TECHNIQUES ÉLÉMENTAIRES DE CALCUL INTÉGRAL

Le point de vue adopté dans ce chapitre est exclusivement pratique. On y apprend essentiellement à faire du calcul exact de primitives et d'intégrales. La notion d'intégrale sera définie proprement en fin d'année au chapitre « Intégration sur un segment » et nous démontrerons alors tous les théorèmes énoncés dans les pages qui suivent.

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ est l'un des ensembles $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et I et J sont des intervalles.

1 PRIMITIVES, PREMIÈRES TECHNIQUES DE CALCUL

Définition-théorème (Primitives, « unicité » à constante additive près) Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction. On dit qu'une fonction $F : I \longrightarrow \mathbb{K}$ est UNE *primitive de f sur I* si F est dérivable sur I de dérivée f.

« Unicité » à constante additive près : Si f possède une primitive F sur I, ses primitives en général sont toutes les fonctions $F+\lambda$, λ décrivant $\mathbb{K}$.

Attention ! Il n'existe jamais une seule primitive, on ne dit jamais « la » primitive mais UNE primitive. Il peut d'ailleurs ne pas en exister, mais quand il en existe, il en existe une infinité et elles sont toutes égales à constante additive près.

Démonstration Pour tout $G \in \mathscr{D}(I,\mathbb{K})$: G est une primitive de $f \iff G' = f \iff G' = F'$

$$\iff (G-F)' = 0 \iff G-F \text{ est constante} \iff \exists\,\lambda \in \mathbb{K},\quad G = F+\lambda.$$

Exemple La fonction $x \longmapsto \dfrac{x^2}{2}$ est UNE primitive de $x \longmapsto x$ sur $\mathbb{R}$ et Arctan est UNE primitive de $x \longmapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ sur $\mathbb{R}$.

Attention ! Les fonctions qu'on manipule sont généralement un empilement de fonctions usuelles liées entre elles par des additions, des multiplications, des passages à l'inverse et des compositions. Vous savez toutes les dériver car vous savez dériver les fonctions usuelles, les sommes, les produits, les inverses et les composées.

La primitivation des fonctions est autrement plus difficile :

- vous savez primitiver la fonction $x \longmapsto x$, mais pour primitiver son inverse $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$, il a fallu qu'on vous introduise une nouvelle fonction usuelle, la fonction logarithme,
- vous savez primitiver la fonction $x \longmapsto 1+x^2$, mais pour primitiver son inverse $x \longmapsto \dfrac{1}{1+x^2}$, il a fallu qu'on vous introduise une nouvelle fonction usuelle, la fonction arctangente.

On ne peut pas dire pourtant que les fonctions $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ et $x \longmapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ sont un sommet de sophistication ! Le problème de la primitivation, c'est qu'on ne peut pas primitiver explicitement toutes les fonctions qu'on utilise couramment. On peut montrer — mais c'est difficile — que les primitives d'une fonction simple comme $x \longmapsto e^{-x^2}$ NE peuvent PAS être écrites explicitement comme un empilement de fonctions usuelles — à moins bien sûr de considérer une telle primitive comme une nouvelle fonction usuelle ! On en retiendra la mise en garde suivante :

En général, même quand on sait primitiver deux fonctions,
on NE sait PAS primitiver leur PRODUIT, leur QUOTIENT, leur COMPOSÉE.

Cette mise en garde précédente ne signifie pas qu'on ne sait rien faire. Toute fonction de la forme $f' \times g' \circ f$ admet $g \circ f$ pour primitive et vous devez savoir repérer une telle forme. Mentionnons rapidement quelques cas très courants :

$u'e^u$ se primitive en e^u, $\quad \dfrac{u'}{u}$ en $\ln|u|$, $\quad u'u^\alpha$ $(\alpha \neq -1)$ en $\dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$, $\quad u'\cos u$ en $\sin u$, $\quad \dfrac{u'}{1+u^2}$ en $\operatorname{Arctan} u$, $\quad$ etc.

Si F est une primitive de f, $x \longmapsto \dfrac{F(ax+b)}{a}$ est une primitive de $x \longmapsto f(ax+b)$ pour tout $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$.

Exemple La fonction $x \longmapsto \dfrac{\sin x}{5-3\cos x}$ admet $x \longmapsto \dfrac{1}{3}\ln\big(5-3\cos x\big)$ pour primitive sur $\mathbb{R}$, la fonction $x \longmapsto \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$ admet $x \longmapsto 2\,e^{\sqrt{x}}$ pour primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ et la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{4x^2+1}$ admet $x \longmapsto \dfrac{1}{2}\operatorname{Arctan}(2x)$ pour primitive sur $\mathbb{R}$.

