

1 EXERCICES DIVERS

1 ⌚⌚ Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites. On suppose : $u_n \neq 0$ et $v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang.

1) Montrer l'équivalence :

$$e^{u_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^{v_n} \iff u_n - v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(1).$$

2) Montrer que si :

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty,$$

alors : $\ln u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln v_n$.

3) Montrer que si : $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(\sqrt{n})$, alors :

$$\left(1 + \frac{u_n}{n}\right)^n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^{u_n}.$$

2 Calculer un développement asymptotique :

1) ⌚⌚ de : $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ lorsque n tend vers $+\infty$ à la précision $o\left(\frac{1}{n^3}\right)$.

2) ⌚⌚ de : $\text{Arctan } x$ lorsque x tend vers $+\infty$ à la précision $o\left(\frac{1}{x^3}\right)$.

3) ⌚⌚⌚ de : $\frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n k!$ lorsque n tend vers $+\infty$ à la précision $o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

3 1) ⌚ Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-1)^{k-1} x^{k-1} = \sum_{k=1}^n (1-x)^{k-1}.$$

2) ⌚⌚ En déduire un équivalent simple de :

$$\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

2 ÉTUDES DE SOMMES PAR ENCADREMENT D'INTÉGRALES

4 ⌚⌚ Déterminer un équivalent simple lorsque n tend vers $+\infty$ de : 1) $\sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln k}$. 2) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k + \sqrt{k}}$.

3) $\ln(n!)$. Quel développement asymptotique plus précis la formule de Stirling fournit-elle ?

4) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}$ avec $\alpha \in]0, 1[$.

5 ⌚⌚ 1) Montrer que pour un certain $\ell \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{k=1}^n \frac{\ln k}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \int_1^n \frac{\ln t}{t} dt + \ell + o(1).$$

2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \frac{\ln k}{k} = \ln 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\ln k}{k}.$$

3) En déduire que : $\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{\ln k}{k} = \gamma \ln 2 - \frac{(\ln 2)^2}{2}$.

6 ⌚⌚⌚ Étudier la limite : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \ln \frac{k}{n}$, puis en déduire un développement de : $\sum_{k=1}^n k \ln k$ à la précision $o(n^2)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

7 Déterminer un équivalent simple de : $n \sqrt{\frac{(2n)!}{n!}}$ lorsque n tend vers $+\infty$:

- 1) ⌚ en utilisant la formule de Stirling.
- 2) ⌚⌚⌚ en se ramenant à une certaine somme de Riemann.

3 SUITES RÉCURRENTES

8 ⌚⌚ Soit $a > 1$. On note $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par : $u_0 = a$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{a}{u_n} \right)$.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = \frac{u_n - \sqrt{a}}{u_n + \sqrt{a}}$.

- 1) Calculer v_{n+1} en fonction de v_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- 2) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de v_n , puis de u_n en fonction de n .
- 3) En déduire enfin l'équivalent :

$$u_n - \sqrt{a} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 2\sqrt{a} \left(\frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1} \right)^{2^n}.$$

4) Cette méthode de calcul des valeurs approchées d'une racine carrée s'appelle la *méthode de Héron* ou *méthode des Babyloniens*. Pourquoi est-elle très intéressante ?

9 ⌚⌚ On note $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie par : $u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_{n+1} = \ln(n + u_n)$.

- 1) Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ possède une limite et la déterminer.
- 2) a) On rappelle que pour tout $x > 0$: $\ln x \leq x$. Montrer que pour tout $n \geq 2$: $u_n \leq \ln(2n)$.
b) Montrer que : $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln n$.

3) Montrer que : $u_n - \ln n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln n}{n}$.

- 10** ☺☺ On note $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par : $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = n + 1 + \ln u_n$.
- 1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intervalle $[1, +\infty[$ est stable par la fonction $x \mapsto n + 1 + \ln x$.
 - 2) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ existe et la calculer.
 - 3) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n \leq 2n$.
 - 4) Montrer que : $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n$.
 - 5) Montrer que : $u_n - n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln n$.

- 11** ☺☺ On note $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par : $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = 1 + \frac{n}{u_n}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\sqrt{n} \leq u_n \leq \sqrt{n+1}$, puis déterminer un équivalent simple de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

4 SUITES D'INTÉGRALES ET FONCTIONS DÉFINIES PAR UNE INTÉGRALE

- 12** On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^n}$.
- 1) ☺ Calculer u_0, u_1 et u_2 .
 - 2) ☺☺ Montrer que : $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 1 - \frac{\ln 2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

- 13** ☺☺ Déterminer un équivalent simple lorsque n tend vers $+\infty$ de : $\int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2} e^t dt$.

- 14** ☺☺ Déterminer un développement asymptotique de : $\int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2} dt$ à la précision $o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

- 15** ☺☺ Soit $f \in \mathcal{C}^2([0, 1], \mathbb{R})$. Déterminer un développement asymptotique de : $\int_0^1 t^n f(t) dt$ à la précision $o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

- 16** ☺☺ On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$F(n) = \int_0^\pi \frac{|\sin(nt)|}{t} dt.$$

- 1) Justifier proprement la définition de F .
- 2) a) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, montrer l'inégalité :

$$\frac{2}{(k+1)\pi} \leq \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt \leq \frac{2}{k\pi}.$$

- b) En déduire l'équivalent : $F(n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2}{\pi} \ln n$.

5 SOLUTIONS D'ÉQUATIONS DÉFINIES IMPLICITEMENT

- 17** ☺☺ 1) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que l'équation :

$$\tan \frac{x\pi}{2} = \frac{\pi}{2nx}$$

d'inconnue $x \in]0, 1[$ possède une et une seule solution x_n .

