Maximum, borne supérieure

1 Montrer que tout suite décroissante d'entiers naturels est *stationnaire*, i.e. constante à partir d'un certain rang.

---

2 Montrer que toute partie non vide majorée de $\mathbb{Z}$ possède un plus grand élément.

---

3 Soit I un intervalle non vide.

1) Montrer que l'ensemble $f(I)$ possède une borne supérieure notée $\sup\limits_I f$ pour toute fonction majorée $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$.

2) Comparer $\sup\limits_I f + \sup\limits_I g$ et $\sup\limits_I (f+g)$ pour toutes fonctions f et g majorées sur I.

---

4 Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction majorée. Pour tout $y \in \mathbb{R}$, on pose $f^\star(y) = \sup\limits_{x \leqslant y} f(x)$.

1) Illustrer cette définition de $f^\star$ sur différents exemples de fonctions f dessinées à main levée.

2) Déterminer $f^\star$ dans le cas où f est croissante.

3) Étudier la monotonie de $f^\star$.

5

1) Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

a) Justifier pour tout $x \in \mathbb{R}$ l'existence du réel $d(x,A) = \inf\Big\{|x-a| \quad \Big| \quad a \in A\Big\}$, appelé la *distance de x à A*.

b) Calculer $d(x,A)$ pour tout $x \in A$.

c) Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:
$$\big|d(x,A) - d(y,A)\big| \leqslant |x-y|.$$

2) On pose $A = \mathbb{Q} \cap [0,1[$. Tracer le graphe de la fonction $x \longmapsto d(x,A)$.

6

1) Soit $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ une fonction croissante. On veut montrer que f possède un point fixe. On pose $T = \Big\{x \in [0,1] \;\Big|\; f(x) \leqslant x\Big\}$.

a) Montrer que T possède une borne inférieure t.

b) Montrer que $f(t)$ minore T.

c) Montrer que T est stable par f.

d) En déduire que $f(t) = t$.

2) Ce résultat est-il toujours vrai pour une fonction croissante de $[0,1[$ dans lui-même ?

---

7 Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$. On suppose A et B *adjacentes*, i.e. que tout élément de A est inférieur ou égal à tout élément de B et que :
$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists (a,b) \in A \times B, \quad b - a < \varepsilon.$$
Montrer que $\sup A = \inf B$ après avoir justifié l'existence de ces deux réels.

Partie entière

8 Soient $\varepsilon > 0$ et $A > 0$. Déterminer rapidement UN rang — pas forcément le meilleur — à partir duquel :

1) $\dfrac{n}{n^2+1} < \varepsilon.$ **2)** $\dfrac{\sqrt{n+1}}{n^2-4} < \varepsilon.$

3) $\sqrt{n^2-n} > A.$ **4)** $3^n - 2^n > A.$

9

1) Soit $x \in \mathbb{R}$. Exprimer en fonction de $\lfloor x \rfloor$ les quantités : **a)** $\lfloor 2x \rfloor$. **b)** $\lfloor -x \rfloor$. **c)** $\left\lfloor x + \dfrac{1}{4} \right\rfloor$.

2) Montrer que pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}^*$:

a) $\lfloor 2x \rfloor = \lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \dfrac{1}{2} \right\rfloor$. **b)** $\left\lfloor \dfrac{\lfloor kx \rfloor}{k} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$.

c) $\lfloor x \rfloor + \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 3x \rfloor \leqslant \lfloor 6x \rfloor$.

3) Résoudre les équations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

a) $\lfloor 2x \rfloor = 5 + \lfloor -x \rfloor$. **b)** $\lfloor 3x \rfloor - 2 = \lfloor x \rfloor^2$.

c) $\lfloor 3x \rfloor = 2 - \lfloor x \rfloor$. **d)** $\lfloor 2x \rfloor = \lfloor x \rfloor^2$.

4) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$n\sqrt{2} > \big\lfloor n\sqrt{2} \big\rfloor + \frac{1}{2n\sqrt{2}}.$$

10

1) Montrer que $\left\lfloor \sqrt{n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 1} \right\rfloor = n^2 + n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2) Déterminer l'ensemble des entiers $n \in \mathbb{N}^*$ pour lesquels $n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 1$ est le carré d'un entier.

---

11 On définit une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en posant $a_0 = 2$, $a_1 = 3$ et $a_{n+2} = 3a_{n+1} + 2a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) Montrer que a_n est un entier impair pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et en déterminer une expression explicite en fonction de n.

2) On pose $x = \dfrac{3 + \sqrt{17}}{2}$. Montrer que $\lfloor x^n \rfloor$ et n ont la même parité pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

---

12 Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on appelle *partie entière de x* tout entier $n \in \mathbb{Z}$ pour lequel $n \leqslant x < n+1$. L'existence et l'unicité d'un tel entier n ont été admises en cours, on les démontre ici.

1) Montrer l'unicité de la partie entière.

2) Soit $x \geqslant 0$. On pose $X = \Big\{n \in \mathbb{Z} \;\Big|\; n \leqslant x\Big\}$.

a) Montrer que X possède une borne supérieure s.

b) Montrer que $s < m+1$ pour un certain $n \in X$, puis que m est le plus grand élément de X.

3) Déduire des résultats précédents l'existence de la partie entière de x pour tout $x < 0$.

Topologie

13 Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}$ pour lesquelles $A \subset B$. Les assertions suivantes sont-elles vraies ? Justifier.

1) Si A est dense dans $\mathbb{R}$, alors B l'est aussi.
2) Si B est dense dans $\mathbb{R}$, alors A l'est aussi.

---

14 Montrer que $\left\{ \dfrac{p}{2^n} \;\middle|\; p \in \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad n \in \mathbb{N} \right\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

---

15 Pour toute partie X de $\mathbb{R}$, on dit que X est (un) *ouvert* si : $\forall x \in X, \quad \exists \varepsilon > 0, \quad]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset X$ et que X est (un) *fermé* si $\mathbb{R} \setminus X$ est un ouvert.

1) **a)** Montrer que toute réunion d'ouverts est un ouvert.
b) Montrer que toute intersection finie d'ouverts est un ouvert.
c) Quels résultats sur les fermés en déduit-on ?
2) Montrer que $\mathbb{R}$ et $\varnothing$ sont les seules parties de $\mathbb{R}$ à la fois ouvertes et fermées.
3) À quelle condition nécessaire et suffisante un intervalle est-il ouvert ? fermé ?
