1 DÉNOMBREMENTS DIVERS

1 On tire simultanément 7 cartes d'un jeu de tarot. On ne cherchera pas à évaluer numériquement les résultats obtenus, ce n'est pas l'objet de l'exercice. Combien de tirages différents peut-on obtenir contenant :

1) ◷ deux cœurs, deux trèfles et trois atouts ?
2) ◷ trois atouts et deux piques ?
3) ◷ sept carreaux, ou bien trois carreaux, trois piques et l'excuse ?
4) ◷◷ exactement un atout et au moins trois as ?
5) ◷◷ au plus un cœur et au moins quatre atouts ?
6) ◷◷◷ exactement trois as et au moins trois carreaux ?

---

2 ◷ Combien les mots suivants possèdent-ils d'anagrammes ?
1) « ABRACADABRA ». **2)** « LIPSCHITZIENNE ».

---

3 ◷ Combien existe-t-il de tableaux de 4 lignes et 4 colonnes dont les entrées sont « 0 » ou « 1 » et :

1) dont chaque ligne contient exactement un coefficient « 1 » ?
2) dont chaque ligne contient exactement deux coefficients « 1 » ?
3) dont chaque ligne ET chaque colonne contiennent exactement un coefficient « 1 » ?

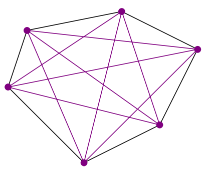
---

4 ◷ Combien y a-t-il de couples (x, y) :

1) dans $[\![1,n]\!]^2$ pour lesquels : $x < y$?
2) dans $[\![1,n]\!] \times [\![1,2n]\!]$ pour lesquels : $x < y$?
3) dans $[\![1,n]\!]^2$ pour lesquels : $y = x+1$?
4) dans $[\![1,n]\!]^2$ pour lesquels : $|x-y| \leqslant 1$?

---

5 ◷◷ On appelle *diagonale* d'un polygone convexe tout segment joignant deux de ses sommets non consécutifs. Si un polygone possède autant de diagonales que de côtés, combien possède-t-il de côtés ?



---

6 Combien existe-t-il de mots de 9 lettres contenant le mot : **1)** ◷ « MERCI » ? **2)** ◷◷ « QUOI » ? **3)** ◷◷ « OSLO » ?

---

7 ◷◷ Dans une association de 18 personnes, on organise l'élection d'un comité de 4 membres, mais les satuts de l'association interdisent qu'on élise deux conjoints — or justement il y a un couple et un seul dans l'association, M. et Mme X. Combien de comités différents peut-on former dans ces conditions ?

---

8 ◷◷ À l'issue d'un concours, 160 candidats sont admis dont 70 garçons. Déterminer le nombre de classements possibles des 10 premiers admis qui contiennent autant de filles que de garçons.

---

9 ◷◷ Une joyeuse troupe de n filles et n garçons fait une promenade champêtre.

1) Pour le déjeuner, ils décident de pique-niquer sur un tronc d'arbre affaissé. De combien de manières peut-on les asseoir avec une alternance parfaite fille-garçon ?
2) Pour le goûter, ils trouvent une table ronde dans une clairière. Combien de plans de table peut-on prévoir avec une alternance parfaite fille-garçon ?

---

10 ◷◷ Combien existe-t-il de surjections :

1) d'un ensemble de cardinal n sur un ensemble de cardinal 2 ?
2) d'un ensemble de cardinal $n+1$ sur un ensemble de cardinal n ?

---

11 ◷◷ Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$ avec : $p \leqslant n$. Combien existe-t-il de parties de $[\![1,n]\!]$ qui contiennent :

1) un et un seul élément de $[\![1,p]\!]$?
2) au moins un élément de $[\![1,p]\!]$?

12

1) ◷ Combien y a-t-il de fonctions strictement croissantes de $[\![1,p]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$?
2) ◷◷
a) Soit $f : [\![1,p]\!] \longrightarrow [\![1,n]\!]$ croissante. Montrer que la fonction $k \overset{g}{\longmapsto} f(k)+k-1$ est strictement croissante de $[\![1,p]\!]$ dans $[\![1,n+p-1]\!]$.
b) Soit $g : [\![1,p]\!] \longrightarrow [\![1,n+p-1]\!]$ une fonction strictement croissante. Montrer que la fonction $k \overset{f}{\longmapsto} g(k)-k+1$ est croissante de $[\![1,p]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$.
c) Combien y a-t-il de fonctions croissantes de $[\![1,p]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$?

---

13 ◷◷ Soit E un ensemble fini non vide de cardinal n.

1) Combien existe-t-il de relations binaires sur E ?
2) Combien existe-t-il de relations binaires réflexives sur E ?
3) Combien existe-t-il de relations binaires réflexives symétriques sur E ?

---

14 Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}$, on note K_n^p le nombre de listes $(k_1, \ldots, k_n)$ d'entiers naturels pour lesquelles : $k_1+\ldots+k_n = p$. On va calculer K_n^p de deux manières.

1) ◷◷ Montrer d'abord par une preuve directe que pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}$: $K_n^p = \binom{n+p-1}{p}$.

