Petits o

1 Nettoyer les expressions suivantes :

1) $\ldots \underset{x\to 0}{=} 3+\sqrt{x}+\frac{1}{x^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)+\frac{1}{x}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right)$.

2) $\ldots \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n^2}+\frac{1}{2^n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{2^n}\right)+\frac{1}{n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{\sqrt{n}}$.

3) $\ldots \underset{x\to 0}{=} x+\mathrm{o}(x)+x\ln x+\mathrm{o}\left(x^2\ln x\right)+x^2+\mathrm{o}\left(x^2\right)$.

4) $\ldots \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n}+\frac{\ln n}{n}+\mathrm{o}\left(\frac{\ln n}{n}\right)+\frac{1}{n^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)+\frac{1}{n\ln n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n\ln n}\right)$.

5) $\ldots \underset{n\to+\infty}{=} n+\mathrm{o}(n)+\frac{n^2}{\ln n}+\sqrt{n}+\mathrm{o}\left(\sqrt{n}\right)+n\ln n+\mathrm{o}(n\ln n)$.

2

1) Proposer un exemple de suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour laquelle $\lim_{n\to+\infty} u_n=+\infty$ et $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(\ln n)$.

2) Proposer un exemple de suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour laquelle pour tous $a>1$ et $\alpha>0$: $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(a^n)$ et $n^\alpha \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(u_n)$.

Développements limités

3 Montrer que les familles suivantes sont libres dans $\mathbb{R}^\mathbb{R}$ grâce à des développements limités.

1) $\left(x\longmapsto \mathrm{e}^x\ ,\ x\longmapsto x\,\mathrm{e}^x\ ,\ x\longmapsto \mathrm{e}^{x+x^2}\right)$.

2) $\left(x\longmapsto \sin x\ ,\ x\longmapsto x\sin x\ ,\ x\longmapsto \cos x\ ,\ x\longmapsto x\cos x\right)$.

---

4 Calculer les développements limités suivants au voisinage de 0 :

1) $\mathrm{e}^x\,\mathrm{Arctan}\,x$ à l'ordre 4.
2) $\ln\left(1+x^2\right)\sqrt[3]{1+x}$ à l'ordre 4.
3) $\frac{\sin(2x)}{\sqrt{1+x}}$ à l'ordre 3.
4) $\frac{x\,\mathrm{e}^{-x}}{2x+1}$ à l'ordre 4.
5) $\sin^4 x$ à l'ordre 8.
6) $\frac{\ln(1+3x)}{\mathrm{ch}\,x}$ à l'ordre 3.
7) $\tan x$ à l'ordre 5.
8) $\frac{x^2}{1-\cos x}$ à l'ordre 3.
9) $\sqrt{1+\sin x}$ à l'ordre 3.
10) $\ln\mathrm{ch}(2x)$ à l'ordre 3.
11) $\ln\left(\mathrm{e}^x+\cos x\right)$ à l'ordre 2.
12) $\mathrm{e}^{\cos x}-(1+x)^{\frac{1}{x}}$ à l'ordre 2.
13) $\sqrt{\mathrm{ch}\,\sin x}$ à l'ordre 3.
14) $\ln\left(1+x+\sqrt{1+x}\right)$ à l'ordre 3.
15) $\frac{\sqrt[3]{\cos x}}{1+x^2}$ à l'ordre 5.

Et maintenant, plus dur :

16) $(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}$ à l'ordre 3.
17) $\frac{\mathrm{Arctan}\,x}{\mathrm{Arcsin}\,x}$ à l'ordre 4.
18) $\ln(1+\sin x)-\sin\ln(1+x)$ à l'ordre 5.

---

5 Calculer les développements limités suivants à l'ordre 2 :

1) $\sqrt{x}$ en 5. 2) $\sin x\cos(3x)$ en $\frac{\pi}{3}$.
3) $\frac{\ln x}{x}$ en 3. 4) $x\,\mathrm{e}^x$ en 1.
5) $\mathrm{e}^x\cos x$ en $\frac{\pi}{4}$. 6) $\ln\sin x$ en $\frac{\pi}{3}$.
7) $\mathrm{Arctan}\,\frac{1}{1+x}$ en 0. 8) $\frac{\ln x}{x^2}$ en 2.

6

1) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$:
$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{4^k}\binom{2k}{k}x^k+\mathrm{o}\left(x^n\right).$$

2) En déduire un développement limité de la fonction arcsinus à tout ordre au voisinage de 0.