- 2) a) Montrer que pour tout $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$: $\tan x \geq x$.
- b) En déduire : $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$, puis un équivalent simple de x_n lorsque n tend vers $+\infty$.

- 18** ☺☺ 1) Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, montrer que l'équation :

$$x^5 + tx - 1 = 0$$

d'inconnue $x \in [0, 1]$ possède une et une seule solution x_t .

- 2) Montrer que : $\lim_{t \rightarrow +\infty} x_t = 0$.
- 3) Montrer que : $x_t \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t}$.
- 4) En déduire un équivalent simple de : $x_t - \frac{1}{t}$ lorsque t tend vers $+\infty$.

- 19** ☺☺ 1) Pour tout $n \geq 2$, montrer que l'équation :

$$x^n - nx + 1 = 0$$

d'inconnue $x \in [0, 1]$ possède une et une seule solution x_n .

- 2) Étudier la convergence de $(x_n)_{n \geq 2}$.
- 3) Montrer que : $x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

- 20** ☺☺☺ 1) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que l'équation :

$$x^n + x - 1 = 0$$

d'inconnue $x \in [0, 1]$ possède une et une seule solution u_n .

- 2) Étudier la monotonie de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, puis sa limite.
- 3) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\delta_n = 1 - u_n$.
 - a) Montrer que : $\ln \delta_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -n\delta_n$.
 - b) Montrer ensuite que : $\ln \delta_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\ln n$.
 - c) En déduire que : $\delta_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln n}{n}$.

- 21** ☺☺ 1) Montrer que la fonction $x \mapsto x + \ln x$ est bijective de \mathbb{R}_+ sur \mathbb{R} .

- 2) Déterminer : $\lim_{y \rightarrow +\infty} f^{-1}(y)$.
 - 3) En déduire que : $f^{-1}(y) \underset{y \rightarrow +\infty}{\sim} y$.
 - 4) Montrer que : $f^{-1}(y) - y \underset{y \rightarrow +\infty}{\sim} -\ln y$.
-

22



- 1) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que l'équation :

$$x^n + x\sqrt{n} - 1 = 0$$

d'inconnue $x \in [0, 1]$ possède une et une seule solution x_n .

- 2) Étudier la convergence de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
 - 3) Montrer que : $x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}}$.
-

23



- 1) Montrer que l'équation : $\tan x = x$ d'inconnue $x \in]n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}[$ possède une et une seule solution x_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
- 2) Déterminer un équivalent simple de x_n lorsque n tend vers $+\infty$.
- 3) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\delta_n = x_n - n\pi$.
 - a) Exprimer δ_n en fonction de x_n et de la fonction Arctan pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, puis calculer : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \delta_n$.
 - b) On rappelle que pour tout $x > 0$:

$$\text{Arctan } x + \text{Arctan } \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}.$$

En déduire le développement asymptotique :

$$x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + \frac{1}{2n^2\pi} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

24



- 1) Pour tout $n \geq 2$, montrer que l'équation :

$$\sin x = \frac{x}{n}$$

d'inconnue $x \in]0, \pi[$ possède une et une seule solution x_n .

- 2) Étudier la monotonie de $(x_n)_{n \geq 2}$.
 - 3) Montrer que $(x_n)_{n \geq 2}$ est convergente et préciser sa limite.
 - 4) Montrer que : $x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \pi - \frac{\pi}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.
 - 5) a) Calculer un développement limité de la fonction arcsinus au voisinage de 0 à l'ordre 3.
b) En déduire un développement asymptotique de x_n à la précision $o\left(\frac{1}{n^3}\right)$ lorsque n tend vers $+\infty$.
-

25



- 1) Pour tout $n \geq 2$, montrer que l'équation :

$$x^n = x + n$$

d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+$ possède une et une seule solution x_n .

- 2) Montrer que $(x_n)_{n \geq 2}$ converge vers 1.
 - 3) Déterminer un équivalent simple de : $x_n - 1$ lorsque n tend vers $+\infty$.
-

26



- 1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que le polynôme :

$$X^{2n} - 2nX + 1$$

possède au moins une racine réelle. On notera x_n la plus grande de ces racines.

- 2) Montrer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 1$.
 - 3) Montrer que : $x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 + \frac{\ln n}{2n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right)$.
-

27



- 1) Montrer que l'équation : $e^x = \alpha x$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+$ possède exactement deux solutions pour tout $\alpha > e$ que nous notons x_α et y_α , dans l'ordre : $x_\alpha < y_\alpha$.
 - 2) Étudier la monotonie des fonctions $\alpha \mapsto x_\alpha$ et $\alpha \mapsto y_\alpha$ sur $]e, +\infty[$. En déduire : $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} x_\alpha$ et $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} y_\alpha$.
 - 3) a) Montrer que : $x_\alpha \underset{\alpha \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\alpha}$.
b) En déduire un équivalent simple de : $x_\alpha - \frac{1}{\alpha}$ lorsque α tend vers $+\infty$.
 - 4) a) Montrer que pour tout $\alpha > e$: $y_\alpha \geq \ln \alpha$.
b) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que : $y_\alpha < (1 + \varepsilon) \ln \alpha$ au voisinage de $+\infty$.
c) En déduire que : $y_\alpha \underset{\alpha \rightarrow +\infty}{\sim} \ln \alpha$.
d) En déduire un équivalent simple de : $y_\alpha - \ln \alpha$ lorsque α tend vers $+\infty$.
-

28



- 1) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que l'équation :

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{x-k} = 0$$

d'inconnue $x \in]0, 1[$ possède une et une seule solution x_n .

- 2) Montrer que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante.
 - 3) Encadrer : $\sum_{k=2}^n \frac{1}{x-k}$ pour tous $x \in]0, 1[$ et $n \geq 2$, puis montrer que : $x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\ln n}$.
-