

1 DÉFINITIONS DE LA DÉRIVABILITÉ

- 1) Étudier la dérivabilité sur \mathbb{R} de :
- 1) $x \mapsto \begin{cases} (x-1)^2 & \text{si } x \leq 1 \\ (x-1)^3 & \text{si } x > 1. \end{cases}$
 - 2) $x \mapsto \begin{cases} x^2 + x + 1 & \text{si } x \geq 1 \\ ax^3 + bx + 2 & \text{si } x < 1 \end{cases} \quad (a, b \in \mathbb{R}).$
 - 3) $x \mapsto \begin{cases} \operatorname{ch} \sqrt{x} & \text{si } x \geq 0 \\ \cos \sqrt{-x} & \text{si } x < 0. \end{cases}$
 - 4) $x \mapsto \frac{|x|}{1 + |x^2 - 1|}.$

- 2) Montrer que la dérivée d'une fonction dérivable paire (resp. impaire, resp. périodique) est impaire (resp. paire, resp. périodique).

- 3) Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable en a . Que vaut : $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a+h^2)}{h}$?

- 4) Soient I un intervalle, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $m : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $M : I \rightarrow \mathbb{R}$ trois fonctions et $a \in I$. On suppose que :
- $m(x) \leq f(x) \leq M(x)$ au voisinage de a ,
 - $m(a) = f(a) = M(a)$,
 - m et M sont dérivables en a et : $m'(a) = M'(a)$.
- Montrer que f est dérivable en a et interpréter graphiquement.

- 5) Soit $f \in \mathcal{D}([a, b], \mathbb{R})$ telle que : $f(a) = f(b)$ et $f'(a) > 0$. Montrer qu'alors f' prend au moins une valeur strictement négative sur $[a, b]$.

- 6) Soient I un intervalle, $f \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$ et $a \in I$. On suppose que : $f'(a) \neq 0$ et que f' est continue en a . Montrer que f est injective au voisinage de a .

- 7) 1) Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On suppose que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f \circ f(x) = \frac{x}{4} + 1$.
- a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = f'\left(\frac{x}{4} + 1\right).$$

- b) En déduire que pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$:

$$f'(x) = f'\left(\frac{x}{4^n} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{4^k}\right).$$

- c) En déduire que f' est constante sur \mathbb{R} .
- 2) Déterminer toutes les fonctions $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f \circ f(x) = \frac{x}{4} + 1$.

2 CALCULS DE DÉRIVÉES SUCCESSIVES

- 8) Calculer les dérivées successives de :
- 1) $x \mapsto x^\alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R}).$
 - 2) $x \mapsto a^x \quad (a > 0).$
 - 3) \sin et $\cos.$
 - 4) $x \mapsto \frac{1}{x+a} \quad (a \in \mathbb{R}).$
 - 5) $x \mapsto \frac{1+x}{1-x}.$
 - 6) $x \mapsto \ln(3-2x).$

- 9) Calculer les dérivées successives de :
- 1) $x \mapsto xe^x.$
 - 2) $x \mapsto e^{2x} \sin x.$
 - 3) $x \mapsto x^2 \sin x.$
 - 4) $x \mapsto \frac{1}{x^2-1}.$

- 10) On note f la fonction $x \mapsto e^{x\sqrt{3}} \sin x$ sur \mathbb{R} .
- 1) Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$:

$$f^{(n)}(x) = 2^n e^{x\sqrt{3}} \sin\left(x + \frac{n\pi}{6}\right).$$

- 2) Retrouver 1) grâce à l'exponentielle complexe.

- 11) 1) On note f la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ définie sur \mathbb{R} . Montrer qu'il existe, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une fonction polynomiale P_n telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1+x^2)^{n+1}}$. Degré de P_n ?

- 2) On note f la fonction $x \mapsto e^{x^2}$ définie sur \mathbb{R} . Montrer qu'il existe, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une fonction polynomiale P_n telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f^{(n)}(x) = P_n(x)e^{x^2}$. Degré de P_n ?

- 12) On note f la fonction $x \mapsto \sqrt{x^2+1}$.
- 1) Simplifier : $(x^2+1)f''(x) + xf'(x) - f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- 2) Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$:
- $$(x^2+1)f^{(n+2)}(x) + (2n+1)xf^{(n+1)}(x) + (n^2-1)f^{(n)}(x) = 0.$$
- 3) En déduire une expression explicite de $f^{(n)}(0)$ en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- 13) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer la dérivée $n^{\text{ème}}$ de $x \mapsto x^{n-1} \ln(1+x)$ sur $] -1, +\infty[$.

