1 Exercices divers

1 Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites. On suppose : $u_n \neq 0$ et $v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang.

1) Montrer l'équivalence :
$$e^{u_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{v_n} \iff u_n - v_n \underset{n\to+\infty}{=} o(1).$$

2) Montrer que si :
$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty,$$
alors : $\ln u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln v_n$.

3) Montrer que si : $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o\big(\sqrt{n}\big)$, alors :
$$\left(1+\frac{u_n}{n}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{u_n}.$$

---

2 Calculer un développement asymptotique :

1) de : $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ lorsque n tend vers $+\infty$ à la précision $o\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$.

2) de : $\operatorname{Arctan} x$ lorsque x tend vers $+\infty$ à la précision $o\left(\dfrac{1}{x^3}\right)$.

3) de : $\dfrac{1}{n!}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k!$ lorsque n tend vers $+\infty$ à la précision $o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

3

1) Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$:
$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{k-1} x^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} (1-x)^{k-1}.$$

2) En déduire un équivalent simple de :
$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$$
lorsque n tend vers $+\infty$.

---

2 Études de sommes par encadrement d'intégrales

4 Déterminer un équivalent simple lorsque n tend vers $+\infty$ de : **1)** $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln k}$. **2)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+\sqrt{k}}$.

3) $\ln(n!)$. Quel développement asymptotique plus précis la formule de Stirling fournit-elle ?

4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$ avec $\alpha \in\,]0,1[$.

5

1) Montrer que pour un certain $\ell \in \mathbb{R}$:
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{k} \underset{n\to+\infty}{=} \int_1^n \frac{\ln t}{t}\,dt + \ell + o(1).$$

2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \frac{\ln k}{k} = \ln 2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\ln k}{k}.$$

3) En déduire la limite :
$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{\ln k}{k} = \gamma \ln 2 - \frac{(\ln 2)^2}{2}.$$

---

6 Étudier la limite : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n}\ln\frac{k}{n}$, puis en déduire un développement de : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\ln k$ à la précision $o\big(n^2\big)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

---

7 Déterminer un équivalent simple de : $\sqrt[n]{\dfrac{(2n)!}{n!}}$ lorsque n tend vers $+\infty$:

1) en utilisant la formule de Stirling.

2) en se ramenant à une certaine somme de Riemann.

---

3 Suites récurrentes

8 Soit $a > 1$. On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $u_0 = a$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{a}{u_n}\right)$.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = \dfrac{u_n - \sqrt{a}}{u_n + \sqrt{a}}$.

1) Calculer v_{n+1} en fonction de v_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de v_n, puis de u_n en fonction de n.

3) En déduire enfin l'équivalent :
$$u_n - \sqrt{a} \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\sqrt{a}\left(\frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1}\right)^{2^n}.$$

4) Cette méthode de calcul des valeurs approchées d'une racine carrée s'appelle la *méthode de Héron* ou *méthode des Babyloniens*. Pourquoi est-elle très intéressante ?

---

9 On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par : $u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_{n+1} = \ln\big(n + u_n\big)$.

1) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ possède une limite et la déterminer.

2) a) On rappelle que pour tout $x > 0$: $\ln x \leqslant x$.
Montrer que pour tout $n \geqslant 2$: $u_n \leqslant \ln(2n)$.

b) Montrer que : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$.

3) Montrer que : $u_n - \ln n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln n}{n}$.

---

10 On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = n + 1 + \ln u_n$.

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intervalle $[1, +\infty[$ est stable par la fonction $x \longmapsto n + 1 + \ln x$.

2) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ existe et la calculer.

3) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n \leqslant 2n$.

4) Montrer que : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n$.

5) Montrer que : $u_n - n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$.

---

11 On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = 1 + \dfrac{n}{u_n}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\sqrt{n} \leqslant u_n \leqslant \sqrt{n} + 1$, puis déterminer un équivalent simple de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

---

4 SUITES D'INTÉGRALES ET FONCTIONS DÉFINIES PAR UNE INTÉGRALE

12 On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1 + t^n}$.

1) Calculer u_0, u_1 et u_2.

2) Montrer que : $u_n \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \dfrac{\ln 2}{n} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

---

13 Déterminer un équivalent simple lorsque n tend vers $+\infty$ de : $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2}\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$.

---

14 Déterminer un développement asymptotique de : $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ à la précision $\mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

---

15 Soit $f \in \mathscr{C}^2\big([0,1], \mathbb{R}\big)$. Déterminer un développement asymptotique de : $\displaystyle\int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t$ à la précision $\mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

---

16 On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$F(n) = \int_0^\pi \frac{\big|\sin(nt)\big|}{t}\,\mathrm{d}t.$$

1) Justifier proprement la définition de F.

2) a) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, montrer l'inégalité :

$$\frac{2}{(k+1)\pi} \leqslant \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{2}{k\pi}.$$

b) En déduire l'équivalent : $F(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{2}{\pi} \ln n$.

---

5 SOLUTIONS D'ÉQUATIONS DÉFINIES IMPLICITEMENT

17

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que l'équation :

$$\tan \frac{x\pi}{2} = \frac{\pi}{2nx}$$

d'inconnue $x \in \,]0, 1[$ possède une et une seule solution x_n.

2) a) Montrer que pour tout $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$: $\tan x \geqslant x$.

b) En déduire : $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$, puis un équivalent simple de x_n lorsque n tend vers $+\infty$.

18

1) Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, montrer que l'équation :

$$x^5 + tx - 1 = 0$$

d'inconnue $x \in [0, 1]$ possède une et une seule solution x_t.

