $\quad (x,y) = x\,(1,0) + y\,(0,1)$, $\quad$ donc la famille $\big((1,0),(0,1)\big)$ engendre $\mathbb{R}^2$. De même, pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$: $\quad (x,y,z) = x\,(1,0,0) + y\,(0,1,0) + z\,(0,0,1)$, $\quad$ donc $\big((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\big)$ engendre $\mathbb{R}^3$.

Plus généralement, si on pose : $\quad e_1 = (1,0,\ldots,0)$, $\quad e_2 = (0,1,0,\ldots,0)$, $\quad \ldots$, $\quad e_n = (0,\ldots,0,1)$, $\quad$ la famille $(e_1,\ldots,e_n)$ engendre $\mathbb{K}^n$ car pour tout $(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{K}^n$: $\quad (x_1,\ldots,x_n) = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n$.

Exemple La famille $\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right)$ engendre $\mathscr{M}_2(\mathbb{K})$ car pour tous $a,b,c,d \in \mathbb{K}$:

$$\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} + d\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}.$$

Plus généralement, pour tous $i \in [\![1,n]\!]$ et $j \in [\![1,p]\!]$, notons E_{ij} la matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui de position (i,j), égal à 1. La famille $(E_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ est alors génératrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ car pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$: $\quad A = \sum\limits_{i,j} a_{ij}E_{ij}$.

Exemple La famille $(1,i)$ engendre le $\boxed{\mathbb{R}}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$, mais (1) suffit à engendrer le $\boxed{\mathbb{C}}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$.

Le résultat qui suit n'est qu'une simple reformulation du théorème « Propriétés des Vect ».

Théorème (Propriétés des parties génératrices) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et X et Y deux parties de E.

- **Inclusion :** Si X engendre E et si $X \subset Y$, alors Y engendre E.
- **Ôter un vecteur :** Si X engendre E et si $x \in X$ est combinaison linéaire de $X \setminus \{x\}$, $X \setminus \{x\}$ engendre E.
- **Remplacer un vecteur :** Si $X \cup \{a\}$ engendre E et si b est combinaison linéaire de $X \cup \{a\}$ avec un coefficient NON NUL sur a, $X \cup \{b\}$ engendre E.

En pratique : Trouver une partie génératrice d'un sous-espace vectoriel, c'est l'écrire comme un Vect.

Exemple L'ensemble $E = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid \quad x+2y-z=0 \quad \text{et} \quad x-y+t=0\right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par la famille $\big((1,0,1,-1),(0,1,2,1)\big)$.

Démonstration Pour tout $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$: $\quad (x,y,z,t) \in E \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcrcr} z &=& x &+& 2y \\ t &=& -x &+& y,\end{array}\right.$ $\quad$ donc :

$E = \left\{(x,y,x+2y,-x+y) \mid \quad x,y \in \mathbb{R}\right\} = \left\{x(1,0,1,-1)+y(0,1,2,1) \mid \quad x,y \in \mathbb{R}\right\} = \mathrm{Vect}\big((1,0,1,-1),(0,1,2,1)\big)$.

Ceci montre À LA FOIS que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et que $\big((1,0,1,-1),(0,1,2,1)\big)$ engendre E.

Exemple L'ensemble $F = \left\{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid \quad 2P(X+1) = XP'\right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$ engendré par X^2-4X+3.

Démonstration Pour tout $P = aX^3+bX^2+cX+d \in \mathbb{R}_3[X]$:

$$P \in F \quad \Longleftrightarrow \quad 2P(X+1) = XP' \quad \Longleftrightarrow \quad 2a\,(X+1)^3 + 2b\,(X+1)^2 + 2c\,(X+1) + 2d = X\left(3aX^2+2bX+c\right)$$

$$\Longleftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcl} 2a &=& 3a \\ 6a+2b &=& 2b \\ 6a+4b+2c &=& c \\ 2a+2b+2c+2d &=& 0 \end{array}\right. \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcl} a &=& 0 \\ 4b+c &=& 0 \\ b+c+d &=& 0 \end{array}\right. \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcl} a &=& 0 \\ c &=& -4b \\ d &=& 3b. \end{array}\right.$$

Conclusion : $\quad F = \left\{bX^2-4bX+3b \mid \quad b \in \mathbb{R}\right\} = \left\{b\left(X^2-4X+3\right) \mid \quad b \in \mathbb{R}\right\} = \mathrm{Vect}\big(X^2-4X+3\big)$. $\quad$ Ceci montre À LA FOIS que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$ et que $\left(X^2-4X+3\right)$ en est une famille génératrice.

2.2 Parties et familles libres ou liées

Définition (Partie/famille libre d'un nombre fini de vecteurs) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $x_1,\ldots,x_n \in E$. On dit que la famille $(x_1,\ldots,x_n)$ ou l'ensemble $\{x_1,\ldots,x_n\}$ est *libre* ou que les vecteurs $x_1,\ldots,x_n$ sont *linéairement indépendants* si :

$$\forall (\lambda_1,\ldots,\lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \qquad \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = 0_E \quad\Longrightarrow\quad \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0\right).$$

Quitte à remplacer λ_i par $\lambda_i - \mu_i$ dans la définition de la liberté, on peut aussi dire que $(x_1,\ldots,x_n)$ est libre si et seulement si : $\forall (\lambda_1,\ldots,\lambda_n),(\mu_1,\ldots,\mu_n) \in \mathbb{K}^n$, $\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^n \mu_i x_i \quad\Longrightarrow\quad \forall i \in [\![1,n]\!],\ \lambda_i = \mu_i\right)$, ce qui n'est finalement rien de plus qu'un **principe d'identification**. En résumé :

Famille génératrice	=	**Existence** pour **tout** vecteur d'une décomposition comme combinaison linéaire
Famille libre	=	**Unicité** des coefficients dans les combinaisons linéaires, donc possibilité de pratiquer des **identifications**

Définition (Partie/famille liée d'un nombre fini de vecteurs, vecteurs colinéaires) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $x_1,\ldots,x_n \in E$. On dit que la famille $(x_1,\ldots,x_n)$ ou l'ensemble $\{x_1,\ldots,x_n\}$ est *liée* ou que les vecteurs $x_1,\ldots,x_n$ sont *linéairement dépendants* si la famille $(x_1,\ldots,x_n)$ **n'est pas** libre. Cela revient à dire que **l'un au moins** des vecteurs $x_1,\ldots,x_n$ est combinaison linéaire des autres.

Pour deux vecteurs $x,y \in E$, on dit que x et y sont *colinéaires* si la famille (x,y) est liée, i.e. si x ou y est un multiple de l'autre.

Dire que $(x_1,\ldots,x_n)$ est liée, c'est dire que pour certains $\lambda_1,\ldots,\lambda_n \in \mathbb{K}$: $\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = 0_E \quad \text{et} \quad \exists i_0 \in [\![1,n]\!],\ \lambda_{i_0} \neq 0\right)$, auquel cas $x_{i_0} = -\dfrac{1}{\lambda_{i_0}} \sum_{i \neq i_0} \lambda_i x_i$, i.e. x_{i_0} est « combinaison linéaire des autres ».

Exemple Tout ensemble de vecteurs qui contient le vecteur nul est lié.

Démonstration Le vecteur nul est combinaison linéaire de tout ensemble de vecteurs — coefficients tous nuls...

Exemple La famille $(1,\mathrm{i})$ est libre dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$ — principe d'identification des parties réelle et imaginaire — mais liée dans le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$.

Démonstration

- Montrons que $(1,\mathrm{i})$ est libre sur le corps de base $\mathbb{R}$. Soient $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$ des réels pour lesquels $\lambda.1 + \mu.\mathrm{i} = 0$. Par identification des parties réelle et imaginaire : $\lambda = \mu = 0$.
- La famille $(1,\mathrm{i})$ est en revanche liée sur le corps de base $\mathbb{C}$ car $\mathrm{i} = \mathrm{i} \times 1$ est un multiple **complexe** de 1.

Exemple Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons : $e_1 = (1,0,\ldots,0)$, $e_2 = (0,1,0,\ldots,0)$, $\ldots$, $e_n = (0,\ldots,0,1)$. La famille $(e_1,\ldots,e_n)$ est libre dans $\mathbb{K}^n$ — principe d'identification des coefficients d'une famille de scalaires.

Démonstration Pour tout $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n) \in \mathbb{K}^n$: $x_1e_1+\ldots+x_ne_n = (\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$, donc si $x_1e_1+\ldots+x_ne_n = 0_{\mathbb{K}^n}$, alors aussitôt $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$.

Exemple Soient $n,p \in \mathbb{N}^*$. Pour tous $i \in [\![1,n]\!]$ et $j \in [\![1,p]\!]$, notons E_{ij} la matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui de position de (i,j), égal à 1. La famille $(E_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ est alors libre dans $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ — principe d'identification des coefficients d'une matrice.

Exemple La famille $\big((2,1),(-1,3),(0,2)\big)$ est liée dans $\mathbb{R}^2$.

Démonstration Pour tous $\lambda,\mu,\nu \in \mathbb{R}$: $\lambda(2,1)+\mu(-1,3)+\nu(0,2) = (0,0) \iff \begin{cases} 2\lambda - \mu = 0 \\ \lambda + 3\mu + 2\nu = 0. \end{cases}$
Ce système possède des solutions (λ,μ,ν) autres que $(0,0,0)$, $\left(1,2,-\dfrac{7}{2}\right)$ par exemple, donc les vecteurs $(2,1)$, $(-1,3)$ et $(0,2)$ sont linéairement dépendants.

Exemple La famille $\left(X^2-X+1, X^2+X-2, X^2-2X+3\right)$ est libre dans $\mathbb{R}[X]$.