- 14) Soit $n \in \mathbb{N}$. On note f_n la fonction $x \mapsto x^n e^{\frac{1}{x}}$ sur \mathbb{R}_+^* . Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$f_n^{(n+1)}(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{x^{n+2}} e^{\frac{1}{x}}.$$

- 15) Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$:

$$\operatorname{Arctan}^{(n)}(x) = \frac{(n-1)!}{(1+x^2)^{\frac{n}{2}}} \sin\left(n \operatorname{Arctan} x + \frac{n\pi}{2}\right).$$

3 RÔLE ET ACCROISSEMENTS FINIS

- 16) ⌚ Montrer que :
- 1) pour tout $x \geq 0$: $x \leq e^x - 1 \leq xe^x$.
 - 2) pour tout $x \in \mathbb{R}$: $0 \leq \operatorname{ch} x - 1 \leq x \operatorname{sh} x$.
-
- 17) ⌚ Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:
- $$|\operatorname{Arctan} x - \operatorname{Arctan} y| \leq |x - y|.$$
-
- 18) ⌚
- 1) Soit $f \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R})$. Montrer que f est lipschitzienne sur $[a, b]$.
 - 2) Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ périodique. Montrer que f est lipschitzienne sur \mathbb{R} .
-
- 19) ⌚ Soit $f \in \mathcal{C}^2([a, b], \mathbb{R})$. On fait l'hypothèse que : $f(a) = f'(a)$ et $f(b) = f'(b)$. Montrer, en étudiant la fonction $x \mapsto e^x(f'(x) - f(x))$, que pour un certain $c \in]a, b[$: $f''(c) = f(c)$.
-
- 20) ⌚⌚ Soit $f \in \mathcal{D}([0, 1], \mathbb{R})$. On suppose que :
- $$f(0) = f(1) = f'(0) = 0.$$
- Montrer que la tangente de f en un certain point de $]0, 1[$ passe par l'origine. On pourra étudier la fonction $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$.
-
- 21) ⌚⌚ Soient $n \geq 2$ entier et $p, q \in \mathbb{R}$.
- 1) Montrer que le polynôme $X^n + pX + q$ possède au plus trois racines réelles.
 - 2) Montrer que si n est pair, $X^n + pX + q$ possède même au plus deux racines réelles.
-
- 22) ⌚⌚ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note P le polynôme $(X^2 - 1)^n$.
- 1) Montrer que pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$:
- $$P^{(k)}(-1) = P^{(k)}(1) = 0.$$
- 2) En déduire que $P^{(n)}$ est scindé sur \mathbb{R} .
-
- 23) 1) a) ⌚ Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré supérieur ou égal à 2 et scindé sur \mathbb{R} à racines simples. Montrer que P' est aussi scindé sur \mathbb{R} à racines simples.
- b) ⌚⌚ Même question, mais sans la précision « à racines simples ».
- 2) ⌚⌚
- a) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé sur \mathbb{R} à racines simples. Montrer que P ne peut posséder deux coefficients consécutifs nuls.

