1 MAJORANTS, PLUS GRAND ÉLÉMENT, BORNE SUPÉRIEURE

1 Montrer que tout suite décroissante d'entiers naturels est *stationnaire*, i.e. constante à partir d'un certain rang.

---

2 Soient I un intervalle non vide et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions majorées.
Comparer : $\sup_I f + \sup_I g$ et $\sup_I (f+g)$.

---

3 Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction majorée. Pour tout $y \in \mathbb{R}$, on pose : $f^\star(y) = \sup_{x \leqslant y} f(x)$.

1) Illustrer la définition de $f^\star$ par des figures rapides à main levée sur différents exemples de fonctions f.
2) Déterminer $f^\star$ dans le cas où f est croissante.
3) Étudier la monotonie de $f^\star$.

4

1) Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.
   a) Justifier l'existence de : $\inf\left\{|x-a|\right\}_{a \in A}$, appelé la *distance de x à A* et noté $d(x,A)$.
   b) Calculer $d(x,A)$ pour tout $x \in A$.
   c) Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:
$$\left|d(x,A) - d(y,A)\right| \leqslant |x-y|.$$
2) On pose : $A = \mathbb{Q} \cap [0,1[$. Déterminer $d(x,A)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tracer le graphe de la fonction $x \longmapsto d(x,A)$.

5

1) Soit $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ une fonction croissante. On veut montrer que f possède un point fixe. On pose : $T = \left\{x \in [0,1] / \quad f(x) \leqslant x\right\}$.
   a) Montrer que T possède une borne inférieure t.
   b) Montrer que $f(t)$ minore T.
   c) Montrer que : $f(T) \subset T$.
   d) En déduire que : $f(t) = t$.
2) Ce résultat est-il toujours vrai pour une fonction croissante de $[0,1[$ dans lui-même ?

---

2 PARTIE ENTIÈRE

6 Soient $\varepsilon > 0$ et $A > 0$. Déterminer un rang à partir duquel : 1) $\dfrac{n}{n^2+1} < \varepsilon$.

2) $\sqrt{n^2 - n} > A$. 3) $\dfrac{\sqrt{n+1}}{n^2-4} < \varepsilon$.

4) $3^n - 2^n > A$. 5) $\dfrac{2^n}{n} > A$.

7

1) Soit $x \in \mathbb{R}$. Exprimer en fonction de $\lfloor x \rfloor$, en distinguant des cas, les quantités :
   a) $\lfloor 2x \rfloor$. b) $\lfloor -x \rfloor$. c) $\left\lfloor x + \dfrac{1}{4} \right\rfloor$.
2) Montrer que pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}^*$:
   a) $\lfloor 2x \rfloor = \lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \dfrac{1}{2} \right\rfloor$. b) $\left\lfloor \dfrac{\lfloor kx \rfloor}{k} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$.
   c) $\lfloor x \rfloor + \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 3x \rfloor \leqslant \lfloor 6x \rfloor$.
3) Résoudre les équations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:
   a) $\lfloor 2x \rfloor = \lfloor 5 - x \rfloor$. b) $\lfloor 3x \rfloor - 2 = \lfloor x \rfloor^2$.
   c) $\lfloor 3x \rfloor = 2 - \lfloor x \rfloor$. d) $\lfloor 2x \rfloor = \lfloor x \rfloor^2$.

8

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$\left\lfloor \sqrt{n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 1} \right\rfloor = n^2 + n.$$
2) Pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{N}^*$ l'entier :
$$n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 1$$
est-il le carré d'un entier ?

---

9 On définit une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en posant : $a_0 = 3$, $a_1 = 13$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $a_{n+2} = 3a_{n+1} + 2a_n$.

1) Montrer que a_n est impair pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2) Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}$ une expression explicite de a_n en fonction de n.
3) On pose : $x = \dfrac{3+\sqrt{17}}{2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $x_n = \lfloor x^n \rfloor$. Montrer que x_n et n ont la même parité pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

---

10 On souhaite établir l'existence et l'unicité de la partie entière admises en cours. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on appelle *partie entière de x* tout entier $n \in \mathbb{Z}$ pour lequel :
$$n \leqslant x < n+1.$$
Une telle définition de garantit ni l'existence ni l'unicité de son objet.

1) **Unicité :** Montrer l'unicité de la partie entière.
2) **Existence dans le cas positif :** Soit $x \geqslant 0$. On pose : $X = \left\{n \in \mathbb{Z} / \quad n \leqslant x\right\}$.
   a) Montrer que X possède une borne supérieure — que l'on notera $\lfloor x \rfloor$.
   b) Montrer que : $\lfloor x \rfloor < n+1$ pour un certain $n \in X$.
   c) Montrer que n majore X.
   d) En déduire que $\lfloor x \rfloor$ est un entier et conclure.
3) **Existence dans le cas négatif :** Soit $x < 0$.
   a) Conclure dans le cas où x est entier.
   b) Conclure dans le cas où x n'est pas entier.

---

3 DENSITÉ D'UNE PARTIE DE $\mathbb{R}$

11 Montrer que l'ensemble $\left\{\dfrac{p}{2^n}\right\}_{p \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