Démonstration Pour tous $\lambda,\mu,\nu\in\mathbb{R}$: $\lambda\left(X^2+X+1\right)+\mu\left(X^2-X-2\right)+\nu\left(X^2+2X+3\right)=0$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} \lambda & + & \mu & + & \nu & = & 0 \\ \lambda & - & \mu & + & 2\nu & = & 0 \\ \lambda & - & 2\mu & + & 3\nu & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} \lambda & + & \mu & + & \nu & = & 0 \\ & & 2\mu & - & \nu & = & 0 \\ & & 3\mu & - & 2\nu & = & 0 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \\ L_2\leftarrow L_1-L_2 \\ L_3\leftarrow L_1-L_3 \end{array}$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} \lambda & + & \mu & + & \nu & = & 0 \\ & & 2\mu & - & \nu & = & 0 \\ & & \mu & & & = & 0 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \\ \\ L_3\leftarrow 2L_2-L_3 \end{array} \qquad \iff \qquad \lambda=\mu=\nu=0.$$

Exemple La famille $(\sin,\cos)$ est libre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Démonstration Soient $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$. On suppose que $\lambda\sin+\mu\cos=0$, i.e. que $\lambda\sin x+\mu\cos x=0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$. Dans ces conditions : $\lambda\sin 0+\mu\cos 0=0$ et $\lambda\sin\dfrac{\pi}{2}+\mu\cos\dfrac{\pi}{2}=0$, donc $\lambda=\mu=0$.

Exemple Toute famille $(P_1,\dots,P_n)$ de polynômes **NON NULS** de $\mathbb{K}[X]$ pour laquelle $\deg(P_1)<\dots<\deg(P_n)$ est libre — on dit qu'une telle famille est *échelonnée en degré*. Cet exemple est **TRÈS IMPORTANT** !

Démonstration Posons $d_j=\deg(P_j)$ et introduisons les coefficients de P_j : $P_j=\displaystyle\sum_{i=0}^{d_j}a_{i,j}X^i$ pour tout $j\in[\![1,n]\!]$. Soient ensuite $x_1,\dots,x_n\in\mathbb{K}$. On suppose que $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}x_jP_j=0$. On obtient par identification polynomiale des termes de degrés $d_1,\dots,d_n$ le système linéaire suivant :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccl} a_{d_1,1}x_1 & + & a_{d_1,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{d_1,n-1}x_{n-1} & + & a_{d_1,n}x_n & = 0 & (\text{degré } d_1) \\ & & a_{d_2,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{d_2,n-1}x_{n-1} & + & a_{d_2,n}x_n & = 0 & (\text{degré } d_2) \\ & & & & & & \vdots & & \vdots & \vdots & \\ & & & & & & a_{d_{n-1},n-1}x_{n-1} & + & a_{d_{n-1},n}x_n & = 0 & (\text{degré } d_{n-1}) \\ & & & & & & & & a_{d_n,n}x_n & = 0 & (\text{degré } d_n). \end{array}\right.$$

Ce système est triangulaire supérieur à coefficients diagonaux non nuls — non nuls car $a_{d_j,j}\neq 0$ pour tout $j\in[\![1,n]\!]$ par définition de d_j — donc admet $(x_1,\dots,x_n)=(0,\dots,0)$ pour seule et unique solution.

Définition (Partie/famille libre/liée d'un nombre quelconque de vecteurs) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(x_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E.

- **Partie/famille libre :** On dit que la famille $(x_i)_{i\in I}$ ou l'ensemble $\left\{x_i \mid i\in I\right\}$ est *libre* ou que les vecteurs x_i, i décrivant I, sont *linéairement indépendants* si :
$$\forall(\lambda_i)_{i\in I}\in\mathbb{K}^I \text{ presque nulle}, \qquad \left(\sum_{i\in I}\lambda_ix_i=0_E \quad\Longrightarrow\quad \forall i\in I,\ \lambda_i=0\right).$$
- **Partie/famille liée :** On dit que la famille $(x_i)_{i\in I}$ ou l'ensemble $\left\{x_i \mid i\in I\right\}$ est *lié(e)* ou que les vecteurs x_i, i décrivant I, sont *linéairement dépendants* si $(x_i)_{i\in I}$ **N'est PAS** libre. Cela revient à dire que **L'UN AU MOINS** d'entre eux est combinaison linéaire des autres.

L'expression « presque nulle » nous ramène toujours à un nombre **FINI** de vecteurs utiles, donc la liberté d'une famille **INFINIE** de vecteurs est équivalente à la liberté de **TOUTES** ses sous-familles **FINIES**. Pour montrer qu'une famille $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs est libre, il suffit même de montrer que la famille $(x_0,\dots,x_n)$ est libre pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Exemple L'ensemble vide est une partie vide de tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Exemple La famille $\left(X^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est libre dans $\mathbb{K}[X]$ — principe d'**IDENTIFICATION DES COEFFICIENTS**.

Théorème (Propriétés des parties libres/liées) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et X et Y deux parties de E.

(i) **Inclusion :** Si Y est libre et si $X\subset Y$, alors X est libre.

Par contraposition, si X est liée et si $X\subset Y$, alors Y est liée.

(ii) **Ajouter un vecteur :** Si X est libre et si $y\in E$ **N'est PAS** combinaison linéaire de X, alors $X\cup\left\{y\right\}$ est libre.

Dire qu'une famille est libre, c'est dire qu'aucun de ses vecteurs n'est combinaison linéaire des autres, donc si on veut que l'ajout d'un vecteur conserve la liberté d'une famille libre, on doit faire attention de ne pas introduire de dépendance entre ses vecteurs — on ne peut donc ajouter qu'un vecteur linéairement indépendant des autres.

Démonstration

(i) Si X est liée et si $X \subset Y$, alors l'un des vecteurs de X est combinaison linéaire des autres et donc a fortiori l'un des vecteurs de Y est combinaison linéaire des autres.

(ii) Supposons X libre et donnons-nous $y \in E$ **NON** combinaison linéaire de X. Pour montrer que $X \cup \{y\}$ est libre, soient $(\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I$ presque nulle et $\mu \in \mathbb{K}$ pour lesquels $\sum_{i\in I} \lambda_i x_i + \mu y = 0_E$. Si jamais $\mu \neq 0$: $y = -\frac{1}{\mu}\sum_{i\in I} \lambda_i x_i$, contrairement à notre hypothèse. Ainsi $\mu = 0$, donc $\sum_{i\in I} \lambda_i x_i = 0_E$, et la liberté de X montre enfin que $\lambda_i = 0$ pour tout $i \in I$.

2.3 Bases

Définition (Base, coordonnées) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathscr{B} = (e_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E. On dit que $\mathscr{B}$ est une *base de E* si $\mathscr{B}$ est à la fois libre et génératrice de E, i.e. si et seulement si tout vecteur de E est combinaison linéaire de $\mathscr{B}$ **D'UNE ET UNE SEULE MANIÈRE.**

Dans ce cas, pour tout $x \in E$, l'unique famille presque nulle $(x_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I$ pour laquelle $x = \sum_{i\in I} x_i e_i$ est appelée la *famille des coordonnées de x dans $\mathscr{B}$.*

Les bases sont toujours des **FAMILLES**. Dans le plan muni d'une base, peut-on parler du point de coordonnées $\{1,2\}$? Non, car le point de coordonnées $(1,2)$ n'est pas le point de coordonnées $(2,1)$!

Convention de la base vide : Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E réduit au singleton $\{0_E\}$ possède-t-il une base ? Oui, la famille vide ! — autrement dit l'unique famille de vecteurs de E indexée par l'ensemble vide. Par convention des sommes vides, 0_E est en effet combinaison linéaire de la famille vide, et ce d'une et une seule manière. Ce point de vue peut paraître curieux, mais il rend de nombreuses preuves plus digestes.

La définition suivante est une synthèse des exemples précédents.

Définition-théorème (Bases canoniques de $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}[X]$, $\mathbb{K}_n[X]$ et $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$)

- **Familles de scalaires :** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, si on pose : $e_1 = (1,0,\dots,0)$, $e_2 = (0,1,0,\dots,0)$, $\dots$, $e_n = (0,\dots,0,1)$, la famille $(e_1,\dots,e_n)$ est une base de $\mathbb{K}^n$ appelée sa *base canonique*.
- **Polynômes :** La famille $\left(X^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$ appelée sa *base canonique* et pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $\left(1,X,X^2,\dots,X^n\right)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$ appelée sa *base canonique*.
- **Matrices :** Pour tous $n,p \in \mathbb{N}^*$ et pour tous $i \in [\![1,n]\!]$ et $j \in [\![1,p]\!]$, si on note E_{ij} la matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont les coefficients sont tous nuls sauf celui de position de (i,j), égal à 1, la famille $(E_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ est une base de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ appelée sa *base canonique*.

Attention ! Seuls vos profs de maths ont le super-pouvoir de décréter qu'une base est **CANONIQUE** — pas vous ! Et que signifie « canonique » ? Réponse : « la plus naturelle ». De fait, les bases exhibées ci-dessus sont les plus naturelles, les plus simples, les plus faciles d'emploi auxquelles on peut penser dans $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}[X]$, $\mathbb{K}_n[X]$ et $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

- Pour tout $(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{K}^n$, les coordonnées de $(x_1,\dots,x_n)$ dans la base canonique sont le vecteur $(x_1,\dots,x_n)$ lui-même !
- Pour tout $P = a_0 + a_1X + \dots \in \mathbb{K}[X]$, la famille des coordonnées de P dans la base canonique est $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$, i.e. P lui-même étant donné notre construction de $\mathbb{K}[X]$ — mais je vous rappelle qu'il est important d'**OUBLIER** en pratique la manière dont les objets sont construits en mathématiques, seules leurs propriétés comptent finalement.
- Pour tout $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, la famille des coordonnées de A dans la base canonique est $(a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$, i.e. A elle-même.

Exemple La famille $\big((1,1),(1,-2)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

Démonstration Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Nous voulons montrer ceci : $\exists!\,(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $(x,y) = a\,(1,1) + b\,(1,-2)$. Or pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$:

$$(x,y)=a(1,1)+b(1,-2) \iff \left\{\begin{array}{ccccc} a & + & b & = & x \\ a & - & 2b & = & y \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccccc} a & + & b & = & x \\ & & 3b & = & x-y \end{array}\right. \qquad L_2 \leftarrow L_1 - L_2.$$

Triangulaire à coefficients diagonaux non nuls, le système obtenu possède une et une seule solution.

Si on veut connaître en plus les coordonnées de (x,y) dans la base $\big((1,1),(1,-2)\big)$, il ne reste qu'à achever la résolution du système précédent. Après calcul, ces coordonnées sont $(a,b)=\left(\dfrac{2x+y}{3},\dfrac{x-y}{3}\right)$.