Vous devez savoir primitiver la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{ax^2+bx+c}$ pour $a \in \mathbb{R}^*$ et $b, c \in \mathbb{R}$ sous l'hypothèse que $b^2-4ac<0$ — hypothèse selon laquelle le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. Pour primitiver, on écrit le dénominateur sous **FORME CANONIQUE**, on fait apparaître la dérivée d'arctangente et enfin on primitive. Bon à savoir :

Pour tout $a>0$, $x \longmapsto \dfrac{1}{a}\operatorname{Arctan}\dfrac{x}{a}$ est une primitive de $x \longmapsto \dfrac{1}{x^2+a^2}$.

Exemple On cherche une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{3x^2-x+1}$.

Démonstration Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\dfrac{1}{3x^2-x+1} = \dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{x^2-\dfrac{x}{3}+\dfrac{1}{3}} = \dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{\left(x-\dfrac{1}{6}\right)^2+\dfrac{11}{36}} = \dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{\left(x-\dfrac{1}{6}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{11}}{6}\right)^2}$,

donc $x \longmapsto \dfrac{1}{3x^2-x+1}$ admet pour primitive $x \longmapsto \dfrac{1}{3}\times\dfrac{6}{\sqrt{11}}\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{6}{\sqrt{11}}\left(x-\dfrac{1}{6}\right)\right) = \dfrac{2}{\sqrt{11}}\operatorname{Arctan}\dfrac{6x-1}{\sqrt{11}}$.

Il faut aussi savoir primitiver les fonctions $x \longmapsto e^{ax}\cos(bx)$ et $x \longmapsto e^{ax}\sin(bx)$ pour $a, b \in \mathbb{R}^*$. C'est très simple. Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $e^{ax}\cos(bx) = \operatorname{Re}\Big(e^{(a+ib)x}\Big)$ et $x \longmapsto e^{(a+ib)x}$ admet $x \longmapsto \dfrac{e^{(a+ib)x}}{a+ib}$ pour primitive, donc en vertu du principe selon lequel : $\operatorname{Re}\big(f'\big) = \operatorname{Re}(f)'$, $x \longmapsto e^{ax}\cos(bx)$ admet pour primitive :

$$x \longmapsto \operatorname{Re}\left(\frac{e^{(a+ib)x}}{a+ib}\right) = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\operatorname{Re}\Big(\big(\cos(bx)+i\sin(bx)\big)\times(a-ib)\Big) = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\Big(a\cos(bx)+b\sin(bx)\Big).$$

Autre technique bien utile, la **LINÉARISATION**. Grâce à elle, nous savons calculer toutes les primitives de produits de cosinus et de sinus, typiquement $x \longmapsto \sin^2 x\cos^3(4x)$.

Pour finir, on primitive les fractions rationnelles en primitivant leur **DÉCOMPOSITION EN ÉLÉMENTS SIMPLES**.

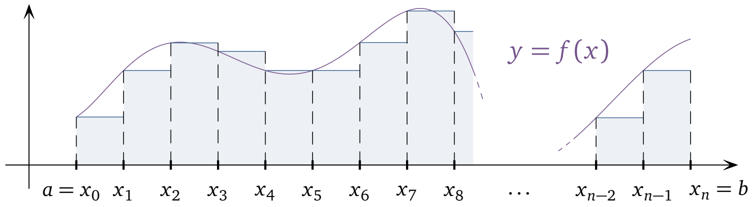
Exemple On cherche une primitive sur $\mathbb{R}^*$ de la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x\big(x^2+1\big)}$.

Démonstration

- **Forme de la décomposition en éléments simples :** La fraction $\dfrac{1}{X\big(X^2+1\big)}$ a une partie entière nulle, donc pour certains $a, b, c \in \mathbb{R}$: $\bigstar \quad \dfrac{1}{X\big(X^2+1\big)} = \dfrac{a}{X}+\dfrac{bX+c}{X^2+1}$.
- **Calcul de a :** On multiplie $\bigstar$ par X puis on évalue en 0 : $a=1$.
- **Calcul de b :** On multiplie $\bigstar$ par X, puis on passe à la limite en $+\infty$: $0=a+b$, donc $b=-1$.
- **Calcul de c :** On évalue $\bigstar$ en 1 : $\dfrac{1}{2}=a+\dfrac{b+c}{2}$, donc $c=0$.
- **Primitivation :** $\dfrac{1}{X\big(X^2+1\big)} = \dfrac{1}{X}-\dfrac{X}{X^2+1}$, donc $x \longmapsto \ln|x|-\dfrac{1}{2}\ln\big(x^2+1\big) = \ln\dfrac{|x|}{\sqrt{x^2+1}}$ est une primitive de la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x\big(x^2+1\big)}$ sur $\mathbb{R}^*$.

