1 EXERCICES PRÉ-TVI

1
1) Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:
$$\max\{x,y\} = \frac{|x-y|+(x+y)}{2}.$$
2) Montrer que pour toutes fonctions $f, g \in \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$:
$$\max\{f,g\} \in \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \min\{f,g\} \in \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}).$$

---

2 Étudier la définition et la continuité des fonctions suivantes ainsi que leurs éventuels prolongements par continuité aux bornes :
1) $x \longmapsto \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$. 2) $x \longmapsto \lfloor x \rfloor + \big(x - \lfloor x \rfloor\big)^2$.
3) $x \longmapsto \sqrt{\dfrac{\mathrm{Arcsin}(1-x)}{1-x}}$.
4) $x \longmapsto \dfrac{x \ln x}{x-1}$. 5) $x \longmapsto \big(1 + x(\ln x)^2\big)^{\frac{1}{\ln x}}$.
6) $x \longmapsto (-1)^{\lfloor x \rfloor}\left(x - \lfloor x \rfloor - \dfrac{1}{2}\right)$.

---

3 Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction *1-lipschitzienne*, i.e. telle que pour tous $x, y \in [0,1]$:
$$\big|f(x) - f(y)\big| \leqslant |x-y|.$$
1) Montrer que f est continue sur $[0,1]$.
2) Montrer que l'ensemble des points fixes de f est soit vide, soit un segment.

---

4 Soit $\varphi \in \mathscr{C}\big([0,1],\mathbb{R}\big)$. On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \big|x - \varphi(t)\big|\,\mathrm{d}t$. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

5
1) Soit $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Montrer que si f est décroissante et $x \longmapsto xf(x)$ croissante, alors f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
2) En déduire que $x \longmapsto \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{\cos^2 t + x^2 \sin^2 t}}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

---

6 Soient $f, g \in \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telles que : $f_{|\mathbb{Q}} = g_{|\mathbb{Q}}$. Montrer qu'alors f et g sont égales sur $\mathbb{R}$ tout entier.

---

7 Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose :
$$\varphi_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+x)}.$$
1) a) Montrer que la suite $\left(\varphi_n(x) + \dfrac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.
b) En déduire que la suite $\big(\varphi_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$. On notera $\varphi(x)$ sa limite.
2) a) Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$:
$$0 \leqslant \varphi(x) - \varphi_n(x) \leqslant \frac{1}{n}.$$
b) En revenant à la définition de la limite et en remarquant que :
$$\varphi(x) - \varphi(a) = \big(\varphi(x) - \varphi_n(x)\big) + \big(\varphi_n(x) - \varphi_n(a)\big) + \big(\varphi_n(a) - \varphi(a)\big)$$
pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $a, x \in \mathbb{R}_+^*$, montrer que φ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

---

8 On rappelle qu'une période est par définition strictement positive.
1) Montrer qu'une fonction continue périodique non constante définie sur $\mathbb{R}$ possède une plus petite période.
2) Trouver un exemple de fonction périodique non constante définie sur $\mathbb{R}$ ne possédant pas une plus petite période.

---

9 Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ croissante et surjective de $[a,b]$ sur $\big[f(a), f(b)\big]$. Montrer que f est continue sur $[a,b]$.

---

2 ÉQUATIONS FONCTIONNELLES

10 Déterminer toutes les fonctions $f \in \mathscr{C}\big(\mathbb{R}_+^*,\mathbb{R}\big)$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}_+^*$: $f(xy) = f(x)f(y)$.

---

11 Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continues en 0 telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$f(2x) = f(x).$$

---

12 Déterminer toutes les fonctions $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ pour lesquelles pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(2x) - f(x) = x$.

---

13 Déterminer toutes les fonctions $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ pour lesquelles pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:
$$f\left(\frac{x+y}{3}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

---

14 ◷◷ On cherche toutes les fonctions $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telles que pour tous $x,y \in \mathbb{R}$:

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

1) Comprendre le résultat graphiquement sans trop se soucier d'être rigoureux.
2) Résoudre le problème posé rigoureusement. Pour une solution f, on pourra remarquer que la fonction $f - f(0)$ est solution d'une autre équation fonctionnelle intéressante.

---

15 ◷◷
1) Montrer que pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$\sin\frac{x}{2^n}\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{x}{2^k} = \frac{\sin x}{2^n}.$$

2) Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continues en 0 telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(2x) = f(x)\cos x.$$

---

16 ◷◷◷ On s'intéresse aux fonctions $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telles que pour tous $x,y \in \mathbb{R}$:

$$f\big(x^2 + f(y)\big) = f(x)^2 + y \qquad \bigstar.$$

1) Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ une solution d'$\bigstar$.
a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(-x) = f(x) \quad \text{ou} \quad f(-x) = -f(x),$$

puis que f est impaire. Que vaut donc $f(0)$?
b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f\big(x^2\big) = f(x)^2 \quad \text{et} \quad f \circ f(x) = x.$$

c) Montrer que pour tous $x,y \in \mathbb{R}_+$:

$$f(x+y) = f(x) + f(y),$$

puis en déduire la forme de f.
2) Déterminer toutes les solutions continues d'$\bigstar$.

---

17 ◷◷◷ Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$. On suppose que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$: $f\left(x^2 + \dfrac{1}{4}\right) = f(x)$. On note φ la fonction $x \longmapsto x^2 + \dfrac{1}{4}$ sur $\mathbb{R}_+$.

1) Montrer que l'intervalle $\left[0, \dfrac{1}{2}\right[$ est stable par φ, puis que f y est constante.
2) Montrer que l'intervalle $\left[\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$ est stable par φ et que φ réalise une bijection de cet intervalle sur lui-même, puis que f y est constante.
3) Conclure.