Exemple La famille $\left(X^2+X,X^2+1,X+1\right)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

Démonstration On pourrait prouver en deux temps que $\left(X^2+X,X^2+1,X+1\right)$ est libre et génératrice de $\mathbb{R}_2[X]$, mais il y a plus simple. Montrer que c'est une base de $\mathbb{R}_2[X]$ revient à montrer que tout polynôme de degré inférieur ou égal à 2 est combinaison linéaire d'une unique façon de X^2+X, X^2+1 et $X+1$:

$$\forall P\in\mathbb{R}_2[X], \quad \exists!\,(\lambda,\mu,\nu)\in\mathbb{R}^3, \quad P=\lambda\left(X^2+X\right)+\mu\left(X^2+1\right)+\nu(X+1).$$

Soit donc $P=aX^2+bX+c\in\mathbb{R}_2[X]$. Pour tous $\lambda,\mu,\nu\in\mathbb{R}$:

$$P=\lambda\left(X^2+X\right)+\mu\left(X^2+1\right)+\nu(X+1) \iff \left\{\begin{array}{ccccccc} \lambda & + & \mu & & & = & a \\ \lambda & & & + & \nu & = & b \\ & & \mu & + & \nu & = & c \end{array}\right. \quad \text{après identification}$$

$$\iff \left\{\begin{array}{ccccccc} \lambda & + & \mu & & & = & a \\ & & \mu & - & \nu & = & a-b \\ & & \mu & + & \nu & = & c \end{array}\right. \quad L_2\leftarrow L_1-L_2 \iff \left\{\begin{array}{ccccccc} \lambda & + & \mu & & & = & a \\ & & \mu & - & \nu & = & a-b \\ & & & & \nu & = & \dfrac{-a+b+c}{2} \end{array}\right. \quad L_3\leftarrow \frac{1}{2}L_3-\frac{1}{2}L_2.$$

Triangulaire à coefficients diagonaux non nuls, le système obtenu possède une et une seule solution (λ,μ,ν) pour tout P fixé — d'où le résultat.

En pratique : Pour trouver une base d'un espace vectoriel, on en cherche d'abord une famille génératrice en l'écrivant comme un Vect, puis on essaie de montrer que la famille ainsi obtenue est libre.

Exemple L'ensemble F des matrices $M\in\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ pour lesquelles $M^\top=M+\text{tr}(M)I_2$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ de base $\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\right)$.

Démonstration Nous allons faire comme si la base $\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\right)$ ne nous était pas fournie.

- Pour tout $A=\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}$: $\quad A\in F \iff \begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}+(a+d)\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} \iff d=-a$ et $c=b$, donc : $\quad F=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\b&-a\end{pmatrix}\ \middle|\ a,b\in\mathbb{R}\right\}=\text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\right)$. En particulier, F est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
- Il nous reste à espérer que la famille $\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\right)$ est libre. Or pour tous $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$, si jamais : $\lambda\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$, alors clairement $\lambda=\mu=0$.

Exemple Soient $x_1,\dots,x_n\in\mathbb{K}$ distincts. On note $L_1,\dots,L_n$ les polynômes de Lagrange de $x_1,\dots,x_n$. La famille $(L_1,\dots,L_n)$ est une base de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ et les coordonnées d'un polynôme P dans cette base sont $\big(P(x_1),\dots,P(x_n)\big)$.

Démonstration Nous avons en effet démontré au chapitre « Polynômes » que pour tous $P\in\mathbb{K}_{n-1}[X]$ et $y_1,\dots,y_n\in\mathbb{K}$: $\quad P=\displaystyle\sum_{i=1}^n y_iL_i \quad$ si et seulement si $y_i=P(x_i)$ pour tout $i\in[\![1,n]\!]$.

Exemple Pour tous $n\in\mathbb{N}$ et $\lambda\in\mathbb{K}$, la famille $\left(1,X-\lambda,(X-\lambda)^2,\dots,(X-\lambda)^n\right)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$ et les coordonnées d'un polynôme $P\in\mathbb{K}_n[X]$ dans cette base sont données par la formule de Taylor polynomiale : $\quad P=\displaystyle\sum_{i=0}^n\frac{P^{(i)}(\lambda)}{i!}(X-\lambda)^i$.

Démonstration La formule de Taylor polynomiale montre que la famille $\left(1,X-\lambda,(X-\lambda)^2,\dots,(X-\lambda)^n\right)$ engendre $\mathbb{K}_n[X]$.

Pour la liberté, soient $a_0,\dots,a_n\in\mathbb{K}$. Si $\displaystyle\sum_{i=0}^n a_i\,(X-\lambda)^i=0$, alors $\displaystyle\sum_{i=0}^n a_iX^i=0$ après composition à droite par $X+\lambda$, donc $a_0=\ldots=a_n=0$.

Théorème **(Caractérisation des matrices inversibles au moyen de leurs lignes/colonnes)** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) A est inversible.

(ii) La famille des colonnes de A est une base de $\mathbb{K}^n$.

(iii) La famille des lignes de A est une base de $\mathbb{K}^n$.

Démonstration Notons $C_1, C_2, \ldots, C_n$ les colonnes de A et $L_1, \ldots, L_n$ ses lignes. Le point important, c'est que pour tout $X \in \mathbb{K}^n$: $AX = \sum_{k=1}^{n} x_k C_k$. Ainsi :

$$\begin{aligned} A \text{ est inversible} \quad & \Longleftrightarrow \quad \forall Y \in \mathbb{K}^n, \quad \exists!\, X \in \mathbb{K}^n, \quad Y = AX \\ & \Longleftrightarrow \quad \forall Y \in \mathbb{K}^n, \quad \exists!\, (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n, \quad Y = \sum_{k=1}^{n} x_k C_k \quad \Longleftrightarrow \quad (C_1, \ldots, C_n) \text{ est une base de } \mathbb{K}^n. \end{aligned}$$

En retour, les lignes de A n'étant jamais que les colonnes de $A^\top$:

$$A \text{ est inversible} \quad \Longleftrightarrow \quad A^\top \text{ est inversible} \quad \Longleftrightarrow \quad (L_1, \ldots, L_n) \text{ est une base de } \mathbb{K}^n.$$

3 Espaces vectoriels de dimension finie

La notion de dimension fait aujourd'hui partie des meubles en littérature, au cinéma et au-delà. Tout le monde sait qu'une droite ou une même courbe est de dimension 1, qu'un plan ou même une surface est de dimension 2 et que nous vivons dans un espace à trois dimensions. Il n'est pourtant pas aisé de donner un sens rigoureux à ces idées courantes, mais c'est précisément notre but dans ce paragraphe — proposer une définition axiomatique de la dimension et en faire la théorie.

Définition **(Espace vectoriel de dimension finie)** Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On dit que E est *de dimension finie* s'il possède une partie génératrice FINIE, et *de dimension infinie* sinon.

Exemple Les espaces vectoriels $\mathbb{K}^n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{K}_n[X]$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ pour $n, p \in \mathbb{N}^*$ sont de dimension finie.

Démonstration Les bases canoniques de $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}_n[X]$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont des familles génératrices finies !

Exemple $\mathbb{K}[X]$ est de dimension infinie.

Démonstration Pour toute famille FINIE $(P_1, \ldots, P_n)$ de polynômes non nuls, si nous posons $d = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \deg(P_i)$ alors $\operatorname{Vect}(P_1, \ldots, P_n) \subset \mathbb{K}_d[X] \neq \mathbb{K}[X]$, donc $(P_1, \ldots, P_n)$ n'engendre pas $\mathbb{K}[X]$. Conclusion : aucune famille FINIE de $\mathbb{K}[X]$ n'engendre $\mathbb{K}[X]$.

3.1 Existence de bases finies

Dans notre espace physique à trois dimensions, on a du mal à imaginer qu'il puisse exister des familles de strictement plus de trois vecteurs linéairement indépendants. Plus généralement :

Théorème **(Nombre maximal de vecteurs linéairement indépendants)** Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie engendré par n éléments. Alors toute partie libre de E possède au plus n éléments.

Démonstration Soient X une partie génératrice de E à n éléments et Y une partie libre de E. Supposant par l'absurde que Y possède au moins $n+1$ éléments, nous allons prouver par récurrence que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$:

E est engendré par une famille de n vecteurs dont les $n-k$ premiers sont dans X et les k suivants dans Y.

On pourra conclure de la manière suivante. Pour $k = n$, E est engendré par une famille de n vecteurs de Y. En particulier, tout vecteur de Y est combinaison linéaire de ces n vecteurs, donc comme Y possède au moins $n+1$ éléments, Y est liée — contradiction.

Initialisation : La famille des n vecteurs de X engendre E.

Hérédité : Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$. Faisons l'hypothèse que E est engendré par $(x_1, \ldots, x_{n-k}, y_1, \ldots, y_k)$ pour certains $x_1, \ldots, x_{n-k} \in X$ et $y_1, \ldots, y_k \in Y$ — par convention, aucun vecteur de Y pour $k = 0$. Comme Y possède au moins $n+1$ éléments, nous pouvons nous donner un élément y_{k+1} de Y autre que $y_1, \ldots, y_k$. Par hypothèse de récurrence : $y_{k+1} = \big(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_{n-k} x_{n-k}\big) + \big(\mu_1 y_1 + \ldots + \mu_k y_k\big)$ pour certains $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-k}, \mu_1, \ldots, \mu_k \in \mathbb{K}$.

Il est impossible que tous les λ_i soient nuls car y_{k+1} serait combinaison linéaire de $y_1, \ldots, y_k$ — or Y est libre. Quitte à modifier l'ordre des x_i, nous pouvons donc supposer $\lambda_{n-k} \neq 0$. De la sorte, x_{n-k} est combinaison linéaire de $x_1, \ldots, x_{n-k-1}, y_1, \ldots, y_{k+1}$, donc enfin E est engendré par la famille $(x_1, \ldots, x_{n-k-1}, y_1, \ldots, y_{k+1})$ dont les $n-k-1$ premiers vecteurs sont dans X et les $k+1$ suivants dans Y. ■

Après ce premier théorème fondamental, l'*algorithme de la base incomplète* présenté ci-dessous est notre deuxième outil pour montrer l'existence de bases finies en dimension finie.

