

1 DÉNOMBREMENTS DIVERS

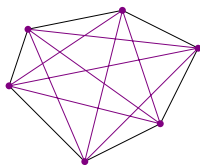
- 1) On tire simultanément 7 cartes d'un jeu de tarot. On ne cherchera pas à évaluer numériquement les résultats obtenus, ce n'est pas l'objet de l'exercice. Combien de tirages différents peut-on obtenir contenant :
- 1) ☹️ deux cœurs, deux trèfles et trois atouts ?
 - 2) ☹️ trois atouts et deux piques ?
 - 3) ☹️ sept carreaux, ou bien trois carreaux, trois piques et l'excuse ?
 - 4) ☹️☹️ exactement un atout et au moins trois as ?
 - 5) ☹️☹️ au plus un cœur et au moins quatre atouts ?
 - 6) ☹️☹️☹️ exactement trois as et au moins trois carreaux ?

- 2) ☹️ Combien les mots suivants possèdent-ils d'anagrammes ?
- 1) « ABRACADABRA ». 2) « LIPSCHITZIENNE ».

- 3) ☹️ Combien existe-t-il de tableaux de 4 lignes et 4 colonnes dont les entrées sont « 0 » ou « 1 » et :
- 1) dont chaque ligne contient exactement un coefficient « 1 » ?
 - 2) dont chaque ligne contient exactement deux coefficients « 1 » ?
 - 3) dont chaque ligne ET chaque colonne contiennent exactement un coefficient « 1 » ?

- 4) ☹️ Combien y a-t-il de couples (x, y) :
- 1) dans $\llbracket 1, n \rrbracket^2$ pour lesquels : $x < y$?
 - 2) dans $\llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, 2n \rrbracket$ pour lesquels : $x < y$?
 - 3) dans $\llbracket 1, n \rrbracket^2$ pour lesquels : $y = x + 1$?
 - 4) dans $\llbracket 1, n \rrbracket^2$ pour lesquels : $|x - y| \leq 1$?

- 5) ☹️☹️ On appelle *diagonale* d'un polygone convexe tout segment joignant deux de ses sommets non consécutifs. Si un polygone possède autant de diagonales que de côtés, combien possède-t-il de côtés ?



- 6) Combien existe-t-il de mots de 9 lettres contenant le mot :
- 1) ☹️ « MERCI » ?
 - 2) ☹️☹️ « QUOI » ? 3) ☹️☹️ « OSLO » ?

- 7) ☹️☹️ Dans une association de 18 personnes, on organise l'élection d'un comité de 4 membres, mais les statuts de l'association interdisent qu'on élise deux conjoints — or justement il y a un couple et un seul dans l'association, M. et Mme X. Combien de comités différents peut-on former dans ces conditions ?

- 8) ☹️☹️ À l'issue d'un concours, 160 candidats sont admis dont 70 garçons. Déterminer le nombre de classements possibles des 10 premiers admis qui contiennent autant de filles que de garçons.

- 9) ☹️☹️ Une joyeuse troupe de n filles et n garçons fait une promenade champêtre.
- 1) Pour le déjeuner, ils décident de pique-niquer sur un tronc d'arbre affaissé. De combien de manières peut-on les asseoir avec une alternance parfaite fille-garçon ?
 - 2) Pour le goûter, ils trouvent une table ronde dans une clairière. Combien de plans de table peut-on prévoir avec une alternance parfaite fille-garçon ?

- 10) ☹️☹️ Combien existe-t-il de surjections :
- 1) d'un ensemble de cardinal n sur un ensemble de cardinal 2 ?
 - 2) d'un ensemble de cardinal $n+1$ sur un ensemble de cardinal n ?

- 11) ☹️☹️ Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$ avec : $p \leq n$. Combien existe-t-il de parties de $\llbracket 1, n \rrbracket$ qui contiennent :
- 1) un et un seul élément de $\llbracket 1, p \rrbracket$?
 - 2) au moins un élément de $\llbracket 1, p \rrbracket$?

