

# 1 APPLICATIONS LINÉAIRES DÉFINIES EXPLICITEMENT

1) Pourquoi les applications suivantes NE sont-elles PAS linéaires ?

1)  $\begin{cases} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & P' - P^2. \end{cases}$

2)  $\begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x + 1. \end{cases}$       3)  $\begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & xy. \end{cases}$

2) Montrer que les applications suivantes sont linéaires puis déterminer une base de leur noyau et une base de leur image.

- 1) a)  $(x, y) \mapsto (y - 3x, 5x + 2y, x + y)$ .  
 b)  $(x, y, z) \mapsto (x + y + z, x + 3y + 2z, 3x + y + 2z)$ .  
 c)  $(x, y, z) \mapsto (2x - y + z, 3x + y - z, x + y + z, y - 2z)$ .
- 2) a)  $P \mapsto X(P'(X + 1) - P'(1))$  de  $\mathbb{R}_3[X]$  dans lui-même.  
 b)  $P \mapsto P - XP' - P(0)$  de  $\mathbb{R}[X]$  dans lui-même.  
 c)  $M \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} M$  de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  dans lui-même.

3) Montrer que l'application :  
 $(x, y, z) \mapsto (x + 2y, 4x - y + z, 2x + 2y + 3z)$   
 est un automorphisme de  $\mathbb{R}^3$  et déterminer sa réciproque.

4) Soient  $a, b, c \in \mathbb{R}$  non tous nuls.  
 On pose :  $A = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix}$ . Déterminer SANS CALCUL une base de  $\text{Im } A$  et une équation de  $\text{Ker } A$  — par simple contemplation de  $A$ .

5) 1) Montrer que l'application  $P \mapsto (P(0), P')$  est un isomorphisme de  $\mathbb{K}[X]$  sur  $\mathbb{K} \times \mathbb{K}[X]$ .  
 2) En déduire une nouvelle preuve du fait que  $\mathbb{K}[X]$  n'est pas de dimension finie.

6) Montrer que  $P \mapsto P(X) + P(X + 1)$  est un automorphisme :  
 1) de  $\mathbb{R}_n[X]$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .      2) de  $\mathbb{R}[X]$ .

7) On note  $\Delta$  l'endomorphisme  $P \mapsto P(X + 1) - P(X)$  de  $\mathbb{R}[X]$ .  
 1) Déterminer  $\text{Ker } \Delta$ .  
 2) Déterminer  $\text{Im } \Delta|_{\mathbb{R}_n[X]}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .  
 3) Montrer que  $\Delta$  est surjectif de  $\mathbb{R}[X]$  sur lui-même.

8) Soient  $E$  un espace vectoriel et  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$  de dimension finie.  
 1) Déterminer l'image et le noyau de l'application  $(f, g) \mapsto f + g$  de  $F \times G$  dans  $E$ .  
 2) Redémontrer ainsi la formule de Grassmann.

9) Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , on pose :

$$B_k = X^k(1 - X)^{n-k}.$$

- 1) Montrer grâce à la formule du binôme que  $X^i$  est combinaison linéaire de  $B_0, \dots, B_n$  pour tout  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ . Qu'en déduit-on ?  
 2) On reprend l'exercice indépendamment de la question 1). Montrer par récurrence sur  $n$  que la famille  $(B_0, \dots, B_n)$  est libre.  
 3) Pour tout  $P \in \mathbb{R}_n[X]$ , on pose :

$$\varphi(P) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} P\left(\frac{k}{n}\right) B_k.$$

Montrer que  $\varphi$  est un automorphisme de  $\mathbb{R}_n[X]$ .

10) Montrer que les  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  et  $\mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$  sont isomorphes.

# 2 APPLICATIONS LINÉAIRES ABSTRAITES

11) Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel,  $f \in \mathcal{L}(E)$  et  $k \in \mathbb{N}^*$ . Comparer  $\text{Ker } f$  et  $\text{Ker } f^k$ , puis  $\text{Im } f$  et  $\text{Im } f^k$ .

12) Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $f, g \in \mathcal{L}(E)$ . On suppose que  $f$  et  $g$  commutent. Montrer qu'alors  $\text{Ker } g$  et  $\text{Im } g$  sont stables par  $f$ .

13) Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $f, g \in \mathcal{L}(E)$ . Montrer que :  $E = \text{Im } f + \text{Ker } g$  si et seulement si :  $\text{Im}(gf) = \text{Im } g$ .

14) Soient  $E, F$  et  $G$  trois  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels,  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $g \in \mathcal{L}(F, G)$ .

- 1) a) Exprimer la proposition :  $g \circ f = 0_{\mathcal{L}(E, G)}$  en termes de noyau et d'image.  
 b) Quelle relation en déduit-on entre  $\text{rg}(f)$  et  $\text{rg}(g)$  si  $E, F$  et  $G$  sont de dimension finie ?  
 2) Montrer que :  $f(\text{Ker}(g \circ f)) = \text{Ker } g \cap \text{Im } f$ .

15) Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $f \in \mathcal{L}(E)$ .  
 1) Montrer que :

$$\text{Ker } f \cap \text{Im } f = \{0_E\} \iff \text{Ker } f^2 = \text{Ker } f.$$

2) Montrer que :

$$E = \text{Ker } f + \text{Im } f \iff \text{Im } f^2 = \text{Im } f.$$

3) On suppose à présent  $E$  de dimension finie. Montrer l'équivalence des assertions suivantes :

(i)  $E = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f.$

(ii)  $\text{Ker } f^2 = \text{Ker } f.$       (iii)  $\text{Im } f^2 = \text{Im } f.$

**16** ☹☹ Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. À quelle condition nécessaire et suffisante l'anneau  $\mathcal{L}(E)$  est-il commutatif ?

**17** ☹☹ Soient  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie et  $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$ . Montrer l'inégalité :

$$|\text{rg}(f) - \text{rg}(g)| \leq \text{rg}(f + g) \leq \text{rg}(f) + \text{rg}(g).$$

**18** ☹☹ Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Montrer l'équivalence suivante :

$$\text{Ker } u = \text{Im } u \iff u^2 = 0_{\mathcal{L}(E)} \text{ et } \dim E = 2 \text{rg}(u).$$

**19** Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n$  et  $f \in \mathcal{L}(E)$ .

- 1) ☹☹ On suppose  $f$  nilpotent, i.e. qu'une certaine puissance de  $f$  est nulle. On note alors  $p$  le plus petit entier naturel non nul pour lequel  $f^p = 0_{\mathcal{L}(E)}$ , appelé l'indice de nilpotence de  $f$ .
  - a) Écrire avec des quantificateurs les propositions :  $f^p = 0_{\mathcal{L}(E)}$  et :  $f^{p-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$ .
  - b) Montrer que la famille :

$$(x, f(x), f^2(x), \dots, f^{p-1}(x))$$

est libre pour un certain  $x \in E$ .

- c) En déduire que :  $f^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$ .
- 2) ☹☹☹
  - a) On suppose que pour tout  $x \in E$  :
 
$$\exists p \in \mathbb{N}^* / f^p(x) = 0_E.$$
 Montrer qu'alors  $f$  est nilpotent.
  - b) Trouver un contre-exemple au résultat a) dans le cas où  $E$  est de dimension infinie.

**20** Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $f \in \mathcal{L}(E)$ .

1) ☹☹ Si :  $f^2 = 3f - 2\text{Id}_E$ , montrer que :

$$E = \text{Ker}(f - \text{Id}_E) \oplus \text{Ker}(f - 2\text{Id}_E).$$

2) ☹☹ Si :  $f^3 = \text{Id}_E$ , montrer que :

$$E = \text{Ker}(f - \text{Id}_E) \oplus \text{Ker}(f^2 + f + \text{Id}_E).$$

**21** ☹☹ Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $f, g, h \in \mathcal{L}(E)$ . On suppose que :  $fg = h, gh = f$  et  $hf = g$ .

- 1) Montrer que  $f, g$  et  $h$  ont même noyau  $K$  et même image  $I$ .
- 2) Montrer que :  $f^5 = f$ .
- 3) En déduire que :  $E = K \oplus I$ .

**22** ☹☹ Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $f \in \mathcal{L}(E)$  de rang 1. Montrer que pour un certain  $\lambda \in \mathbb{K}$  :  $f^2 = \lambda f$ .

**23** Soient  $E, F, G$  des  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels,  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $g \in \mathcal{L}(F, G)$ .

