## Exercices divers

**1** Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites.

1) Montrer l'équivalence :
$$e^{u_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{v_n} \iff u_n - v_n \underset{n\to+\infty}{=} o(1).$$

2) On suppose $u_n > 0$ à partir d'un certain rang.
   a) Montrer que si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors $\ln u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln v_n$.
   b) Montrer que si $u_n \ln u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n$, alors :
$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{\ln n}.$$

3) Montrer que si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\sqrt{n}\right)$, alors :
$$\left(1+\frac{u_n}{n}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{u_n}.$$

---

**2**

1) Que vaut $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$ ? En déduire l'existence d'un réel $\alpha > 0$ pour lequel $x - x^3 \leqslant \sin x \leqslant x$ pour tout $x \in [0,\alpha[$.

2) En déduire que $\sum\limits_{k=1}^{n} \sin\frac{\pi}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \pi \ln n$.

---

## Comparaison de sommes à des intégrales

**3** Déterminer un équivalent simple lorsque $n$ tend vers $+\infty$ de :

1) $\sum\limits_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln k}$.  2) $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$ avec $\alpha \in ]0,1[$.

3) $\ln(n!)$. Quel développement asymptotique plus précis la formule de Stirling fournit-elle ?

---

**4**

1) Montrer que : $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{k} \underset{n\to+\infty}{=} \frac{(\ln n)^2}{2} + \ell + o(1)$ pour un certain $\ell \in \mathbb{R}$. Attention, on demande un $o(1)$ et non un $O(1)$ !

2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ :
$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \frac{\ln k}{k} = \ln 2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\ln k}{k}.$$

3) En déduire que $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{\ln k}{k} = \gamma \ln 2 - \frac{(\ln 2)^2}{2}$.

---

**5**

1) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k}{n} \ln\frac{k}{n}$.

2) En déduire un développement asymptotique à la précision $o\left(n^2\right)$ de $\sum\limits_{k=1}^{n} k\ln k$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

---

**6** Déterminer un équivalent simple de $\sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!}}$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$ :

1) en se ramenant à une certaine somme de Riemann.
2) en utilisant la formule de Stirling.

---

## Suites d'intégrales et fonctions définies par une intégrale

**7** On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $u_n = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^n}$.

1) Calculer $u_0$, $u_1$ et $u_2$.
2) Montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \frac{\ln 2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

---

**8** Déterminer un équivalent simple lorsque $n$ tend vers $+\infty$ de $\int_0^1 \frac{t^n}{\sqrt{1+t}}\, e^t\, dt$.

---

**9** Soit $f \in \mathscr{C}^2\left([0,1],\mathbb{R}\right)$. Déterminer un développement asymptotique de $\int_0^1 t^n f(t)\, dt$ à la précision $o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

---

**10**

1) Montrer que pour tout $f \in \mathscr{C}\left([0,1],\mathbb{R}\right)$ :
$$\int_0^1 e^{-xt} f(t)\, dt \underset{x\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{x}\right).$$

2) Soit $f \in \mathscr{C}^2\left([0,1],\mathbb{R}\right)$. Déterminer un développement asymptotique de $\int_0^1 e^{-xt} f(t)\, dt$ à la précision $O\left(\frac{1}{x^3}\right)$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$.

---

**11** On pose $F(n) = \int_0^{n\pi} \frac{|\sin t|}{t}\, dt$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) Justifier la bonne définition de $F$.
2) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ :
$$\frac{2}{(k+1)\pi} \leqslant \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t}\, dt \leqslant \frac{2}{k\pi},$$
puis en déduire un équivalent de $F(n)$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

---

## Suites récurrentes

**12** On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) Simplifier $u_{n+1}^2 - u_n^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

**2)** Montrer que $\frac{1}{u_n^2} \leqslant \frac{1}{2n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et en déduire que $u_n^2 \underset{n\to+\infty}{=} 2n + \mathrm{O}(\ln n)$.

**3)** En déduire un développement asymptotique de $u_n$ à la précision $\mathrm{O}\left(\frac{\ln n}{\sqrt{n}}\right)$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

---

**13** 🕑🕑 On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_1 = 1$ et $u_{n+1} = \ln\big(n + u_n\big)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

**1)** Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ possède une limite et la déterminer.

**2)** **a)** Montrer que $u_n \leqslant \ln(2n)$ pour tout $n \geqslant 2$.
**b)** Montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$.

**3)** Montrer que $u_n - \ln n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln n}{n}$.

---

**14** 🕑🕑 On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_n = n + \ln u_{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

**1)** Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède une limite et la déterminer.

**2)** Déterminer un réel $\lambda > 0$ pour lequel $u_n \leqslant \lambda n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

**3)** En déduire que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n$.

**4)** Déterminer un développement asymptotique de $u_n$ à la précision $\mathrm{o}(1)$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

**5)** Pousser le calcul jusqu'à la précision $\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$.

---

**15**

**1)** 🕑🕑 Soit $f$ une fonction définie au voisinage de 0 pour laquelle $f(x) \underset{x\to 0}{=} x + \lambda x^\alpha + \mathrm{o}\big(x^\alpha\big)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et $\alpha > 1$. Déterminer pour tout $\beta \in \mathbb{R}^*$ un équivalent simple de $f(x)^\beta - x^\beta$ lorsque $x$ tend vers 0. Pour quel $\beta$ la fonction $x \longmapsto f(x)^\beta - x^\beta$ a-t-elle une limite finie non nulle en 0 ?

