DÉFINITION DE LA DÉRIVABILITÉ

1 Étudier la dérivabilité sur $\mathbb{R}$ de :

1) $x \longmapsto \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leqslant 0 \\ x^\alpha & \text{si } x > 0 \end{cases}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$.

2) $x \longmapsto \begin{cases} x^2 + x & \text{si } x \geqslant 1 \\ ax^3 + bx + 1 & \text{si } x < 1 \end{cases}$ $(a, b \in \mathbb{R})$.

3) $x \longmapsto \dfrac{|x|}{1 + |x^2 - 1|}$.

---

2 Montrer que la dérivée d'une fonction dérivable paire (resp. impaire, resp. périodique) est impaire (resp. paire, resp. périodique).

---

3 Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable en a.

Que vaut $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f\left(a + h^2\right)}{h}$?

---

4 Soient $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $a \in \mathbb{R}$. Montrer que si $f'(a) \neq 0$, f est injective au voisinage de a.

---

5 Soit $f \in \mathscr{D}\big([a, b], \mathbb{R}\big)$. On suppose que :

$$f(a) = f(b) = 0, \quad f'(a) > 0 \quad \text{et} \quad f'(b) > 0.$$

Montrer que f s'annule sur $]a, b[$.

---

6 Déterminer toutes les fonctions $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ pour lesquelles pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\quad f \circ f(x) = \dfrac{x}{4} + 1$.

CALCULS DE DÉRIVÉES SUCCESSIVES

7 Calculer les dérivées successives de :

1) a) $x \longmapsto a^x$ $(a > 0)$.
b) $x \longmapsto x^\alpha$ $(\alpha \in \mathbb{R})$. c) sin et cos.
d) $x \longmapsto \dfrac{1}{x + a}$ $(a \in \mathbb{R})$.

2) a) $x \longmapsto \ln(3 - 2x)$. b) $x \longmapsto \dfrac{1 + x}{1 - x}$.
c) $x \longmapsto \dfrac{1}{x^2 - 1}$.

3) a) $x \longmapsto x^3\,\mathrm{e}^x$. b) $x \longmapsto x^2 \sin x$.

---

8 On note f la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{x\sqrt{3}} \sin x$ sur $\mathbb{R}$. Déterminer pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, grâce à l'exponentielle complexe, deux réels A et φ dépendant de n pour lesquels $f^{(n)}(x) = A\,\mathrm{e}^{x\sqrt{3}} \sin(x + \varphi)$.

9

1) On note f la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{x^2}$. Montrer pour tout $n \in \mathbb{N}$ qu'il existe un polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$, de degré à préciser, pour lequel $f^{(n)}(x) = P_n(x)\mathrm{e}^{x^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2) On note f la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x^2 + 1}$. Montrer pour tout $n \in \mathbb{N}$ qu'il existe un polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$, de degré à préciser, pour lequel $f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{\left(x^2 + 1\right)^{n+1}}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

---

10 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer la dérivée $n^{\text{ème}}$ de $x \longmapsto x^{n-1} \ln(1 + x)$ sur $]-1, +\infty[$.

---

11 Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}^*$:

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(x^{n-1}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right) = \frac{(-1)^n}{x^{n+1}}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}.$$

---

12 Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$:

$$\mathrm{Arctan}^{(n)}(x) = \frac{(n-1)!}{\left(x^2 + 1\right)^{\frac{n}{2}}} \sin\left(n\,\mathrm{Arctan}\,x + \frac{n\pi}{2}\right).$$

ROLLE ET ACCROISSEMENTS FINIS

13 Montrer que :

1) pour tout $x \geqslant 0$: $\quad x \leqslant \mathrm{e}^x - 1 \leqslant x\,\mathrm{e}^x$.
2) pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\quad \mathrm{ch}\,x - 1 \leqslant x\,\mathrm{sh}\,x$.