- b) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé sur \mathbb{R} . Montrer que pour tout $\lambda > 0$, $P^2 + \lambda$ est à racines simples.
-
- 24) ⌚⌚ Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ dérivable sur \mathbb{R}_+^* , nulle en 0 et de dérivée croissante sur \mathbb{R}_+^* . Montrer que la fonction $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ est croissante sur \mathbb{R}_+^* .
-
- 25) ⌚⌚ Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur \mathbb{R}_+ et dérivable sur \mathbb{R}_+^* pour laquelle : $\lim_{+\infty} f = f(0)$. Montrer que f' s'annule sur \mathbb{R}_+^* . Ce résultat est bien sûr une extension du théorème de Rolle.
-
- 26) ⌚⌚ Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On suppose que : $P(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On pose : $Q = \sum_{k=0}^{+\infty} P^{(k)}$ — somme finie.
- 1) Montrer que Q possède un minimum sur \mathbb{R} .
 - 2) Que vaut $Q - Q'$? En déduire que : $Q(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
-
- 27) ⌚⌚
- 1) Soient $f : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur $[0, a]$, dérivables sur $]0, a[$ et telles que : $f(0) = g(0) = 0$. On suppose en outre que g et g' ne s'annulent pas sur $]0, a[$.
 - a) Pour tout $x \in]0, a[$, appliquer le théorème de Rolle à la fonction $t \mapsto f(x)g(t) - f(t)g(x)$.
 - b) En déduire que si : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe, alors :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)}$$
 existe aussi et ces deux limites sont égales (règle de L'Hôpital).
 - 2) Calculer : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}}{\sin x - x}$.
-
- 28) ⌚⌚ Soient I un intervalle et $f \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$. On souhaite montrer qu'alors $f'(I)$ est un intervalle (théorème de Darboux).
- Soient $a, b \in I$ avec : $a \leq b$ et $y \in \mathbb{R}$ compris strictement entre $f'(a)$ et $f'(b)$.
- 1) Montrer que la fonction $x \mapsto f(x) - xy$ n'est pas monotone sur $[a, b]$.
 - 2) Montrer que la fonction $x \mapsto f(x) - xy$ n'est pas injective sur $[a, b]$.
 - 3) Conclure.
-
- 29) ⌚⌚ Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ non constant. On suppose l'ensemble : $X = \{x \in \mathbb{R} / P(x) = \sin x\}$ infini.
- 1) Montrer que X est borné.
 - 2) Montrer que les dérivées successives de $P - \sin$ s'annulent chacune une infinité de fois.
 - 3) Quelle contradiction?

30 ☹☹☹ Soit $f \in \mathcal{D}([0, 1], \mathbb{R})$. On fait l'hypothèse que : $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe des réels $x_1, \dots, x_n \in]0, 1[$ distincts pour lesquels : $\sum_{k=1}^n f'(x_k) = n$. On pourra s'intéresser aux réels $\frac{k}{n}$, k décrivant $\llbracket 0, n \rrbracket$.

31 1) ☹☹☹ Soient I un intervalle, $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{R})$ et $a \in I$. Soit en outre $x \in I$ fixé distinct de a .
a) Déterminer un réel A pour lequel la fonction :

$$t \mapsto f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(t)}{k!} (x-t)^k - \frac{A}{(n+1)!} (x-t)^{n+1}$$

s'annule en a .

b) Simplifier φ' .

c) En déduire que pour un certain $c \in I$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}.$$

Ce résultat est encore vrai si : $x = a$.

d) On suppose $|f^{(n+1)}|$ bornée sur I et on pose : $\|f^{(n+1)}\|_\infty = \sup_I |f^{(n+1)}|$. Montrer que pour tout $x \in I$:

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \right| \leq \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} \|f^{(n+1)}\|_\infty.$$

Ce résultat s'appelle l'inégalité de Taylor-Lagrange.

2) ☹☹ Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$e^x = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \quad \text{et} \quad \cos x = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

32 ☹☹☹ Soit $f \in \mathcal{C}^n([a, b], \mathbb{R})$. On suppose que f s'annule en au moins n points distincts a_1, \dots, a_n avec : $a_1 < \dots < a_n$.

1) Soit $x \in [a, b]$ fixé, distinct de a_1, \dots, a_n .

a) Déterminer un réel A pour lequel la fonction

$$t \mapsto f(t) - A(t-a_1) \dots (t-a_n)$$

s'annule en x .
b) Montrer, en étudiant les zéros de φ et de ses dérivées, que pour un certain $c \in]a, b[$:

$$f(x) = (x-a_1) \dots (x-a_n) \frac{f^{(n)}(c)}{n!}.$$

Ce résultat est encore vrai si x est l'un des réels a_1, \dots, a_n .