2) Montrer que : $\lim\limits_{t\to+\infty} x_t = 0$.

3) Montrer que : $x_t \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t}$.

4) En déduire un équivalent simple de : $x_t - \dfrac{1}{t}$ lorsque t tend vers $+\infty$.

19

1) Pour tout $n \geqslant 2$, montrer que l'équation :

$$x^n - nx + 1 = 0$$

d'inconnue $x \in [0, 1]$ possède une et une seule solution x_n.

2) Étudier la convergence de $(x_n)_{n\geqslant 2}$.

3) Montrer que : $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.

20

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que l'équation :

$$x^n + x - 1 = 0$$

d'inconnue $x \in [0, 1]$ possède une et une seule solution u_n.

2) Étudier la monotonie de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, puis sa limite.

3) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\delta_n = 1 - u_n$.

a) Montrer que : $\ln \delta_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -n\delta_n$.

b) Montrer ensuite que : $\ln \delta_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\ln n$.

c) En déduire que : $\delta_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln n}{n}$.

21

1) Montrer que la fonction $x \overset{f}{\longmapsto} x + \ln x$ est bijective de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$.

2) Déterminer : $\lim_{y \to +\infty} f^{-1}(y)$.

3) En déduire que : $f^{-1}(y) \underset{y \to +\infty}{\sim} y$.

4) Montrer que : $f^{-1}(y) - y \underset{y \to +\infty}{\sim} -\ln y$.

---

22 ⌚⌚

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que l'équation :

$$x^n + x\sqrt{n} - 1 = 0$$

d'inconnue $x \in [0, 1]$ possède une et une seule solution x_n.

2) Étudier la convergence de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

3) Montrer que : $x_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

---

23 ⌚⌚

1) Montrer que l'équation : $\tan x = x$ d'inconnue $x \in \left]n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}\right[$ possède une et une seule solution x_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2) Déterminer un équivalent simple de x_n lorsque n tend vers $+\infty$.

3) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\delta_n = x_n - n\pi$.

a) Exprimer δ_n en fonction de x_n et de la fonction Arctan pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, puis calculer : $\lim_{n \to +\infty} \delta_n$.

b) On rappelle que pour tout $x > 0$:

$$\operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}.$$

En déduire le développement asymptotique :

$$x_n \underset{n \to +\infty}{=} n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + \frac{1}{2n^2\pi} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

---

24 ⌚⌚⌚

1) Pour tout $n \geqslant 2$, montrer que l'équation :

$$\sin x = \frac{x}{n}$$

d'inconnue $x \in]0, \pi[$ possède une et une seule solution x_n.

2) Étudier la monotonie de $(x_n)_{n \geqslant 2}$.

3) Montrer que $(x_n)_{n \geqslant 2}$ est convergente et préciser sa limite.

4) Montrer que : $x_n \underset{n \to +\infty}{=} \pi - \dfrac{\pi}{n} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

5) **a)** Calculer un développement limité de la fonction arcsinus au voisinage de 0 à l'ordre 3.

b) En déduire un développement asymptotique de x_n à la précision $\mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

---

25 ⌚⌚⌚

1) Pour tout $n \geqslant 2$, montrer que l'équation :

$$x^n = x + n$$

d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+$ possède une et une seule solution x_n.

2) Montrer que $(x_n)_{n \geqslant 2}$ converge vers 1.

3) Déterminer un équivalent simple de : $x_n - 1$ lorsque n tend vers $+\infty$.

---

26 ⌚⌚⌚

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que le polynôme :

$$X^{2n} - 2nX + 1$$

possède au moins une racine réelle. On notera x_n la plus grande de ces racines.

2) Montrer que : $\lim_{n \to +\infty} x_n = 1$.

3) Montrer que : $x_n \underset{n \to +\infty}{=} 1 + \dfrac{\ln n}{2n} + \mathrm{o}\left(\dfrac{\ln n}{n}\right)$.

---

27 ⌚⌚⌚

1) Montrer que l'équation : $\mathrm{e}^x = \alpha x$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+$ possède exactement deux solutions pour tout $\alpha > \mathrm{e}$ que nous notons x_α et y_α, dans l'ordre : $x_\alpha < y_\alpha$.

2) Étudier la monotonie des fonctions $\alpha \longmapsto x_\alpha$ et $\alpha \longmapsto y_\alpha$ sur $]\mathrm{e}, +\infty[$. En déduire : $\lim_{\alpha \to +\infty} x_\alpha$ et $\lim_{\alpha \to +\infty} y_\alpha$.

3) **a)** Montrer que : $x_\alpha \underset{\alpha \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{\alpha}$.

b) En déduire un équivalent simple de : $x_\alpha - \dfrac{1}{\alpha}$ lorsque α tend vers $+\infty$.

4) **a)** Montrer que pour tout $\alpha > \mathrm{e}$: $y_\alpha \geqslant \ln \alpha$.

b) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que : $y_\alpha < (1 + \varepsilon) \ln \alpha$ au voisinage de $+\infty$.

c) En déduire que : $y_\alpha \underset{\alpha \to +\infty}{\sim} \ln \alpha$.

d) En déduire un équivalent simple de : $y_\alpha - \ln \alpha$ lorsque α tend vers $+\infty$.

---

28 ⌚⌚⌚

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que l'équation :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{x - k} = 0$$

d'inconnue $x \in]0, 1[$ possède une et une seule solution x_n.

2) Montrer que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante.

3) Encadrer : $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{x - k}$ pour tous $x \in]0, 1[$ et $n \geqslant 2$, puis montrer que : $x_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{\ln n}$.