**2)** 🕑🕑🕑 On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n\,\mathrm{e}^{-u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
**a)** Étudier $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.
**b)** Montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ grâce au théorème de sommation des relations de comparaison.
**c)** Montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n} - \frac{\ln n}{2n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)$.

---

## Solutions d'équations définies implicitement

**16** 🕑

**1)** Montrer que l'équation $x^5 + tx - 1 = 0$ d'inconnue $x \in [0,1]$ possède une et une seule solution $x_t$ pour tout $t \geqslant 0$.

**2)** Montrer que $\lim\limits_{t\to+\infty} x_t = 0$.

**3)** Montrer que $x_t \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t}$, puis calculer un équivalent simple de $x_t - \frac{1}{t}$ lorsque $t$ tend vers $+\infty$.

---

**17** 🕑🕑

**1)** Montrer que la fonction $x \overset{f}{\longmapsto} x + \ln x$ est bijective de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$.

**2)** Déterminer $\lim\limits_{y\to+\infty} f^{-1}(y)$.

**3)** En déduire que $f^{-1}(y) \underset{y\to+\infty}{\sim} y$.

**4)** Montrer que $f^{-1}(y) - y \underset{y\to+\infty}{\sim} -\ln y$.

---

**18** 🕑🕑

**1)** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $\tan x = x$ d'inconnue $x \in \left]n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}\right[$ possède une et une seule solution $x_n$.

**2)** Déterminer un équivalent simple de $x_n$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

**3)** On pose $\delta_n = x_n - n\pi$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
**a)** Exprimer $\delta_n$ en fonction de $x_n$ et de la fonction arctangente pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \delta_n$.
**b)** On rappelle que $\mathrm{Arctan}\,x + \mathrm{Arctan}\,\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$ pour tout $x > 0$. En déduire le développement asymptotique :
$$x_n \underset{n\to+\infty}{=} n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + \frac{1}{2n^2\pi} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

---

**19** 🕑🕑

**1)** Montrer que l'équation $x^n - nx + 1 = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+^*$ possède exactement deux solutions $x_n$ et $y_n$ pour tout $n \geqslant 3$ avec $x_n < y_n$.

**2)** **a)** Étudier la convergence de $(x_n)_{n\geqslant 3}$, puis montrer que $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.
**b)** Trouver deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ positives équivalentes de limite nulle pour lesquelles les suites $\big(u_n^n\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\big(v_n^n\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne sont pas équivalentes.
**c)** 🕑🕑🕑 Calculer un équivalent de $x_n - \frac{1}{n}$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

**3)** 🕑🕑🕑 Montrer que $y_n \underset{n\to+\infty}{=} 1 + \frac{\ln n}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{\ln n}{n}\right)$.

---

**20** 🕑🕑🕑

**1)** Montrer que l'équation $x^n + x - 1 = 0$ d'inconnue $x \in [0,1]$ possède une et une seule solution $u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

**2)** Étudier la monotonie de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, puis sa limite.

**3)** On pose $\delta_n = 1 - u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
**a)** Montrer que $\ln \delta_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -n\delta_n$.
**b)** En déduire que $\ln \delta_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\ln n$.
**c)** En déduire que $\delta_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln n}{n}$.

---

**21** 🕑🕑🕑

**1)** Montrer que pour tout $n \geqslant 2$, l'équation $\sin x = \frac{x}{n}$ d'inconnue $x \in \left]0, \pi\right[$ possède une et une seule solution $x_n$.

**2)** Étudier la monotonie de $(x_n)_{n\geqslant 2}$.
**3)** Montrer que $(x_n)_{n\geqslant 2}$ est convergente et préciser sa limite.
**4)** Montrer que $x_n \underset{n\to+\infty}{=} \pi - \dfrac{\pi}{n} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)$.
**5)** **a)** Calculer un développement limité de la fonction arcsinus au voisinage de 0 à l'ordre 3.
**b)** En déduire un développement asymptotique de $x_n$ à la précision $\mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

---

**22**

**1)** Montrer que pour tout $n \geqslant 2$, l'équation $x^n = x+n$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+$ possède une et une seule solution $x_n$.
**2)** Montrer que $(x_n)_{n\geqslant 2}$ converge vers 1.
**3)** Déterminer un équivalent simple de $x_n - 1$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

---

**23**

**1)** Montrer que l'équation $\mathrm{e}^x = \alpha x$ d'inconnue $x \geqslant 0$ possède exactement deux solutions $x_\alpha$ et $y_\alpha$ pour tout $\alpha > \mathrm{e}$, dans l'ordre $x_\alpha < y_\alpha$.
**2)** **a)** Montrer que $y_\alpha \underset{\alpha\to+\infty}{\sim} \ln \alpha$.
**b)** Déterminer un équivalent simple de $y_\alpha - \ln \alpha$ lorsque $\alpha$ tend vers $+\infty$.
**3)** **a)** Étudier la monotonie de la fonction $\alpha \longmapsto x_\alpha$ sur $]\mathrm{e}, +\infty[$ et en déduire $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} x_\alpha$.
**b)** Déterminer un développement asymptotique de $x_\alpha$ à la précision $\mathrm{o}\left(\dfrac{1}{\alpha^2}\right)$ lorsque $\alpha$ tend vers $+\infty$.

---