1 FACTORISATION IRRÉDUCTIBLE ET THÉORÈME DE D'ALEMBERT-GAUSS

1 Déterminer la factorisation irréductible sur $\mathbb{R}$ de :

1) ⏲
a) X^4-4. **b)** X^6+27.

2) ⏲⏲
a) $X^{2n+1}+1$ $(n \in \mathbb{N})$. **b)** $X^{2n}-1$ $(n \in \mathbb{N}^*)$.
c) $X^{2n}+1$ $(n \in \mathbb{N}^*)$.

---

2 ⏲⏲ On pose : $P=(X+1)^7-X^7-1$.

1) Déterminer le degré de P.
2) Déterminer deux racines évidentes entières de P, puis montrer que j est racine de P.
3) En déduire la factorisation irréductible de P sur $\mathbb{R}$.

---

3 ⏲⏲ Déterminer la factorisation irréductible sur $\mathbb{R}$ de $\left(X^2-3X+3\right)^2+1$.

---

4 ⏲⏲ Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

1) Déterminer un entier $d \in \mathbb{N}^*$ pour lequel la famille $\left(I_n, M, M^2, \ldots, M^{d-1}\right)$ est liée.
2) En déduire que M possède un polynôme annulateur non nul à coefficients complexes.
3) En déduire l'existence d'un nombre complexe λ pour lequel $M-\lambda I_n$ n'est pas inversible.
4) En déduire enfin qu'il existe un vecteur $X \in \mathbb{C}^n$ non nul pour lequel : $MX=\lambda X$.

---

5 ⏲⏲ Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $P(x) \geqslant 0$.

1) Montrer que si : $P \neq 0$, toute racine réelle de P est de multiplicité paire.
2) En déduire que : $P=A^2+B^2$ pour certains polynômes $A, B \in \mathbb{R}[X]$.

---

6 ⏲⏲⏲

1) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ non nul tel que :

$$P\left(X^2\right)=P(X)P(X-1).$$

a) Montrer que si $\alpha \in \mathbb{C}$ est une racine de P, alors α^2 en est aussi une.
En déduire que : $\alpha=0$ ou $|\alpha|=1$.
b) Montrer que 0 n'est pas racine de P.
c) Montrer que si α est une racine complexe de P, alors : $|\alpha+1|=1$.
d) Déduire de tout cela quelles sont les racines de P ainsi que la forme de P.

2) Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ pour lesquels : $P\left(X^2\right)=P(X)P(X-1)$.

---

2 ARITHMÉTIQUE DES POLYNÔMES

7 ⏲ Calculer le PGCD et le PPCM de :

$2X^4+3X^3+4X^2+2X+1$ et $3X^3+4X^2+4X+1$.

---

8 ⏲⏲

1) Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Montrer que si P et P' sont premiers entre eux, alors P n'a que des racines simples dans $\mathbb{K}$. On peut donc savoir si P a des racines multiples sans connaître aucune racine de P.
2) Montrer que la réciproque est vraie si : $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ mais fausse si : $\mathbb{K}=\mathbb{R}$.

---

9 ⏲⏲ Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$ tels que $n \geqslant m$.

1) Calculer la division euclidienne de X^n-1 par X^m-1 en utilisant celle de n par m dans $\mathbb{Z}$.
2) En déduire que : $\left(X^m-1\right) \wedge \left(X^n-1\right)=X^{m \wedge n}-1$.

---

10 ⏲⏲ Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$. Montrer que A et B sont premiers entre eux si et seulement si $A+B$ et AB le sont.

---

11 ⏲⏲⏲ Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $f \in \mathscr{L}(E)$ et $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ premiers entre eux. Montrer le *lemme des noyaux* : $\operatorname{Ker}(PQ)(f)=\operatorname{Ker}P(f) \oplus \operatorname{Ker}Q(f)$.

