1 PETITS O

1 🕑 « Nettoyer » les expressions suivantes :

1) $\dots \underset{x\to 0}{=} \dfrac{1}{x^2}+\mathrm{o}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)+3+\dfrac{1}{x}+\mathrm{o}\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
2) $\dots \underset{n\to +\infty}{=} \dfrac{1}{\sqrt{n}}+\dfrac{1}{2^n}+\mathrm{o}\left(\dfrac{1}{2^n}\right)+\dfrac{1}{n}+\mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)+\dfrac{1}{n^2}$.
3) $\dots \underset{x\to 0}{=} x+\mathrm{o}(x)+x\ln x+\mathrm{o}\left(x^2\ln x\right)+x^2+\mathrm{o}\left(x^2\right)$.
4) $\dots \underset{n\to +\infty}{=} \dfrac{1}{n}+\dfrac{\ln n}{n}+\mathrm{o}\left(\dfrac{\ln n}{n}\right)+\dfrac{1}{n^2}+\mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)+\dfrac{1}{n\ln n}+\mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n\ln n}\right)$.
5) $\dots \underset{n\to +\infty}{=} n+\mathrm{o}(n)+\sqrt{n}+\mathrm{o}\left(\sqrt{n}\right)+\dfrac{n^2}{\ln n}+n\ln n+\mathrm{o}\left(n\ln n\right)$.

2 DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

2 🕑 Montrer que les familles suivantes sont libres dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ en utilisant des développements limités.

1) $\left(x\longmapsto e^x,\ x\longmapsto xe^x,\ x\longmapsto e^{x^3}\right)$.
2) $\left(x\longmapsto e^x,\ x\longmapsto e^{2x},\ x\longmapsto e^{x^2}\right)$.
3) $\left(\sin,\ x\longmapsto x\sin x,\ \cos,\ x\longmapsto x\cos x\right)$.

3 🕑🕑 Calculer les développements limités suivants au voisinage de 0 :

1) $\sqrt{1+\sin x}$ à l'ordre 3.
2) $e^{\cos x}-(1+x)^{\frac{1}{x}}$ à l'ordre 2.
3) $\dfrac{x^2}{1-\cos x}$ à l'ordre 3.
4) $\sin^4 x$ à l'ordre 8.
5) $\ln\left(e^x+\cos x\right)$ à l'ordre 2.
6) $\tan x$ à l'ordre 5.
7) $\ln\cos(2x)$ à l'ordre 3.
8) $\dfrac{xe^{-x}}{2x+1}$ à l'ordre 4.
9) $\dfrac{x-\sin x}{1-\cos x}$ à l'ordre 3.
10) $\sqrt{\mathrm{ch}\ \sin x}$ à l'ordre 3.
11) $\dfrac{\mathrm{Arctan}\ x}{\mathrm{Arcsin}\ x}$ à l'ordre 4.
12) $\ln(1+\sin x)-\sin\ln(1+x)$ à l'ordre 5.
13) $(\mathrm{ch}\ x)^{\frac{1}{\mathrm{sh}\ x}}$ à l'ordre 3.
14) $\ln\left(1+x+\sqrt{1+x}\right)$ à l'ordre 3.
15) $\dfrac{\sqrt[3]{\cos x}}{1+x^2}$ à l'ordre 5.
16) $(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}$ à l'ordre 3.

4 🕑🕑 Calculer les développements limités suivants à l'ordre 2 :

1) $\sqrt{x}$ en 5.
2) $\sin x\cos(3x)$ en $\dfrac{\pi}{3}$.
3) $\dfrac{\ln x}{x}$ en 3.
4) xe^x en 1.
5) $e^x\cos x$ en $\dfrac{\pi}{4}$.
6) $\ln\sin x$ en $\dfrac{\pi}{3}$.
7) $\mathrm{Arctan}\ \dfrac{1}{1+x}$ en 0.
8) $\dfrac{\ln x}{x^2}$ en 2.

5 🕑🕑

1) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$:
$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{4^k}\binom{2k}{k}x^k+\mathrm{o}\left(x^n\right).$$
2) En déduire un développement limité de la fonction arcsinus à tout ordre au voisinage de 0.