2 Intégrale d'une fonction continue

L'intégrale d'une fonction continue réelle vous a été définie en Terminale comme une aire **ALGÉBRIQUE** sous la courbe dans laquelle toute portion de la courbe située **SOUS** l'axe des abscisses est comptée négativement. Sans rentrer les détails, on vous a parlé à ce propos de la *méthode des rectangles*, qui approche les surfaces par des rectangles pour calculer leur aire. En faisant tendre la taille des rectangles vers 0, on obtient l'aire souhaitée. Sur la figure ci-dessous, le segment $[a,b]$ a été découpé en n segments de longueur $\dfrac{b-a}{n}$. On a posé pour cela pour tout $k \in [\![0,n]\!]$: $x_k = a+k\,\dfrac{b-a}{n}$.



L'aire du domaine coloré vaut :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{\frac{b-a}{n}}_{\text{Base}} \times \underbrace{f(x_k)}_{\text{Hauteur}} = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\,\frac{b-a}{n}\right).$$

On appelle une telle somme une *somme de Riemann*. Quand nous y reviendrons proprement en fin d'année au chapitre « Intégration sur un segment », nous démontrerons que : $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\,\frac{b-a}{n}\right)$ et ce sera plus ou moins notre **DÉFINITION** de l'intégrale. Dans le cas où f est réelle, les sommes en jeu s'interprètent naturellement comme des aires algébriques, mais rien ne nous empêche d'en parler dans le cas où f est complexe. Le résultat est un nombre complexe qu'on ne peut plus qualifier d'aire, mais on définit ainsi sans problème l'*intégrale de f sur* $[a,b]$ pour toute fonction $f \in \mathscr{C}\big([a,b],\mathbb{C}\big)$.

Théorème (Propriétés de l'intégrale d'une fonction continue) Soient $f, g \in \mathscr{C}(I,\mathbb{C})$, $a, b, c \in I$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

- **Lien avec les parties réelle et imaginaire :** $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{Re}\big(f(x)\big)\,\mathrm{d}x + \mathrm{i}\int_a^b \mathrm{Im}\big(f(x)\big)\,\mathrm{d}x.$
- **Linéarité :** $\displaystyle\int_a^b \big(\lambda f(x) + \mu g(x)\big)\,\mathrm{d}x = \lambda\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \mu\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$
- **Relation de Chasles :** $\displaystyle\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x.$
- **Inégalité triangulaire :** Si $a \leqslant b$: $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b \big|f(x)\big|\,\mathrm{d}x.$

Les inégalités qui suivent n'ont donc de sens que pour des fonctions **RÉELLES**.

Théorème (Propriétés de l'intégrale d'une fonction continue réelle) Soient $f, g \in \mathscr{C}(I,\mathbb{R})$ et $a, b \in I$.

- **Positivité :** Si $f \geqslant 0$ et $a \leqslant b$: $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0.$
- **Positivité stricte :**
  Si f est strictement positive sauf éventuellement en un nombre fini de points et si $a < b$: $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x > 0.$
- **Croissance :** Si $f \leqslant g$ et $a \leqslant b$: $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$

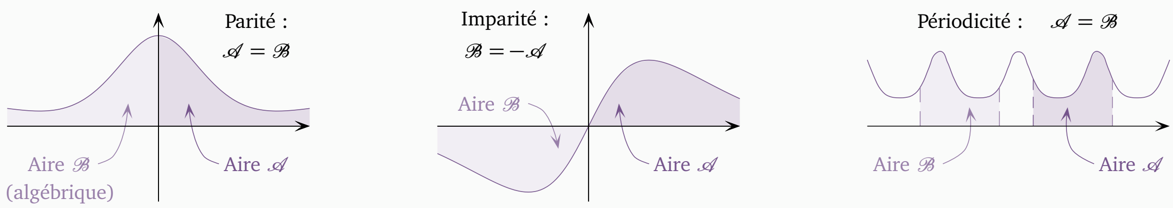
Le résultat suivant simplifie rapidement certains calculs.