---

7 Calculer un développement asymptotique :

1) de $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ à la précision $\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

2) de $\mathrm{Arctan}\,x$ à la précision $\mathrm{o}\left(\frac{1}{x^3}\right)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

3) de $\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}k!$ à la précision $\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Équivalents

8 Trouver un équivalent simple des expressions suivantes, d'abord de tête si possible, puis proprement :

1) $\frac{\lfloor x\rfloor}{\sqrt{x+1}}$ en $+\infty$. 2) $\frac{n^2\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\tan\frac{\pi}{n}}$.
3) $\frac{\ln\left(n^4+4\right)}{n+1}$. 4) $\frac{x^4-x\sin x}{\lfloor x\rfloor^2-4x}$ en $+\infty$.
5) $\frac{\cos x-x^x}{\mathrm{e}^x}$ en 0. 6) $\frac{\ln x}{\sqrt{x+2}}$ en 1.
7) $3+\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}-\frac{6}{n}$. 8) $\ln\mathrm{ch}\,x+\mathrm{sh}^2 x$ en 0.
9) $\frac{x^\alpha}{1+x^\beta}$ en $+\infty$, puis en 0 ($\alpha,\beta\in\mathbb{R}$).
10) $\ln(1+x)+\sin x$ en $+\infty$.
11) $\ln(n+2)-\ln(n+1)$. 12) $\mathrm{Arcsin}\,\mathrm{e}^{-\sqrt{n}}$.
13) $\frac{\cos x}{1-x}-1$ en 0. 14) $\binom{n+p}{n}$ ($p\in\mathbb{N}$).
15) $\ln\frac{1+\mathrm{ch}\,x}{2}$ en 0. 16) $\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+5}-\frac{4}{n^2}$.

17) $(x+1)^x - x^x$ en 0. **18)** $\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$ en π.

19) $\cos\dfrac{1}{2^n} - \sqrt[4]{1+\dfrac{1}{n^2}}$. **20)** $e^{e^{e^{-n}}} - e$.

21) $(n+1)^{\frac{1}{n+1}} - n^{\frac{1}{n}}$. **22)** $\dfrac{1-\sqrt{1+x}}{\cos x - e^x}$ en 0.

23) $\left(n+\ln n\right)e^{-n+1}$. **24)** $(\cos x)^{\ln x} - 1$ en 0.

25) $e^{2\operatorname{Arccos}\frac{1}{n}} - e^{\pi}\cos\dfrac{1}{\sqrt{n}}$. **26)** $e^{\tan\frac{\pi}{n}} - 1$.

27) $\sqrt{\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}}$ en $+\infty$.

28) $\ln\left(2e^x + x\right) - \sqrt{x^2+x+\sin x}$ en $+\infty$.

29) $x^{\sin x} - (\sin x)^x$ en 0. **30)** $\left\lfloor\sqrt{n}\right\rfloor \sin\dfrac{\pi}{n}$.

31) $\dfrac{\ln\left(n^2+2\right)-\ln\left(n^2+1\right)}{n^{\frac{n+2}{n}}}$. **32)** $e^{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$.

33) $x^{\frac{1}{x}} - \cos\dfrac{1}{x}$ en $+\infty$. **34)** $(2n)! - n^n$.

35) $\cos^2 x - \cos\left(x^2\right)$ en 0. **36)** $\sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$.

37) $\left(1+\dfrac{2}{x^2}\right)^x - \left(1+\dfrac{1}{x^3}\right)^{x^2}$ en $+\infty$.

38) $\sin x - \sin\theta$ en θ ($\theta\in\mathbb{R}$).

39) $\sqrt{n}^{\,n} + n^{\sqrt{n}} + n^{\frac{n}{2}}$.

9

1) Trouver deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour lesquelles :

a) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_n}{v_n} = 1$ mais $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) \neq 0$.

b) $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$ mais $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_n}{v_n} \neq 1$.

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles qui ne s'annulent pas à partir d'un certain rang.

2) **a)** Montrer l'équivalence :

$$e^{u_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{v_n} \iff u_n - v_n \underset{n\to+\infty}{=} o(1).$$

b) Trouver deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour lesquelles $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, mais pour lesquelles il est faux que $e^{u_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{v_n}$.

3) **a)** Montrer que si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors $\ln u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln v_n$.

b) Trouver deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour lesquelles $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$, mais pour lesquelles il est faux que $\ln u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln v_n$.