Théorème (Algorithme de la base incomplète) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $(x_1, \ldots, x_n)$ une famille génératrice de E dont les p premiers vecteurs sont linéairement indépendants. Alors E possède une base constituée des vecteurs $x_1, \ldots, x_p$ et de certains des vecteurs $x_{p+1}, \ldots, x_n$.

Démonstration Dans la preuve qui suit, les valeurs $n = 0$ et $p = 0$ sont autorisées.

- Ce théorème repose sur un algorithme simple et fondamental dit *de la base incomplète*. Nous allons compléter peu à peu la famille LIBRE $(x_1, \ldots, x_p)$ à l'aide de certains vecteurs parmi $x_{p+1}, \ldots, x_n$ en prenant soin de CONSERVER LA LIBERTÉ À CHAQUE AJOUT.
  - — La variable $\mathscr{B}$ est initialisée à la valeur $(x_1, \ldots, x_p)$ — une famille LIBRE.
  - — Ensuite on fait une boucle. Pour k décrivant $[\![p+1, n]\!]$:

    si la famille $\mathscr{B}$ augmentée de x_k est libre, i.e. si x_k N'est PAS combinaison linéaire de $\mathscr{B}$,
    on remplace $\mathscr{B}$ par la famille $\mathscr{B}$ augmentée de x_k — la nouvelle famille $\mathscr{B}$ est donc libre.

    Il n'est pas nécessaire de le préciser dans l'algorithme, mais si la famille $\mathscr{B}$ augmentée de x_k est liée, on laisse $\mathscr{B}$ intacte et on re-boucle directement.

    On a pris soin de conserver la liberté de $\mathscr{B}$ à chaque étape, donc la famille $\mathscr{B}$ finale est libre.
- Il nous reste à montrer que la famille $\mathscr{B}$ finale engendre E. Comme $(x_1, \ldots, x_n)$ engendre E, il nous suffit en fait de montrer que tous les x_k sont combinaisons linéaires de $\mathscr{B}$.

  Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Si tout d'abord x_k apparaît explicitement dans $\mathscr{B}$, alors évidemment x_k est combinaison linéaire de $\mathscr{B}$. Supposons au contraire que x_k ne figure pas dans $\mathscr{B}$. Cela signifie qu'à l'étape x_k de l'algorithme, x_k n'a pas été ajouté à la famille $\mathscr{B}$ en cours de construction parce qu'il était combinaison linéaire de certains vecteurs de $\mathscr{B}$. C'est justement ce que nous voulons. ■

Exemple La famille $\big((1,-5,7), (2,6,8)\big)$ est une base de $F = \mathrm{Vect}\big((1,-5,7), (2,6,8), (3,1,15), (1,11,1)\big)$.

Démonstration On va utiliser mécaniquement l'algorithme de la base incomplète. Petite remarque en passant, on obtiendrait une autre base de F en rangeant dès le départ différemment les vecteurs qui définissent F.

- — La famille $\big((1,-5,7)\big)$ est libre car le vecteur $(1,-5,7)$ est non nul.
- — Et la famille $\big((1,-5,7), (2,6,8)\big)$? Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ des réels pour lesquels $\lambda(1,-5,7) + \mu(2,6,8) = (0,0,0)$. Aussitôt $\lambda + 2\mu = 0$ et $-5\lambda + 6\mu = 0$, donc assez vite $\lambda = \mu = 0$. La famille est libre.
- — Et la famille $\big((1,-5,7), (2,6,8), (3,1,15)\big)$? Elle est liée car $(3,1,15) = (1,-5,7) + (2,6,8)$.
- — Et la famille $\big((1,-5,7), (2,6,8), (1,11,1)\big)$? Elle est liée car $(1,11,1) = (2,6,8) - (1,-5,7)$.

Comme voulu, la famille $\big((1,-5,7), (2,6,8)\big)$ est une base de F.

Théorème (Théorèmes de la base incomplète/extraite et existence de bases finies) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

(i) **Théorème de la base incomplète :** Toute famille libre de E peut être complétée en une base finie de E.

(ii) **Théorème de la base extraite :** De toute famille génératrice de E on peut extraire une base finie de E.

En particulier, E possède une base finie.

La définition « posséder une famille génératrice finie » des espaces vectoriels de dimension finie est ainsi équivalente à la définition « posséder une base finie ».

Démonstration

(i) Soit $\mathscr{L}$ une famille libre de E — forcément finie comme on l'a vu. Ajoutons à cette famille les vecteurs d'une famille génératrice finie de E, puis appliquons l'algorithme de la base incomplète. Le résultat, c'est que $\mathscr{L}$ se trouve ainsi complétée en une base finie de E.

(ii) Soit $\mathscr{G}$ une famille génératrice de E — éventuellement infinie. Par hypothèse, E possède une partie génératrice FINIE X. Tout vecteur de X étant combinaison linéaire d'un nombre FINI de vecteurs de $\mathscr{G}$, E est en fait engendré par une certaine sous-famille FINIE $\mathscr{G}'$ de $\mathscr{G}$. L'algorithme de la base incomplète permet alors de compléter la famille vide en une base de E par l'ajout de certains éléments de $\mathscr{G}'$. La base obtenue est une sous-famille de $\mathscr{G}$.

3.2 Dimension d'un espace vectoriel et rang d'une famille de vecteurs

Intuitivement, on a bien envie de définir la dimension d'un espace vectoriel comme le nombre de vecteurs qu'on trouve dans ses bases, mais... qui nous dit que toutes les bases ont le même nombre de vecteurs ? Pourquoi un espace vectoriel ne pourrait-il pas être à la fois de dimension 2 et de dimension 3 ?

En principe, la notion de *cardinal* concerne les ensembles et les ensembles seulement, mais par abus de langage, une famille $(x_1, \ldots, x_n)$ de n objets est souvent appelée une famille *de cardinal* n, c'est très commode.

Définition-théorème (Dimension) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Les bases de E sont toutes finies de même cardinal. Ce cardinal unique est appelé la *dimension de* E et notée $\dim E$.

Si $\dim E = 1$, on dit que E est une *droite* (*vectorielle*), et si $\dim E = 2$, que E est un *plan* (*vectoriel*).

Démonstration Comme E est de dimension finie, nous savons déjà que les familles libres de E sont finies, donc ses bases aussi. Soient $\mathscr{B}$ une base de E à n éléments et $\mathscr{B}'$ une base de E à n' éléments. Sachant que $\mathscr{B}$ engendre E et que $\mathscr{B}'$ est libre : $n' \leqslant n$, puis $n \leqslant n'$ par symétrie des rôles de $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$, donc $n = n'$.

Exemple Pour tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel E réduit au singleton $\{0_E\}$: $\dim E = 0$.

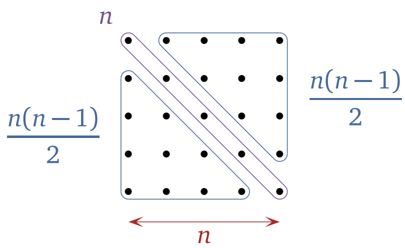
Théorème (Dimension de $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}_n[X]$ et $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\dim \mathbb{K}^n = n$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\dim \mathbb{K}_n[X] = n\boxed{+1}$. Pour tous $n, p \in \mathbb{N}^*$: $\dim \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) = np$.

Démonstration Combien de vecteurs dans la base canonique de chacun de ces $\mathbb{K}$-espaces vectoriels ?

Exemple L'ensemble $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ des matrices symétriques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et l'ensemble $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ de ses matrices antisymétriques sont des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et :

$$\dim \mathscr{S}_n(\mathbb{K}) = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{et} \quad \dim \mathscr{A}_n(\mathbb{K}) = \frac{n(n-1)}{2}.$$



Démonstration Introduisons la base canonique $(E_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Nous admettrons pour gagner du temps que $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

- **Dimension de $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$:** Pour tout $M \in \mathscr{S}_n(\mathbb{K})$: $M = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} m_{ij}E_{ij} = \sum_{k=1}^{n} m_{kk}E_{kk} + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} m_{ij}\big(E_{ij}+E_{ji}\big)$, donc : $\mathscr{S}_n(\mathbb{K}) \subset \mathrm{Vect}\Big(\big\{E_{kk} \mid 1 \leqslant k \leqslant n\big\} \cup \big\{E_{ij}+E_{ji} \mid 1 \leqslant i < j \leqslant n\big\}\Big)$. L'inclusion réciproque est vraie car $E_{kk} \in \mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ et $E_{ij}+E_{ji} \in \mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ pour tous $i, j, k \in [\![1, n]\!]$ pour lesquels $i < j$, et parce que $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, donc est stable par combinaison linéaire. La famille des matrices E_{kk} et $E_{ij}+E_{ji}$ ainsi obtenue est finalement génératrice de $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ et il n'est pas dur de se convaincre qu'elle est libre, donc qu'elle est une base de $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$. Combien contient-elle de vecteurs ? Il y a n vecteurs E_{kk} et $\frac{n(n-1)}{2}$ vecteurs $E_{ij}+E_{ji}$ pour lesquels $i<j$, donc $\dim \mathscr{S}_n(\mathbb{K}) = n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$.
- **Dimension de $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$:** Même principe, mais ici $\mathscr{A}_n(\mathbb{K}) = \mathrm{Vect}\big(E_{ij}-E_{ji}\big)_{1\leqslant i<j\leqslant n}$.

Théorème (Dimension et cardinal d'une partie libre/génératrice) Dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, toute partie libre possède au plus n éléments et toute partie génératrice en possède au moins n.

Démonstration Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. Alors E possède une base $\mathscr{B}$ de cardinal n. Pour toute partie libre Y de E, sachant que $\mathscr{B}$ engendre E, nous avons déjà vu que Y possède au plus n éléments. De même, pour toute partie génératrice X de E, sachant que $\mathscr{B}$ est libre, $\mathscr{B}$ possède au plus autant d'éléments que X, de sorte que X possède au moins n éléments.

Théorème (Caractérisation des bases en dimension finie) Dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, une famille de n vecteurs est une base si et seulement si elle est libre, ou bien si et seulement si elle est génératrice.

