1 APPLICATIONS LINÉAIRES DÉFINIES EXPLICITEMENT

1 ◷ Pourquoi les applications suivantes NE sont-elles PAS linéaires ? **1)** $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & P'-P^2. \end{array}\right.$

2) $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x+1. \end{array}\right.$ **3)** $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & xy. \end{array}\right.$

---

2 Montrer que les applications suivantes sont linéaires puis déterminer une base de leur noyau et une base de leur image.

1) ◷
- **a)** $(x,y) \longmapsto \big(y-3x, 5x+2y, x+y\big)$.
- **b)** $(x,y,z) \longmapsto \big(x+y+z, x+3y+2z, 3x+y+2z\big)$.
- **c)** $(x,y,z) \longmapsto \big(2x-y+z, 3x+y-z, x+y+z, y-2z\big)$.

2) ◷◷
- **a)** $P \longmapsto X\big(P'(X+1)-P'(1)\big)$ de $\mathbb{R}_3[X]$ dans lui-même.
- **b)** $P \longmapsto P-XP'-P(0)$ de $\mathbb{R}[X]$ dans lui-même.
- **c)** $M \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} M$ de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ dans lui-même.

---

3 ◷ Montrer que l'application :

$$(x,y,z) \longmapsto \big(x+2y, 4x-y+z, 2x+2y+3z\big)$$

est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$ et déterminer sa réciproque.

---

4 ◷ Soient $a,b,c \in \mathbb{R}$ non tous nuls. On pose : $A = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix}$. Déterminer SANS CALCUL une base de $\operatorname{Im} A$ et une équation de $\operatorname{Ker} A$ — par simple contemplation de A.

---

5 ◷
- **1)** Montrer que l'application $P \longmapsto \big(P(0), P'\big)$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}[X]$ sur $\mathbb{K} \times \mathbb{K}[X]$.
- **2)** En déduire une nouvelle preuve du fait que $\mathbb{K}[X]$ n'est pas de dimension finie.

---

6 ◷◷ Montrer que $P \longmapsto P(X)+P(X+1)$ est un automorphisme :
1) de $\mathbb{R}_n[X]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. **2)** de $\mathbb{R}[X]$.

---

7 On note Δ l'endomorphisme $P \longmapsto P(X+1)-P(X)$ de $\mathbb{R}[X]$.
- **1)** ◷ Déterminer $\operatorname{Ker} \Delta$.
- **2)** ◷◷ Déterminer $\operatorname{Im} \Delta_{|\mathbb{R}_n[X]}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
- **3)** ◷◷ Montrer que Δ est surjectif de $\mathbb{R}[X]$ sur lui-même.

---

8 ◷◷ Soient E un espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E de dimension finie.
- **1)** Déterminer l'image et le noyau de l'application $(f,g) \longmapsto f+g$ de $F \times G$ dans E.
- **2)** Redémontrer ainsi la formule de Grassmann.

---

9 Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, on pose :

$$B_k = X^k(1-X)^{n-k}.$$

- **1)** ◷ Montrer grâce à la formule du binôme que X^i est combinaison linéaire de $B_0, \ldots, B_n$ pour tout $i \in [\![0,n]\!]$. Qu'en déduit-on ?
- **2)** ◷◷ On reprend l'exercice indépendamment de la question **1)**. Montrer par récurrence sur n que la famille $\big(B_0, \ldots, B_n\big)$ est libre.
- **3)** ◷◷ Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose :

$$\varphi(P) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P\left(\frac{k}{n}\right) B_k.$$

Montrer que φ est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

---

10 ◷◷◷ Montrer que les $\mathbb{K}$-espaces vectoriels $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\mathscr{L}\big(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n\big)$ sont isomorphes.

---

2 APPLICATIONS LINÉAIRES ABSTRAITES

11 ◷ Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $f \in \mathscr{L}(E)$ et $k \in \mathbb{N}^*$. Comparer $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Ker} f^k$, puis $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Im} f^k$.

