1 Calculs simples

1 Déterminer directement sans aucun calcul d'intégrale une primitive des fonctions suivantes :

1) $x \longmapsto x e^{-3x^2}$. 2) $x \longmapsto \dfrac{1}{x(\ln x)^4}$.
3) $x \longmapsto \dfrac{1}{\operatorname{th} x}$. 4) $x \longmapsto \dfrac{x^2}{1+x^3}$.
5) $x \longmapsto \dfrac{\sin(2x)}{1+\cos^2 x}$. 6) $x \longmapsto \tan^2 x$.
7) $x \longmapsto \dfrac{1}{\cos^2 x \sqrt{\tan x}}$. 8) $x \longmapsto \dfrac{1}{x+\sqrt{x}}$.
9) $x \longmapsto \dfrac{\ln \ln x}{x}$. 10) $x \longmapsto e^{e^x + x}$.
11) $x \longmapsto \dfrac{1}{x + x(\ln x)^2}$. 12) $x \longmapsto \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$.
13) $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x^3}}$. 14) $x \longmapsto \dfrac{1}{x\sqrt{1+\ln x}}$.

---

2 Déterminer une primitive des fonctions suivantes :
1) $x \longmapsto \cos^4 x \sin^2 x$. 2) $x \longmapsto \cos^3 x \sin^4(2x)$.

3
1) Déterminer une primitive des fonctions suivantes : a) $x \longmapsto \dfrac{1}{1+x+x^2}$.
b) $x \longmapsto \dfrac{2-5x}{1+x^2}$. c) $x \longmapsto \dfrac{3x+2}{2x^2-4x+3}$.
d) $x \longmapsto \dfrac{x+3}{x^2-2x+5}$.
2) Déterminer une primitive de la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x^3-1}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

---

4 Calculer, en utilisant l'exponentielle complexe :
1) l'intégrale : $\displaystyle\int_0^{\pi} e^t \sin(3t)\, dt$.
2) une primitive de $x \longmapsto \sin x \operatorname{sh} x$.

---

5 Soit $f \in \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$. Calculer : $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt$, puis interpréter géométriquement.

---

2 Intégration par parties

6 Calculer, en intégrant par parties :
1) l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi} e^t \sin(3t)\, dt$.
2) une primitive de $x \longmapsto \sin x \operatorname{sh} x$.

---

7 Déterminer une primitive des fonctions suivantes en intégrant par parties :
1) $x \longmapsto \operatorname{Arctan} x$. 2) $x \longmapsto (x \ln x)^2$.
3) $x \longmapsto x^2 e^x$. 4) $x \longmapsto \dfrac{x}{\cos^2 x}$.
5) $x \longmapsto \ln\left(1+x^2\right)$. 6) $x \longmapsto \operatorname{Arcsin} x$.
7) $x \longmapsto x \operatorname{ch} x$. 8) $x \longmapsto x \sin^2 x$.
9) $x \longmapsto x \operatorname{Arctan} x$.

---

8 Pour tous $p,q \in \mathbb{N}$, on pose :
$$I_{p,q} = \int_0^1 t^p(1-t)^q\, dt.$$
1) Montrer que pour tous $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}^*$:
$$I_{p,q} = \frac{q}{p+1}\, I_{p+1,q-1}.$$
2) En déduire que pour tous $p,q \in \mathbb{N}$:
$$I_{p,q} = \frac{p!\, q!}{(p+q+1)!}.$$
3) En déduire enfin une expression simplifiée de $\displaystyle\sum_{k=0}^{q} \binom{q}{k} \frac{(-1)^k}{p+k+1}$ pour tous $p,q \in \mathbb{N}$.

---

3 Changement de variable

9 Déterminer une primitive des fonctions suivantes en commençant par y effectuer un changement de variable :
1) $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{e^x-1}}$ en posant $t = \sqrt{e^x-1}$.
2) $x \longmapsto \dfrac{x}{\sqrt{1+x}}$ en posant $t = \sqrt{1+x}$.
3) $x \longmapsto \dfrac{1}{\operatorname{ch} x}$ en posant : a) $t = e^x$. b) $t = \operatorname{sh} x$. c) $t = \operatorname{th} x$.
4) $x \longmapsto \sin(\ln x)$ en posant $t = \ln x$.
5) $x \longmapsto \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$ en posant $t = \sqrt{x^2-1}$.
6) $x \longmapsto \sqrt{1-x^2}$ en posant $x = \sin t$.
7) $x \longmapsto \dfrac{1}{1+\tan x}$ en posant $t = \tan x$.
8) $x \longmapsto \dfrac{1}{\sin x + \sin(2x)}$ en posant $t = \cos x$.

---

10 Calculer :
1) $\displaystyle\int_{-1}^{1} t^2\sqrt{1-t^2}\, dt$ en posant $t = \sin\theta$.
2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{e^t+1}$ en posant $x = e^t$.
3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{d\theta}{\cos\theta}$ en posant $x = \sin\theta$.
4) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t^2+t+1}}$ en posant $x = \sqrt{t^2+t+1} - t$.
5) $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{\ln t}{t^2+1}\, dt$ en posant $u = \dfrac{1}{t}$.

11

1) 🕒 Déterminer une primitive de $x \longmapsto \dfrac{\ln x}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

2) 🕒🕒🕒 Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Déterminer une primitive de $x \longmapsto x^\alpha \ln x$ sur $\mathbb{R}_+^*$ au moyen d'un changement de variable du type $x = t^\beta$ avec $\beta \in \mathbb{R}$ à préciser.

12 🕒🕒 On pose : $S = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{\sin t + \cos t}\,\mathrm{d}t$ et : $C = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sin t + \cos t}\,\mathrm{d}t$.

1) Montrer que $S = C$ par changement de variable.

2) Que vaut $S + C$? En déduire S et C.

3) En déduire $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t + \sqrt{1-t^2}}$.

13 🕒🕒 On pose : $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos^2 t}{\cos(2t)}\,\mathrm{d}t$ et : $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin^2 t}{\cos(2t)}\,\mathrm{d}t$.

1) Calculer $I - J$.

2) Calculer $I + J$ en posant $x = \tan t$.

3) En déduire I et J.

14 🕒🕒 On fait semblant dans cet exercice de NE PAS connaître la fonction logarithme et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose : $L(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t}$. Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}_+^*$: $L(xy) = L(x) + L(y)$.

15 🕒🕒 Montrer que les fonctions suivantes sont dérivables et calculer leurs dérivées :

1) $x \longmapsto \displaystyle\int_{-x}^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^4}}$.

2) $x \longmapsto \displaystyle\int_{\pi}^{2\pi} \frac{\cos(tx)}{t}\,\mathrm{d}t$.

3) $x \longmapsto \displaystyle\int_0^x f\left(t + x^2\right)\mathrm{d}t$ où $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

4) $x \longmapsto \displaystyle\int_0^{2\pi} f(x-t)\cos t\,\mathrm{d}t$ où $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

5) $x \longmapsto \displaystyle\int_0^x \sqrt{x-t}\,\sin t\,\mathrm{d}t$.