14

1) Soit $f \in \mathscr{C}^1\big([a, b], \mathbb{R}\big)$. Montrer que f est lipschitzienne sur $[a, b]$.
2) Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ périodique. Montrer que f est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.

---

15 Soit $f \in \mathscr{D}\big([0, 1], \mathbb{R}\big)$. On suppose que :

$$f(0) = f(1) = f'(0) = 0.$$

Montrer que la tangente de f en un certain point de $]0, 1[$ passe par l'origine. On sera sans doute amené à étudier la fonction $x \longmapsto \dfrac{f(x)}{x}$.

---

16 Soient $n \geqslant 2$ entier et $p, q \in \mathbb{R}$.

1) Montrer que le polynôme $X^n + pX + q$ possède au plus trois racines réelles.
2) Montrer que si n est pair, $X^n + pX + q$ possède même au plus deux racines réelles.

---

17 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note P le polynôme $\left(X^2 - 1\right)^n$.

1) Montrer que pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$:

$$P^{(k)}(-1) = P^{(k)}(1) = 0.$$

2) En déduire que $P^{(n)}$ est scindé sur $\mathbb{R}$.

18

1) a) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré supérieur ou égal à 2 et scindé sur $\mathbb{R}$ à racines simples. Montrer que P' est aussi scindé sur $\mathbb{R}$ à racines simples.
b) Même question, mais sans la précision « à racines simples ».
2)
a) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé sur $\mathbb{R}$ à racines simples. Montrer que P ne peut posséder deux coefficients consécutifs nuls.
b) Soient $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé sur $\mathbb{R}$ et $\lambda > 0$. Montrer que les racines complexes de $P^2+\lambda$ sont toutes simples.

---

19 Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$ et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ pour laquelle $\lim\limits_{+\infty} f = f(0)$. Montrer que f' s'annule sur $\mathbb{R}_+^*$. Ce résultat est bien sûr une généralisation du théorème de Rolle.

---

20 Soient I un intervalle et $f \in \mathscr{D}(I,\mathbb{R})$.
1) Soient $a, b \in I$ avec $a \leqslant b$ et $y \in \mathbb{R}$ compris strictement entre $f'(a)$ et $f'(b)$. Pourquoi la fonction $x \longmapsto f(x) - xy$ n'est-elle pas injective ?
2) En déduire que $f'(I)$ est un intervalle (*théorème de Darboux*).

---

21 Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On suppose que $P(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On pose $Q = P + P' + P'' + \ldots$
1) Montrer que P et Q sont de degré pair si $P \neq 0$.
2) Montrer que Q possède un minimum sur $\mathbb{R}$.
3) Que vaut $Q - Q'$? En déduire que $Q(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

---

22 Soient $f \in \mathscr{D}\big(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}\big)$ et $\ell \in \mathbb{R}$. Montrer que si $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = \ell$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \ell$.

---

23 Soit $f \in \mathscr{D}\big([0,1],\mathbb{R}\big)$ une fonction pour laquelle $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe des réels $x_1, \ldots, x_n \in \,]0,1[$ distincts pour lesquels $f'(x_1) + \ldots + f'(x_n) = n$.

---

24 Montrer que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$ non constant, l'ensemble $\Big\{x \in \mathbb{R} \;\Big|\; P(x) = \sin x\Big\}$ est fini.

---

25 Soit $f \in \mathscr{C}^n\big([a,b],\mathbb{R}\big)$. On suppose que f s'annule en au moins n points distincts $a_1, \ldots a_n$.
1) Soit $x \in [a,b]$ fixé distinct de $a_1, \ldots, a_n$.
a) Déterminer un réel A pour lequel la fonction $t \overset{\varphi}{\longmapsto} f(t) - A(t-a_1)\ldots(t-a_n)$ s'annule en x.
b) Montrer, en étudiant les zéros de φ et de ses dérivées, que pour un certain $c \in \,]a,b[$:
$$f(x) = (x-a_1)\ldots(x-a_n)\,\frac{f^{(n)}(c)}{n!}.$$
Pourquoi est-ce encore vrai si x est l'un des réels $a_1, \ldots, a_n$?
2) Justifier l'existence de $\big\|f^{(n)}\big\|_\infty$, puis montrer que pour tout $x \in [a,b]$:
$$\big|f(x)\big| \leqslant \frac{\big\|f^{(n)}\big\|_\infty}{n!} \prod_{k=1}^n |x - a_k|.$$

