1 Définitions de la dérivabilité

1 Étudier la dérivabilité sur $\mathbb{R}$ de :

1) $x \longmapsto \begin{cases} (x-1)^2 & \text{si : } x \leqslant 1 \\ (x-1)^3 & \text{si : } x > 1. \end{cases}$

2) $x \longmapsto \begin{cases} x^2+x+1 & \text{si : } x \geqslant 1 \\ ax^3+bx+2 & \text{si : } x < 1 \end{cases}$ $(a, b \in \mathbb{R})$.

3) $x \longmapsto \begin{cases} \operatorname{ch}\sqrt{x} & \text{si : } x \geqslant 0 \\ \cos\sqrt{-x} & \text{si : } x < 0. \end{cases}$

4) $x \longmapsto \dfrac{|x|}{1+|x^2-1|}$.

---

2 Montrer que la dérivée d'une fonction dérivable paire (resp. impaire, resp. périodique) est impaire (resp. paire, resp. périodique).

---

3 Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable en a. Que vaut : $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f\big(a+h^2\big)}{h}$?

---

4 Soient I un intervalle, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $m : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $M : I \longrightarrow \mathbb{R}$ trois fonctions et $a \in I$. On suppose que :
— $m(x) \leqslant f(x) \leqslant M(x)$ au voisinage de a,
— $m(a) = f(a) = M(a)$,
— m et M sont dérivables en a et : $m'(a) = M'(a)$.
Montrer que f est dérivable en a et interpréter graphiquement.

---

5 Soit $f \in \mathscr{D}\big([a,b], \mathbb{R}\big)$ telle que : $f(a) = f(b)$ et $f'(a) > 0$. Montrer qu'alors f' prend au moins une valeur strictement négative sur $[a, b]$.

---

6 Soient I un intervalle, $f \in \mathscr{D}(I, \mathbb{R})$ et $a \in I$. On suppose que : $f'(a) \neq 0$ et que f' est continue en a. Montrer que f est injective au voisinage de a.

7

1) Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On fait l'hypothèse que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f \circ f(x) = \dfrac{x}{4} + 1$.

a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$f'(x) = f'\left(\frac{x}{4} + 1\right).$$

b) En déduire que pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$:
$$f'(x) = f'\left(\frac{x}{4^n} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{4^k}\right).$$

c) En déduire que f' est constante sur $\mathbb{R}$.

2) Déterminer toutes les fonctions $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f \circ f(x) = \dfrac{x}{4} + 1$.

---

2 Calculs de dérivées successives

8 Calculer les dérivées successives de :

1) $x \longmapsto x^\alpha$ $(\alpha \in \mathbb{R})$. **2)** $x \longmapsto a^x$ $(a > 0)$.
3) sin et cos. **4)** $x \longmapsto \dfrac{1}{x+a}$ $(a \in \mathbb{R})$.
5) $x \longmapsto \dfrac{1+x}{1-x}$. **6)** $x \longmapsto \ln(3-2x)$.

---

9 Calculer les dérivées successives de :

1) $x \longmapsto x e^x$. **2)** $x \longmapsto e^{2x} \sin x$.
3) $x \longmapsto x^2 \sin x$. **4)** $x \longmapsto \dfrac{1}{x^2-1}$.

---

10 On note f la fonction $x \longmapsto e^{x\sqrt{3}} \sin x$ sur $\mathbb{R}$.

1) Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$:
$$f^{(n)}(x) = 2^n e^{x\sqrt{3}} \sin\left(x + \frac{n\pi}{6}\right).$$

2) Retrouver **1)** grâce à l'exponentielle complexe.

11

1) On note f la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ définie sur $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une fonction polynomiale P_n telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{\big(1+x^2\big)^{n+1}}$. Degré de P_n ?

2) On note f la fonction $x \longmapsto e^{x^2}$ définie sur $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une fonction polynomiale P_n telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f^{(n)}(x) = P_n(x) e^{x^2}$. Degré de P_n ?

---

12 On note f la fonction $x \longmapsto \sqrt{x^2+1}$.

1) Simplifier : $\big(x^2+1\big) f''(x) + x f'(x) - f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2) Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$:
$$\big(x^2+1\big) f^{(n+2)}(x) + (2n+1) x f^{(n+1)}(x) + \big(n^2-1\big) f^{(n)}(x) = 0.$$

3) En déduire une expression explicite de $f^{(n)}(0)$ en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

---

13 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer la dérivée $n^{\text{ème}}$ de $x \longmapsto x^{n-1} \ln(1+x)$ sur $]-1, +\infty[$.