Théorème (Intégrales d'une fonction paire/impaire/périodique)

(i) **Fonctions paires/impaires :** Pour toute fonction $f \in \mathscr{C}\big([-a,a],\mathbb{R}\big)$:

$$\int_{-a}^a f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{si } f \text{ est paire et :} \quad \int_{-a}^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0 \quad \text{si } f \text{ est impaire.}$$

(ii) **Fonctions périodiques :** Pour toute fonction $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ T-périodique : $\displaystyle\int_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x.$



Pour finir, le théorème que voici est d'abord majeur sur le plan théorique, mais c'est aussi grâce à lui qu'on calcule la plupart des intégrales.

Théorème (Théorème fondamental du calcul intégral) Soient $f \in \mathscr{C}(I,\mathbb{C})$ et $a,b \in I$.

(i) **Primitivation :** La fonction $x \longmapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est une primitive de f sur I. Ainsi, toute fonction continue possède une primitive.

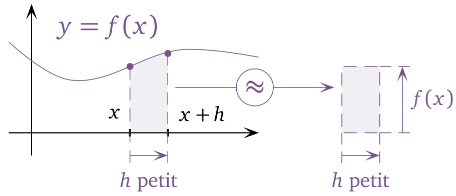
Pour tout $A \in \mathbb{C}$, la fonction $x \longmapsto A + \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de f sur I de valeur A en a.

(ii) **Calcul intégral :** Pour toute primitive F de f : $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$.

On note généralement $[F]_a^b$ ou $\big[F(x)\big]_{x=a}^{x=b}$ la quantité $F(b)-F(a)$.

Démonstration L'assertion (ii) découle de l'assertion (i). D'après (i), la primitive quelconque F est la seule à valoir $F(a)$ en a, donc pour tout $x \in I$: $\displaystyle F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$. On en déduit (ii) en évaluant en b.

Fondamental, ce théorème l'est parce qu'il établit un lien entre deux couples de notions apparemment totalement étrangères — le couple aire/intégrale et le couple primitive/dérivée. Quelle intuition cela exprime-t-il ? Pour le comprendre, supposons f réelle et notons F la fonction $x \longmapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$. Sur la figure ci-contre, h est supposé petit et f est continue en x, donc pour tout t compris entre x et $x+h$: $f(t) \approx f(x)$. D'après la relation de Chasles, l'aire algébrique sous la courbe de f entre les abscisses x et $x+h$ vaut $F(x+h)-F(x)$, mais elle vaut aussi approximativement $hf(x)$ d'après le principe « base × hauteur ». Bref : $F(x+h)-F(x) \approx hf(x)$ pour h petit, autrement dit : $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(x)$. Comme voulu, F est dérivable en x et $F'(x) = f(x)$.



Exemple $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin x\,\mathrm{d}x = \big[-\cos\big]_0^{2\pi} = 0$ et $\displaystyle\int_0^{2\pi} |\sin x|\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} \sin x\,\mathrm{d}x - \int_{\pi}^{2\pi} \sin x\,\mathrm{d}x = \big[-\cos\big]_0^{\pi} - \big[-\cos\big]_{\pi}^{2\pi} = 4.$

Exemple Pour tout $\alpha \geqslant 0$: $\displaystyle\int_0^1 x^\alpha\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{\alpha+1}.$ Intégrale très courante, à connaître **PAR CŒUR !**

Exemple $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} = \big[\mathrm{Arctan}\big]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$

Quand on calcule une primitive $x \longmapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}x$ d'une fonction continue f, le choix du réel a importe peu car deux choix différents conduisent au même résultat à une constante additive près. On omet ainsi souvent la borne inférieure de l'intégrale quand on calcule une primitive. On écrit par exemple ceci :

$$\int^x \big(t^2+2t\big)\,\mathrm{d}t = \frac{x^3}{3} + x^2, \qquad \int^x \sin\theta\,\mathrm{d}\theta = -\cos x \qquad \text{et} \qquad \int^x u\cos\big(u^2\big)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\sin\big(x^2\big),$$

mais on peut tout autant écrire ceci : $\displaystyle\int^x \big(t^2+2t\big)\,\mathrm{d}t = \frac{x^3}{3} + x^2 + 1000.$ Curieux, n'est-ce pas ? La notation des intégrales sans borne inférieure nous permet de faire du calcul **À CONSTANTE ADDITIVE PRÈS**. Le symbole d'égalité « $=$ » qui y figure n'est pas un vrai symbole d'égalité, c'est plutôt un symbole de congruence « $\equiv$ » modulo l'ensemble des fonctions constantes.