Attention ! Ce théorème ne dit pas que : base = famille génératrice = famille libre en dimension finie ! Il dit seulement que c'est vrai pour les familles qui ont EXACTEMENT AUTANT de vecteurs que la dimension de l'espace ambiant.

Démonstration Dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, si une famille $\mathscr{F}$ de n vecteurs est libre (resp.génératrice), on peut la compléter en une base d'après le théorème de la base incomplète (resp. en extraire une base d'après le théorème de la base extraite). Le résultat est une famille de n vecteurs par définition de la dimension, ce qui veut dire qu'on n'a en fait ajouté (resp. ôté) aucun vecteur à $\mathscr{F}$. Conclusion : $\mathscr{F}$ était une base dès le départ !

Exemple La famille $\big((0,1,2),(1,2,0),(2,0,1)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Démonstration Comme $\mathbb{R}^3$ est de dimension 3 et comme la famille considérée est une famille de trois vecteurs, nous saurons que cette famille est une base de $\mathbb{R}^3$ quand nous aurons montré qu'elle est libre. Soient $\lambda,\mu,\nu\in\mathbb{R}$ des réels pour lesquels $\lambda(0,1,2)+\mu(1,2,0)+\nu(2,0,1)=(0,0,0)$. Clairement $\lambda=\mu=\nu=0$ et c'est tout.

Le théorème suivant, étonnant et puissant, complète nos connaissances du chapitre « Matrices et systèmes linéaires ».

Théorème (Caractérisations diverses de l'inversibilité) Soit $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) A est inversible.

(ii) A est *inversible à droite* : $\exists B\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K}),\quad AB=I_n$.

(iii) A est *inversible à gauche* : $\exists B\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K}),\quad BA=I_n$.

(iv) Pour tout second membre $Y\in\mathbb{K}^n$, le système linéaire $Y=AX$ d'inconnue $X\in\mathbb{K}^n$ possède AU MOINS UNE solution.

(v) Le système linéaire homogène $AX=0$ d'inconnue $X\in\mathbb{K}^n$ admet 0 pour UNIQUE solution :
$$\forall X\in\mathbb{K}^n,\quad AX=0\quad\Longrightarrow\quad X=0.$$

Il n'est pas anodin que l'une seulement des relations $AB=I_n$ ou $BA=I_n$ implique l'inversibilité de A, et donc l'égalité $B=A^{-1}$. Dans la définition de l'inversibilité, les deux relations étaient nécessaires.

Ensuite, nous connaissions déjà une caractérisation de l'inversibilité en termes de systèmes linéaires. Elle ressemblait à l'assertion (iv), mais avec « une et une seule » à la place de « au moins une ». Enfin, grâce à l'assertion (v), l'unicité de la solution du système homogène démontre à elle seule l'inversibilité — pas besoin des autres seconds membres. C'est très fort.

Démonstration Notons $C_1,\dots,C_n$ les colonnes de A. La matrice A étant CARRÉE, la famille $(C_1,\dots,C_n)$ est une base de $\mathbb{K}^n$ si et seulement si elle est libre (ou génératrice) d'après le théorème précédent. Le reste n'est qu'un jeu de réécriture.

- Les implications (i) $\Longrightarrow$ (ii) et (i) $\Longrightarrow$ (iii) sont triviales.
- Si l'assertion (ii) est vraie, alors pour tout $Y\in\mathbb{K}^n$: $A(BY)=(AB)Y=I_nY=Y$, donc le système $Y=AX$ d'inconnue $X\in\mathbb{K}^n$ possède au moins une solution. Bref : (ii) $\Longrightarrow$ (iv).
- Supposons (iii) vraie. Pour tout $X\in\mathbb{K}^n$, si $AX=0$: $X=I_nX=(BA)X=B(AX)=B\times0=0$, donc 0 est la seule solution du système homogène $AX=0$ d'inconnue $X\in\mathbb{K}^n$. Bref : (iii) $\Longrightarrow$ (v).
- Ensuite :
$$\begin{aligned}\text{(iv)}\quad&\Longleftrightarrow\quad \forall Y\in\mathbb{K}^n,\quad \exists X\in\mathbb{K}^n,\quad Y=AX\\&\Longleftrightarrow\quad \forall Y\in\mathbb{K}^n,\quad \exists(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{K}^n,\quad Y=\sum_{k=1}^n x_kC_k\\&\Longleftrightarrow\quad (C_1,\dots,C_n)\text{ engendre }\mathbb{K}^n\\&\Longleftrightarrow\quad (C_1,\dots,C_n)\text{ est une base de }\mathbb{K}^n\quad\Longleftrightarrow\quad\text{(i)}.\end{aligned}$$

- De même : (v) $\iff \forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n, \quad \left(\sum_{k=1}^n x_k C_k = 0 \implies x_1 = \ldots = x_n = 0 \right)$
  $\iff (C_1, \ldots, C_n)$ est libre
  $\iff (C_1, \ldots, C_n)$ est une base de $\mathbb{K}^n \iff$ (i).

Exemple Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Si AB est combinaison linéaire de A et B sans être colinéaire à A ou B, alors A et B commutent.

Démonstration Par hypothèse : $AB = \lambda A + \mu B$ pour certains $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ NON NULS, donc :

$$(A - \mu I_n)(B - \lambda I_n) = AB - \lambda A - \mu B + \lambda \mu I_n = \lambda \mu I_n,$$

donc comme λ et μ sont non nuls, les matrices $A - \mu I_n$ et $B - \lambda I_n$ sont inverses l'une de l'autre. Il en découle que $(B - \lambda I_n)(A - \mu I_n) = \lambda \mu I_n$ dans l'autre sens, i.e. que $BA = \lambda A + \mu B = AB$.

Définition (Rang d'une famille finie de vecteurs) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pas nécessairement de dimension finie et $x_1, \ldots, x_n \in E$. On appelle *rang* de la famille $(x_1, \ldots, x_n)$, noté $\text{rg}(x_1, \ldots, x_n)$, la dimension (finie) de $\text{Vect}(x_1, \ldots, x_n)$.

Il est toujours vrai que $\text{rg}(x_1, \ldots, x_n) \leqslant n$, avec égalité si et seulement si $(x_1, \ldots, x_n)$ est libre.

Le rang d'une famille finie de vecteurs est le plus grand nombre de vecteurs linéairement indépendants qu'elle contient.

Démonstration Engendré par un nombre fini de vecteurs, $\text{Vect}(x_1, \ldots, x_n)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et comme la dimension est toujours inférieure au nombre d'éléments d'une partie génératrice : $\text{rg}(x_1, \ldots, x_n) = \dim \text{Vect}(x_1, \ldots, x_n) \leqslant n$. Pour le cas d'égalité, nous venons de voir qu'en dimension n, une famille de n vecteurs est libre si et seulement si elle est génératrice.

Exemple $\text{rg}(1, X, X^2, X^3) = 4$, $\text{rg}(X, 2X, 3X) = 1$, $\text{rg}\big((1,1,0), (0,0,1)\big) = 2$ et $\text{rg}\big((1,1,0), (0,0,1), (1,1,1)\big) = 2$.

Théorème (Dimension d'un sous-espace vectoriel) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E.

Alors F est de dimension finie et $\dim F \leqslant \dim E$, avec égalité si et seulement si $F = E$.

Démonstration L'ensemble $\mathscr{N}$ des nombres d'éléments des familles libres de F est non vide et majoré par $\dim E$ car d'une part la famille vide est libre, et d'autre part, toute famille libre de F est une famille libre de E, donc constituée d'au plus $\dim E$ vecteurs. Conclusion : $\mathscr{N}$ possède un plus grand élément n inférieur ou égal à $\dim E$.

Donnons-nous alors une famille libre $\mathscr{L}$ de F à n éléments. Pour tout $x \in F$, la famille $\mathscr{L}$ augmentée de x est liée par maximalité de n dans $\mathscr{N}$, donc comme $\mathscr{L}$ est libre, x est forcément combinaison linéaire de $\mathscr{L}$. Conclusion : libre et génératrice, $\mathscr{L}$ est une base de F, donc enfin F est de dimension finie et $\dim F = n \leqslant \dim E$.

Et si $\dim F = \dim E = n$? Dans ce cas, $\mathscr{L}$ est une famille libre de E à $n = \dim E$ éléments, donc c'est déjà une base de E et $E = \text{Vect}(\mathscr{L}) = F$.

Un petit exemple pour comprendre la preuve du théorème suivant.

Exemple La famille $\big((1,0), (X,0), (X^2,0), (0,1), (0,X)\big)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_1[X]$ — les coordonnées d'un vecteur quelconque $\big(aX^2 + bX + c\ ,\ dX + e\big)$ dans cette base sont (c, b, a, e, d).

Théorème (Dimension d'un espace vectoriel produit) Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. Alors $E \times F$ est de dimension finie et : $\dim(E \times F) = \dim E + \dim F$.

Le résultat se généralise au cas d'un nombre fini quelconque d'espaces vectoriels.

Démonstration Donnons-nous $(e_1, \ldots, e_m)$ une base de E et $(f_1, \ldots, f_n)$ une base de F — éventuellement vides. Nous allons montrer que la famille $\mathscr{B} = \big((e_1, 0_F), \ldots, (e_m, 0_F), (0_E, f_1), \ldots, (0_E, f_n)\big)$ est une base de $E \times F$. Cela montrera bien que $E \times F$ est de dimension finie $m + n = \dim E + \dim F$.

