1 FACTORISATION IRRÉDUCTIBLE ET THÉORÈME DE D'ALEMBERT-GAUSS

1 Déterminer la factorisation irréductible sur $\mathbb{R}$ de :

1) ◷
a) $X^4 - 4$. **b)** $X^6 + 27$.

2) ◷◷
a) $X^{2n+1} + 1$ $(n \in \mathbb{N})$. **b)** $X^{2n} - 1$ $(n \in \mathbb{N}^*)$.
c) $X^{2n} + 1$ $(n \in \mathbb{N}^*)$.

---

2 ◷◷ On pose : $P = (X+1)^7 - X^7 - 1$.

1) Déterminer le degré de P.
2) Déterminer deux racines évidentes entières de P, puis montrer que j est racine de P.
3) En déduire la factorisation irréductible de P sur $\mathbb{R}$.

---

3 ◷◷ Déterminer la factorisation irréductible sur $\mathbb{R}$ de $\left(X^2 - 3X + 3\right)^2 + 1$.

---

4 ◷◷ Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

1) Déterminer un entier $d \in \mathbb{N}^*$ pour lequel la famille $\left(I_n, M, M^2, \ldots, M^{d-1}\right)$ est liée.
2) En déduire que M possède un polynôme annulateur non nul à coefficients complexes.
3) En déduire l'existence d'un nombre complexe λ pour lequel $M - \lambda I_n$ n'est pas inversible.
4) En déduire enfin qu'il existe un vecteur $X \in \mathbb{C}^n$ non nul pour lequel : $MX = \lambda X$.

---

5 ◷◷ Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $P(x) \geqslant 0$.

1) Montrer que si : $P \neq 0$, toute racine réelle de P est de multiplicité paire.
2) En déduire que : $P = A^2 + B^2$ pour certains polynômes $A, B \in \mathbb{R}[X]$.

---

6 ◷◷◷

1) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ non nul tel que :
$$P\left(X^2\right) = P(X)P(X-1).$$
a) Montrer que si $\alpha \in \mathbb{C}$ est une racine de P, alors α^2 en est aussi une.
En déduire que : $\alpha = 0$ ou $|\alpha| = 1$.
b) Montrer que 0 n'est pas racine de P.
c) Montrer que si α est une racine complexe de P, alors : $|\alpha + 1| = 1$.
d) Déduire de tout cela quelles sont les racines de P ainsi que la forme de P.

2) Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ pour lesquels : $P\left(X^2\right) = P(X)P(X-1)$.

---

2 ARITHMÉTIQUE DES POLYNÔMES

7 ◷ Calculer le PGCD et le PPCM de :
$$2X^4 + 3X^3 + 4X^2 + 2X + 1 \quad \text{et} \quad 3X^3 + 4X^2 + 4X + 1.$$

---

8 ◷◷

1) Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Montrer que si P et P' sont premiers entre eux, alors P n'a que des racines simples dans $\mathbb{K}$. On peut donc savoir si P a des racines multiples sans connaître aucune racine de P.
2) Montrer que la réciproque est vraie si : $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ mais fausse si : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

---

9 ◷◷ Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$ tels que $n \geqslant m$.

1) Calculer la division euclidienne de $X^n - 1$ par $X^m - 1$ en utilisant celle de n par m dans $\mathbb{Z}$.
2) En déduire que : $\left(X^m - 1\right) \wedge \left(X^n - 1\right) = X^{m \wedge n} - 1$.

---

10 ◷◷ Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$. Montrer que A et B sont premiers entre eux si et seulement si $A+B$ et AB le sont.

---

11 ◷◷◷ Soient $n \in \mathbb{N}$ et $A, B \in \mathbb{K}[X]$ non constants et premiers entre eux. Montrer que la famille $\left(A^k B^{n-k}\right)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est libre dans $\mathbb{K}[X]$.

---

12 ◷◷◷ Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $f \in \mathscr{L}(E)$ et $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ premiers entre eux. Montrer le *lemme des noyaux* : $\mathrm{Ker}\,(PQ)(f) = \mathrm{Ker}\,P(f) \oplus \mathrm{Ker}\,Q(f)$.

---

3 FRACTIONS RATIONNELLES

13 ◷◷ Montrer que la fraction $\dfrac{1}{X}$ n'a pas de primitive dans $\mathbb{C}(X)$.

---

14 ◷ Soient $m, n \in \mathbb{N}$. Calculer, après avoir remarqué que : $X = (X-1)+1$, la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$ de $\dfrac{X^m}{(X-1)^n}$.