Exemple On cherche une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{-x}\sin x$.

Démonstration
$$\int^x \mathrm{e}^{-t}\sin t\,\mathrm{d}t = \int^x \mathrm{Im}\Big(\mathrm{e}^{(-1+\mathrm{i})t}\Big)\,\mathrm{d}t = \mathrm{Im}\left(\int^x \mathrm{e}^{(-1+\mathrm{i})t}\,\mathrm{d}t\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{\mathrm{e}^{(-1+\mathrm{i})x}}{-1+\mathrm{i}}\right) = -\frac{\mathrm{e}^{-x}}{2}\,\mathrm{Im}\Big((1+\mathrm{i})\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\Big)$$
$$= -\frac{\mathrm{e}^{-x}}{2}(\sin x + \cos x).$$

Nous ferons surtout du calcul exact d'intégrales dans ce chapitre, mais la croissance de l'intégrale est une propriété puissante dont nous nous servirons beaucoup en fin d'année. À ce stade, elle nous permet par exemple de redémontrer élégamment nos petites inégalités classiques de convexité.

Exemple Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\mathrm{e}^x \geqslant 1+x$.

Démonstration Pour tout $t \geqslant 0$: $\mathrm{e}^t \geqslant 1$ et pour tout $t \leqslant 0$: $\mathrm{e}^t \leqslant 1$, donc pour tout $x \geqslant 0$: $\displaystyle\mathrm{e}^x - 1 = \int_0^x \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t \overset{x\geqslant 0}{\geqslant} \int_0^x \mathrm{d}t = x$ et pour tout $x \leqslant 0$: $\displaystyle\mathrm{e}^x - 1 = \int_0^x \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t \overset{x\leqslant 0}{\geqslant} \int_0^x \mathrm{d}t = x.$

Exemple Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $|\sin x| \leqslant |x|$.

Démonstration $|\sin x| = \left|\int_0^x \cos t\ \mathrm{d}t\right| \overset{\text{Parité}}{=} \left|\int_0^{|x|} \cos t\ \mathrm{d}t\right| \overset{|x|\geqslant 0}{\leqslant} \int_0^{|x|} |\cos t|\ \mathrm{d}t \leqslant \int_0^{|x|} \mathrm{d}t = |x|.$

3 Intégration par parties

Définition (Fonction de classe $\mathscr{C}^1$) Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction. On dit que f est *de classe $\mathscr{C}^1$ sur I* si f est dérivable sur I et si f' est continue sur I.

L'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathscr{C}^1(I,\mathbb{K})$.

Attention ! De classe $\mathscr{C}^1$ $=$ Dérivable à dérivée continue $\neq$ Dérivable ET continue.

Maladroit, donc À ÉVITER,
car la dérivabilité implique la continuité !

Exemple Toute primitive d'une fonction continue est de classe $\mathscr{C}^1$ puisque sa dérivée, justement, est continue.

Théorème (Intégration par parties ou IPP) Soient $u, v \in \mathscr{C}^1(I,\mathbb{C})$ et $a, b \in I$.

$$\int_a^b u'(x)\,v(x)\ \mathrm{d}x = \big[uv\big]_a^b - \int_a^b u(x)\,v'(x)\ \mathrm{d}x.$$

Démonstration Comme u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$, les fonctions $(uv)'$, $u'v$ et uv' sont continues, donc d'après le théorème fondamental du calcul intégral et par linéarité de l'intégrale :

$$\big[uv\big]_a^b = \int_a^b (uv)'(x)\ \mathrm{d}x = \int_a^b \Big(u'(x)\,v(x) + u(x)\,v'(x)\Big)\ \mathrm{d}x = \int_a^b u'(x)\,v(x)\ \mathrm{d}x + \int_a^b u(x)\,v'(x)\ \mathrm{d}x.$$

Exemple $$\int_0^\pi t\cos t\ \mathrm{d}t = \int_0^\pi \overbrace{\cos t}^{u'(t)} \times \overbrace{t}^{v(t)}\ \mathrm{d}t \overset{\text{IPP}}{=} \big[t\sin t\big]_{t=0}^{t=\pi} - \int_0^\pi \sin t\ \mathrm{d}t = -\int_0^\pi \sin t\ \mathrm{d}t = -\big[-\cos t\big]_{t=0}^{t=\pi} = -2.$$

