FACTORISATION IRRÉDUCTIBLE ET THÉORÈME DE D'ALEMBERT-GAUSS

1 Déterminer la factorisation irréductible sur $\mathbb{R}$ de :
1) ◷ **a)** X^4-4. **b)** X^6+27.
2) ◷◷ **a)** $X^{2n+1}+1$ $(n\in\mathbb{N})$.
b) $X^{2n}-1$ $(n\in\mathbb{N}^*)$. **c)** $X^{2n}+1$ $(n\in\mathbb{N}^*)$.

---

2 ◷◷ On pose $P=(X+1)^7-X^7-1$.
1) Déterminer le degré de P.
2) Déterminer deux racines évidentes entières de P, puis montrer que j est racine de P.
3) En déduire la factorisation irréductible de P sur $\mathbb{R}$.

---

3 ◷◷ Déterminer la factorisation irréductible sur $\mathbb{R}$ de $\left(X^2-3X+3\right)^2+1$.

---

4 ◷◷ Soit $M\in\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.
1) Montrer que M possède un polynôme annulateur non nul à coefficients complexes en étudiant l'application $P\longmapsto P(M)$ sur $\mathbb{C}[X]$.
2) En déduire l'existence d'un nombre complexe λ pour lequel $M-\lambda I_n$ n'est pas inversible.
3) En déduire enfin qu'il existe un vecteur $X\in\mathbb{C}^n$ non nul pour lequel $MX=\lambda X$.

---

5 ◷◷ Soit $P\in\mathbb{R}[X]$. On suppose que $P(x)\geqslant 0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.
1) Montrer que si P est non nul, toute racine réelle de P est de multiplicité paire.
2) En déduire que $P=A^2+B^2$ pour certains polynômes $A,B\in\mathbb{R}[X]$.

---

6 ◷◷◷
1) Soit $P\in\mathbb{R}[X]$ non nul. On suppose que :
$$P\left(X^2\right)=P(X)P(X-1).$$
a) Montrer que si $\alpha\in\mathbb{C}$ est une racine de P, alors α^2 en est aussi une.
En déduire que $\alpha=0$ ou $|\alpha|=1$.
b) Montrer que 0 n'est pas racine de P.
c) Montrer que si α est une racine complexe de P, alors $|\alpha+1|=1$.
d) Déduire de tout cela quelles sont les racines de P ainsi que la forme de P.
2) Déterminer tous les polynômes $P\in\mathbb{R}[X]$ pour lesquels $P\left(X^2\right)=P(X)P(X-1)$.

ARITHMÉTIQUE DES POLYNÔMES

7 ◷ Calculer le PGCD et le PPCM de :
$2X^4+3X^3+4X^2+2X+1$ et $3X^3+4X^2+4X+1$.

---

8 ◷ On pose $P=4X^3+12X^2-15X+4$.
1) Calculer le PGCD de P et P'.
2) En déduire la factorisation irréductible de P sur $\mathbb{R}$.

---

9 ◷◷
1) Soit $P\in\mathbb{K}[X]$. Montrer que si P et P' sont premiers entre eux, alors P n'a pas de racine multiple dans $\mathbb{K}$. On peut donc savoir si P a des racines multiples sans connaître aucune racine de P.
2) Montrer que la réciproque est vraie si $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ mais fausse si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$.

---

10 ◷◷ Soient $m,n\in\mathbb{N}^*$ avec $n\geqslant m$.
1) Calculer la division euclidienne de X^n-1 par X^m-1 en utilisant celle de n par m dans $\mathbb{Z}$.
2) En déduire que $\left(X^m-1\right)\wedge\left(X^n-1\right)=X^{m\wedge n}-1$.

---

11 ◷◷ Soient $A,B\in\mathbb{K}[X]$. Montrer que A et B sont premiers entre eux si et seulement si $A+B$ et AB le sont.

---

12 ◷◷◷ Soient $n\in\mathbb{N}$ et $A,B\in\mathbb{K}[X]$ non constants et premiers entre eux. Montrer que la famille $\left(A^kB^{n-k}\right)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est libre dans $\mathbb{K}[X]$.

---

13 ◷◷◷ Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $f\in\mathscr{L}(E)$ et $P,Q\in\mathbb{K}[X]$ premiers entre eux.
1) Vérifier que $\operatorname{Ker}P(f)+\operatorname{Ker}Q(f)\subset\operatorname{Ker}(PQ)(f)$.
2) Montrer le *lemme des noyaux* :
$$\operatorname{Ker}(PQ)(f)=\operatorname{Ker}P(f)\oplus\operatorname{Ker}Q(f).$$