---

3 TROIS THÉORÈMES MAJEURS

18 ◷ Déterminer toutes les fonctions $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telles que : $f(x)^2 = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

---

19 ◷
1) Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Montrer que si $|f|$ est constante sur $\mathbb{R}$, f l'est aussi.
2) Et si f est à valeurs complexes ?

---

20 ◷ Montrer que tout polynôme de degré impair à coefficients réels possède une racine réelle.

---

21 ◷ Soit $f \in \mathscr{C}\big([a,b],\mathbb{R}\big)$. On suppose que :

$$f\big([a,b]\big) \subset [a,b] \qquad \text{ou} \qquad [a,b] \subset f\big([a,b]\big).$$

Montrer qu'alors f possède un point fixe.

---

22 ◷◷ Soient I un intervalle et $f \in \mathscr{C}(I,\mathbb{R})$ une fonction qui stabilise I. On suppose que $f \circ f$ possède un point fixe. Montrer qu'alors f aussi en possède un.

---

23 ◷◷ Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ décroissante. Montrer que f possède un et un seul point fixe dans $\mathbb{R}$.

---

24 ◷
1) Montrer que la fonction $x \longmapsto \dfrac{\sin x}{\sqrt{e^x - 1}}$ est bornée sur $\mathbb{R}_+^*$.
2) Montrer que la fonction $x \longmapsto e^x \sin e^{-x}$ est bornée sur $\mathbb{R}_+$.

---

25 ◷◷ Soient $f,g \in \mathscr{C}\big([a,b],\mathbb{R}\big)$. On suppose que : $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Im} g$. Montrer que les graphes de f et g possèdent un point d'intersection.

---

26 ◷◷ Soient $f,g \in \mathscr{C}\big([a,b],\mathbb{R}\big)$. On suppose que : $\sup\limits_{[a,b]} f = \sup\limits_{[a,b]} g$. Montrer que les graphes de f et g possèdent un point d'intersection.

---

27 ◷◷◷ Soient $f,g \in \mathscr{C}\big([a,b],\mathbb{R}\big)$. On suppose que : $f\big([a,b]\big) \subset [a,b]$, $g\big([a,b]\big) \subset [a,b]$ et $f \circ g = g \circ f$.
1) Montrer que si : $f > g$ sur $[a,b]$, il existe $K > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $f^n \geqslant g^n + nK$ sur $[a,b]$, où : $f^n = \underbrace{f \circ \ldots \circ f}_{n \text{ fois}}$.
2) En déduire que les graphes de f et g possèdent un point d'intersection.

---

28 Un randonneur parcourt 6km en une heure. Montrer qu'il existe au moins un intervalle d'une demi-heure au cours duquel il a parcouru exactement 3km.

29 Soit $f \in \mathscr{C}\big([0,1],\mathbb{R}\big)$ telle que : $f(0)=f(1)$. On note φ la fonction $x \longmapsto f(x) - f\left(x+\dfrac{1}{n}\right)$ sur $\left[0,1-\dfrac{1}{n}\right]$. Calculer : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\varphi\left(\frac{k}{n}\right)$, puis en déduire que pour un certain $c \in \left[0,1-\dfrac{1}{n}\right]$: $f\left(c+\dfrac{1}{n}\right)=f(c)$.

30 Soit $f \in \mathscr{C}\big(]a,b[,\mathbb{R}\big)$. On suppose que f possède des limites finies en a et b. Montrer qu'alors f est bornée. Possède-t-elle un maximum et un minimum ?

31 Soient $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée. Montrer que $f \circ g$ et $g \circ f$ sont bornées.

32 Soient $f, g \in \mathscr{C}\big([a,b],\mathbb{R}\big)$. On suppose que pour tous $x \in [a,b]$: $f(x) < g(x)$. Montrer que :

$$\exists\, \lambda > 0 / \quad \forall x \in [a,b], \quad f(x)+\lambda \leqslant g(x).$$

33 Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$. On suppose que $\lim\limits_{+\infty} f$ existe et est finie. Montrer qu'alors f est bornée sur $\mathbb{R}_+$.

34 Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On suppose que :

$$\lim_{+\infty} f = \lim_{-\infty} f = +\infty.$$

Montrer qu'alors f possède un minimum sur $\mathbb{R}$.

35 Soit $f \in \mathscr{C}\big(]a,b[,\mathbb{R}\big)$. On suppose que $\lim\limits_{a} f$ et $\lim\limits_{b} f$ existent dans $\overline{\mathbb{R}}$ et sont égales. Montrer que f n'est pas injective.

36 Soit $f \in \mathscr{C}\big([0,1],\mathbb{R}\big)$. On suppose que pour tout $x \in [0,1]$: $f\left(\dfrac{x}{2}\right)+f\left(\dfrac{x+1}{2}\right)=3f(x)$. Montrer que f est identiquement nulle.

37 Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ surjective. Montrer que pour tout $y \in \mathbb{R}$, l'équation : $y=f(x)$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+$ possède une infinité de solutions.

38

1) Soit $f \in \mathscr{C}\big(\mathbb{R}_+^*,\mathbb{R}\big)$. On suppose que :

$$\lim_{x\to+\infty}\big(f(x+1)-f(x)\big)=0.$$

Montrer que : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$. On pourra revenir à la définition de la limite et remarquer que « $f(x+1)-f(x)$ » a un vague parfum de simplification télescopique.

2) Soit $f \in \mathscr{C}\big(\mathbb{R}_+^*,\mathbb{R}\big)$. On suppose que pour tous $x, y \in \mathbb{R}_+^*$: $f(xy)=f(x)+f(y)$.
Montrer que : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\big(f(x+1)-f(x)\big)=0$, puis que : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0} xf(x)=0$.