- 12) ☹️
- 1) ☹️ Combien y a-t-il de fonctions strictement croissantes de $\llbracket 1, p \rrbracket$ dans $\llbracket 1, n \rrbracket$?
 - 2) ☹️☹️
 - a) Soit $f : \llbracket 1, p \rrbracket \rightarrow \llbracket 1, n \rrbracket$ croissante. Montrer que la fonction $k \mapsto f(k) + k - 1$ est strictement croissante de $\llbracket 1, p \rrbracket$ dans $\llbracket 1, n+p-1 \rrbracket$.
 - b) Soit $g : \llbracket 1, p \rrbracket \rightarrow \llbracket 1, n+p-1 \rrbracket$ une fonction strictement croissante. Montrer que la fonction $k \mapsto g(k) - k + 1$ est croissante de $\llbracket 1, p \rrbracket$ dans $\llbracket 1, n \rrbracket$.
 - c) Combien y a-t-il de fonctions croissantes de $\llbracket 1, p \rrbracket$ dans $\llbracket 1, n \rrbracket$?

- 13) ☹️☹️ Soit E un ensemble fini non vide de cardinal n .
- 1) Combien existe-t-il de relations binaires sur E ?
 - 2) Combien existe-t-il de relations binaires réflexives sur E ?
 - 3) Combien existe-t-il de relations binaires réflexives symétriques sur E ?

- 14) Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}$, on note K_n^p le nombre de listes (k_1, \dots, k_n) d'entiers naturels pour lesquelles : $k_1 + \dots + k_n = p$. On va calculer K_n^p de deux manières.
- 1) ☹️☹️ Montrer d'abord par une preuve directe que pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}$: $K_n^p = \binom{n+p-1}{p}$.

- 2) a) ☹️ Calculer K_1^p, K_2^p pour tout $p \in \mathbb{N}$ et K_n^0, K_n^1 et K_n^2 pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
 b) ☹️☹️ Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}$:

$$K_{n+1}^{p+1} = K_{n+1}^p + K_n^{p+1}.$$

On pourra remarquer que dans une liste, on peut retrancher 1 au dernier terme... ou pas !

- c) ☹️☹️☹️ Retrouver ainsi le résultat de la question 1).

15 Soit E un ensemble fini de cardinal n . Combien existe-t-il de couples (A, B) de parties de E pour lesquels :

- 1) ☹️ $A \cap B = \emptyset$ et $A \cup B = E$?
 2) ☹️☹️ $A \cap B = \emptyset$?
 3) ☹️☹️ $A \cup B = E$?

16 ☹️☹️☹️ Soient E un ensemble fini et $p \in \mathbb{N}^*$. Combien y a-t-il de familles (A_1, \dots, A_p) de parties de E pour lesquelles : $A_1 \subset \dots \subset A_p$?

17 L'intrépide chenille Becky se promène à présent le long des arêtes d'un grillage plan infini dont chaque arête est de longueur 1.

- 1) ☹️ Combien de chemins de longueur n peut-elle emprunter à partir de son point de départ ?
 2) ☹️☹️☹️ On appelle *circuit* tout chemin dont le point de départ coïncide avec le point d'arrivée.

Montrer que Becky peut emprunter $\binom{2n}{n}^2$ circuits de longueur $2n$ à partir de son point de départ.

2 DOUBLE COMPTAGE

- 18 ☹️☹️ Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}$.
 1) De combien de façons peut-on choisir simultanément n entiers compris entre 1 et $2n$ dont exactement k sont inférieurs ou égaux à n ?
 2) Calculer de deux manières différentes le nombre de n -combinaisons de $\llbracket 1, 2n \rrbracket$. En déduire une formule !

- 19 1) ☹️☹️ Soient E un ensemble fini de cardinal n ainsi que $p, k \in \mathbb{N}$. Calculer de deux manières différentes le nombre de couples (A, B) de parties de E pour lesquels : $A \subset B$, $|A| = k$ et $|B| = p$. En déduire une formule !
 2) ☹️☹️☹️ On note S (resp. T) l'application de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ qui associe à toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$y_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x_k \quad (\text{resp. } y_n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} x_k).$$

Montrer que S et T sont deux bijections de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ réciproques l'une de l'autre.