---

12 ◷ Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f, g \in \mathscr{L}(E)$. On suppose que f et g commutent. Montrer qu'alors $\operatorname{Ker} g$ et $\operatorname{Im} g$ sont stables par f.

---

13 ◷ Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f, g \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que : $E = \operatorname{Im} f + \operatorname{Ker} g$ si et seulement si : $\operatorname{Im}(gf) = \operatorname{Im} g$.

---

14 ◷ Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$.
- **1)** **a)** Exprimer la proposition : $g \circ f = 0_{\mathscr{L}(E,G)}$ en termes de noyau et d'image.
  b) Quelle relation en déduit-on entre $\operatorname{rg}(f)$ et $\operatorname{rg}(g)$ si E, F et G sont de dimension finie ?
- **2)** Montrer que : $f\big(\operatorname{Ker}(g \circ f)\big) = \operatorname{Ker} g \cap \operatorname{Im} f$.

---

15 ◷◷ Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathscr{L}(E)$.

1) Montrer que :

$$\mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Im}\, f = \{0_E\} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathrm{Ker}\, f^2 = \mathrm{Ker}\, f.$$

2) Montrer que :

$$E = \mathrm{Ker}\, f + \mathrm{Im}\, f \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathrm{Im}\, f^2 = \mathrm{Im}\, f.$$

3) On suppose à présent E de dimension finie. Montrer l'équivalence des assertions suivantes :

$$\text{(i)} \quad E = \mathrm{Ker}\, f \oplus \mathrm{Im}\, f.$$

$$\text{(ii)} \quad \mathrm{Ker}\, f^2 = \mathrm{Ker}\, f. \qquad \text{(iii)} \quad \mathrm{Im}\, f^2 = \mathrm{Im}\, f.$$

---

16 ◷◷ Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. À quelle condition nécessaire et suffisante l'anneau $\mathscr{L}(E)$ est-il commutatif ?

---

17 ◷◷ Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie et $f, g \in \mathscr{L}(E,F)$. Montrer l'inégalité :

$$\big|\mathrm{rg}(f) - \mathrm{rg}(g)\big| \leqslant \mathrm{rg}(f+g) \leqslant \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g).$$

---

18 ◷◷ Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E)$. Montrer l'équivalence suivante :

$$\mathrm{Ker}\, u = \mathrm{Im}\, u \qquad \Longleftrightarrow \qquad u^2 = 0_{\mathscr{L}(E)} \quad \text{et} \quad \dim E = 2\,\mathrm{rg}(u).$$

---

19 Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et $f \in \mathscr{L}(E)$.

1) ◷◷ On suppose f *nilpotent*, i.e. qu'une certaine puissance de f est nulle. On note alors p le plus petit entier naturel non nul pour lequel $f^p = 0_{\mathscr{L}(E)}$, appelé l'*indice de nilpotence de* f.

a) Écrire avec des quantificateurs les propositions : $f^p = 0_{\mathscr{L}(E)}$ et : $f^{p-1} \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$.

b) Montrer que la famille :

$$\big(x, f(x), f^2(x), \ldots, f^{p-1}(x)\big)$$

est libre pour un certain $x \in E$.

c) En déduire que $f^n = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

2) ◷◷◷

a) On suppose que pour tout $x \in E$:

$$\exists\, p \in \mathbb{N}^* / \quad f^p(x) = 0_E.$$

Montrer qu'alors f est nilpotent.

b) Trouver un contre-exemple au résultat **a)** dans le cas où E est de dimension infinie.

---

20 Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathscr{L}(E)$.

1) ◷◷ Si : $f^2 = 3f - 2\mathrm{Id}_E$, montrer que :

$$E = \mathrm{Ker}\,\big(f - \mathrm{Id}_E\big) \oplus \mathrm{Ker}\,\big(f - 2\mathrm{Id}_E\big).$$

2) ◷◷ Si : $f^3 = \mathrm{Id}_E$, montrer que :

$$E = \mathrm{Ker}\,\big(f - \mathrm{Id}_E\big) \oplus \mathrm{Ker}\,\big(f^2 + f + \mathrm{Id}_E\big).$$

---

21 ◷◷ Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f, g, h \in \mathscr{L}(E)$. On suppose que : $fg = h$, $gh = f$ et $hf = g$.