26
1) Soient I un intervalle, $f \in \mathscr{C}^{n+1}(I,\mathbb{R})$ et $a \in I$. Soit en outre $x \in I$ fixé distinct de a.
a) Déterminer un réel A pour lequel la fonction :
$$t \overset{\varphi}{\longmapsto} f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k - \frac{A}{(n+1)!}(x-t)^{n+1}$$
s'annule en a, puis simplifier φ'.
b) En déduire que pour un certain $c \in I$:
$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$
Pourquoi est-ce encore vrai si $x = a$?
c) En déduire que si $\big|f^{(n+1)}\big|$ est bornée sur I, alors pour tout $x \in I$ (*inégalité de Taylor-Lagrange*) :
$$\left|f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right| \leqslant \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}\big\|f^{(n+1)}\big\|_\infty.$$
2) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$\mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} \qquad \text{et} \qquad \cos x = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

27
1) Soit $f \in \mathscr{C}^3\big([a,b],\mathbb{R}\big)$.
a) Déterminer un réel A pour lequel la fonction :
$$x \overset{\varphi}{\longmapsto} f(x) - f(a) - \frac{x-a}{2}\Big(f'(a) + f'(x)\Big) + \frac{(x-a)^3}{12}A$$
s'annule en b.
b) Montrer, en étudiant les zéros de φ et de ses dérivées, que pour un certain $c \in \,]a,b[$:
$$f(b) = f(a) + \frac{b-a}{2}\Big(f'(a) + f'(b)\Big) - \frac{(b-a)^3}{12} f^{(3)}(c).$$
2) Soient $f \in \mathscr{C}^2\big([a,b],\mathbb{R}\big)$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On pose pour tout $k \in [\![0,n]\!]$: $\quad x_k = a + k\,\dfrac{b-a}{n}$.
a) Montrer que pour tout $k \in [\![0,n-1]\!]$, il existe un réel $c_k \in \,]x_k, x_{k+1}[$ pour lequel :
$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{b-a}{2n}\Big(f(x_k) + f(x_{k+1})\Big) - \frac{(b-a)^3}{12n^3} f''(c_k)$$
et interpréter géométriquement.
b) Justifier l'existence de $\|f''\|_\infty$, puis montrer que :
$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{b-a}{n}\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}\right) - \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)\right| \leqslant \frac{(b-a)^3}{12n^2}\|f''\|_\infty.$$

---

28 Soit $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$. On suppose que la fonction $x \longmapsto x^2 f''(x)$ est bornée et que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.
1) Montrer que pour tous $x > 0$ et $a \in \,]0,1[$, il existe un réel $\xi \in \,]ax, x[$ pour lequel :
$$f(ax) = f(x) - (1-a)x f'(x) + \frac{(1-a)^2}{2} x^2 f''(\xi).$$

2) En déduire que $\lim\limits_{x\to 0} x f'(x) = 0$.

Suites récurrentes et accroissements finis

29 On note f la fonction $x \longmapsto \dfrac{2x}{\ln x + 1}$ sur $[1, +\infty[$.

1) Justifier l'existence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2) **a)** Montrer que $|u_n - \mathrm{e}| \leqslant \dfrac{\mathrm{e}-1}{2^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) En admettant que $\mathrm{e} \leqslant 3$, déterminer à la main un rang n **EXPLICITE** pour lequel u_n est une approximation de e à 10^{-3} près.

---

30 Soit $u_0 \in [0, 1]$. On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite telle que $u_{n+1} = \dfrac{\mathrm{e}^{u_n}}{\mathrm{e}^{u_n} + 1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans $[0, 1]$.