15

1) ◷ Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non nul. Calculer la décomposition en éléments simples de $\dfrac{P'}{P}$.
2) ◷◷ En déduire la valeur de : $\displaystyle\sum_{\substack{\omega \in \mathbb{U}_n \\ \omega \neq 1}} \frac{1}{1-\omega}$.
3) ◷◷◷ Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant de racines distinctes $z_1, \ldots, z_r$ dans $\mathbb{C}$.

a) Montrer que toute racine de P' peut être écrite : $\sum_{k=1}^{r} \lambda_k z_k$ pour certains $\lambda_1, \dots, \lambda_r \geqslant 0$ pour lesquels : $\sum_{k=1}^{r} \lambda_k = 1$.

b) Interpréter géométriquement ce résultat (*théorème de Gauss-Lucas*).

---

16 Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ non constant.

1) On suppose P scindé sur $\mathbb{R}$.

a) ◷ Calculer la décomposition en éléments simples de $\frac{P'}{P}$.

b) ◷◷ En déduire que : $P'(x)^2 \geqslant P(x)\,P''(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, avec égalité si et seulement si x est racine multiple de P.

c) ◷◷ Rappeler brièvement sans détailler pourquoi P' est lui aussi scindé sur $\mathbb{R}$, puis montrer que toute racine multiple de P' est racine de P.

2) ◷◷

a) Est-il vrai en général que toute racine multiple de P' est racine de P ?

b) Est-il vrai, sous l'hypothèse que P est scindé sur $\mathbb{R}$, que toute racine de P' est racine de P ?

3) ◷◷◷ On suppose que : $P'(x)^2 \geqslant P(x)\,P''(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer que P possède une racine réelle.

---

17 ◷◷ Calculer la décomposition en éléments simples de $\frac{1}{X(X+1)\dots(X+n)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

---

18 ◷◷◷ Calculer la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}[X]$ de $\frac{1}{(X-1)(X^n-1)}$ pour tout $n \geqslant 2$.

---

19 ◷◷◷ On note R la fraction rationnelle $\frac{1}{X^2+1}$.

1) Décomposer R en éléments simples, puis calculer $R^{(n)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$R^{(n)} = \frac{(-1)^n (n+1)!}{\left(X^2+1\right)^{n+1}} \prod_{k=1}^{n} \left(X - \operatorname{cotan} \frac{k\pi}{n+1} \right).$$

---

20 ◷◷ Simplifier : $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

---

21 ◷◷ Calculer une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction $x \longmapsto \frac{x \ln x}{\left(x^2+1\right)^2}$.

---

22 ◷◷ Calculer les intégrales suivantes :

1) $\int_0^{+\infty} \frac{t \, \mathrm{d}t}{t^4+1}$. **2)** $\int_0^{+\infty} \frac{t \, \mathrm{d}t}{(t+1)^2(2t+1)}$.

3) $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\left(t^2+4\right)(t+2)^2}$. **4)** $\int_0^{1} \frac{t^4 \, \mathrm{d}t}{t^2+2t+5}$.

5) $\int_0^{+\infty} \frac{t \, \mathrm{d}t}{\left(t^2+1\right)(t+1)(t+2)}$. **6)** $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^3+1}$.

7) $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(t+1)^2\left(t^2-2t+2\right)}$.

---

23 ◷◷ Calculer les intégrales suivantes en commençant par y effectuer le changement de variable proposé :

1) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{\sin t}$ en posant : $u = \cos t$ $(x \in \left]0, \pi\right[)$.

2) $\int_0^{\pi} \frac{\sin t \, \mathrm{d}t}{4-\cos^2 t}$ en posant : $u = \cos t$.

3) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}t}{\cos^3 t}$ en posant : $u = \sin t$.

---

24 ◷◷ Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$I_n(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\left(t^2+1\right)^{n+1}}.$$

1) Exprimer $I_{n+1}(x)$ en fonction de $I_n(x)$ pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$.

2) En déduire l'existence et une expression explicite de : $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\left(t^2+1\right)^{n+1}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

---

25 ◷◷◷ Soit $\alpha > 1$.

1) Pour tout $r \in \left]-\pi, \pi\right[$, effectuer le changement de variable : $x = \tan \frac{t}{2}$ dans l'intégrale : $\int_{-r}^{r} \frac{\mathrm{d}t}{\alpha + \sin t}$, puis calculer l'intégrale obtenue.

2) En déduire une expression simple de :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{d}t}{\alpha + \sin t}, \quad \text{puis de :} \quad \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{\alpha + \sin t}.$$