6 Calculer un développement asymptotique :

1) 🕑🕑 de : $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ lorsque n tend vers $+\infty$ à la précision $\mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$.
2) 🕑🕑 de : $\mathrm{Arctan}\ x$ lorsque x tend vers $+\infty$ à la précision $\mathrm{o}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$.
3) 🕑🕑🕑 de : $\dfrac{1}{n!}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k!$ lorsque n tend vers $+\infty$ à la précision $\mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

7 🕑🕑 On pose pour tout $x\in\mathbb{R}$:
$$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}\sin\left(e^{\frac{1}{x^2}}\right) & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{si } x=0.\end{cases}$$

1) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$: $f(x)\underset{x\to 0}{=}\mathrm{o}\left(x^n\right)$.
2) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ tout entier. Y est-elle de classe $\mathscr{C}^1$?
3) a) Une fonction dérivable qui possède un développement limité d'ordre 2 en un point est-elle deux fois dérivable en ce point ?
   b) On a vu qu'on peut toujours primitiver les développements limités d'une dérivée. Peut-on toujours dériver les développements limités d'une fonction dérivable ?
   c) On a vu que les coefficients d'un développement limité sont uniques. Réciproquement, deux fonctions qui ont le même développement limité à tout ordre au voisinage d'un point sont-elles égales au voisinage de ce point ?

3 ÉQUIVALENTS

8 🕑🕑 Trouver un équivalent simple des expressions suivantes :

1) $\dfrac{\lfloor x\rfloor}{\sqrt{x+1}}$ en $+\infty$.
2) $\dfrac{n^2\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}{\tan\dfrac{\pi}{n}}$.

3) $\dfrac{x^4-x^3+1}{\lfloor x\rfloor^2-4x}$ en $+\infty$. **4)** $\dfrac{\ln\left(n^4+4\right)}{n+1}$.
5) $\dfrac{\cos x - x^x}{e^x}$ en 0. **6)** $\dfrac{\ln x}{\sqrt{x+2}}$ en 1.
7) $3+e^{\frac{1}{n}}-\dfrac{6}{n}$. **8)** $\ln \operatorname{ch} x+\operatorname{sh}^2 x$ en 0.
9) $\ln(1+x)+\sin x$ en $+\infty$.
10) $\ln(n+1)-\ln(n+2)$. **11)** $\operatorname{Arcsin} e^{-\sqrt{n}}$.
12) $\ln\dfrac{1+\operatorname{ch} x}{2}$ en 0. **13)** $\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+5}-\dfrac{4}{n^2}$.
14) $(x+1)^x-x^x$ en 0. **15)** $\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$ en π.
16) $\dfrac{\ln\left(x^7+\sqrt[5]{x}\right)}{x^2+9}$ en $+\infty$. **17)** $e^{e^{e^{-n}}}-e$.
18) $\dfrac{\ln(1+x)-\sqrt{1+x}+1}{\cos x-e^x}$ en 0.
19) $\left(n+\ln n\right)e^{-n+1}$. **20)** $(\cos x)^{\ln x}-1$ en 0.
21) $\dfrac{e^{x^2}-\sqrt[7]{1+x}}{2+\ln(1+5x)-\sqrt{4+x}}$ en 0.
22) $e^{\operatorname{Arccos}\frac{1}{n}}-e^{\frac{\pi}{2}}\cos\dfrac{1}{\sqrt{n}}$. **23)** $e^{\tan\frac{\pi}{n^2}}-1$.
24) $\sqrt{\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}}$ en $+\infty$.
25) $\ln\left(2e^x+x\right)-\sqrt{x^2+x+\sin x}$ en $+\infty$.
26) $x^{\sin x}-(\sin x)^x$ en 0. **27)** $\left\lfloor\sqrt{n}\right\rfloor\sin\dfrac{\pi}{n}$.
28) $\dfrac{\ln\left(n^2+2\right)-\ln\left(n^2+1\right)}{\ln(n+2)-\ln(n+1)}$. **29)** $e^{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$.
30) $x^{\frac{1}{x}}-\cos\dfrac{1}{x}$ en $+\infty$. **31)** $(2n)!-n^n$.
32) $\dfrac{\cos x}{1+x}-1$ en 0. **33)** $\dbinom{n+p}{n}$ $(p\in\mathbb{N})$.
34) $e^{\sqrt[5]{\cos x}}-\cos\left(7x^2\right)$ en 0.
35) $\left(1+\dfrac{2}{x^2}\right)^x-\left(1+\dfrac{1}{x^3}\right)^{x^2}$ en $+\infty$.
36) $\dfrac{\cos(2x)-\operatorname{ch}(3x)}{x+\sin^2\left(4\sqrt{x}\right)}$ en 0.
37) $\sin\dfrac{1}{2^n}+\cos e^{-n}-\sqrt[4]{1+\dfrac{1}{n^2}}+\dfrac{1}{n^2}$.
38) $\dfrac{\cos(\tan x)-\sqrt[3]{1+e^{-\frac{1}{x^2}}}}{\sin x}$ en 0.
39) $\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{1}{n^2+1}-\dfrac{1}{n^4}$. **40)** $(n+1)^{\frac{1}{n+1}}-n^{\frac{1}{n}}$.
41) $\sin x-\sin\theta$ en θ $(\theta\in\mathbb{R})$.
42) $\sqrt{n}^n+n^{\sqrt{n}}+n^{\frac{n}{2}}$. **43)** $\sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$.

