CALCULS DE DÉTERMINANTS

1 Soient $a,b,c,d\in\mathbb{C}$. Factoriser :

1)

a) $\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$.

b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix}$. **c)** $\begin{vmatrix} a & c & c & b \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{vmatrix}$.

d) $\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ b^2+c^2 & c^2+a^2 & a^2+b^2 \\ b^3+c^3 & c^3+a^3 & a^3+b^3 \end{vmatrix}$.

2)

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \sin a & \sin b & \sin c \\ \cos a & \cos b & \cos c \end{vmatrix}$. **b)** $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^4 \\ 1 & b & b^2 & b^4 \\ 1 & c & c^2 & c^4 \\ 1 & d & d^2 & d^4 \end{vmatrix}$.

c) $\begin{vmatrix} (b+c)^2 & b^2 & c^2 \\ a^2 & (c+a)^2 & c^2 \\ a^2 & b^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix}$.

---

2 Soit $M\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ à coefficients dans $\{-1,1\}$. Montrer que $\det(M)$ est un entier divisible par 2^{n-1}.

---

3 Soient $a_1,\dots,a_n,x\in\mathbb{C}$. Factoriser :

1) $\begin{vmatrix} & & a_n \\ & ⋰ & \\ a_1 & & \end{vmatrix}$. **2)** $\begin{vmatrix} a_1 & a_1 & \cdots & a_1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & & \\ a_1 & a_2 & & a_n \end{vmatrix}$.

3) $\begin{vmatrix} 1+x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1+x \end{vmatrix}_{[n]}$. **4)** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}_{[n]}$.

5) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ -1 & \cdots & -1 & 0 \end{vmatrix}_{[n]}$.

---

4 Montrer que pour tous $a_1,\dots,a_n\in\mathbb{C}$:

$$\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1+a_n \end{vmatrix} = a_1\dots a_n + \sum_{k=1}^n \prod_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ i\neq k}} a_i.$$

---

5 Retrouver l'expression explicite des déterminants de Vandermonde vue en cours en utilisant seulement des opérations élémentaires.

---

6 Soient $a,b,c\in\mathbb{C}$ avec $a\neq b$. Pour tout $x\in\mathbb{C}$, on pose $D(x)=\begin{vmatrix} c+x & a+x & \cdots & a+x \\ b+x & c+x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a+x \\ b+x & \cdots & b+x & c+x \end{vmatrix}_{[n]}$.

1) Montrer que D est une fonction affine.

2) En déduire une expression explicite de $D(x)$ pour tout $x\in\mathbb{C}$.

---

7 Soient $x\in\mathbb{C}$ et $\theta\in\mathbb{R}$. Dans les deux situations suivantes, montrer que la suite $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est récurrente linéaire d'ordre 2, puis déterminer une expression explicite de Δ_n en fonction de n pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

1) $\Delta_n=\begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 & \cdots & 0 \\ x & 1+x^2 & x & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & x & 1+x^2 & x \\ 0 & \cdots & 0 & x & 1+x^2 \end{vmatrix}_{[n]}$.

2) $\Delta_n=\begin{vmatrix} 2\cos\theta & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2\cos\theta & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & 2\cos\theta & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 2\cos\theta \end{vmatrix}_{[n]}$.

---

8 Soit $P=X^n+a_{n-1}X^{n-1}+\ldots+a_1X+a_0\in\mathbb{C}[X]$. On appelle *matrice compagnon de P* la matrice :

$$C=\begin{pmatrix} 0 & & & & -a_0 \\ 1 & 0 & & & -a_1 \\ & 1 & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ & & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$ Montrer que $\chi_C=P$.

9

1) Que peut-on dire de l'inversibilité d'une matrice antisymétrique ?

2) Soient $A\in\mathscr{M}_{2n}(\mathbb{C})$ antisymétrique et $x\in\mathbb{C}$. On note J la matrice carrée de taille $2n$ dont tous les coefficients valent 1.

a) Calculer $\begin{vmatrix} 0 & 1 \ \cdots \ 1 \\ \begin{matrix} -1 \\ \vdots \\ -1 \end{matrix} & A \end{vmatrix}$.

b) En déduire que $\begin{vmatrix} 1 & 1 \ \cdots \ 1 \\ \begin{matrix} -x \\ \vdots \\ -x \end{matrix} & A \end{vmatrix}=\det(A)$.

c) En déduire que $\det(A+xJ)=\det(A)$.

---

10 Soient $A,B\in\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer l'égalité :

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix}=\det(A+B)\det(A-B).$$

11

1) Soient $A,B,C,D\in\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Quel produit matriciel pour transformer $\begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} A+2B & C+2D \\ B & D \end{pmatrix}$? Comparer leurs déterminants.

2) Montrer que pour tous $A,B\in\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$:

$$\begin{vmatrix} I_n & B \\ A & I_n \end{vmatrix}=\det(I_n-AB)=\det(I_n-BA).$$

12

1) Soient $A\in\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{C})$ et $B\in\mathscr{M}_{q,p}(\mathbb{C})$. Compléter le calcul par blocs suivant :

$$\begin{pmatrix} XI_p-AB & \cdots \\ 0 & XI_q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ \cdots & I_q \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ \cdots & I_q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} XI_p & \cdots \\ 0 & XI_q-BA \end{pmatrix},$$

où X est simplement l'indéterminée de $\mathbb{C}[X]$.