- Montrons que $\mathscr{B}$ engendre $E\times F$. Pour tout $(x,y)\in E\times F$, si nous notons $(x_1,\ldots,x_m)$ les coordonnées de x dans $(e_1,\ldots,e_m)$ et $(y_1,\ldots,y_n)$ celles de y dans $(f_1,\ldots,f_n)$, alors :
$$(x,y)=\left(\sum_{i=1}^m x_ie_i\ ,\ \sum_{j=1}^n y_jf_j\right)=\sum_{i=1}^m x_i\,(e_i,0_F)+\sum_{j=1}^n y_j\,(0_E,f_j).$$
- Pour la liberté, soient $\lambda_1,\ldots,\lambda_m,\mu_1,\ldots,\mu_n\in\mathbb{K}$ pour lesquels $\displaystyle\sum_{i=1}^m\lambda_i\,(e_i,0_F)+\sum_{j=1}^n\mu_j\,(0_E,f_j)=(0_E,0_F)$. Alors $\displaystyle\left(\sum_{i=1}^m\lambda_ie_i\ ,\ \sum_{j=1}^n\mu_jf_j\right)=(0_E,0_F)$, donc $\displaystyle\sum_{i=1}^m\lambda_ie_i=0_E$ et $\displaystyle\sum_{j=1}^n\mu_jf_j=0_F$, et enfin par liberté de $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant m}$ et $(f_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$: $\quad\lambda_1=\ldots=\lambda_m=\mu_1=\ldots=\mu_n=0.$

Rappelons qu'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel peut toujours être vu comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel par simple restriction des scalaires.

Théorème (Dimension sur $\mathbb{C}$, dimension sur $\mathbb{R}$) Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie.
Alors : $\quad\dim_{\mathbb{R}}E=2\times\dim_{\mathbb{C}}E,\quad$ où $\dim_{\mathbb{C}}E$ (resp. $\dim_{\mathbb{R}}E$) désigne la dimension de E comme $\mathbb{C}$-espace vectoriel (resp. $\mathbb{R}$-espace vectoriel).

Se donner un complexe, c'est au fond se donner deux réels. Il faut donc deux fois plus de coordonnées réelles que de coordonnées complexes pour connaître entièrement un vecteur d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie.

Démonstration Donnons-nous une base $(e_1,\ldots,e_n)$ du $\mathbb{C}$-espace vectoriel E — éventuellement vide. Nous allons montrer que $(e_1,\mathrm{i}e_1,\ldots,e_n,\mathrm{i}e_n)$ est une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel E.

- Pour le caractère générateur, soit $x\in E$ de coordonnées $(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{C}^n$ dans $(e_1,\ldots,e_n)$. Le vecteur x est bien combinaison linéaire de $e_1,\mathrm{i}e_1,\ldots,e_n,\mathrm{i}e_n$ car $\displaystyle x=\sum_{i=1}^n x_ie_i=\sum_{i=1}^n\mathrm{Re}(x_i)\,e_i+\sum_{i=1}^n\mathrm{Im}(x_i)\,\mathrm{i}e_i$.
- Pour la liberté, soient $\lambda_1,\mu_1,\ldots,\lambda_n,\mu_n\in\mathbb{R}$ pour lesquels $\displaystyle\sum_{i=1}^n\lambda_ie_i+\sum_{i=1}^n\mu_i\mathrm{i}e_i=0_E$. Ainsi $\displaystyle\sum_{i=1}^n(\lambda_i+\mathrm{i}\mu_i)e_i=0_E$, or $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est libre dans le $\mathbb{C}$-espace vectoriel E, donc $\lambda_i+i\mu_i=0$ pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, donc comme voulu $\lambda_i=\mu_i=0$.

Exemple Nous savons bien que $\dim_{\mathbb{C}}\mathbb{C}^2=2$ car la base canonique de $\mathbb{C}^2$ comme $\mathbb{C}$-espace vectoriel est de cardinal 2, mais par contre $\dim_{\mathbb{R}}\mathbb{C}^2=4$ car la famille $\big((1,0),(\mathrm{i},0),(0,1),(0,\mathrm{i})\big)$ est une base de $\mathbb{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

Définition (Dimension d'un sous-espace affine) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathscr{F}$ un sous-espace affine de E de direction F. On dit que $\mathscr{F}$ est *de dimension finie* si F l'est et la dimension de F est alors appelée la *dimension de* $\mathscr{F}$.

3.3 Matrice d'une famille de vecteurs dans une base

Définition (Matrice d'une famille finie de vecteurs dans une base finie)

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n\neq 0$, $\mathscr{B}=(e_1,\ldots,e_n)$ une base de E et $\mathscr{X}=(x_1,\ldots,x_p)$ une famille finie de vecteurs de E avec $p\geqslant 1$.

Pour tout $j\in[\![1,p]\!]$ on note $(a_{1j},\ldots,a_{nj})$ les coordonnées de x_j dans $\mathscr{B}$.

La matrice $\big(a_{ij}\big)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$, notée $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{X})$, est alors appelée *matrice de $\mathscr{X}$ dans $\mathscr{B}$*.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} x_1 & & x_j & & x_p \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \end{array} \\ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{X})= & \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1p}\\ \vdots & & \vdots & & \vdots\\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{ip}\\ \vdots & & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{np}\end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow e_1 \\ \\ \leftarrow e_i \\ \\ \leftarrow e_n \end{array} \end{array}$$

Coordonnées de x_j dans $\mathscr{B}$ écrites en colonne

On connaît tout d'un vecteur quand on connaît ses coordonnées dans une base. Plus généralement, on connaît donc tout d'une famille de vecteurs quand on connaît sa matrice dans une base. Ramener un vecteur à ses coordonnées ou une famille de vecteurs à sa matrice dans une base, c'est en quelque sorte les désincarner pour n'en garder qu'un squelette numérique. Qu'on ait affaire à des vecteurs de $\mathbb{R}^n$, des polynômes, des fonctions, des suites, toute information peut être numérisée matriciellement.

Exemple Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $\mathscr{B}$ une base de E. Alors pour tout $x \in E$, $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x)$ est tout simplement la colonne des coordonnées de x dans $\mathscr{B}$.

Exemple Si on note $\mathscr{B}_4$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$: $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_4}\big((1,0,3,1),(2,-1,0,-1)\big) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 3 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Exemple $\mathrm{Mat}_{(1,X,X^2)}\big(3X^2+2X+1, X, X^2-X\big) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{Mat}_{(X^2,X,1)}\big(3X^2+2X+1, X^2-X, X\big) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Théorème (Matrice des colonnes dans la base canonique) Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ de colonnes $C_1, \ldots, C_p$. En notant $\mathscr{B}_n$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$: $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_n}(C_1, \ldots, C_p)$.

Démonstration Réfléchissez, il suffit d'appliquer scrupuleusement la définition.

Théorème (Interprétation vectorielle de l'inversibilité, cas des familles de vecteurs) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \neq 0$, $\mathscr{B}$ une base de E et $\mathscr{F}$ une famille de n vecteurs de E. Alors $\mathscr{F}$ est une base de E si et seulement si $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{F})$ est inversible.

Démonstration Posons $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{F})$ et introduisons les vecteurs de $\mathscr{B}$ et $\mathscr{F}$: $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ et $\mathscr{F} = (f_1, \ldots, f_n)$. Alors pour tout $X \in \mathbb{K}^n$: $\displaystyle\sum_{j=1}^n x_j f_j = \sum_{j=1}^n x_j \sum_{i=1}^n a_{ij} e_i = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right) e_i = \sum_{i=1}^n (AX)_i\, e_i$. Le reste n'est qu'un jeu de réécriture.

$$\begin{aligned}
\mathscr{F} \text{ est une base de } E \quad &\iff \quad \forall y \in E, \quad \exists!\,(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n, \quad y = \sum_{j=1}^n x_j f_j \\
&\iff \quad \forall y \in E, \quad \exists!\, X \in \mathbb{K}^n, \quad y = \sum_{i=1}^n (AX)_i\, e_i \\
&\iff \quad \forall Y \in \mathbb{K}^n, \quad \exists!\, X \in \mathbb{K}^n, \quad \sum_{i=1}^n y_i e_i = \sum_{i=1}^n (AX)_i\, e_i \qquad \text{car } \mathscr{B} \text{ engendre } E \\
&\iff \quad \forall Y \in \mathbb{K}^n, \quad \exists!\, X \in \mathbb{K}^n, \quad \forall i \in [\![1,n]\!], \quad y_i = (AX)_i \qquad \text{car } \mathscr{B} \text{ est libre} \\
&\iff \quad \forall Y \in \mathbb{K}^n, \quad \exists!\, X \in \mathbb{K}^n, \quad Y = AX \quad \iff \quad A \text{ est inversible.}
\end{aligned}$$

Exemple La famille $\big(X^2+3X+5, 2X^2+X, X^2\big)$ de $\mathbb{R}[X]$ est libre.

Démonstration C'est même une base de $\mathbb{R}_2[X]$ car $\mathrm{Mat}_{(1,X,X^2)}\big(X^2+3X+5, 2X^2+X, X^2\big) = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ est triangulaire à coefficients diagonaux non nuls, donc inversible !

4 Sommes de deux sous-espaces vectoriels

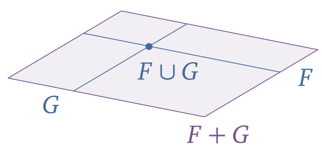
4.1 Définition et formule de Grassmann

Définition-théorème (Somme de deux sous-espaces vectoriels) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. L'ensemble $F+G = \big\{ f+g \mid f \in F \text{ et } g \in G \big\}$ est un sous-espace vectoriel de E appelé la *somme de F et G*.

Cette somme $F+G$ est également le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant F et G. Cela signifie que tout sous-espace vectoriel de E contenant F et G contient aussi $F+G$.

Démonstration Vous montrerez seuls que $F+G$ est un sous-espace vectoriel de E. Précisons seulement pourquoi $F+G$ contient F et G. Tout simplement, 0_E est à la fois dans F et dans G, donc pour tous $f \in F$ et $g \in G$: $f = f + 0_E \in F+G$ et $g = 0_E + g \in F+G$.

Attention ! Ne confondez pas SOMME et RÉUNION ! La somme est un sous-espace vectoriel, mais pas la réunion en général.



Exemple Les droites vectorielles $F=\mathrm{Vect}\big((1,0,0)\big)$ et $G=\mathrm{Vect}\big((0,1,0)\big)$ ont pour somme le plan d'équation $z=0$.

Démonstration $$F+G=\Big\{(x,0,0)\ \big|\ \ x\in\mathbb{R}\Big\}+\Big\{(0,y,0)\ \big|\ \ y\in\mathbb{R}\Big\}=\Big\{(x,0,0)+(0,y,0)\ \big|\ \ x,y\in\mathbb{R}\Big\}=\Big\{(x,y,0)\ \big|\ \ x,y\in\mathbb{R}\Big\}=\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\big\{0\big\}.$$

Théorème (Parties génératrices d'une somme de deux sous-espaces vectoriels) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E et X et Y deux parties de E.