- 20 ☹️☹️ Soient $n, p \in \mathbb{N}$.
 1) Quelles sont les valeurs possibles du maximum d'une $(p+1)$ -combinaison de $\llbracket 1, n+p+1 \rrbracket$?
 2) Calculer de deux manières différentes le nombre de $(p+1)$ -combinaisons de $\llbracket 1, n+p+1 \rrbracket$. En déduire une formule !

3 CALCULS DE SOMMES

- 21 Simplifier pour tout $n \in \mathbb{N}$: 1) ☹️ $\sum_{k=0}^n 3^k k$.
 2) ☹️ $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k}{4^k}$. 3) ☹️☹️ $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^2}{2^k}$.

- 22 ☹️ Simplifier pour tout $n \in \mathbb{N}$: 1) $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} k$.
 2) $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k k^2$.

- 23 ☹️☹️ Simplifier pour tout $n \in \mathbb{N}$:
 1) $\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} \binom{3n}{k}$. 2) $\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{2n}{k}^2$.

4 FORMULE DU CRIBLE

- 24 ☹️☹️ Une certaine ville compte 17 500 actifs dans sa population. A l'issue d'un recensement, on a obtenu les informations suivantes sur ces 17 500 actifs :
 — 4 actifs sur 7 sont des femmes et 6 d'entre elles sur 10 ont voté aux dernières municipales,
 — 3 actifs sur 5 ont voté aux dernières municipales et 40% de ces personnes sont au chômage,
 — le chômage touche 1 actif sur 4 et 60% des demandeurs d'emploi sont des femmes,
 — 60% des femmes au chômage ont voté aux dernières municipales.

Combien d'hommes qui ne sont pas au chômage sont restés chez eux le jour des élections municipales ?

- 25 ☹️☹️☹️ Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Simplifier la somme : $\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^p$ en appliquant la formule du crible aux ensembles $(\llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{k\})^p$, k décrivant $\llbracket 1, n \rrbracket$.

5 INDICATRICES

- 26 $\odot \odot$ Soit E un ensemble. Pour toutes parties A, B de E , on appelle *différence symétrique* de A et B la partie :

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

- Exprimer $\mathbb{1}_{A \Delta B}$ en fonction de $\mathbb{1}_A$ et $\mathbb{1}_B$.
- Montrer l'égalité : $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.
- Montrer que $(\mathcal{P}(E), \Delta)$ est un groupe commutatif.

6 PRINCIPE DES TIROIRS ET AUTRES DIFFICULTÉS

- 27 \odot Étant donnés 51 entiers compris entre 1 et 100, montrer qu'il en existe toujours deux consécutifs.

- 28 $\odot \odot$ Étant données 6 personnes qui sont deux à deux amies ou ennemies, montrer qu'il en existe toujours trois qui sont soit mutuellement amies, soit mutuellement ennemies.

- 29 $\odot \odot$ Soit G un groupe fini.
- Soit $x \in G$.
 - Montrer que l'ensemble $\{k \in \mathbb{N}^* / x^k = 1_G\}$ possède un plus petit élément n — appelé l'ordre de x .
On pose : $\langle x \rangle = \{1_G, x, x^2, \dots, x^{n-1}\}$.
 - Montrer que : $\langle x \rangle = \{x^k\}_{k \in \mathbb{Z}}$.
 - En déduire que $\langle x \rangle$ est un sous-groupe de G — appelé le *sous-groupe de G engendré par x* .
 - Montrer que $\langle x \rangle$ est le plus petit sous-groupe de G contenant x .
 - Soit H un sous-groupe de G .
 - On définit sur G une relation binaire \sim par : $x \sim y \iff \exists h \in H / y = xh$ pour tous $x, y \in G$. Montrer que \sim est une relation d'équivalence sur G .
 - En déduire le *théorème de Lagrange* selon lequel $|H|$ divise $|G|$. Ce théorème, bien que facile à prouver, est l'un des grands théorèmes élémentaires de la théorie des groupes. En particulier, pour tout $x \in G$, l'ordre de x divise $|G|$.