---

9 ◷ Soient $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Déterminer un équivalent simple de $\dfrac{x^\alpha}{1+x^\beta}$ lorsque x tend vers 0 et lorsque x tend vers $+\infty$.

---

10 ◷◷ Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ quatre suites strictement positives. On suppose que :

$$x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} x'_n \qquad \text{et} \qquad y_n \underset{n\to+\infty}{\sim} y'_n.$$

Montrer qu'alors : $\quad x_n+y_n \underset{n\to+\infty}{\sim} x'_n+y'_n$.

---

11 ◷◷ Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Montrer que si : $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\sqrt{n}\right)$, alors : $\left(1+\dfrac{u_n}{n}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{u_n}$.

---

12 ◷◷ Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. On suppose : $u_n\neq 0$ et $v_n\neq 0$ à partir d'un certain rang.

1) Trouver deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour lesquelles :

a) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=1$ mais : $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n-v_n)\neq 0$.

b) $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n-v_n)=0$ mais : $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_n}{v_n}\neq 1$.

2) a) Montrer l'équivalence :

$$e^{u_n}\underset{n\to+\infty}{\sim}e^{v_n} \iff u_n-v_n\underset{n\to+\infty}{=}o(1).$$

b) Trouver deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour lesquelles : $u_n\underset{n\to+\infty}{\sim}v_n$ mais pour lesquelles il est faux que : $e^{u_n}\underset{n\to+\infty}{\sim}e^{v_n}$.

3) a) Montrer que si : $u_n\underset{n\to+\infty}{\sim}v_n$ avec de plus : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$, alors :

$$\ln u_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\ln v_n.$$

b) Trouver deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour lesquelles : $u_n\underset{n\to+\infty}{\sim}v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=1$ mais pour lesquelles il est faux que :

$$\ln u_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\ln v_n.$$

---

4 Calculs de limites

13 ◷◷ Étudier les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)-\sin x}{\tan x-x}$. **2)** $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln\left(2x^2-1\right)}{x\sqrt{x}-1}$.
3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\operatorname{Arctan} x}{\operatorname{sh}^3 x}$. **4)** $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{\sin^2 x}\right)$.
5) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(3\sqrt[n]{2}-2\sqrt[n]{3}\right)^n$. **6)** $\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$.
7) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x^3}-\dfrac{1}{\sin^3 x}\right)$.

---

14 ◷◷ Montrer que la fonction $x\longmapsto\operatorname{Arccos}\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$ n'est pas dérivable en 0.

---

15 ◷◷ Soient $a,b\in\mathbb{R}$.
On note f la fonction $x\longmapsto\dfrac{1}{x}-\dfrac{a}{\ln(1+x)}-\dfrac{b}{e^x-1}$.