2) a) Calculer K_1^p, K_2^p pour tout $p \in \mathbb{N}$ et K_n^0, K_n^1 et K_n^2 pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}$:
$$K_{n+1}^{p+1} = K_{n+1}^p + K_n^{p+1}.$$
On pourra remarquer que dans une liste, on peut retrancher 1 au dernier terme… ou pas !

c) Retrouver ainsi le résultat de la question **1)**.

---

15 Soit E un ensemble fini de cardinal n. Combien existe-t-il de couples (A,B) de parties de E pour lesquels :
1) $A \cap B = \varnothing$ et $A \cup B = E$?
2) $A \cap B = \varnothing$?
3) $A \cup B = E$?

---

16 Soient E un ensemble fini et $p \in \mathbb{N}^*$. Combien y a-t-il de familles $(A_1, \ldots, A_p)$ de parties de E pour lesquelles : $A_1 \subset \ldots \subset A_p$?

---

17 L'intrépide chenille Becky se promène à présent le long des arêtes d'un grillage plan infini dont chaque arête est de longueur 1.
1) Combien de chemins de longueur n peut-elle emprunter à partir de son point de départ ?
2) On appelle *circuit* tout chemin dont le point de départ coïncide avec le point d'arrivée. Montrer que Becky peut emprunter $\binom{2n}{n}^2$ circuits de longueur $2n$ à partir de son point de départ.

---

2 DOUBLE COMPTAGE

18 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}$.
1) De combien de façons peut-on choisir simultanément n entiers compris entre 1 et $2n$ dont exactement k sont inférieurs ou égaux à n ?
2) Calculer de deux manières différentes le nombre de n-combinaisons de $[\![1,2n]\!]$. En déduire une formule !

19
1) Soient E un ensemble fini de cardinal n ainsi que $p,k \in \mathbb{N}$. Calculer de deux manières différentes le nombre de couples (A,B) de parties de E pour lesquels : $A \subset B$, $|A| = k$ et $|B| = p$. En déduire une formule !
2) On note S (resp. T) l'application de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ qui associe à toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :
$$y_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x_k \quad \left(\text{resp. } y_n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k}\binom{n}{k} x_k\right).$$
Montrer que S et T sont deux bijections de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ réciproques l'une de l'autre.

---

20 Soient $n,p \in \mathbb{N}$.
1) Quelles sont les valeurs possibles du maximum d'une $(p+1)$-combinaison de $[\![1,n+p+1]\!]$?
2) Calculer de deux manières différentes le nombre de $(p+1)$-combinaisons de $[\![1,n+p+1]\!]$. En déduire une formule !

---

3 CALCULS DE SOMMES

21 Simplifier pour tout $n \in \mathbb{N}$: **1)** $\displaystyle\sum_{k=0}^n 3^k k$. **2)** $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k}{4^k}$. **3)** $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^2}{2^k}$.

---

22 Simplifier pour tout $n \in \mathbb{N}$: **1)** $\displaystyle\sum_{k=0}^n (-1)^k\binom{n}{k}k$. **2)** $\displaystyle\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}2^k k^2$.

---

23 Simplifier pour tout $n \in \mathbb{N}$: **1)** $\displaystyle\sum_{k=0}^n \binom{2n}{k}^2$. **2)** $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k}\binom{3n}{k}$. **3)** $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k\binom{2n}{k}^2$.

---

4 FORMULE DU CRIBLE

24 Une certaine ville compte 17 500 actifs dans sa population. A l'issue d'un recensement, on a obtenu les informations suivantes sur ces 17 500 actifs :
— 4 actifs sur 7 sont des femmes et 6 d'entre elles sur 10 ont voté aux dernières municipales,
— 3 actifs sur 5 ont voté aux dernières municipales et 40% de ces personnes sont au chômage,
— le chômage touche 1 actif sur 4 et 60% des demandeurs d'emploi sont des femmes,
— 60% des femmes au chômage ont voté aux dernières municipales.

Combien d'hommes qui ne sont pas au chômage sont restés chez eux le jour des élections municipales ?

---

25 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [\![0,n]\!]$. Simplifier la somme : $\displaystyle\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k}\binom{n}{k}k^p$ en appliquant la formule du crible aux ensembles $\big([\![1,n]\!] \setminus \{k\}\big)^p$, k décrivant $[\![1,n]\!]$.

---

5 INDICATRICES

26 Soit E un ensemble. Pour toutes parties A, B de E, on appelle *différence symétrique de A et B* la partie :

$$A \triangle B = \big(A \setminus B\big) \cup \big(B \setminus A\big).$$

a) Exprimer $\mathbb{1}_{A\triangle B}$ en fonction de $\mathbb{1}_A$ et $\mathbb{1}_B$.
b) Montrer l'égalité : $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.
c) Montrer que $\big(\mathscr{P}(E), \triangle\big)$ est un groupe commutatif.

---

6 PRINCIPE DES TIROIRS ET AUTRES DIFFICULTÉS

27 Étant donnés 51 entiers compris entre 1 et 100, montrer qu'il en existe toujours deux consécutifs.