- 30 $\odot \odot \odot$ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note p_n le $n^{\text{ème}}$ nombre premier.
- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $p_n \geq 2n - 1$.
On fixe à présent un entier $n \geq 3$ et on pose pour tout $k \in \llbracket 1, p_n \rrbracket$: $m_k = kp_1 \dots p_{n-1} - 1$.
 - Montrer que les entiers m_1, \dots, m_{p_n} sont premiers entre eux deux à deux.
 - En déduire que l'un des entiers m_1, \dots, m_{p_n} n'est divisible par aucun des nombres p_1, \dots, p_{n-1} .

- 4) En déduire l'inégalité : $p_{3n-2} < p_1 \dots p_n$.

- 31 $\odot \odot \odot$ On se donne n entiers relatifs quelconques. Montrer qu'on peut toujours former par somme, en choisissant certains d'entre eux, un multiple de n .

- 32 $\odot \odot \odot$
- Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on pose : $\delta_k = kx - \lfloor kx \rfloor$. En appliquant le principe des tiroirs aux réels δ_k , k décrivant $\llbracket 0, n \rrbracket$, montrer le *théorème d'approximation de Dirichlet* suivant :

$$\exists (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* / \quad q \leq n \quad \text{et} \quad \left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{nq}.$$

- Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
 - Montrer qu'il existe une infinité de couples $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ pour lesquels : $\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2}$.
 - Montrer qu'il existe une infinité de $p \in \mathbb{Z}$ pour lesquels : $\exists q \in \mathbb{N}^* / \left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2}$.
- On admet que π est irrationnel. Dans ces conditions : $\sin n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et on pose : $u_n = \frac{1}{n \sin n}$. On suppose par l'absurde que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.
 - Montrer que : $\ell \geq 0$ et $\ell \leq 0$.
 - Obtenir une contradiction en appliquant le résultat de la question 2)b) au réel π .

- 33 $\odot \odot \odot$ Soient $p, q \in]1, +\infty[$ deux irrationnels pour lesquels : $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. On pose : $\mathcal{P} = \{\lfloor np \rfloor\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $\mathcal{Q} = \{\lfloor nq \rfloor\}_{n \in \mathbb{N}^*}$.
On souhaite prouver le *théorème de Beatty* selon lequel les ensembles \mathcal{P} et \mathcal{Q} forment une partition de \mathbb{N}^* , i.e. sont disjoints de réunion \mathbb{N}^* tout entier.

- Montrer que les ensembles \mathcal{P} et \mathcal{Q} sont disjoints.
- En déduire que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$:

$$|(\mathcal{P} \cup \mathcal{Q}) \cap \llbracket 1, N \rrbracket| = N.$$

- Conclure.

- 34 $\odot \odot \odot$
- Étant donnés 3 réels positifs ou nuls distincts, montrer qu'on peut toujours entre trouver deux x et y pour lesquels : $0 < \frac{x-y}{1+xy} < 1$. On pourra remarquer que : $\tan \frac{\pi}{4} = 1$.
 - Calculer : $\tan \frac{\pi}{12}$.
 - Étant donnés 13 réels distincts, montrer qu'on peut toujours en trouver deux x et y pour lesquels : $0 < \frac{x-y}{1+xy} < 2 - \sqrt{3}$.

35

⌚⌚⌚ Un magma associatif n'a pas forcément d'élément neutre — $(\mathbb{N}^*, +)$ par exemple — mais quand il en possède un, disons e , alors : $e^2 = e$.

Montrer réciproquement que tout magma associatif FINI non vide, à défaut d'avoir un élément neutre, possède en tout cas toujours un élément e pour lequel : $e^2 = e$.
