EXERCICES PRÉ-TVI

1 ◷ Étudier la définition et la continuité des fonctions suivantes ainsi que leurs éventuels prolongements par continuité aux bornes : **1)** $x \longmapsto \dfrac{x\ln x}{x-1}$.

2) $x \longmapsto e^{-\frac{1}{x^2}}$. **3)** $x \longmapsto \lfloor x\rfloor + \big(x-\lfloor x\rfloor\big)^2$.

4) $x \longmapsto \sqrt{\dfrac{\mathrm{Arcsin}\,(1-x)}{1-x}}$. **5)** $x \longmapsto \big(1+x(\ln x)^2\big)^{\frac{1}{\ln x}}$.

6) $x \longmapsto (-1)^{\lfloor x\rfloor}\left(x-\lfloor x\rfloor-\dfrac{1}{2}\right)$.

---

2 ◷◷ Montrer que pour tous $f,g \in \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, les fonctions $\max\{f,g\}$ et $\min\{f,g\}$ sont continues sur $\mathbb{R}$.

---

3 ◷◷ Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction *1-lipschitzienne*, i.e. pour laquelle $\big|f(x)-f(y)\big| \leqslant |x-y|$ pour tous $x,y\in\mathbb{R}$. On note E l'ensemble de ses points fixes.

1) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
2) Montrer que E est un intervalle.
3) Montrer que si E est borné et non vide, alors E est un segment.

---

4 ◷◷
1) Soit $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Montrer que si f est décroissante et $x \longmapsto xf(x)$ croissante, alors f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
2) En déduire que $x \longmapsto \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{\cos^2 t + x^2\sin^2 t}}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

---

5 ◷ Soient $f,g \in \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ deux fonctions pour lesquelles $f|_{\mathbb{Q}} = g|_{\mathbb{Q}}$. Montrer que $f=g$.

6
1) Soient I un intervalle, $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues sur I et $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$. On suppose qu'il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels positifs de limite nulle pour laquelle $\big|\varphi_n(x)-\varphi(x)\big| \leqslant \varepsilon_n$ pour tous $n\in\mathbb{N}$ et $x\in I$ — on dit que la suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément vers φ sur I*.
a) ◷ Vérifier que $\lim\limits_{n\to+\infty} \varphi_n(x) = \varphi(x)$ pour tout $x\in I$ — on dit que $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge simplement vers φ sur I*.
b) ◷◷ Montrer à coups d'ε que φ est continue sur I. On pourra observer que pour tous $n\in\mathbb{N}^*$ et $a,x\in I$: $\varphi(x)-\varphi(a) = \big(\varphi(x)-\varphi_n(x)\big) + \big(\varphi_n(x)-\varphi_n(a)\big) + \big(\varphi_n(a)-\varphi(a)\big)$.
2) ◷◷◷ On pose pour tous $n\in\mathbb{N}$ et $x>0$:
$$\varphi_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+x)}.$$
a) Montrer que la suite $\big(\varphi_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge pour tout $x>0$. On notera $\varphi(x)$ sa limite.
b) Montrer que φ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

---

7 ◷◷◷ Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ croissante et surjective de $[a,b]$ sur $\big[f(a),f(b)\big]$. Montrer que f est continue sur $[a,b]$.

---

8 ◷◷◷ On rappelle qu'une période est par définition strictement positive.
1) Soient $a>0$ et $b\in\mathbb{R}$. Montrer que tout segment de longueur supérieure à a rencontre $a\mathbb{Z}+b$.
2) Montrer qu'une fonction continue périodique non constante sur $\mathbb{R}$ possède une plus petite période.
3) Trouver un exemple de fonction périodique non constante sur $\mathbb{R}$ ne possédant pas une plus petite période.

ÉQUATIONS FONCTIONNELLES

9 ◷◷
1) Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continues en 0 pour lesquelles pour tout $x\in\mathbb{R}$:
$$f(2x) = f(x).$$
2) Déterminer les fonctions $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ pour lesquelles pour tout $x\in\mathbb{R}$: $f(2x)-f(x) = x$.

---

10 ◷◷ Déterminer les fonctions $f\in\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ pour lesquelles pour tous $x,y\in\mathbb{R}$: $f\left(\dfrac{x+y}{3}\right) = \dfrac{f(x)+f(y)}{2}$.

---

11 ◷◷ On s'intéresse aux fonctions $f\in\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ pour lesquelles pour tous $x,y\in\mathbb{R}$: $f\left(\dfrac{x+y}{2}\right) = \dfrac{f(x)+f(y)}{2}$.
1) Formuler une conjecture après une petite enquête graphique.
2) Résoudre le problème posé rigoureusement. Pour une solution f, on pourra remarquer que la fonction $f-f(0)$ est solution d'une autre équation fonctionnelle intéressante.

---

12 ◷◷
1) Montrer que : $\sin\dfrac{x}{2^n}\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{x}{2^k} = \frac{\sin x}{2^n}$ pour tous $x\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}$.
2) Déterminer toutes les fonctions $f\in\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ pour lesquelles pour tout $x\in\mathbb{R}$: $f(2x) = f(x)\cos x$.