Exemple $$\int_0^1 t^3 e^{t^2}\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^1 \overbrace{2t\,e^{t^2}}^{u'(t)} \times \overbrace{t^2}^{v(t)}\ \mathrm{d}t \overset{\text{IPP}}{=} \frac{1}{2}\Big[t^2 e^{t^2}\Big]_{t=0}^{t=1} - \frac{1}{2}\int_0^1 2t\,e^{t^2}\ \mathrm{d}t = \frac{e}{2} - \frac{1}{2}\Big[e^{t^2}\Big]_{t=0}^{t=1} = \frac{1}{2}.$$

On peut aussi pratiquer des intégrations par parties sur des intégrales sans borne inférieure pour calculer des primitives. La formule prend dans ce cas la forme suivante :

$$\int^x u'(t)\,v(t)\ \mathrm{d}t = u(x)\,v(x) - \int^x u(t)\,v'(t)\ \mathrm{d}t.$$

Exemple On cherche une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction logarithme.

Démonstration $$\int^x \ln t\ \mathrm{d}t = \int^x \underbrace{1}_{u'(t)} \times \underbrace{\ln t}_{v(t)}\ \mathrm{d}t \overset{\text{IPP}}{=} x\ln x - \int^x t \times \frac{1}{t}\ \mathrm{d}t = x\ln x - \int^x \mathrm{d}t = x\ln x - x.$$

Exemple On cherche une primitive sur $\mathbb{R}^*$ de la fonction $x \longmapsto \dfrac{\operatorname{Arctan} x}{x^2}$.

Démonstration $$\int^x \frac{\operatorname{Arctan} t}{t^2}\ \mathrm{d}t = \int^x \overbrace{\frac{1}{t^2}}^{u'(t)} \times \overbrace{\operatorname{Arctan} t}^{v(t)}\ \mathrm{d}t \overset{\text{IPP}}{=} -\frac{\operatorname{Arctan} x}{x} - \int^x \left(-\frac{1}{t}\right) \times \frac{1}{t^2+1}\ \mathrm{d}t$$

$$= -\frac{\operatorname{Arctan} x}{x} + \int^x \frac{\mathrm{d}t}{t\big(t^2+1\big)} = \ln\frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{\operatorname{Arctan} x}{x}$$ d'après un exemple précédent.

4 Changement de variable

Théorème **(Changement de variable)** Soient $\varphi \in \mathscr{C}^1(I,\mathbb{R})$ à valeurs dans J, $f \in \mathscr{C}(J,\mathbb{C})$ et $a,b \in I$.
$$\int_a^b f\big(\varphi(t)\big)\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Démonstration Continue, f possède une primitive F de classe $\mathscr{C}^1$, et comme φ est de classe $\mathscr{C}^1$, la fonction $(F\circ\varphi)' = f\circ\varphi\times\varphi'$ est continue. Du coup, d'après le théorème fondamental du calcul intégral :
$$\int_a^b f\big(\varphi(t)\big)\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \big[F\circ\varphi\big]_a^b = F\big(\varphi(b)\big) - F\big(\varphi(a)\big) = \big[F\big]_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Pour retrouver vite et bien la formule :

— on part de $x = \varphi(t)$,

— on « dérive » : $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \varphi'(t)$, donc $\mathrm{d}x = \varphi'(t)\,\mathrm{d}t$, Bravo la rigueur !

— on multiplie par $f(x) = f\big(\varphi(t)\big)$: $f(x)\,\mathrm{d}x = f\big(\varphi(t)\big)\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$,

— on intègre en observant que pendant que t varie de a à b, $x = \varphi(t)$ varie de $\varphi(a)$ à $\varphi(b)$.

Attention ! Vous avez le droit de faire vos petits calculs à deux variables x et t dans un coin sur une copie, **MAIS** au cœur d'un symbole « $\displaystyle\int$ », je ne veux voir qu'une seule variable.

Exemple Afin de comprendre la technique du changement de variable, nous allons procéder à trois changements de variable successifs dans une même intégrale. Ces changements de variable ne nous aideront pas à calculer l'intégrale en question, mais nous n'arriverons pas à la calculer de toute façon.