Alors : $\mathrm{Vect}(X\cup Y)=\mathrm{Vect}(X)+\mathrm{Vect}(Y)$.

En d'autres termes, si X engendre F et si Y engendre G, alors $X\cup Y$ engendre $F+G$.

Démonstration Pour commencer, $\mathrm{Vect}(X\cup Y)$ est un sous-espace vectoriel contenant X et Y, donc il contient $\mathrm{Vect}(X)$ et $\mathrm{Vect}(Y)$, mais donc aussi $\mathrm{Vect}(X)+\mathrm{Vect}(Y)$. Inversement, $\mathrm{Vect}(X)+\mathrm{Vect}(Y)$ est un sous-espace vectoriel contenant $\mathrm{Vect}(X)$ donc X, et $\mathrm{Vect}(Y)$ donc Y, donc il contient $X\cup Y$, donc aussi $\mathrm{Vect}(X\cup Y)$. ■

✖ **Attention !** Le théorème précédent nous parle d'engendrement, **MAIS PAS DE LIBERTÉ**. Si X engendre F et si Y engendre G, alors $X\cup Y$ engendre $F+G$, mais si de plus X et Y sont libres, on ne peut rien dire en général de la liberté de $X\cup Y$. Pourquoi ? Parce que les vecteurs de $F\cap G$ sont à la fois combinaisons linéaires de X **ET** combinaisons linéaires de Y. La *formule de Grassmann* mesure précisément ce phénomène.

Théorème (Formule de Grassmann) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pas nécessairement de dimension finie et F et G deux sous-espaces vectoriels de dimension finie de E. La somme $F+G$ est alors elle aussi de dimension finie, et plus précisément :
$$\dim(F+G)=\dim F+\dim G-\dim(F\cap G).$$

Démonstration Toute base $(e_1,\ldots,e_p)$ de $F\cap G$ peut être complétée en une base $(e_1,\ldots,e_p,f_1,\ldots,f_q)$ de F et en une base $(e_1,\ldots,e_p,g_1,\ldots,g_r)$ de G — avec éventuellement p, q ou r nul. Par concaténation, la famille $(e_1,\ldots,e_p,f_1,\ldots,f_q,g_1,\ldots,g_r)$ engendre alors $F+G$, donc $F+G$ est de dimension finie. Et si nous montrons que la famille $(e_1,\ldots,e_p,f_1,\ldots,f_q,g_1,\ldots,g_r)$ est aussi libre, ce sera une base de $F+G$ et la formule de Grassmann en découlera : $\dim(F+G)=p+q+r=(p+q)+(p+r)-p=\dim F+\dim G-\dim(F\cap G)$.

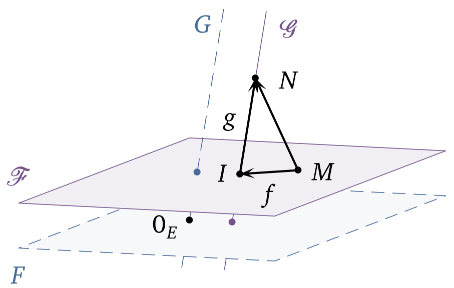
Soient donc $\lambda_1,\ldots,\lambda_p,\mu_1,\ldots,\mu_q,\nu_1,\ldots,\nu_r\in\mathbb{K}$ des scalaires pour lesquels :
$$\underbrace{\underbrace{\lambda_1e_1+\ldots+\lambda_pe_p}_{\in F\cap G}+\underbrace{\mu_1f_1+\ldots+\mu_qf_q}_{\in F}}_{\in F}+\underbrace{\nu_1g_1+\ldots+\nu_rg_r}_{\in G}=0_E.$$

— D'après les accolades ci-dessus, $\nu_1g_1+\ldots+\nu_rg_r$ appartient à $F\cap G$, donc est combinaison linéaire de $e_1,\ldots,e_p$. Par liberté de $(e_1,\ldots,e_p,f_1,\ldots,f_q)$, il en découle que $\mu_1=\ldots=\mu_q=0$.

— En retour $\lambda_1e_1+\ldots+\lambda_pe_p+\nu_1g_1+\ldots+\nu_rg_r=0_E$, donc $\lambda_1=\ldots=\lambda_p=\nu_1=\ldots=\nu_r=0$ par liberté de $(e_1,\ldots,e_p,g_1,\ldots,g_r)$. ■

Théorème (Intersection de deux sous-espaces affines) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ deux sous-espaces affines de E de directions respectives F et G. Si $E=F+G$, alors $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ sont concourants.

✖ **Attention !** Alors qu'une intersection de sous-espaces vectoriels contient toujours le vecteur nul, une intersection de sous-espaces affines peut vraiment être vide, pensez par exemple au cas de deux droites de l'espace en position générale.



Démonstration Tout sous-espace affine étant non vide, nous pouvons nous donner deux éléments M de $\mathscr{F}$ et N de $\mathscr{G}$. Le vecteur $\overrightarrow{MN}=N-M$ appartient à $E=F+G$, donc $\overrightarrow{MN}=N-M=f+g$ pour certains $f\in F$ et $g\in G$, autrement dit $M+f=N-g$. Finalement $I\in\mathscr{F}\cap\mathscr{G}$ pour $I=M+f=N-g$, donc $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ sont concourants. ■

4.2 Somme directe

Définition **(Somme directe de deux sous-espaces vectoriels)** Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On dit que F et G sont *en somme directe* si la décomposition d'un vecteur de $F+G$ comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G est toujours unique, ce qui revient à dire que :

$$\forall f, f' \in F, \quad \forall g, g' \in G, \qquad \Big(f+g = f'+g' \quad \Longrightarrow \quad f = f' \quad \text{et} \quad g = g' \Big).$$

On note alors $F \oplus G$ la somme $F+G$ pour indiquer qu'il y a somme directe.

Le petit rond qu'on ajoute à la notation $F+G$ pour indiquer que la somme est directe ne fait pas de $F+G$ et $F \oplus G$ des ensembles différents, la notation $F \oplus G$ contient juste une INFORMATION d'unicité en plus.

Théorème **(Caractérisation et dimension de la somme directe de deux sous-espaces vectoriels)** Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) F et G sont en somme directe. (ii) $F \cap G = \{0_E\}$.

Dans ce cas, par ailleurs, si F et G sont de dimension finie : $\dim(F+G) = \dim F + \dim G$.

Démonstration

(i) $\Longrightarrow$ (ii) Supposons F et G en somme directe. Pour tout $x \in F \cap G$: $x = \overbrace{x}^{\in F} + \overbrace{0_E}^{\in G} = \overbrace{0_E}^{\in F} + \overbrace{x}^{\in G}$, donc $x = 0_E$ par définition de la somme directe.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) Supposons $F \cap G = \{0_E\}$. Soient $f, f' \in F$ et $g, g' \in G$ des vecteurs pour lesquels $f+g = f'+g'$. Alors $f - f' = g' - g \in F \cap G = \{0_E\}$, donc en effet $f = f'$ et $g = g'$.

La formule $\dim(F+G) = \dim F + \dim G$ n'est enfin qu'un cas particulier de la formule de Grassmann.

Exemple Dans $\mathbb{R}^3$, le plan $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z = 0\}$ et la droite $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = z\}$ sont en somme directe.

Démonstration Vous vérifierez seuls que F et G sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ — par exemple en les écrivant comme des Vect. Montrons que $F \cap G = \{(0,0,0)\}$. Pour tout $(x,y,z) \in F \cap G$: $x+y+z = 0$ et $x = y = z$, donc $x = y = z = 0$, i.e. $(x,y,z) = (0,0,0)$.

Théorème **(Construction d'une somme directe à partir d'une famille libre)** Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(x_i)_{i\in I}$ une famille libre de vecteurs de E. On partitionne I en deux parties I_1 et I_2 disjointes pour lesquelles $I = I_1 \cup I_2$. Les sous-espaces vectoriels $\text{Vect}(x_i)_{i\in I_1}$ et $\text{Vect}(x_i)_{i\in I_2}$ de E sont alors en somme directe.

Démonstration Soit $x \in F_1 \cap F_2$. Ce vecteur peut être écrit $x = \sum_{i\in I_1} \lambda_i x_i = \sum_{j\in I_2} \mu_j x_j$ pour certaines familles $(\lambda_i)_{i\in I_1} \in \mathbb{K}^{I_1}$ et $(\mu_j)_{j\in I_2} \in \mathbb{K}^{I_2}$ presque nulles. La liberté de la famille $(x_i)_{i\in I}$ implique aussitôt que $\lambda_i = 0$ et $\mu_j = 0$ pour tous $i \in I$ et $j \in J$, et ainsi $x = 0_E$.

Théorème **(Bases d'une somme directe de deux sous-espaces vectoriels)** Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On suppose que F possède une base $\mathscr{B}$ et G une base $\mathscr{C}$. Si F et G sont en somme directe, alors la concaténation des familles $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ est une base de $F \oplus G$.

Une telle base dont les premiers vecteurs forment une base de F et les suivants une base de G est dite *adaptée à la somme directe $F \oplus G$*.

Démonstration Introduisons les vecteurs de $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$: $\mathscr{B} = (b_i)_{i\in I}$ et $\mathscr{C} = (c_j)_{j\in J}$. La liberté seule reste à prouver. Soient $(\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I$ et $(\mu_j)_{j\in J} \in \mathbb{K}^J$ presque nulles. On suppose que $\sum_{i\in I} \lambda_i b_i + \sum_{j\in J} \mu_j c_j = 0_E$.

Il s'agit là d'une décomposition de 0_E comme somme d'un élément de F et d'un élément de G, donc comme la somme est directe : $\sum_{i\in I} \lambda_i b_i = \sum_{j\in J} \mu_j c_j = 0_E$. Aussitôt, $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ étant libres : $\lambda_i = 0$ et $\mu_j = 0$ pour tous $i \in I$ et $j \in J$.