---

14 Soit $n \in \mathbb{N}$. On note f_n la fonction $x \longmapsto x^n e^{\frac{1}{x}}$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Montrer que pour tout $x > 0$:
$$f_n^{(n+1)}(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{x^{n+2}} e^{\frac{1}{x}}.$$

---

15 Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$:
$$\operatorname{Arctan}^{(n)}(x) = \frac{(n-1)!}{\big(1+x^2\big)^{\frac{n}{2}}} \sin\left(n \operatorname{Arctan} x + \frac{n\pi}{2}\right).$$

---

3 Rolle et accroissements finis

16 ◷ Montrer que :
1) pour tout $x \geqslant 0$: $x \leqslant e^x - 1 \leqslant x e^x$.
2) pour tout $x \in \mathbb{R}$: $0 \leqslant \operatorname{ch} x - 1 \leqslant x \operatorname{sh} x$.

---

17 ◷ Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\left|\operatorname{Arctan} x - \operatorname{Arctan} y\right| \leqslant |x-y|.$$

---

18 ◷
1) Soit $f \in \mathscr{C}^1\big([a,b],\mathbb{R}\big)$. Montrer que f est lipschitzienne sur $[a,b]$.
2) Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ périodique. Montrer que f est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.

---

19 ◷ Soit $f \in \mathscr{C}^2\big([a,b],\mathbb{R}\big)$. On fait l'hypothèse que : $f(a) = f'(a)$ et $f(b) = f'(b)$. Montrer, en étudiant la fonction $x \longmapsto e^x\big(f'(x) - f(x)\big)$, que pour un certain $c \in \,]a,b[$: $f''(c) = f(c)$.

---

20 ◷◷ Soit $f \in \mathscr{D}\big([0,1],\mathbb{R}\big)$. On suppose que :

$$f(0) = f(1) = f'(0) = 0.$$

Montrer que la tangente de f en un certain point de $]0,1[$ passe par l'origine. On pourra étudier la fonction $x \longmapsto \dfrac{f(x)}{x}$.

---

21 ◷◷ Soient $n \geqslant 2$ entier et $p, q \in \mathbb{R}$.
1) Montrer que le polynôme $X^n + pX + q$ possède au plus trois racines réelles.
2) Montrer que si n est pair, $X^n + pX + q$ possède même au plus deux racines réelles.

---

22 ◷◷ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note P le polynôme $\big(X^2-1\big)^n$.
1) Montrer que pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$:

$$P^{(k)}(-1) = P^{(k)}(1) = 0.$$

2) En déduire que $P^{(n)}$ est scindé sur $\mathbb{R}$.

23
1) a) ◷ Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré supérieur ou égal à 2 et scindé sur $\mathbb{R}$ à racines simples. Montrer que P' est aussi scindé sur $\mathbb{R}$ à racines simples.
   b) ◷◷ Même question, mais sans la précision « à racines simples ».
2) ◷◷
   a) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé sur $\mathbb{R}$ à racines simples. Montrer que P ne peut posséder deux coefficients consécutifs nuls.
   b) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé sur $\mathbb{R}$. Montrer que pour tout $\lambda > 0$, $P^2 + \lambda$ est à racines simples.

---

24 ◷◷ Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, nulle en 0 et de dérivée croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Montrer que la fonction $x \longmapsto \dfrac{f(x)}{x}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

---

25 ◷◷ Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$ et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ pour laquelle : $\lim\limits_{+\infty} f = f(0)$. Montrer que f' s'annule sur $\mathbb{R}_+^*$. Ce résultat est bien sûr une généralisation du théorème de Rolle.

---

26 ◷◷ Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On suppose que : $P(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On pose : $Q = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} P^{(k)}$ — somme finie.
1) Montrer que Q possède un minimum sur $\mathbb{R}$.
2) Que vaut $Q - Q'$? En déduire que : $Q(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

---

27 ◷◷
1) Soient $f : [0,a] \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : [0,a] \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur $[0,a]$, dérivables sur $]0,a]$ et telles que : $f(0) = g(0) = 0$. On suppose en outre que g et g' ne s'annulent pas sur $]0,a]$.
   a) Pour tout $x \in \,]0,a]$, appliquer le théorème de Rolle à la fonction $t \longmapsto f(x)g(t) - f(t)g(x)$.
   b) En déduire que si : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ existe, alors : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ existe aussi et ces deux limites sont égales (*règle de L'Hôpital*).
2) Calculer : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1 - x - \dfrac{x^2}{2}}{\sin x - x}$.