Démonstration

- **Changement de variable** $t = \ln u$ **:** On « dérive » : $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u} = \dfrac{1}{u}$, donc $\mathrm{d}t = \dfrac{\mathrm{d}u}{u}$.
  Ensuite : $\dfrac{\mathrm{e}^t}{1+t}\,\mathrm{d}t = \dfrac{\mathrm{e}^{\ln u}}{1+\ln u}\times\dfrac{\mathrm{d}u}{u} = \dfrac{\mathrm{d}u}{1+\ln u}$.
  Enfin, $u = 1$ quand $t = 0$, et $u = \mathrm{e}$ quand $t = 1$, donc : $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^t}{1+t}\,\mathrm{d}t = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}u}{1+\ln u}$.

- **Changement de variable** $u = \dfrac{x}{\mathrm{e}}$ **:** On « dérive » : $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$, donc $\mathrm{d}u = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}}$.
  Ensuite : $\dfrac{\mathrm{d}u}{1+\ln u} = \dfrac{\mathrm{d}u}{\ln(\mathrm{e}u)} = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}\ln x}$.
  Enfin, $x = \mathrm{e}$ quand $u = 1$, et $x = \mathrm{e}^2$ quand $u = \mathrm{e}$, donc : $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}u}{1+\ln u} = \int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}\ln x}$.

- **Changement de variable** $x = s^2$ **:** On « dérive » : $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = 2s$, donc $\mathrm{d}x = 2s\,\mathrm{d}s$.
  Ensuite : $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}\ln x} = \dfrac{2s\,\mathrm{d}s}{\mathrm{e}\ln\big(s^2\big)} = \dfrac{s\,\mathrm{d}s}{\mathrm{e}\ln s}$.
  Enfin, $s = \sqrt{\mathrm{e}}$ quand $x = \mathrm{e}$, et $s = \mathrm{e}$ quand $x = \mathrm{e}^2$, donc : $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}\ln x} = \int_{\sqrt{\mathrm{e}}}^{\mathrm{e}} \frac{s\,\mathrm{d}s}{\mathrm{e}\ln s}$.

Exemple $\displaystyle\int_1^3 \frac{\sqrt{x}}{x+1}\,\mathrm{d}x = 2\sqrt{3} - \frac{\pi}{6} - 2.$

Démonstration Aucune formule de primitivation simple ne saute ici aux yeux et aucune intégration par parties naturelle ne paraît simplifier l'intégrale étudiée. Le changement de variable $x = u^2$ paraît naturel à cause du numérateur « $\sqrt{x}$ ». De fait, la fonction $u \longmapsto u^2$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\big[1,\sqrt{3}\big]$ d'image $[1,3]$. Remarquez bien en vue du calcul qui suit qu'on choisit de travailler avec des valeurs positives de u.

On part de $x = u^2$, puis on « dérive » : $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u} = 2u$, et ainsi $\mathrm{d}x = 2u\,\mathrm{d}u$.

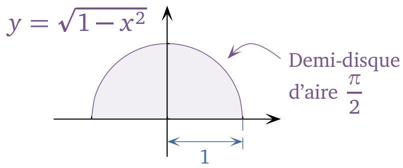
Ensuite : $\dfrac{\sqrt{x}}{x+1}\,\mathrm{d}x = \dfrac{\sqrt{u^2}}{u^2+1}\times 2u\,\mathrm{d}u = \dfrac{|u|}{u^2+1}\times 2u\,\mathrm{d}u \overset{u\geqslant 0}{=} \dfrac{2u^2}{u^2+1}\,\mathrm{d}u$.

Enfin, $u = 1$ quand $x = 1$, et $u = \sqrt{3}$ quand $x = 3$, donc : $\displaystyle\int_1^3 \frac{\sqrt{x}}{x+1}\,\mathrm{d}x = 2\int_1^{\sqrt{3}} \frac{u^2}{u^2+1}\,\mathrm{d}u$.

L'intégrale obtenue est maintenant facile à calculer, c'est une intégrale de fraction rationnelle.

$$\int_1^3 \frac{\sqrt{x}}{x+1}\,\mathrm{d}x = 2\int_1^{\sqrt{3}}\left(1-\frac{1}{u^2+1}\right)\mathrm{d}u = 2\big[u-\mathrm{Arctan}\,u\big]_{u=1}^{u=\sqrt{3}} = 2\left(\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}\right)-2\left(1-\frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{3}-\frac{\pi}{6}-2.$$

Exemple $\displaystyle\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$.



Démonstration On va ici effectuer le changement de variable $x=\sin\theta$.
De fait, la fonction $\theta \longmapsto \sin\theta$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ d'image $[-1,1]$.