1) Montrer que f, g et h ont même noyau K et même image I.

2) Montrer que : $f^5 = f$.

3) En déduire que : $E = K \oplus I$.

---

22 ◷◷ Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathscr{L}(E)$ de rang 1. Montrer que pour un certain $\lambda \in \mathbb{K}$: $f^2 = \lambda f$.

---

23 Soient E, F, G des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$.

1) ◷◷ Montrer que si E et F sont de dimension finie, alors :

$$\dim \mathrm{Ker}\,(g \circ f) \leqslant \dim \mathrm{Ker}\, f + \dim \mathrm{Ker}\, g.$$

2) ◷◷◷ Montrer que si on suppose seulement $\mathrm{Ker}\, f$ et $\mathrm{Ker}\, g$ de dimension finie, alors $\mathrm{Ker}\,(g \circ f)$ l'est aussi avec la même inégalité.

---

24 ◷◷ Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie et $u, v \in \mathscr{L}(E,F)$. Montrer que :

$$\dim \mathrm{Ker}\,(u+v) \leqslant \dim\big(\mathrm{Ker}\, u \cap \mathrm{Ker}\, v\big) + \dim\big(\mathrm{Im}\, u \cap \mathrm{Im}\, v\big).$$

---

25 ◷◷ Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f, g \in \mathscr{L}(E)$. On suppose que : $fg - gf = \mathrm{Id}_E$.

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$fg^n - g^n f = n g^{n-1}.$$

2) Montrer que la famille $\big(g^k\big)_{k \in \mathbb{N}}$ est libre.

---

26 ◷◷◷ Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $h \in \mathscr{L}(E)$. On suppose que : $\forall x \in E, \quad \exists\, \lambda \in \mathbb{K} / \quad h(x) = \lambda x$. Montrer que : $\exists\, \lambda \in \mathbb{K} / \quad \forall x \in E, \quad h(x) = \lambda x$, i.e. que h est une homothétie.

---

27 ◷◷◷ Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, K un sous-espace vectoriel de E et I un sous-espace vectoriel de F. À quelle condition nécessaire et suffisante simple K et I sont-ils respectivement le noyau et l'image d'une même application linéaire de E dans F ?

---

28 ◷◷◷ Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E,F)$ de rang r. Montrer que f est la somme de r applications linéaires de rang 1.

29 ◷◷◷ Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$. On veut montrer l'équivalence suivante :

(i) $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f$.
(ii) $f^2 = 0_{\mathscr{L}(E)}$ et $\exists\, g \in \mathscr{L}(E)/\ fg + gf = \mathrm{Id}_E$.

1) Montrer l'implication (ii) $\Longrightarrow$ (i).
2) On suppose à présent que : $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f$.
a) Montrer que : $f^2 = 0_{\mathscr{L}(E)}$.
b) Pourquoi peut-on se donner un supplémentaire I de $\operatorname{Ker} f$ dans E ?
c) On note p la projection sur $\operatorname{Ker} f$ parallèlement à I et on pose : $g = f_{|I}^{-1} \circ p$. Conclure.

---

30 ◷◷◷ Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 2 et $u \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que : $u^2 = 0_{\mathscr{L}(E)}$ si et seulement s'il existe un vecteur $a \in \operatorname{Ker} u$ et une forme linéaire λ de E tels que pour tout $x \in E$: $u(x) = \lambda(x)a$.

---

3 CALCUL MATRICIEL

31 ◷ Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. Calculer le rang des matrices suivantes :

1) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -3 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. **2)** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}$.

3) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & -2 & -5 \\ 6 & 5 & 4 & 3 \\ 9 & 5 & 0 & 1 \\ 7 & 0 & 5 & -3 \end{pmatrix}$. **4)** $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$.

---

32 ◷◷ Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. À quelle condition nécessaire et suffisante sur λ les sous-espaces vectoriels :

$$\operatorname{Vect}\big((\lambda, \lambda, 1)\big) \quad \text{et} \quad \operatorname{Vect}\big((1, \lambda, 1), (2, 1, 1)\big)$$

sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$?