---

28 ◷◷ Soient I un intervalle et $f \in \mathscr{D}(I,\mathbb{R})$. On souhaite montrer qu'alors $f'(I)$ est un intervalle (*théorème de Darboux*).
Soient $a, b \in I$ avec : $a \leqslant b$ et $y \in \mathbb{R}$ compris strictement entre $f'(a)$ et $f'(b)$.
1) Montrer que la fonction $x \longmapsto f(x) - xy$ n'est pas monotone sur $[a,b]$.
2) Montrer que la fonction $x \longmapsto f(x) - xy$ n'est pas injective sur $[a,b]$.
3) Conclure.

---

29 ◷◷ Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ non constant. On suppose l'ensemble : $X = \big\{x \in \mathbb{R}/\ \ P(x) = \sin x\big\}$ infini.
1) Montrer que X est borné.
2) Montrer que les dérivées successives de $P - \sin$ s'annulent chacune une infinité de fois.
3) Quelle contradiction ?

---

30 ◷◷◷ Soit $f \in \mathscr{D}\big([0,1],\mathbb{R}\big)$. On fait l'hypothèse que : $f(0)=0$ et $f(1)=1$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe des réels $x_1,\ldots,x_n \in\ ]0,1[$ distincts pour lesquels : $\displaystyle\sum_{k=1}^n f'(x_k) = n$. On pourra s'intéresser aux réels $\dfrac{k}{n}$, k décrivant $[\![0,n]\!]$.

31

1) ◷◷◷ Soient I un intervalle, $f \in \mathscr{C}^{n+1}(I,\mathbb{R})$ et $a \in I$. Soit en outre $x \in I$ fixé distinct de a.
 a) Déterminer un réel A pour lequel la fonction :
 $$t \overset{\varphi}{\longmapsto} f(x)-\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(t)}{k!}\,(x-t)^k-\frac{A}{(n+1)!}\,(x-t)^{n+1}$$
 s'annule en a.
 b) Simplifier φ'.
 c) En déduire que pour un certain $c \in I$:
 $$f(x)=\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(x-a)^k+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\,(x-a)^{n+1}.$$
 Ce résultat est encore vrai si : $x=a$.
 d) On suppose $\big|f^{(n+1)}\big|$ bornée sur I et on pose : $\big\|f^{(n+1)}\big\|_\infty = \sup\limits_I \big|f^{(n+1)}\big|$. Montrer que pour tout $x \in I$:
 $$\left|f(x)-\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(x-a)^k\right| \leqslant \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}\,\big\|f^{(n+1)}\big\|_\infty.$$
 Ce résultat s'appelle l'*inégalité de Taylor-Lagrange*.
2) ◷◷ Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$\mathrm{e}^x=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k}{k!} \qquad \text{et} \qquad \cos x=\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\,\frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

---

32 ◷◷◷ Soit $f \in \mathscr{C}^n\big([a,b],\mathbb{R}\big)$. On suppose que f s'annule en au moins n points distincts $a_1,\ldots a_n$ avec : $a_1<\ldots<a_n$.

1) Soit $x \in [a,b]$ fixé, distinct de $a_1,\ldots,a_n$.
 a) Déterminer un réel A pour lequel la fonction $t \overset{\varphi}{\longmapsto} f(t)-A(t-a_1)\ldots(t-a_n)$ s'annule en x.
 b) Montrer, en étudiant les zéros de φ et de ses dérivées, que pour un certain $c \in\ ]a,b[$:
 $$f(x)=(x-a_1)\ldots(x-a_n)\,\frac{f^{(n)}(c)}{n!}.$$
 Ce résultat est encore vrai si x est l'un des réels $a_1,\ldots,a_n$.
2) Pourquoi $\big|f^{(n)}\big|$ est-elle majorée sur $[a,b]$? On pose : $\big\|f^{(n)}\big\|_\infty = \sup\limits_{[a,b]}\big|f^{(n)}\big|$. Montrer que pour tout $x \in [a,b]$:
$$\big|f(x)\big| \leqslant \frac{\big\|f^{(n)}\big\|_\infty}{n!}\prod_{k=1}^n |x-a_k|.$$