4.3 Supplémentaires d'un sous-espace vectoriel

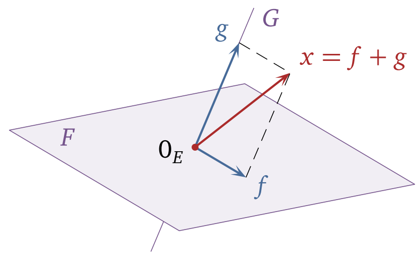
Définition (Sous-espaces vectoriels supplémentaires) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) Tout vecteur de E est d'une et une seule manière la somme d'un élément de F et d'un élément de G :
$$\forall x \in E, \quad \exists!\,(f,g) \in F \times G, \quad x = f + g.$$

(ii) E est la somme directe de F et G : $\quad E = F \oplus G, \quad$ ce qui revient à dire que $E = F + G$ **ET** que F et G sont en somme directe.

On dit dans ces conditions que F et G sont *supplémentaires dans* E. On dit aussi que F est **UN** *supplémentaire de* G *dans* E et que G est **UN** *supplémentaire de* F *dans* E.

Deux sous-espaces vectoriels F et G sont supplémentaires dans E si leur somme couvre E **ET** s'ils sont le plus possible « séparés » l'un de l'autre, i.e. si leur somme est la plus grande possible et leur intersection la plus petite possible. On a l'habitude, pour se représenter géométriquement deux tels sous-espaces vectoriels, de faire des figures valables dans $\mathbb{R}^3$ censées illustrer le cas général.



Attention !

- Ne confondez pas « en somme directe » et « supplémentaires dans E ».

  Dire que F et G sont en somme directe, c'est affirmer que tout vecteur de E a **AU PLUS UNE** décomposition comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G. Pour être précis, les vecteurs de $F+G$ ont alors exactement une décomposition de cette forme tandis que les éléments de $E \setminus (F+G)$ n'en ont pas. Dire que F et G sont supplémentaires dans E, c'est affirmer en plus que $E = F + G$, c'est donc affirmer que tout vecteur de E possède **EXACTEMENT UNE** décomposition comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G.

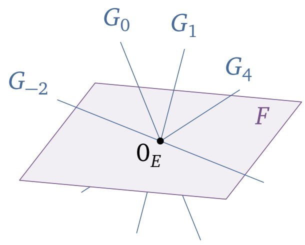
- Un sous-espace vectoriel possède-t-il toujours un supplémentaire ? La réponse est oui, mais nous le démontrerons un peu plus loin seulement en dimension finie.

- Il est interdit de parler « du » supplémentaire d'un sous-espace vectoriel en général, faute d'unicité. Un exemple ci-dessous illustre cette remarque.

- Ne confondez pas « supplémentaire » et « complémentaire », ces notions n'ont rien de commun. Alors qu'il n'y a pas d'unicité pour la supplémentarité, il y a au contraire unicité du complémentaire. De plus, alors qu'un supplémentaire est un sous-espace vectoriel, le complémentaire d'un sous-espace vectoriel ne contient même pas le vecteur nul.

Exemple Deux droites **NON CONFONDUES** passant par $(0,0)$ sont toujours supplémentaires dans $\mathbb{R}^2$. Et si P est un plan de $\mathbb{R}^3$ passant par $(0,0,0)$ et D une droite de $\mathbb{R}^3$ passant aussi par $(0,0,0)$ **ET NON CONTENUE DANS** P, alors P et D sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

Exemple Pour tout $\varepsilon \neq -2$, la droite $G_\varepsilon = \mathrm{Vect}\big((1,\varepsilon,1)\big)$ est un supplémentaire de $F = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\Big|\; x+y+z=0\Big\}$ dans $\mathbb{R}^3$.



Démonstration Soit $\varepsilon \neq -2$. Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Montrons que (x,y,z) est d'une unique manière la somme d'un élément de F et d'un élément de G_ε. Pour tous $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{c} (x,y,z) = (a,b,c) + \lambda(1,\varepsilon,1) \\ \text{et} \quad (a,b,c) \in F \end{array} \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} a & & & & & + & \lambda & = & x \\ & & b & & & + & \varepsilon\lambda & = & y \\ & & & & c & + & \lambda & = & z \\ a & + & b & + & c & & & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rrrcrcl} a & & & + & \lambda & = & x \\ & b & & + & \varepsilon\lambda & = & y \\ & & c & + & \lambda & = & z \\ & & & & (2+\varepsilon)\lambda & = & x+y+z. \end{array}\right.$$

$$L_4 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3 - L_4$$

Comme $\varepsilon \neq -2$, ce système triangulaire à coefficients diagonaux non nuls possède une et une seule solution.

Exemple L'ensemble $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ des matrices symétriques et l'ensemble $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ des matrices antisymétriques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ sont supplémentaires dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Démonstration Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Nous voulons montrer ceci : $\quad \exists!\,(S,A) \in \mathscr{S}_n(\mathbb{K}) \times \mathscr{A}_n(\mathbb{K}), \quad M = S + A.$

- **Analyse :** Soient $S \in \mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ et $A \in \mathscr{A}_n(\mathbb{K})$. Si $M = S + A$, alors $M^\top = S^\top + A^\top = S - A$, donc par demi-somme et demi-différence : $\quad S = \dfrac{M + M^\top}{2} \quad$ et $\quad A = \dfrac{M - M^\top}{2}$.

- **Synthèse :** Posons $S = \dfrac{M+M^\top}{2}$ et $A = \dfrac{M-M^\top}{2}$. Alors $M = S+A$ et S est symétrique et A antisymétrique car : $\quad S^\top = \left(\dfrac{M+M^\top}{2}\right)^\top = \dfrac{M^\top+M}{2} = S \quad$ et $\quad A^\top = \left(\dfrac{M-M^\top}{2}\right)^\top = \dfrac{M^\top-M}{2} = -A.$

Exemple Pour tout $A \in \mathbb{K}[X]$ non nul de degré n : $\quad \mathbb{K}[X] = A\mathbb{K}[X] \oplus \mathbb{K}_{n-1}[X] \quad$ où $A\mathbb{K}[X] = \big\{AQ \mid \ Q \in \mathbb{K}[X]\big\}$.

Démonstration Il s'agit de montrer que : $\quad \forall P \in \mathbb{K}[X], \quad \exists!\,(Q,R) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}_{n-1}[X], \quad P = AQ+R.$ C'est ni plus ni moins le théorème de la division euclidienne recuisiné à la sauce linéaire.

Théorème (Existence de supplémentaires en dimension finie) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E. Alors F possède un supplémentaire dans E.

En outre, les supplémentaires de F dans E ont tous pour dimension $\dim E - \dim F$.

Démonstration Comme E, F est de dimension finie, donc possède une base $(e_1,\ldots,e_p)$ que nous pouvons compléter en une base $(e_1,\ldots,e_n)$ de E d'après le théorème de la base incomplète — avec éventuellement p ou n nul. Posons alors $G = \mathrm{Vect}(e_{p+1},\ldots,e_n)$. Il découle de nos théorèmes précédents que $E = F+G$ et que F et G sont en somme directe, i.e. que F et G sont supplémentaires dans E. A fortiori, d'après la formule de Grassmann : $\dim G = \dim E - \dim F$.

Exemple $\mathrm{Vect}\big(X, X^3\big)$ est un supplémentaire de $F = \big\{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid \ P(X+1) = P(1-X)\big\}$ dans $\mathbb{R}_3[X]$.

Démonstration Comme dans la preuve précédente !

- Nous avons besoin d'abord d'une base de F. Pour tout $P = aX^3+bX^2+cX+d \in \mathbb{R}_3[X]$:

$$P \in F \iff a(X+1)^3 + b(X+1)^2 + c(X+1) + d = a(1-X)^3 + b(1-X)^2 + c(1-X) + d$$
$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} a &=& -a \\ 3a+b &=& 3a+b \\ 3a+2b+c &=& -3a-2b-c \\ a+b+c+d &=& a+b+c+d \end{array}\right. \quad \text{après identification des coefficients} \quad \iff \quad a=0 \quad \text{et} \quad 2b+c=0.$$

  Ce calcul montre que $\big(1, X^2-2X\big)$ engendre F. Cette famille étant libre, c'est une base de F.

- Complétons-la en une base de $\mathbb{R}_3[X]$ avec certains vecteurs de la base canonique. Échelonnée en degré, la famille $\big(1, X^2-2X, X, X^3\big)$ est libre, et composée de quatre vecteurs alors que $\dim \mathbb{R}_3[X] = 4$, c'est même une base de $\mathbb{R}_3[X]$. Conclusion : $\mathrm{Vect}\big(X, X^3\big)$ est UN supplémentaire de F dans $\mathbb{R}_3[X]$.

Théorème (Caractérisation de la supplémentarité en dimension finie) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On s'intéresse aux trois assertions suivantes :

(i) $\dim F + \dim G = \dim E$. $\qquad$ (ii) $F \cap G = \big\{0_E\big\}$. $\qquad$ (iii) $F + G = E$.

Les sous-espaces vectoriels F et G sont supplémentaires dans E si et seulement si **DEUX SEULEMENT** de ces trois assertions sont vraies — la troisième est alors automatiquement vraie.

Démonstration Notons ★ la formule de Grassmann : $\quad \dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F\cap G)$.

(i) et (ii) $\Longrightarrow$ (iii) D'après ★ : $\quad \dim(F+G) = \dim E$. $\quad$ Or $F+G \subset E$, donc $F+G = E$.

(ii) et (iii) $\Longrightarrow$ (i) On obtient (i) tout de suite grâce à ★.

(iii) et (i) $\Longrightarrow$ (ii) D'après ★ : $\quad \dim(F\cap G) = 0, \quad$ donc $F \cap G = \big\{0_E\big\}$.

Exemple $F = \mathrm{Vect}\big((0,1,0)\big)$ et $G = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \ x+2y+3z = 0\big\}$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

Démonstration F est une droite vectorielle et $G = \big\{(-2y-3z, y, z) \mid \ y,z \in \mathbb{R}\big\} = \mathrm{Vect}\big((-2,1,0),(-3,0,1)\big)$ un plan vectoriel, donc $\dim F + \dim G = 1+2 = 3 = \dim \mathbb{R}^3$. Comme par ailleurs $F \cap G = \big\{(0,0,0)\big\}$ — vérification facile — F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$ comme voulu.