2) Pourquoi $|f^{(n)}|$ est-elle majorée sur $[a, b]$? On pose : $\|f^{(n)}\|_\infty = \sup_{[a,b]} |f^{(n)}|$. Montrer que pour tout $x \in [a, b]$:

$$|f(x)| \leq \frac{\|f^{(n)}\|_\infty}{n!} \prod_{k=1}^n |x-a_k|.$$

33 ☹☹☹

1) Soit $f \in \mathcal{C}^3([a, b], \mathbb{R})$ avec : $a < b$.

a) Déterminer un réel A pour lequel la fonction :

$$x \mapsto f(x) - \left(f(a) + \frac{x-a}{2} (f'(a) + f'(x)) - \frac{(x-a)^3}{12} A \right)$$

s'annule en b .

b) Montrer, en étudiant les zéros de φ et de ses dérivées, que pour un certain $c \in]a, b[$:

$$f(b) = f(a) + \frac{b-a}{2} (f'(a) + f'(b)) - \frac{(b-a)^3}{12} f^{(3)}(c).$$

2) Soient $f \in \mathcal{C}^2([a, b], \mathbb{R})$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout

$k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on pose : $x_k = a + k \frac{b-a}{n}$.

a) Montrer que pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, pour un certain $c_k \in]x_k, x_{k+1}[$:

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t) dt = \frac{b-a}{2n} (f(x_k) + f(x_{k+1})) - \frac{(b-a)^3}{12n^3} f''(c_k)$$

et interpréter géométriquement.

b) Pourquoi $|f''|$ est-elle majorée sur $[a, b]$? On pose : $\|f''\|_\infty = \sup_{[a,b]} |f''|$. Montrer que :

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \frac{b-a}{n} \left(\frac{f(a) + f(b)}{2} \right) - \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) \right| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} \|f''\|_\infty.$$

34 ☹☹☹ Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$. On suppose que la fonction $x \mapsto x^2 f''(x)$ est bornée et que : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

1) Montrer que pour tous $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $a \in]0, 1[$, il existe un réel $\xi \in]ax, x[$ pour lequel :

$$f(ax) = f(x) - (1-a)x f'(x) + \frac{(1-a)^2}{2} x^2 f''(\xi).$$

2) En déduire que : $\lim_{x \rightarrow 0} x f'(x) = 0$.

4 SUITES RÉCURRENTES ET ACCROISSEMENTS FINIS

35 ☹☹ On note f la fonction $x \mapsto \frac{2x}{\ln x + 1}$ sur $[1, +\infty[$.

1) Justifier la bonne définition de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = f(u_n)$.

2) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|u_n - e| \leq \frac{|e-1|}{2^n}. \quad \text{Qu'en déduit-on?}$$

b) On ADMET l'inégalité : $e \leq 3$. Déterminer À LA MAIN un rang n explicite pour lequel u_n est une approximation de e à 10^{-3} près.

36

- 1) ⌚ On note f la fonction $x \mapsto \frac{e^x}{x+2}$ sur \mathbb{R}_+ .
- a) Montrer que $]0, 1[$ est stable par f .
- b) Montrer qu'il existe un et un seul $\alpha \in]0, 1[$ pour lequel : $\frac{e^\alpha}{\alpha+2} = \alpha$.
- 2) ⌚⌚ Soit $u_0 \in]0, 1[$. On note $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $u_{n+1} = \frac{e^{u_n}}{u_n+2}$.
- a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{2e}{9}\right)^n,$$

puis que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers α .

- b) Déterminer un rang n pour lequel u_n est une approximation de α à 10^{-5} près.

37

- ⌚⌚ Soit $u_0 \in [0, 1]$. On note $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = \frac{e^{u_n}}{e^{u_n} + 1}$.
- 1) Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est à valeurs dans $[0, 1]$.
- 2) Montrer qu'il existe un et un seul $\alpha \in \mathbb{R}$ pour lequel : $\frac{e^\alpha}{e^\alpha + 1} = \alpha$, et que : $\alpha \in [0, 1]$.
- 3) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n,$$

puis que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers α .

- b) Déterminer À LA MAIN un rang n explicite pour lequel u_n est une approximation de α à 10^{-5} près.

5 LIMITE DE LA DÉRIVÉE ET PROLONGEMENT DE CLASSE \mathcal{C}^k

38

- ⌚ Montrer que la fonction $x \mapsto x^2 \ln x$, définie sur \mathbb{R}_+^* , est prolongeable en une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+ tout entier.

39

- ⌚⌚ Pour quelle valeur maximale de k la fonction $x \mapsto \begin{cases} x^3 \ln|x| & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est-elle de classe \mathcal{C}^k sur \mathbb{R} tout entier ?

40

- ⌚⌚ Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$. On fait l'hypothèse que : $f'(0) = 0$. Montrer qu'il existe une fonction $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ pour laquelle pour tout $x \in \mathbb{R}_+$: $f(x) = g(x^2)$.