---

14 ◷◷◷ On pose $\alpha=\sqrt[3]{2}$ et :
$$\mathbb{Q}(\alpha)=\left\{P(\alpha)\mid P\in\mathbb{Q}[X]\right\}.$$
Parce que $\mathbb{Q}$ est un corps, le théorème de la division euclidienne et ses conséquences sont vrais dans $\mathbb{Q}[X]$ comme il le sont dans $\mathbb{R}[X]$ ou $\mathbb{C}[X]$.
1) Montrer que $\mathbb{Q}(\alpha)$ est un sous-anneau de $\mathbb{C}$.
2) Montrer que α est irrationnel.
3) Montrer que α^2 n'est pas une combinaison $\mathbb{Q}$-linéaire de 1 et α.
4) Montrer que $\mathbb{Q}(\alpha)$ est un sous-$\mathbb{Q}$-espace vectoriel de $\mathbb{C}$ et déterminer sa dimension.
5) Montrer que pour tout $P\in\mathbb{Q}[X]$, α est racine de P si et seulement si P est divisible par X^3-2.
6) Montrer que X^3-2 est irréductible sur $\mathbb{Q}$.
7) En déduire que $\mathbb{Q}(\alpha)$ est un corps. Comment calcule-t-on concrètement l'inverse d'un élément non nul de $\mathbb{Q}(\alpha)$?

FRACTIONS RATIONNELLES

15 Montrer que la fraction $\dfrac{1}{X}$ n'a pas de primitive dans $\mathbb{C}(X)$.

---

16 Soient $m, n \in \mathbb{N}$. Calculer, après avoir remarqué que $X = (X-1)+1$, la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$ de $\dfrac{X^m}{(X-1)^n}$.

17

1) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non nul. Calculer la décomposition en éléments simples de $\dfrac{P'}{P}$.
2) En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n \setminus \{1\}} \frac{1}{1-\omega}$.
3) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant de racines distinctes $z_1, \ldots, z_r$ dans $\mathbb{C}$.
   a) Montrer que toute racine de P' peut être écrite $\lambda_1 z_1 + \ldots + \lambda_n z_n$ pour certains $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \geqslant 0$ pour lesquels $\lambda_1 + \ldots + \lambda_n = 1$.
   b) Interpréter géométriquement ce résultat (*théorème de Gauss-Lucas*).

---

18 Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ non constant.

1) On suppose P scindé sur $\mathbb{R}$.
   a) Calculer la décomposition en éléments simples de $\dfrac{P'}{P}$.
   b) En déduire que $P'(x)^2 \geqslant P(x)\,P''(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, avec égalité si et seulement si x est racine multiple de P.
   c) Rappeler brièvement sans détailler pourquoi P' est lui aussi scindé sur $\mathbb{R}$, puis montrer que toute racine multiple de P' est racine de P.
2)
   a) Est-il vrai en général que toute racine multiple de P' est racine de P ?
   b) Est-il vrai, sous l'hypothèse que P est scindé sur $\mathbb{R}$, que toute racine de P' est racine de P ?
3) On suppose que $P'(x)^2 \geqslant P(x)\,P''(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer que P possède une racine réelle.

---

19 Calculer la décomposition en éléments simples de $\dfrac{1}{X(X+1)\ldots(X+n)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

---

20 Calculer la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}[X]$ de $\dfrac{1}{(X-1)\big(X^n-1\big)}$ pour tout $n \geqslant 2$.

---

21 On note R la fraction rationnelle $\dfrac{1}{X^2+1}$.

1) Décomposer R en éléments simples, puis calculer $R^{(n)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$R^{(n)} = \frac{(-1)^n(n+1)!}{\big(X^2+1\big)^{n+1}} \prod_{k=1}^{n} \left(X - \cot \frac{k\pi}{n+1}\right).$$

---

22 Simplifier $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

---

23 Calculer une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction $x \longmapsto \dfrac{x \ln x}{\big(x^2+1\big)^2}$.

---

24 Calculer les intégrales suivantes :

1) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t\ \mathrm{d}t}{t^4+1}$.
2) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t\ \mathrm{d}t}{(t+1)^2(2t+1)}$.
3) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\big(t^2+4\big)(t+2)^2}$.
4) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{t^4\ \mathrm{d}t}{t^2+2t+5}$.
5) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t\ \mathrm{d}t}{\big(t^2+1\big)(t+1)(t+2)}$.
6) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^3+1}$.
7) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(t+1)^2\big(t^2-2t+2\big)}$.
8) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\big(t^2+1\big)^2(t+1)}$.

---

25 Calculer les intégrales suivantes en commençant par y effectuer le changement de variable proposé :

1) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{\sin t}$ en posant $u = \cos t$ $(x \in \,]0,\pi[)$.
2) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin t\ \mathrm{d}t}{4-\cos^2 t}$ en posant $u = \cos t$.
3) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}t}{\cos^3 t}$ en posant $u = \sin t$.

---

26 Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose :
$$I_n(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\big(t^2+1\big)^{n+1}}.$$

1) Exprimer $I_{n+1}(x)$ en fonction de $I_n(x)$ pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$.
2) En déduire l'existence et une expression explicite de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\big(t^2+1\big)^{n+1}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

---

27 Soit $\alpha > 1$.

1) Calculer $\displaystyle\int_{-r}^{r} \frac{\mathrm{d}t}{\alpha + \sin t}$ pour tout $r \in \,]-\pi,\pi[$ en commençant par y poser $x = \tan \dfrac{t}{2}$.
2) En déduire une expression simple de :
$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{d}t}{\alpha+\sin t}, \qquad \text{puis de} \qquad \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{\alpha+\sin t}.$$