---

10 Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites strictement positives pour lesquelles $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} x'_n$ et $y_n \underset{n\to+\infty}{\sim} y'_n$. Montrer que $x_n + y_n \underset{n\to+\infty}{\sim} x'_n + y'_n$.

---

11 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Montrer que si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\sqrt{n}\right)$, alors $\left(1+\dfrac{u_n}{n}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{u_n}$.

Calculs de limites

12 Étudier les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-\sin x}{\tan x - x}$. **2)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln\left(2x^2-1\right)}{x\sqrt{x}-1}$.

3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{\tan^2 x}\right)$. **4)** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^3}-\dfrac{1}{\sin^3 x}\right)$.

5) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(3\sqrt[n]{2}-2\sqrt[n]{3}\right)^n$. **6)** $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$.

---

13 Soient $a, b \in \mathbb{R}$.
On note f la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x} - \dfrac{a}{\ln(1+x)} - \dfrac{b}{e^x - 1}$.

1) À quelle condition nécessaire et suffisante sur a et b est-il vrai que $\lim\limits_{0} f = 0$?

2) Montrer que, le cas échéant, f possède un maximum local en 0.

Études de suites

14 Soit $a > 0$. On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = a$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{a}{u_n}\right)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. On pose $v_n = \dfrac{u_n - \sqrt{a}}{u_n + \sqrt{a}}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

1) Calculer v_{n+1} en fonction de v_n pour tout $n\in\mathbb{N}$, puis en déduire une expression explicite de u_n en fonction de n.

2) En déduire que $u_n - \sqrt{a} \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\sqrt{a}\left(\dfrac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1}\right)^{2^n}$.

Cette méthode puissante — pourquoi puissante ? — de calcul des valeurs approchées d'une racine carrée est appelée la *méthode de Héron* ou *méthode des Babyloniens*.

---

15 On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + n^2}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

1) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

2) Montrer que $n - 1 \leqslant u_n \leqslant n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, puis en déduire un équivalent simple de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

3) En déduire que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} n - \dfrac{1}{2} + O\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Études locales de fonctions

16 Montrer que les fonctions suivantes sont prolongeables en des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$:

1) $x \longmapsto \dfrac{e^x - 1}{x}$ sur $\mathbb{R}$.

2) $x \longmapsto \dfrac{x}{\ln(1+x)}$ sur $]-1, +\infty[$.

---

17 Montrer que $\operatorname{Arccos} x \underset{x\to 1}{\sim} \sqrt{2(1-x)}$, puis que la fonction arccosinus n'est dérivable ni en 1, ni en -1.

18 On note f la fonction définie par $f(0)=0$ et $f(x)=x^{1+\frac{1}{x}}$ pour tout $x>0$.

1) Étudier la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}_+$.

2) Montrer que f possède un $\mathrm{DL}_3(1)$ et le calculer. Qu'en déduit-on sur le graphe de f ?

19 On note f la fonction $x \longmapsto \dfrac{x^2}{\operatorname{sh} x}$ sur $\mathbb{R}^*$.

1) Calculer le $\mathrm{DL}_3(0)$ de f.

2) En déduire que f est prolongeable en une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et préciser la position relative au voisinage de 0 du graphe de f par rapport à sa tangente en 0.

20 Étudier localement au voisinage de 0 les fonctions d'expressions : **1)** $\dfrac{\ln(1-x)}{\mathrm{e}^x+1}$. **2)** $\left(\operatorname{ch} x\right)^{\frac{1}{x}}$. **3)** $\dfrac{\cos^3 x}{\sqrt{1+2x}}$.

21 Montrer que les fonctions suivantes possèdent une asymptote en $+\infty$ et étudier la position relative de leur graphe par rapport à celle-ci au voisinage de $+\infty$:

1) $x \longmapsto x\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$. **2)** $x \longmapsto (x+1)\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$.

3) $x \longmapsto \ln\left(\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^x+1\right)$. **4)** $x \longmapsto \dfrac{x^2 \operatorname{Arctan} x}{\pi x+1}$.

22

1) On note f la fonction $x \longmapsto x+\ln(1+x)$.

a) Montrer que f est bijective de $]-1,+\infty[$ sur son image — que l'on précisera.

b) Montrer que f^{-1} possède un $\mathrm{DL}_3(0)$ et le calculer.

2) On note g la fonction $x \longmapsto x\,\mathrm{e}^{x^2}$.

a) Montrer que g est bijective de $\mathbb{R}$ sur son image — que l'on précisera.

b) Montrer que g^{-1} possède un $\mathrm{DL}_5(0)$ et le calculer.