---

33 ◷◷ On pose : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. Les sous-espaces vectoriels $\operatorname{Ker} A$ et $\operatorname{Im} A$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$?

34

1) ◷ Montrer que pour tout $X \in \mathbb{R}^n$:

$$^{t}XX = 0 \quad \Longrightarrow \quad X = 0.$$

2) ◷◷ En déduire que pour tout $M \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$:

$$\operatorname{rg}(M) = \operatorname{rg}\big({}^{t}MM\big).$$

3) ◷ Généraliser au cas où $M \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{C})$.

---

35 ◷◷ Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $B \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, $C \in \mathscr{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ et $D \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. On suppose A inversible.

1) Compléter le calcul par blocs suivant :

$$\begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0_{n,p} \\ \cdots & I_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cdots & 0_{n,q} \\ 0_{p,n} & D - BA^{-1}C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & \cdots \\ 0_{q,n} & I_q \end{pmatrix}.$$

2) En déduire une égalité intéressante de rangs.

---

36 ◷◷ On travaille dans cet exercice avec le corps de base $\mathbb{C}$. Pour tout $X = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, on appelle *conjugué de* X le vecteur : $\overline{X} = \big(\overline{z_1}, \ldots, \overline{z_n}\big)$.

1) Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^n$. On note $\overline{F}$ l'ensemble des conjugués des éléments de F. Montrer que $\overline{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^n$ et que : $\dim \overline{F} = \dim F$.

2) Montrer que pour tout $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$:

$$\operatorname{rg}\big(\overline{M}\big) = \operatorname{rg}(M).$$

3) Soit $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ — mais donc : $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{C})$. On suppose que : $A^3 = -A$. Afin de montrer que A n'est pas inversible, on suppose par l'absurde qu'elle l'est.

a) Montrer l'égalité :

$$\mathbb{C}^3 = \operatorname{Ker}\,(A - iI_3) \oplus \operatorname{Ker}\,(A + iI_3).$$

b) Conclure.

---

37 ◷◷ Soient $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$, $B \in \mathscr{M}_q(\mathbb{K})$ et $X \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. Montrer que la matrice par blocs $\begin{pmatrix} A & X \\ 0_{q,p} & B \end{pmatrix}$ est inversible si et seulement si A et B le sont. Que vaut son inverse dans ce cas ?

---

38 ◷◷ Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telles que : $A + B = AB$.

1) Montrer que $I_n - A$ et $I_n - B$ sont inversibles.
2) Montrer que A et B commutent.

---

39 Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1) ◷ Montrer que si AB est inversible, alors A et B le sont aussi.
2) ◷◷◷ Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $AB - \lambda I_n$ est inversible si et seulement si $BA - \lambda I_n$ l'est.

---

4 FORMES LINÉAIRES ET HYPERPLANS

40 ◷ Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. Montrer que $\big\{P \in \mathbb{C}[X]/\ \ P(\alpha) = 0\big\}$ est un hyperplan de $\mathbb{C}[X]$ et en déterminer une base.

---

41 ◷ Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle et H_1 et H_2 deux hyperplans distincts de E. Calculer $\dim(H_1 \cap H_2)$.

---

5 PROJECTEURS ET SYMÉTRIES

42 On note $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ (resp. $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$) l'ensemble des matrices symétriques (resp. antisymétriques) de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Redémontrer l'égalité : $\mathscr{M}_n(\mathbb{K}) = \mathscr{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ en exhibant une certaine symétrie.

---

43 On note φ l'application :

$$(x, y, z) \longmapsto \big(-3x+4y-6z, -12x+16y-24z, -6x+8y-12z\big).$$

1) De quelle matrice φ est-elle l'application linéaire canoniquement associée ? En déduire que φ est un projecteur de $\mathbb{R}^3$.
2) Caractériser φ géométriquement.

---

44 On pose : $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer A^2, puis montrer que : $\mathbb{R}^4 = \operatorname{Ker} A \oplus \operatorname{Im} A$.