- 1) ☹☹ Montrer que si  $E$  et  $F$  sont de dimension finie, alors :
 
$$\dim \text{Ker}(g \circ f) \leq \dim \text{Ker } f + \dim \text{Ker } g.$$
- 2) ☹☹☹ Montrer que si on suppose seulement  $\text{Ker } f$  et  $\text{Ker } g$  de dimension finie, alors  $\text{Ker}(g \circ f)$  l'est aussi avec la même inégalité.

**24** ☹☹ Soient  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie et  $u, v \in \mathcal{L}(E, F)$ . Montrer que :

$$\dim \text{Ker}(u+v) \leq \dim(\text{Ker } u \cap \text{Ker } v) + \dim(\text{Im } u \cap \text{Im } v).$$

**25** ☹☹ Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $f, g \in \mathcal{L}(E)$ . On suppose que :  $fg - gf = \text{Id}_E$ .

1) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$fg^n - g^n f = ng^{n-1}.$$

2) Montrer que la famille  $(g^k)_{k \in \mathbb{N}}$  est libre.

**26** ☹☹☹ Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $h \in \mathcal{L}(E)$ . On suppose que :  $\forall x \in E, \exists \lambda \in \mathbb{K} / h(x) = \lambda x$ .

Montrer que :  $\exists \lambda \in \mathbb{K} / \forall x \in E, h(x) = \lambda x$ , i.e. que  $h$  est une homothétie.

**27** ☹☹☹ Soient  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie,  $K$  un sous-espace vectoriel de  $E$  et  $I$  un sous-espace vectoriel de  $F$ . À quelle condition nécessaire et suffisante simple  $K$  et  $I$  sont-ils respectivement le noyau et l'image d'une même application linéaire de  $E$  dans  $F$  ?

**28** ☹☹☹ Soient  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie et  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  de rang  $r$ . Montrer que  $f$  est la somme de  $r$  applications linéaires de rang 1.

**29** ☹☹☹ Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension 2 et  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Montrer que :  $u^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$  si et seulement s'il existe un vecteur  $a \in \text{Ker } u$  et une forme linéaire  $\lambda$  de  $E$  tels que pour tout  $x \in E$  :  $u(x) = \lambda(x)a$ .

### 3 CALCUL MATRICIEL

**30** ⌚ Soient  $a, b, c \in \mathbb{R}$ . Calculer le rang des matrices suivantes :

$$1) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -3 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad 2) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}.$$

$$3) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & -2 & -5 \\ 6 & 5 & 4 & 3 \\ 9 & 5 & 0 & 1 \\ 7 & 0 & 5 & -3 \end{pmatrix}, \quad 4) \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}.$$

**31** ⌚⌚ Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ . À quelle condition nécessaire et suffisante sur  $\lambda$  les sous-espaces vectoriels :

$$\text{Vect}((\lambda, \lambda, 1)) \quad \text{et} \quad \text{Vect}((1, \lambda, 1), (2, 1, 1))$$

sont-ils supplémentaires dans  $\mathbb{R}^3$  ?

**32** ⌚⌚ On pose :  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ . Les sous-espaces vectoriels  $\text{Ker } A$  et  $\text{Im } A$  sont-ils supplémentaires dans  $\mathbb{R}^4$  ?

**33** 1) ⌚ Montrer que pour tout  $X \in \mathbb{R}^n$  :

$${}^tXX = 0 \implies X = 0.$$

2) ⌚⌚ En déduire que pour tout  $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$  :

$$\text{rg}(M) = \text{rg}({}^tMM).$$

3) ⌚ Généraliser au cas où  $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ .

**34** ⌚⌚ Soient  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K}), C \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$  et  $D \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ . On suppose  $A$  inversible.

1) Compléter le calcul par blocs suivant :

$$\begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0_{n,p} \\ \cdots & I_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cdots & 0_{n,q} \\ 0_{p,n} & D - BA^{-1}C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & \cdots \\ 0_{q,n} & I_q \end{pmatrix}.$$

2) En déduire une égalité intéressante de rangs.

**35** ⌚⌚ On travaille dans cet exercice avec le corps de base  $\mathbb{C}$ . Pour tout  $X = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ , on appelle *conjugué de  $X$*  le vecteur :  $\overline{X} = (\overline{z_1}, \dots, \overline{z_n})$ .

1) Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{C}^n$ . On note  $\overline{F}$  l'ensemble des conjugués des éléments de  $F$ . Montrer que  $\overline{F}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{C}^n$  et que :  $\dim \overline{F} = \dim F$ .

2) Montrer que pour tout  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  :

$$\text{rg}(\overline{M}) = \text{rg}(M).$$

3) Soit  $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  — mais donc :  $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ . On suppose que :  $A^3 = -A$ . Afin de montrer que  $A$  n'est pas inversible, on suppose par l'absurde qu'elle l'est.

a) Montrer l'égalité :

$$\mathbb{C}^3 = \text{Ker}(A - iI_3) \oplus \text{Ker}(A + iI_3).$$

b) Conclure.

**36** ⌚⌚ Soient  $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K}), B \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$  et  $X \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ . Montrer que la matrice par blocs  $\begin{pmatrix} A & X \\ 0_{q,p} & B \end{pmatrix}$  est inversible si et seulement si  $A$  et  $B$  le sont. Que vaut son inverse dans ce cas ?

**37** ⌚⌚ Soient  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  telles que :  $A + B = AB$ .

- 1) Montrer que  $I_n - A$  et  $I_n - B$  sont inversibles.
- 2) Montrer que  $A$  et  $B$  commutent.

**38** Soient  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

- 1) ⌚ Montrer que si  $AB$  est inversible, alors  $A$  et  $B$  le sont aussi.
- 2) ⌚⌚⌚ Montrer que pour tout  $\lambda \in \mathbb{K}, AB - \lambda I_n$  est inversible si et seulement si  $BA - \lambda I_n$  l'est.

### 4 FORMES LINÉAIRES ET HYPERPLANS

**39** ⌚ Soit  $\alpha \in \mathbb{C}$ . Montrer que  $\{P \in \mathbb{C}[X] / P(\alpha) = 0\}$  est un hyperplan de  $\mathbb{C}[X]$  et en déterminer une base.

**40** ⌚ Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie non nulle et  $H_1$  et  $H_2$  deux hyperplans distincts de  $E$ . Calculer  $\dim(H_1 \cap H_2)$ .

### 5 PROJECTEURS ET SYMÉTRIES

**41** ⌚ On note  $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$  (resp.  $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ ) l'ensemble des matrices symétriques (resp. antisymétriques) de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Redémontrer l'égalité :  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$  en exhibant une certaine symétrie.

**42** ⌚ On note  $\varphi$  l'application :

$$(x, y, z) \mapsto (-3x + 4y - 6z, -12x + 16y - 24z, -6x + 8y - 12z).$$

- 1) De quelle matrice  $\varphi$  est-elle l'application linéaire canoniquement associée ? En déduire que  $\varphi$  est un projecteur de  $\mathbb{R}^3$ .
- 2) Caractériser  $\varphi$  géométriquement.

43 ☹ ☹ On pose :  $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ . Calculer  $A^2$ , puis montrer que :  $\mathbb{R}^4 = \text{Ker } A \oplus \text{Im } A$ .

44 ☹ ☹ 1) Montrer que :

$$\mathbb{R}_2[X] = \mathbb{R}_1[X] \oplus \text{Vect}(X^2 + X + 1),$$

puis déterminer une expression de la projection sur  $\mathbb{R}_1[X]$  parallèlement à  $\text{Vect}(X^2 + X + 1)$ .

2) On pose :  $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + 2z = 0\}$

et  $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + 2y + z = 0 \text{ et } 2x + y - z = 0\}$ .

Montrer que :  $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$ , puis déterminer une expression de la symétrie par rapport à  $F$  parallèlement à  $G$ .

45 ☹ ☹ Soit  $A \in \mathbb{R}[X]$  non nul. Montrer que l'application qui à tout  $P \in \mathbb{R}[X]$  associe le reste de la division euclidienne de  $P$  par  $A$  est un projecteur de  $\mathbb{R}[X]$  — que l'on caractérisera géométriquement.

46 ☹ ☹ Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $p$  et  $q$  deux projecteurs de  $E$ . On suppose que :  $pq = 0_{\mathcal{L}(E)}$  et on pose :  $r = p + q - qp$ . Montrer que  $r$  est la projection sur  $\text{Im } p \oplus \text{Im } q$  de direction  $\text{Ker } p \cap \text{Ker } q$ .

