INÉGALITÉS DE CONVEXITÉ

1 Montrer que la fonction $x \longmapsto x^2$ est convexe sur $\mathbb{R}$ en revenant à la définition de la convexité.

---

2 On pose $f(0) = 0$, puis pour tout $x \in]0,1[$: $f(x) = \dfrac{1}{\ln x}$. Étudier la continuité, la dérivabilité et la convexité/concavité de f, ses points d'inflexion et les tangentes en ces points. Tracer l'allure de son graphe.

---

3 Soit I un intervalle. Déterminer l'ensemble des fonctions qui sont à la fois convexes et concaves sur I.

---

4 Montrer que : $\sqrt{\ln x \ln y} \leqslant \ln \dfrac{x+y}{2}$ pour tous $x, y > 1$.

---

5 Montrer que pour tous $a, b, x, y > 0$:

$$(x+y)\ln\frac{x+y}{a+b} \leqslant x\ln\frac{x}{a} + y\ln\frac{y}{b}.$$

---

6 Montrer que pour tous $x \in [-1,1]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$e^{\lambda x} \leqslant \operatorname{ch}\lambda + x\operatorname{sh}\lambda.$$

---

7 Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction concave positive.

1) Montrer que $\dfrac{f(x+y)}{x+y} \leqslant \dfrac{f(x)}{x}$ pour tous $x, y > 0$.
2) En déduire que f est *sous-additive*, i.e. que pour tous $x, y \geqslant 0$: $f(x+y) \leqslant f(x) + f(y)$.
3) En déduire que $(x+y)^\alpha \leqslant x^\alpha + y^\alpha$ pour tous $x, y \geqslant 0$ et $\alpha \in [0,1]$.

8

1) Étudier la convexité/concavite de $x \longmapsto \ln(e^x + 1)$.
2) Montrer que pour tous $x_1, \ldots, x_n > 0$:
$$1 + \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n x_k} \leqslant \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n (1+x_k)}.$$
3) En déduire que pour tous $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n > 0$:
$$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^n x_k} + \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n y_k} \leqslant \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n (x_k+y_k)}.$$

9

1) Étudier la convexité/concavité de $x \longmapsto \dfrac{1}{e^x+1}$ sur $\mathbb{R}$.
2) En déduire que pour tous $x_1, \ldots, x_n \geqslant 1$:
$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{1+x_k} \geqslant \frac{n}{1+\sqrt[n]{x_1\ldots x_n}}.$$

RÉSULTATS QUALITATIFS

10

1) a) La somme de deux fonctions convexes est-elle toujours convexe ?
   b) Le produit de deux fonctions convexes est-il toujours convexe ? Et en cas de positivité ?
2) a) Soient I et J deux intervalles et $f : I \longrightarrow J$ et $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions convexes. Montrer que si g est croissante, alors $g \circ f$ est convexe.
   b) La composée de deux fonctions convexes est-elle toujours convexe ?
3) a) Le maximum de deux fonctions convexes est-il toujours une fonction convexe ?
   b) Le minimum de deux fonctions convexes est-il toujours une fonction convexe ?
4) Soient I un intervalle ouvert et f une fonction convexe bijective de I sur son image J. Montrer que f est strictement monotone sur I, puis que f^{-1} est convexe ou concave sur J.

---

11 Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et $f \in \mathscr{C}\big([a,b],\mathbb{R}\big)$. Montrer que si f est convexe sur $[a,b[$, elle l'est sur $[a,b]$ tout entier.

---

12 Soient $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe positive pour laquelle $f(a) = f(b) = 0$. Montrer que f est identiquement nulle.

---

13 Déterminer l'ensemble des fonctions convexes majorées définies sur $\mathbb{R}$ tout entier.

---

14 Soit $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe possédant une limite finie en $+\infty$.

1) Montrer que f est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
2) a) Montrer que si f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$:
$$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0.$$
   b) Montrer que le résultat de la question **a)** est faux sans l'hypothèse de convexité.

---

15 Soient I un intervalle et $f \in \mathscr{C}(I,\mathbb{R})$ une fonction pour laquelle pour tous $x, y \in I$:

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

1) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tous $x, y \in I$ et $k \in [\![0, 2^n]\!]$:
$$f\left(\frac{2^n-k}{2^n}x + \frac{k}{2^n}y\right) \leqslant \frac{2^n-k}{2^n}f(x) + \frac{k}{2^n}f(y).$$
2) En déduire que f est convexe sur I.

---

16 Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable pour laquelle $ff'' = 0$. On note Z l'ensemble des zéros de f.

1) Montrer que f^2 est convexe sur $\mathbb{R}$.
2) En déduire que Z est un intervalle.
3) Montrer que f est affine si Z est l'ensemble vide, un singleton ou $\mathbb{R}$ tout entier.
4) On suppose désormais que Z contient au moins deux éléments et n'est pas $\mathbb{R}$ tout entier. Montrer que Z est majoré ou minoré, puis en considérant sa borne supérieure ou inférieure, dénicher une contradiction.

---

17 Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe.
1) Montrer que la fonction $x \longmapsto \dfrac{f(x)}{x}$ possède une limite $a \in \overline{\mathbb{R}}$ en $+\infty$.
2) On suppose a réel. Étudier la monotonie de la fonction $x \longmapsto f(x) - ax$ et en déduire qu'elle possède une limite $b \in \overline{\mathbb{R}}$ en $+\infty$. Comment le graphe de f est-il situé par rapport à son asymptote en $+\infty$ si b est réel ?

---

18 Soient I un intervalle et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe. On note Γ l'ensemble des réels c pour lesquels f est croissante sur $I \cap [c, +\infty[$.
1) Soient $a, b \in I$ deux réels pour lesquels $a < b$ et $f(a) \leqslant f(b)$. Montrer que $b \in \Gamma$.
2) Que dire de f si Γ est vide ?
3) On suppose désormais que Γ est non vide et que f n'est pas croissante sur I.
   a) Montrer que Γ possède une borne inférieure γ.
   b) Montrer que f est croissante sur $I \cap]\gamma, +\infty[$.
   c) Montrer que f est strictement décroissante sur $I \cap]-\infty, \gamma[$.
4) Conclusion ?

---

19 Soient I un intervalle ouvert et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe.
1) Montrer que f est dérivable à gauche et à droite en tout point de I.
2) Montrer que si f est dérivable sur I, elle y est en fait de classe $\mathscr{C}^1$.
3) Soient $a, b \in I$ avec $a < b$. Montrer que f est lipschitzienne sur $[a, b]$.

---

20 Soit $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ une fonction bornée pour laquelle $0 \leqslant f \leqslant f''$.
1) Montrer que f est décroissante.
2) Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = 0$.
3) Étudier le signe de $x \longmapsto \big(f'(x) + f(x)\big)\mathrm{e}^{-x}$, puis les variations de $x \longmapsto f(x)\mathrm{e}^{x}$.
4) En déduire que $f(x) \leqslant f(0)\mathrm{e}^{-x}$ pour tout $x \geqslant 0$.