45
1) Montrer que :

$$\mathbb{R}_2[X] = \mathbb{R}_1[X] \oplus \operatorname{Vect}\big(X^2 + X + 1\big),$$

puis déterminer une expression de la projection sur $\mathbb{R}_1[X]$ parallèlement à $\operatorname{Vect}\big(X^2 + X + 1\big)$.
2) On pose : $G = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \quad x+y+2z = 0\Big\}$

et $F = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \quad x+2y+z = 0 \quad \text{et} \quad 2x+y-z = 0\Big\}$.

Montrer que : $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$, puis déterminer une expression de la symétrie par rapport à F parallèlement à G.

---

46 Soit $A \in \mathbb{R}[X]$ non nul. Montrer que l'application qui à tout $P \in \mathbb{R}[X]$ associe le reste de la division euclidienne de P par A est un projecteur de $\mathbb{R}[X]$ — que l'on caractérisera géométriquement.

---

47 Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et p et q deux projecteurs de E. On suppose que : $pq = 0_{\mathscr{L}(E)}$ et on pose : $r = p+q-qp$. Montrer que r est la projection sur $\operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Im} q$ de direction $\operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Ker} q$.

---

48 Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et p et q deux projecteurs de E. On suppose que p et q commutent. Montrer que pq est le projecteur de E sur $\operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q$ de direction $\operatorname{Ker} p + \operatorname{Ker} q$.

---

49 Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et p et q deux projecteurs de E.
1) Montrer que $p + q$ est un projecteur de E si et seulement si : $pq = qp = 0_{\mathscr{L}(E)}$.
2) Montrer que, dans ce cas, $\operatorname{Im} p$ et $\operatorname{Im} q$ sont en somme directe et que $p + q$ est le projecteur de E sur $\operatorname{Im} p + \operatorname{Im} q$ de direction $\operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Ker} q$.

---

50 Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $p, q \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que p et q sont des projecteurs de mêmes noyaux si et seulement si : $p = pq$ et $q = qp$.

---

51 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On note $\mathscr{P}(E)$ l'ensemble des projecteurs de E.
1) Montrer que la relation $\preccurlyeq$ sur $\mathscr{P}(E)$ définie pour tous $p, q \in \mathscr{P}(E)$ par :

$$p \preccurlyeq q \qquad \Longleftrightarrow \qquad pq = qp = p$$

est une relation d'ordre.
2) Montrer que pour tous $p, q \in \mathscr{P}(E)$, si p et q commutent : $\inf\big\{p, q\big\} = pq$.

---

6 SOMMES D'UN NOMBRE FINI DE SOUS-ESPACES VECTORIELS

52 Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f_1, \ldots, f_n \in \mathscr{L}(E)$. On suppose que : $f_i f_j = 0$ pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$ distincts et que : $f_1 + \ldots + f_n = \mathrm{Id}_E$.
1) Montrer que $f_1, \ldots, f_n$ sont des projecteurs.
2) Montrer que : $E = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{n} \operatorname{Im} f_i$.

---

53 Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $F_1, \ldots, F_p$ des sous-espaces vectoriels de E pour lesquels : $E = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} F_i$. Montrer qu'il existe des sous-espaces vectoriels $G_1, \ldots, G_p$ de E pour lesquels :

$$G_1 \subset F_1, \quad \ldots, \quad G_p \subset F_p \qquad \text{et} \qquad E = \bigoplus_{i=1}^{p} G_i.$$

---

54 Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathscr{L}(E)$.
1) Montrer que pour tous $x \in E$, $\lambda \in \mathbb{K}$ et $P \in \mathbb{K}[X]$, si : $f(x) = \lambda x$, alors :

$$P(f)(x) = P(\lambda)x.$$

2) Montrer que pour tous $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ distincts, les sous-espaces vectoriels :

$$\operatorname{Ker}\big(f - \lambda_1 \mathrm{Id}_E\big), \ldots, \operatorname{Ker}\big(f - \lambda_p \mathrm{Id}_E\big)$$

sont en somme directe. On pourra convoquer certains polynômes de Lagrange.
