

1 FACTORISATION IRRÉDUCTIBLE ET THÉORÈME DE D'ALEMBERT-GAUSS

- 1** Déterminer la factorisation irréductible sur \mathbb{R} de :
- $X^4 - 4$.
 - $X^6 + 27$.
 - $X^{2n+1} + 1$ ($n \in \mathbb{N}$).
 - $X^{2n} - 1$ ($n \in \mathbb{N}^*$).
 - $X^{2n} + 1$ ($n \in \mathbb{N}^*$).
-
- 2** On pose : $P = (X + 1)^7 - X^7 - 1$.
- Déterminer le degré de P .
 - Déterminer deux racines évidentes entières de P , puis montrer que j est racine de P .
 - En déduire la factorisation irréductible de P sur \mathbb{R} .
-
- 3** Déterminer la factorisation irréductible sur \mathbb{R} de $(X^2 - 3X + 3)^2 + 1$.
-
- 4** Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
- Déterminer un entier $d \in \mathbb{N}^*$ pour lequel la famille $(I_n, M, M^2, \dots, M^{d-1})$ est liée.
 - En déduire que M possède un polynôme annulateur non nul à coefficients complexes.
 - En déduire l'existence d'un nombre complexe λ pour lequel $M - \lambda I_n$ n'est pas inversible.
 - En déduire enfin qu'il existe un vecteur $X \in \mathbb{C}^n$ non nul pour lequel : $MX = \lambda X$.
-
- 5** Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $P(x) \geq 0$.
- Montrer que si : $P \neq 0$, toute racine réelle de P est de multiplicité paire.
 - En déduire que : $P = A^2 + B^2$ pour certains polynômes $A, B \in \mathbb{R}[X]$.
-
- 6** Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ non nul tel que :
- $$P(X^2) = P(X)P(X - 1).$$
- Montrer que si $\alpha \in \mathbb{C}$ est une racine de P , alors α^2 en est aussi une.
En déduire que : $\alpha = 0$ ou $|\alpha| = 1$.
 - Montrer que 0 n'est pas racine de P .
 - Montrer que si α est une racine complexe de P , alors : $|\alpha + 1| = 1$.
 - Déduire de tout cela quelles sont les racines de P ainsi que la forme de P .
- Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ pour lesquels : $P(X^2) = P(X)P(X - 1)$.
-

2 ARITHMÉTIQUE DES POLYNÔMES

- 7** Calculer le PGCD et le PPCM de :
- $$2X^4 + 3X^3 + 4X^2 + 2X + 1 \quad \text{et} \quad 3X^3 + 4X^2 + 4X + 1.$$
-
- 8** Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Montrer que si P et P' sont premiers entre eux, alors P n'a que des racines simples dans \mathbb{K} . On peut donc savoir si P a des racines multiples sans connaître aucune racine de P .
- Montrer que la réciproque est vraie si : $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ mais fautive si : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.
-
- 9** Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$ tels que $n \geq m$.
- Calculer la division euclidienne de $X^n - 1$ par $X^m - 1$ en utilisant celle de n par m dans \mathbb{Z} .
 - En déduire que : $(X^m - 1) \wedge (X^n - 1) = X^{m \wedge n} - 1$.
-
- 10** Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$. Montrer que A et B sont premiers entre eux si et seulement si $A + B$ et AB le sont.
-
- 11** Soient $n \in \mathbb{N}$ et $A, B \in \mathbb{K}[X]$ non constants et premiers entre eux. Montrer que la famille $(A^k B^{n-k})_{0 \leq k \leq n}$ est libre dans $\mathbb{K}[X]$.
-
- 12** Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel, $f \in \mathcal{L}(E)$ et $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ premiers entre eux. Montrer le lemme des noyaux : $\text{Ker}(PQ)(f) = \text{Ker} P(f) \oplus \text{Ker} Q(f)$.
-