---

3 FRACTIONS RATIONNELLES

12 ⏲⏲ Montrer que la fraction $\dfrac{1}{X}$ n'a pas de primitive dans $\mathbb{C}(X)$.

---

13 ⏲ Soient $m, n \in \mathbb{N}$. Calculer, après avoir remarqué que : $X=(X-1)+1$, la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$ de $\dfrac{X^m}{(X-1)^n}$.

14

1) ⏲ Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non nul. Calculer la décomposition en éléments simples de $\dfrac{P'}{P}$.

2) ⏲⏲ En déduire la valeur de : $\displaystyle\sum_{\substack{\omega \in \mathbb{U}_n \\ \omega \neq 1}} \frac{1}{1-\omega}$.

3) ⏲⏲⏲ Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant de racines distinctes $z_1, \ldots, z_r$ dans $\mathbb{C}$.
a) Montrer que toute racine de P' peut être écrite : $\displaystyle\sum_{k=1}^r \lambda_k z_k$ pour certains $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{R}_+$ pour lesquels : $\displaystyle\sum_{k=1}^r \lambda_k=1$.

b) Interpréter géométriquement ce résultat — *théorème de Gauss-Lucas*.

---

15 ◷◷ Calculer la décomposition en éléments simples de $\dfrac{1}{X(X+1)\dots(X+n)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

---

16 ◷◷◷ Calculer la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}[X]$ de $\dfrac{1}{(X-1)(X^n-1)}$ pour tout $n \geqslant 2$.

---

17 ◷◷◷ On note R la fraction rationnelle $\dfrac{1}{X^2+1}$.

1) Décomposer R en éléments simples, puis calculer $R^{(n)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$R^{(n)} = \frac{(-1)^n(n+1)!}{\left(X^2+1\right)^{n+1}} \prod_{k=1}^{n} \left(X - \operatorname{cotan} \frac{k\pi}{n+1}\right).$$

---

18 ◷◷ Simplifier : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

---

19 ◷◷ Calculer une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction $x \longmapsto \dfrac{x \ln x}{\left(x^2+1\right)^2}$.

---

20 ◷◷ Calculer les intégrales suivantes :

1) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t\,\mathrm{d}t}{t^4+1}$. **2)** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t\,\mathrm{d}t}{(t+1)^2(2t+1)}$.

3) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\left(t^2+4\right)(t+2)^2}$. **4)** $\displaystyle\int_0^{1} \frac{t^4\,\mathrm{d}t}{t^2+2t+5}$.

5) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t\,\mathrm{d}t}{\left(t^2+1\right)(t+1)(t+2)}$. **6)** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^3+1}$.

7) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(t+1)^2\left(t^2-2t+2\right)}$.

---

21 ◷◷ Calculer les intégrales suivantes en commençant par y effectuer le changement de variable proposé :

1) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{\sin t}$ en posant : $u = \cos t$ $(x \in]0,\pi[)$.

2) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin t\,\mathrm{d}t}{4-\cos^2 t}$ en posant : $u = \cos t$.

3) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}t}{\cos^3 t}$ en posant : $u = \sin t$.

---

22 ◷◷ Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$I_n(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\left(t^2+1\right)^{n+1}}.$$

1) Exprimer $I_{n+1}(x)$ en fonction de $I_n(x)$ pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$.

2) En déduire l'existence et une expression explicite de : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\left(t^2+1\right)^{n+1}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

---

23 ◷◷◷ Soit $\alpha > 1$.

1) Pour tout $r \in]-\pi,\pi[$, effectuer le changement de variable : $x = \tan \dfrac{t}{2}$ dans l'intégrale : $\displaystyle\int_{-r}^{r} \frac{\mathrm{d}t}{\alpha + \sin t}$, puis calculer l'intégrale obtenue.

2) En déduire une expression simple de :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{d}t}{\alpha+\sin t}, \qquad \text{puis de :} \qquad \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{\alpha+\sin t}.$$