1) À quelle condition nécessaire et suffisante sur a et b est-il vrai que : $\lim\limits_{0}f=0$?

2) Montrer que, dans ce cas, pour un certain $\lambda\in\mathbb{R}$ à préciser : $f(x)\underset{x\to0}{=}\lambda x^2+o\left(x^2\right)$.

---

5 ÉTUDES DE SUITES

16 ◷ On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = \sqrt{u_n + n^2}$.

1) Montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $n-1 \leqslant u_n \leqslant n$, puis en déduire un équivalent simple de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

---

17 ◷ On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = 1 + \dfrac{n}{u_n}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\sqrt{n} \leqslant u_n \leqslant \sqrt{n} + 1$, puis en déduire un équivalent simple de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

---

18 ◷ Soient $a > 1$. On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $u_0 = a$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{a}{u_n}\right)$.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = \dfrac{u_n - \sqrt{a}}{u_n + \sqrt{a}}$.

1) Calculer v_{n+1} en fonction de v_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de v_n, puis de u_n en fonction de n.

3) En déduire enfin l'équivalent :

$$u_n - \sqrt{a} \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\sqrt{a}\left(\frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1}\right)^{2^n}.$$

Cette méthode puissante — pourquoi puissante ? — de calcul des valeurs approchées d'une racine carrée est appelée la *méthode de Héron* ou *méthode des Babyloniens*.

---

6 ÉTUDES LOCALE DE FONCTIONS

19 ◷◷ Montrer que les fonctions suivantes sont prolongeables en des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$:

1) $x \longmapsto \dfrac{e^x - 1}{x}$ sur $\mathbb{R}$.

2) $x \longmapsto \dfrac{x}{\ln(1+x)}$ sur $]-1, +\infty[$.

---

20 ◷◷ On note f la fonction définie par : $f(0) = 0$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$: $f(x) = x^{1+\frac{1}{x}}$.

1) Étudier la continuité et la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}_+$.

2) Montrer que f possède un développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 1 et le calculer. Qu'en déduit-on sur le graphe de f ?

---

21 ◷◷ On note f la fonction définie par : $f(0) = 0$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$: $f(x) = \dfrac{x^2}{\operatorname{sh} x}$.

1) Calculer le développement limité de f à l'ordre 3 au voisinage de 0.

2) En déduire que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et préciser la position relative au voisinage de 0 du graphe de f par rapport à sa tangente en 0.

---

22 ◷◷ Étudier localement au voisinage de 0 les fonctions d'expressions :

1) $\dfrac{\ln(1+x)}{e^x - 1}$. **2)** $(\operatorname{ch} x)^{\frac{1}{x}}$.

3) $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e^x - 1}$. **4)** $\dfrac{1}{\ln(1+x)} - \dfrac{1}{x}$.

5) $\dfrac{x - \ln(1+x)}{e^x + 1}$.

---

23 ◷◷ Montrer que les fonctions suivantes possèdent une asymptote en $+\infty$ et étudier la position relative de leur graphe par rapport à celle-ci au voisinage de $+\infty$:

1) $x \longmapsto x\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$.

2) $x \longmapsto (x+1)\, e^{\frac{1}{x}}$.

3) $x \longmapsto \ln\left(e^{2x} - e^x + 1\right)$.

4) $x \longmapsto \dfrac{x^2}{x+1} \operatorname{Arctan} x$.

---

24 ◷◷ On note f la fonction $x \longmapsto x + \ln(1+x)$ sur $]-1, +\infty[$.

1) Montrer que f est bijective de $]-1, +\infty[$ sur son image — que l'on précisera.

2) Montrer que f^{-1} possède un développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 et le calculer.

---

25 ◷◷ On note f la fonction $x \longmapsto x e^{x^2}$ sur $\mathbb{R}$.

1) Montrer que f est bijective de $\mathbb{R}$ sur son image — que l'on précisera.

2) Montrer que f^{-1} possède un développement limité à l'ordre 5 au voisinage de 0 et le calculer.