3 FRACTIONS RATIONNELLES

- 13** Montrer que la fraction $\frac{1}{X}$ n'a pas de primitive dans $\mathbb{C}(X)$.
-
- 14** Soient $m, n \in \mathbb{N}$. Calculer, après avoir remarqué que : $X = (X - 1) + 1$, la décomposition en éléments simples sur \mathbb{R} de $\frac{X^m}{(X - 1)^n}$.
-
- 15**
- Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non nul. Calculer la décomposition en éléments simples de $\frac{P'}{P}$.
 - En déduire la valeur de : $\sum_{\substack{\omega \in \mathbb{U}_n \\ \omega \neq 1}} \frac{1}{1 - \omega}$.
 - Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant de racines distinctes z_1, \dots, z_r dans \mathbb{C} .

a) Montrer que toute racine de P' peut être écrite :

$$\sum_{k=1}^r \lambda_k z_k \quad \text{pour certains } \lambda_1, \dots, \lambda_r \geq 0 \text{ pour}$$

$$\text{lesquels : } \sum_{k=1}^r \lambda_k = 1.$$

b) Interpréter géométriquement ce résultat (*théorème de Gauss-Lucas*).

16 ☹☹ Calculer la décomposition en éléments simples de $\frac{1}{X(X+1)\dots(X+n)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

17 ☹☹☹ Calculer la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}[X]$ de $\frac{1}{(X-1)(X^n-1)}$ pour tout $n \geq 2$.

18 ☹☹☹ On note R la fraction rationnelle $\frac{1}{X^2+1}$.
 1) Décomposer R en éléments simples, puis calculer $R^{(n)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$R^{(n)} = \frac{(-1)^n (n+1)!}{(X^2+1)^{n+1}} \prod_{k=1}^n \left(X - \cotan \frac{k\pi}{n+1} \right).$$

19 ☹☹ Simplifier : $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

20 ☹☹ Calculer une primitive sur \mathbb{R}_+^* de la fonction $x \mapsto \frac{x \ln x}{(x^2+1)^2}$.

21 ☹☹ Calculer les intégrales suivantes :

1) $\int_0^{+\infty} \frac{t \, dt}{t^4+1}$ 2) $\int_0^{+\infty} \frac{t \, dt}{(t+1)^2(2t+1)}$
 3) $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t^2+4)(t+2)^2}$ 4) $\int_0^1 \frac{t^4 \, dt}{t^2+2t+5}$
 5) $\int_0^{+\infty} \frac{t \, dt}{(t^2+1)(t+1)(t+2)}$ 6) $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^3+1}$
 7) $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t+1)^2(t^2-2t+2)}$

22 ☹☹ Calculer les intégrales suivantes en commençant par y effectuer le changement de variable proposé :

1) $\int_{\frac{\pi}{2}}^x \frac{dt}{\sin t}$ en posant : $u = \cos t$ ($x \in]0, \pi[$).

2) $\int_0^{\pi} \frac{\sin t \, dt}{4 - \cos^2 t}$ en posant : $u = \cos t$.

3) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{\cos^3 t}$ en posant : $u = \sin t$.

23 ☹☹ Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$I_n(x) = \int_0^x \frac{dt}{(t^2+1)^{n+1}}$$

1) Exprimer $I_{n+1}(x)$ en fonction de $I_n(x)$ pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$.

2) En déduire l'existence et une expression explicite

de : $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t^2+1)^{n+1}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

24 ☹☹☹ Soit $\alpha > 1$.

1) Pour tout $r \in]-\pi, \pi[$, effectuer le changement de

variable : $x = \tan \frac{t}{2}$ dans l'intégrale : $\int_{-r}^r \frac{dt}{\alpha + \sin t}$, puis calculer l'intégrale obtenue.

2) En déduire une expression simple de :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dt}{\alpha + \sin t}, \quad \text{puis de : } \int_0^{2\pi} \frac{dt}{\alpha + \sin t}.$$