---

28 Étant donnés 6 personnes qui sont deux à deux amies ou ennemies, montrer qu'il en existe toujours trois qui sont soit mutuellement amies, soit mutuellement ennemies.

---

29 Soit G un groupe fini.

1) Soit $x \in G$.
a) Montrer que l'ensemble $\big\{k \in \mathbb{N}^* / \quad x^k = 1_G\big\}$ possède un plus petit élément n — appelé l'*ordre de x*.
On pose : $\langle x\rangle = \big\{1_G, x, x^2, \ldots, x^{n-1}\big\}$.
b) Montrer que : $\langle x\rangle = \big\{x^k\big\}_{k\in\mathbb{Z}}$.
c) En déduire que $\langle x\rangle$ est un sous-groupe de G — appelé le *sous-groupe de G engendré par x*.
d) Montrer que $\langle x\rangle$ est le plus petit sous-groupe de G contenant x.

2) Soit H un sous-groupe de G.
a) On définit sur G une relation binaire $\sim$ par : $x \sim y \iff \exists\, h \in H / \quad y = xh$ pour tous $x, y \in G$. Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence sur G.
b) En déduire le *théorème de Lagrange* selon lequel $|H|$ divise $|G|$. Ce théorème, bien que facile à prouver, est l'un des grands théorèmes élémentaires de la théorie des groupes. En particulier, pour tout $x \in G$, l'ordre de x divise $|G|$.

---

30 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note p_n le $n^{\text{ème}}$ nombre premier.

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $p_n \geqslant 2n-1$.

On fixe à présent un entier $n \geqslant 3$ et on pose pour tout $k \in [\![1, p_n]\!]$: $m_k = kp_1 \ldots p_{n-1} - 1$.

2) Montrer que les entiers $m_1, \ldots, m_{p_n}$ sont premiers entre eux deux à deux.
3) En déduire que l'un des entiers $m_1, \ldots, m_{p_n}$ n'est divisible par aucun des nombres $p_n, \ldots, p_{3n-3}$.
4) En déduire l'inégalité : $p_{3n-2} < p_1 \ldots p_n$.

---

31 On se donne n entiers relatifs quelconques. Montrer qu'on peut toujours former par somme, en choisissant certains d'entre eux, un multiple de n.

32

1) Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on pose : $\delta_k = kx - \lfloor kx\rfloor$. En appliquant le principe des tiroirs aux réels δ_k, k décrivant $[\![0, n]\!]$, montrer le *théorème d'approximation de Dirichlet* suivant :
$$\exists\, (p, q) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N}^* / \qquad q \leqslant n \quad \text{et} \quad \left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{nq}.$$

2) Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
a) Montrer qu'il existe une infinité de couples $(p, q) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*$ pour lesquels : $\left|x - \dfrac{p}{q}\right| < \dfrac{1}{q^2}$.
b) Montrer qu'il existe une infinité de $p \in \mathbb{Z}$ pour lesquels : $\exists\, q \in \mathbb{N}^* / \quad \left|x - \dfrac{p}{q}\right| < \dfrac{1}{q^2}$.

3) On admet que π est irrationnel. Dans ces conditions : $\sin n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et on pose : $u_n = \dfrac{1}{n \sin n}$. On suppose par l'absurde que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.
a) Montrer que : $\ell \geqslant 0$ et $\ell \leqslant 0$.
b) Obtenir une contradiction en appliquant le résultat de la question **2)b)** au réel π.

---

33 Soient $p, q \in\,]1, +\infty[$ deux irrationnels pour lesquels : $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. On pose : $\mathscr{P} = \big\{\lfloor np\rfloor\big\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\mathscr{Q} = \big\{\lfloor nq\rfloor\big\}_{n\in\mathbb{N}^*}$.
On souhaite prouver le *théorème de Beatty* selon lequel les ensembles $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ forment une partition de $\mathbb{N}^*$, i.e. sont disjoints de réunion $\mathbb{N}^*$ tout entier.

1) Montrer que les ensembles $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ sont disjoints.
2) En déduire que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$:
$$\big|(\mathscr{P} \cup \mathscr{Q}) \cap [\![1, N]\!]\big| = N.$$
3) Conclure.

34

1) Étant donnés 3 réels positifs ou nuls distincts, montrer qu'on peut toujours entre trouver deux x et y pour lesquels : $0 < \dfrac{x-y}{1+xy} < 1$. On pourra remarquer que : $\tan\dfrac{\pi}{4} = 1$.

2) **a)** Calculer : $\tan\dfrac{\pi}{12}$.
b) Étant donnés 13 réels distincts, montrer qu'on peut toujours en trouver deux x et y pour lesquels : $0 < \dfrac{x-y}{1+xy} < 2 - \sqrt{3}$.

35 Un magma associatif n'a pas forcément d'élément neutre — $(\mathbb{N}^*, +)$ par exemple — mais quand il en possède un, disons e, alors : $e^2 = e$.
Montrer réciproquement que tout magma associatif **FINI** non vide, à défaut d'avoir un élément neutre, possède en tout cas toujours un élément e pour lequel : $e^2 = e$.