---

33 ◷◷◷

1) Soit $f \in \mathscr{C}^3\big([a,b],\mathbb{R}\big)$ avec : $a<b$.
 a) Déterminer un réel A pour lequel la fonction :
 $$x \overset{\varphi}{\longmapsto} f(x)-\left(f(a)+\frac{x-a}{2}\,\big(f'(a)+f'(x)\big)-\frac{(x-a)^3}{12}\,A\right)$$
 s'annule en b.
 b) Montrer, en étudiant les zéros de φ et de ses dérivées, que pour un certain $c \in\ ]a,b[$:
 $$f(b)=f(a)+\frac{b-a}{2}\,\big(f'(a)+f'(b)\big)-\frac{(b-a)^3}{12}\,f^{(3)}(c).$$
2) Soient $f \in \mathscr{C}^2\big([a,b],\mathbb{R}\big)$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On pose pour tout $k \in [\![0,n]\!]$: $x_k=a+k\,\dfrac{b-a}{n}$.
 a) Montrer que pour tout $k \in [\![0,n-1]\!]$, pour un certain $c_k \in\ ]x_k,x_{k+1}[$:
 $$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\,\mathrm{d}t=\frac{b-a}{2n}\,\big(f(x_k)+f(x_{k+1})\big)-\frac{(b-a)^3}{12n^3}\,f''(c_k)$$
 et interpréter géométriquement.
 b) Pourquoi $|f''|$ est-elle majorée sur $[a,b]$? On pose : $\|f''\|_\infty=\sup\limits_{[a,b]}|f''|$. Montrer que :
 $$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x-\frac{b-a}{n}\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}\right)-\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n-1}f(x_k)\right| \leqslant \frac{(b-a)^3}{12n^2}\,\|f''\|_\infty.$$

---

34 ◷◷◷ Soit $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}_+^*,\mathbb{R})$. On suppose que la fonction $x \longmapsto x^2f''(x)$ est bornée et que : $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$.

1) Montrer que pour tous $x>0$ et $a \in\ ]0,1[$, il existe un réel $\xi \in\ ]ax,x[$ pour lequel :
$$f(ax)=f(x)-(1-a)xf'(x)+\frac{(1-a)^2}{2}\,x^2f''(\xi).$$
2) En déduire que : $\lim\limits_{x\to 0} xf'(x)=0$.

---

4 SUITES RÉCURRENTES ET ACCROISSEMENTS FINIS

35 ◷◷ On note f la fonction $x \longmapsto \dfrac{2x}{\ln x+1}$ sur $[1,+\infty[$.

1) Justifier l'existence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0=1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1}=f(u_n)$.
2) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
 $$|u_n-\mathrm{e}| \leqslant \frac{|\mathrm{e}-1|}{2^n}. \qquad \text{Qu'en déduit-on ?}$$
 b) On ADMET l'inégalité : $\mathrm{e} \leqslant 3$. Déterminer À LA MAIN un rang n explicite pour lequel u_n est une approximation de e à 10^{-3} près.

36 **1)** ◷ On note f la fonction $x \longmapsto \dfrac{e^x}{x+2}$ sur $\mathbb{R}_+$.

a) Montrer que $]0,1[$ est stable par f.

b) Montrer qu'il existe un et un seul $\alpha \in]0,1[$ pour lequel : $\dfrac{e^\alpha}{\alpha+2} = \alpha$.

2) ◷◷ Soit $u_0 \in]0,1[$. On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $u_{n+1} = \dfrac{e^{u_n}}{u_n+2}$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|u_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{2e}{9}\right)^n,$$

puis que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α.

b) Déterminer un rang n pour lequel u_n est une approximation de α à 10^{-5} près.

---

37 ◷◷ Soit $u_0 \in [0,1]$. On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = \dfrac{e^{u_n}}{e^{u_n}+1}$.

1) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans $[0,1]$.

2) Montrer qu'il existe un et un seul $\alpha \in \mathbb{R}$ pour lequel : $\dfrac{e^\alpha}{e^\alpha+1} = \alpha$, et que : $\alpha \in [0,1]$.

3) **a)** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|u_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{4}\right)^n,$$

puis que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α.

b) Déterminer **À LA MAIN** un rang n explicite pour lequel u_n est une approximation de α à 10^{-5} près.

---

5 LIMITE DE LA DÉRIVÉE ET PROLONGEMENT DE CLASSE $\mathscr{C}^k$

38 ◷ Montrer que la fonction $x \longmapsto x^2 \ln x$, définie sur $\mathbb{R}_+^*$, est prolongeable en une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ tout entier.

---

39 **1)** ◷ Quelle est la dérivée de la fonction $x \longmapsto \ln|x|$ sur $\mathbb{R}^*$?

2) ◷◷ Pour quelle valeur maximale de k la fonction $x \longmapsto \begin{cases} x^3 \ln|x| & \text{si : } x \neq 0 \\ 0 & \text{si : } x = 0 \end{cases}$ est-elle de classe $\mathscr{C}^k$ sur $\mathbb{R}$ tout entier ?

3) ◷◷◷ Même question avec « $x^n \ln|x|$ » au lieu de « $x^3 \ln|x|$ » pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

---

40 ◷◷ Soit $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$. Si : $f'(0) = 0$, montrer qu'il existe une fonction $g \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ pour laquelle pour tout $x \geqslant 0$: $f(x) = g\big(x^2\big)$.