On « dérive » : $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}=\cos\theta$, donc $\mathrm{d}x=\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$. Ensuite :

$$\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{1-\sin^2\theta}\times\cos\theta\,\mathrm{d}\theta = \sqrt{\cos^2\theta}\,\cos\theta\,\mathrm{d}\theta = |\cos\theta|\times\cos\theta\,\mathrm{d}\theta \overset{\theta\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]}{=} \cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta.$$

Enfin, $\theta=-\dfrac{\pi}{2}$ quand $x=-1$, et $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ quand $x=1$, donc :

$$\int_{-1}^1\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1+\cos(2\theta)}{2}\right)\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{2}+\left[\frac{\sin(2\theta)}{4}\right]_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\theta=\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}.$$

On peut aussi pratiquer des changements de variable sur des intégrales sans borne inférieure pour calculer des primitives. La formule prend dans ce cas la forme suivante :

$$\boxed{\int^x f\big(\varphi(t)\big)\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int^{\varphi(x)} f(u)\,\mathrm{d}u.}$$

Exemple On cherche une primitive sur $\mathbb{R}\setminus\pi\mathbb{Z}$ de la fonction $x\longmapsto\dfrac{1}{\sin x}$.

Démonstration Procédons au changement de variable $t=\cos\theta$ dans la fausse intégrale $\displaystyle\int^x\frac{\mathrm{d}\theta}{\sin\theta}$. Il vaut mieux éviter en tout cas la relation : $\theta=\mathrm{Arccos}\,t$, elle conduit à des calculs plus pénibles. Conseil d'ami.

On part de $t=\cos\theta$, puis on « dérive » : $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\theta}=-\sin\theta$, et ainsi $\mathrm{d}t=-\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$.

Ensuite : $\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\sin\theta}=\dfrac{\sin\theta\,\mathrm{d}\theta}{\sin^2\theta}=\dfrac{\sin\theta\,\mathrm{d}\theta}{1-\cos^2\theta}=\dfrac{-\mathrm{d}t}{1-t^2}$, d'où l'égalité : $\displaystyle\int^x\frac{\mathrm{d}\theta}{\sin\theta}=\int^{\cos x}\frac{\mathrm{d}t}{t^2-1}$.

Or après décomposition en éléments simples : $\dfrac{1}{X^2-1}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{X-1}-\dfrac{1}{X+1}\right)$, donc :

$$\int^x\frac{\mathrm{d}\theta}{\sin\theta} = \frac{1}{2}\int^{\cos x}\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t = \frac{\ln|\cos x-1|}{2}-\frac{\ln|\cos x+1|}{2} = \frac{1}{2}\ln\frac{1-\cos x}{1+\cos x}$$

$$= \frac{1}{2}\ln\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}} = \ln\sqrt{\tan^2\frac{x}{2}} = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|.$$

Attention à la valeur absolue finale !

Exemple On cherche une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction $x\longmapsto\cos(2\ln x)$.

Démonstration Procédons au changement de variable $u=\mathrm{e}^t$ dans la fausse intégrale $\displaystyle\int^x\cos(2\ln u)\,\mathrm{d}u$.

On « dérive » : $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=\mathrm{e}^t$, donc $\mathrm{d}u=\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$. Finalement :

$$\int^x\cos(2\ln u)\,\mathrm{d}u = \int^{\ln x}\mathrm{e}^t\cos(2t)\,\mathrm{d}t = \int^{\ln x}\mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{(1+2\mathrm{i})t}\right)\mathrm{d}t = \mathrm{Re}\left(\int^{\ln x}\mathrm{e}^{(1+2\mathrm{i})t}\,\mathrm{d}t\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{\mathrm{e}^{(1+2\mathrm{i})\ln x}}{1+2\mathrm{i}}\right)$$

$$= \frac{x}{5}\,\mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\ln x}(1-2\mathrm{i})\right) = \frac{x}{5}\big(2\sin(2\ln x)+\cos(2\ln x)\big).$$

5 Tableau récapitulatif des primitives usuelles

Fonction	Primitive
e^x	e^x
$\ln x$	$x \ln x - x$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln\|x\|$
$x^\alpha \quad (\alpha \neq -1)$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$

Fonction	Primitive
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$
$\tan x$	$-\ln\|\cos x\|$

Fonction	Primitive
$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$
$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$
$\operatorname{th} x$	$\ln \operatorname{ch} x$

Fonction	Primitive
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{Arctan} x$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{Arcsin} x$