2) Montrer qu'il existe un et un seul réel α pour lequel $\dfrac{\mathrm{e}^{\alpha}}{\mathrm{e}^{\alpha}+1} = \alpha$, puis montrer que $\alpha \in [0, 1]$.

3) **a)** Montrer que $|u_n - \alpha| \leqslant \left(\dfrac{1}{4}\right)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α.

b) Déterminer à la main un rang n **EXPLICITE** pour lequel u_n est une approximation de α à 10^{-5} près.

---

31 Soient I un intervalle, $f \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{R})$ une fonction et $a \in I$ un point fixe de f. On suppose I stable par f et on note $\big(u_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ pour tout $x \in I$ la suite définie par $u_0(x) = x$ et $u_{n+1}(x) = f\big(u_n(x)\big)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) On suppose que $\big|f'(a)\big| < 1$.

a) Montrer l'existence de deux réels $K \in [0, 1[$ et $\alpha > 0$ pour lesquels f est K-lipschitzienne sur $I \cap]a - \alpha, a + \alpha[$.

b) Étudier la nature de la suite $\big(u_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ pour tout $x \in I \cap]a - \alpha, a + \alpha[$. On dit que le point a est *attractif* (*pour* f).

2) On suppose que $\big|f'(a)\big| > 1$.

a) Montrer l'existence d'un réel $\alpha > 0$ pour lequel pour tout $x \in I \cap]a - \alpha, a + \alpha[$:
$$x \neq a \quad \Longrightarrow \quad \big|f(x) - f(a)\big| > |x - a|.$$
On dit que le point a est *répulsif* (*pour* f).

b) Quelle propriété très particulière la suite $\big(u_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ a-t-elle si elle converge vers a ?

Limite de la dérivée

32

1) Quelle est la dérivée de $x \longmapsto \ln|x|$ sur $\mathbb{R}^*$?

2) Montrer que la fonction $x \longmapsto x^2 \ln|x|$ est prolongeable en une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ tout entier.

---

33 Soit $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ une fonction pour laquelle $f'(0) = 0$. Montrer qu'il existe une fonction $g \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ pour laquelle $f(x) = g\big(x^2\big)$ pour tout $x \geqslant 0$.

---

34 On note f la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

1) Montrer que f est prolongeable en une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$, encore notée f.

2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ pour lequel $f^{(n)}(x) = P_n\left(\dfrac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$ pour tout $x > 0$.

3) En déduire par récurrence que le prolongement de f de la question **1)** est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$.

35

1) Soit $f :]a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction K-lipschitzienne avec $K \geqslant 0$.

a) Justifier pour tout $x \in]a, b]$ l'existence des réels :
$$M(x) = \sup_{t\in]a,x]} f(t) \qquad \text{et} \qquad m(x) = \inf_{t\in]a,x]} f(t).$$

b) Étudier la monotonie des fonctions m et M sur $]a, b]$ et montrer que pour tout $x \in]a, b]$:
$$M(x) - m(x) \leqslant K\,|x - a|.$$

c) En déduire que f est prolongeable par continuité en a.

2) **a)** Soit $f \in \mathscr{D}\big(]a, b], \mathbb{R}\big)$. Montrer que si f' possède une limite finie en a, alors f est prolongeable en une fonction dérivable sur $[a, b]$ dont la dérivée est continue en a.

b) Comparer soigneusement le résultat de la question **a)** au théorème de la limite de la dérivée et montrer qu'il est faux si on y remplace $]a, b]$ par $I \setminus \{a\}$ où I est un intervalle dont a est un point intérieur.

c) Soit $f \in \mathscr{C}^k\big(]a, b], \mathbb{R}\big)$. Montrer que si $f^{(k)}$ possède une limite finie en a, alors f est prolongeable une fonction de classe $\mathscr{C}^k$ sur $[a, b]$.