---

13 ◷◷◷ Déterminer les fonctions $f\in\mathscr{C}\big(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}\big)$ pour lesquelles pour tous $x,y>0$: $f(xy) = f(x)f(y)$.

---

14 ◷◷◷ On s'intéresse aux fonctions $f\in\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ pour lesquelles : $f\big(x^2+f(y)\big) = f(x)^2+y$ ★ pour tous $x,y\in\mathbb{R}$.

1) Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ une solution d'★.
 a) Montrer que $f(-x) \in \big\{-f(x), f(x)\big\}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, puis que f est impaire.
 b) Montrer que $f(x+y) = f(x)+f(y)$ pour tous $x,y \geqslant 0$, puis en déduire la forme de f.

2) Déterminer toutes les solutions continues d'★.

TROIS THÉORÈMES MAJEURS

15 Déterminer les fonctions $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ pour lesquelles $f(x)^2 = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

16
1) Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Montrer que si $|f|$ est constante sur $\mathbb{R}$, f l'est aussi.
2) Et si f est à valeurs complexes ?

17 Montrer que tout polynôme de degré impair à coefficients réels possède une racine réelle.

18 Soit $f \in \mathscr{C}\big([a,b],\mathbb{R}\big)$. Montrer que f possède un point fixe si :
1) $f\big([a,b]\big) \subset [a,b]$. **2)** $[a,b] \subset f\big([a,b]\big)$.

19 Soient I un intervalle et $f \in \mathscr{C}(I,\mathbb{R})$. On suppose que I est stable par f et que $f \circ f$ possède un point fixe. Montrer que f en possède un aussi.

20 Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ décroissante. Montrer que f possède un et un seul point fixe dans $\mathbb{R}$.

21 Un randonneur parcourt 6km en une heure. Montrer qu'il existe au moins un intervalle d'une demi-heure au cours duquel il a parcouru exactement 3km.

22 Soit $f \in \mathscr{C}\big([0,1],\mathbb{R}\big)$ une fonction pour laquelle $f(0) = f(1)$. Montrer que $f\left(c+\dfrac{1}{n}\right) = f(c)$ pour un certain $c \in \left[0, 1-\dfrac{1}{n}\right]$.

23 Montrer que les fonctions suivantes sont bornées :
1) $x \longmapsto \mathrm{e}^x \sin \mathrm{e}^{-x}$ sur $\mathbb{R}_+$.
2) $x \longmapsto \dfrac{\sin x}{\sqrt{\mathrm{e}^x - 1}}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

24 Soit $f \in \mathscr{C}\big(]a,b[,\mathbb{R}\big)$. On suppose que f possède des limites finies en a et b. Montrer que f est bornée sur $]a,b[$. Y possède-t-elle un maximum et un minimum ?

25 Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$. On suppose que f possède une limite finie en $+\infty$. Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}_+$.

26 Soient $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée. Montrer que $f \circ g$ et $g \circ f$ sont bornées.

27 Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ de limite $+\infty$ en $\pm\infty$. Montrer que f possède un minimum sur $\mathbb{R}$. Attention, c'est plus subtil qu'il n'y paraît !

28 Soit $f \in \mathscr{C}\big(]a,b[,\mathbb{R}\big)$. On suppose que f possède des limites égales dans $\overline{\mathbb{R}}$ en a et b. Montrer que f n'est pas injective.

29 Soient $f,g \in \mathscr{C}\big([a,b],\mathbb{R}\big)$. Montrer que les graphes de f et g possèdent un point d'intersection si :
1) $f\big([a,b]\big) \subset g\big([a,b]\big)$.
2) $\sup\limits_{[a,b]} f = \sup\limits_{[a,b]} g$.
3) $f \circ g = g \circ f$ et $[a,b]$ est stable par f et g.

30 Soit $f \in \mathscr{C}\big([0,1],\mathbb{R}\big)$. On suppose que pour tout $x \in [0,1]$: $f\left(\dfrac{x}{2}\right) + f\left(\dfrac{x+1}{2}\right) = 3f(x)$. Montrer que f est identiquement nulle.

31 Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ surjective. Montrer que l'équation $y = f(x)$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+$ possède une infinité de solutions pour tout $y \in \mathbb{R}$.

32 Soit $f \in \mathscr{C}\big(\mathbb{R}_+^*,\mathbb{R}\big)$.
1) **a)** On suppose que :
$$\lim_{x\to+\infty} \big(f(x+1)-f(x)\big) = 0.$$
Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$.
 b) En déduire que si $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \big(f(x+a)-f(x)\big) = \ell$ pour certains $a > 0$ et $\ell \in \mathbb{R}$, alors $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{\ell}{a}$.
2) On suppose que $f(xy) = f(x)+f(y)$ pour tous $x,y > 0$. Montrer que :
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0} x f(x) = 0.$$