47 ☹ ☹ Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $p$  et  $q$  deux projecteurs de  $E$ . On suppose que  $p$  et  $q$  commutent. Montrer que  $pq$  est le projecteur de  $E$  sur  $\text{Im } p \cap \text{Im } q$  de direction  $\text{Ker } p + \text{Ker } q$ .

48 ☹ ☹ Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $p$  et  $q$  deux projecteurs de  $E$ .

- 1) Montrer que  $p + q$  est un projecteur de  $E$  si et seulement si :  $pq = qp = 0_{\mathcal{L}(E)}$ .
- 2) Montrer que, dans ce cas,  $\text{Im } p$  et  $\text{Im } q$  sont en somme directe et que  $p + q$  est le projecteur de  $E$  sur  $\text{Im } p + \text{Im } q$  de direction  $\text{Ker } p \cap \text{Ker } q$ .

49 ☹ ☹ Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $p, q \in \mathcal{L}(E)$ . Montrer que  $p$  et  $q$  sont des projecteurs de mêmes noyaux si et seulement si :  $p = pq$  et  $q = qp$ .

50 ☹ ☹ Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. On note  $\mathcal{P}(E)$  l'ensemble des projecteurs de  $E$ .

1) Montrer que la relation  $\preccurlyeq$  sur  $\mathcal{P}(E)$  définie pour tous  $p, q \in \mathcal{P}(E)$  par :

$$p \preccurlyeq q \iff pq = qp = p$$

est une relation d'ordre.

2) Montrer que pour tous  $p, q \in \mathcal{P}(E)$ , si  $p$  et  $q$  commutent :  $\inf\{p, q\} = pq$ .

51 ☹ ☹ ☹ Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et  $f \in \mathcal{L}(E)$ . On veut montrer l'équivalence suivante :

- (i)  $\text{Ker } f = \text{Im } f$ .
- (ii)  $f^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$  et  $\exists g \in \mathcal{L}(E) / fg + gf = \text{Id}_E$ .

- 1) Montrer l'implication (ii)  $\implies$  (i).
- 2) On suppose à présent que :  $\text{Ker } f = \text{Im } f$ .
  - a) Montrer que :  $f^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$ .
  - b) Pourquoi peut-on se donner un supplémentaire  $I$  de  $\text{Ker } f$  dans  $E$  ?
  - c) On note  $p$  la projection sur  $\text{Ker } f$  parallèlement à  $I$  et on pose :  $g = f^{-1} \circ p$ . Conclure.

## 6 SOMMES D'UN NOMBRE FINI DE SOUS-ESPACES VECTORIELS

52 ☹ ☹ Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{L}(E)$ . On suppose que :  $f_i f_j = 0$  pour tous  $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$  distincts et que :  $f_1 + \dots + f_n = \text{Id}_E$ .

- 1) Montrer que  $f_1, \dots, f_n$  sont des projecteurs.
- 2) Montrer que :  $E = \bigoplus_{i=1}^n \text{Im } f_i$ .

53 ☹ ☹ Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et  $F_1, \dots, F_p$  des sous-espaces vectoriels de  $E$  pour lesquels :  $E = \sum_{i=1}^p F_i$ . Montrer qu'il existe des sous-espaces vectoriels  $G_1, \dots, G_p$  de  $E$  pour lesquels :

$$G_1 \subset F_1, \dots, G_p \subset F_p \quad \text{et} \quad E = \bigoplus_{i=1}^p G_i.$$

54 Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $f \in \mathcal{L}(E)$ .

1) ☹ ☹ Montrer que pour tous  $x \in E, \lambda \in \mathbb{K}$  et  $P \in \mathbb{K}[X]$ , si :  $f(x) = \lambda x$ , alors :

$$P(f)(x) = P(\lambda)x.$$

2) ☹ ☹ ☹ Montrer que pour tous  $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}$  distincts, les sous-espaces vectoriels :

$$\text{Ker}(f - \lambda_1 \text{Id}_E), \dots, \text{Ker}(f - \lambda_p \text{Id}_E)$$

sont en somme directe. On pourra convoquer certains polynômes de Lagrange.