2) En déduire que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$ pour tous $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

---

13 🕑🕑 Pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose $\overline{M} = \left(\overline{m_{ij}}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, $\mathrm{Re}(M) = \left(\mathrm{Re}(m_{ij})\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $\mathrm{Im}(M) = \left(\mathrm{Im}(m_{ij})\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

1) Que vaut $\det\left(\overline{M}\right)$ pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$?

2) Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ deux matrices qui commutent. Montrer que $\det\left(A^2 + B^2\right) \geqslant 0$.

3) Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $P \in \mathbb{R}[X]$ unitaire sans racine réelle. Montrer que $\det\left(P(A)\right) \geqslant 0$.

4) Soit $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

a) Montrer que $\mathrm{Re}\left(M^{-1}\right) = M^{-1}\mathrm{Re}(M)\,\overline{M}^{-1}$. Une impression de déjà vu ?

b) En déduire que $\det\left(\mathrm{Re}(M)\right)$ et $\det\left(\mathrm{Re}\left(M^{-1}\right)\right)$ ont même signe. Comparer de même les signes de $\det\left(\mathrm{Im}(M)\right)$ et $\det\left(\mathrm{Im}\left(M^{-1}\right)\right)$.

---

14 🕑🕑 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On pose $B = \left((-1)^{i+j}a_{ij}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. Montrer que $\det(B) = \det(A)$ en revenant à la définition du déterminant.

---

15 🕑🕑 Soient $y, z, t \in \mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$A(x) = \begin{pmatrix} x & -y & -z & -t \\ y & x & -t & z \\ z & t & x & -y \\ t & -z & y & x \end{pmatrix}.$$

1) **a)** Montrer que la fonction $x \longmapsto \det\left(A(x)\right)$ est polynomiale unitaire de degré 4.

b) Calculer $A(x)^\top A(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. À quelle condition nécessaire et suffisante $A(x)$ est-elle inversible ?

c) En déduire $\det\left(A(x)\right)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2) Ces résultats sont-ils conservés si $x, y, z, t \in \mathbb{C}$?

16

1) 🕑🕑 Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$. On pose :

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \mathrm{j} & \mathrm{j}^2 \\ 1 & \mathrm{j}^2 & \mathrm{j} \end{pmatrix}.$$

a) Montrer que $\det(J) \neq 0$.

b) Calculer MJ et en déduire $\det(M)$.

2) 🕑🕑🕑 On pose $\omega = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{n}}$. Mêmes questions pour tous $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ avec la *matrice circulante* :

$$M = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad J = \left(\omega^{(i-1)(j-1)}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}.$$

---

17 🕑🕑🕑 On pose $P_0 = 1$ et $P_n = \dfrac{X(X-1)\ldots(X-n+1)}{n!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$.

1) Simplifier $\det\left(P_{j-1}(a_i)\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

2) Montrer que $P_n(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3) En déduire que $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} k!$ divise $\displaystyle\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} (a_j - a_i)$.

---

18 🕑🕑🕑 Soient $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{C}$. On note M la matrice $\left((a_i+b_j)^{n-1}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. Écrire M comme le produit de deux matrices et en déduire $\det(M)$.

DÉTERMINANT D'UN ENDOMORPHISME

19 🕑 Trouver un exemple de matrices **NON** semblables de mêmes tailles, rangs, traces et déterminants.

---

20 🕑🕑

1) On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Déterminer le polynôme caractéristique, les valeurs propres et les sous-espaces propres de A.

b) En déduire que A est diagonalisable.

2) Mêmes questions avec $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

---

21 🕑🕑

1) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle et F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E. On note s la symétrie par rapport à F de direction G. Calculer $\det(s)$ en fonction de $\dim G$.

2) Calculer en fonction de n le déterminant de l'endomorphisme $M \longmapsto M^\top$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

22

1) 🕑 Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle et $f \in \mathcal{L}(E)$. Que peut-on dire de $\dim E$ si $f^2 = -\mathrm{Id}_E$?

2) 🕑🕑

a) Proposer un exemple d'endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ pour lequel $f^2 = -\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$.

b) Même question avec $\mathbb{R}^{2n}$ à la place de $\mathbb{R}^2$.

3) 🕑🕑 Proposer un exemple d'endomorphisme f de $\mathbb{C}^n$ pour lequel $f^2 = -\mathrm{Id}_{\mathbb{C}^n}$.

---

23 🕑🕑 Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle, φ une forme linéaire de E et $a \in E$. On note f l'endomorphisme $x \longmapsto x + \varphi(x)a$ de E. Montrer que $\det(f) = 1 + \varphi(a)$ en écrivant la matrice de f dans une base bien choisie.

---

24 Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle et $u, v \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que u et v commutent et que v est nilpotent.

1) 🕑 Montrer que $\mathrm{Im}\, v$ est stable par u.

2) 🕑 En déduire la forme des matrices de u et v dans une base de E adaptée à $\mathrm{Im}\, v$.

3) ◷◷◷ Montrer par récurrence sur n que :
$$\det(u+v)=\det(u).$$

---

25 ◷◷◷ Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle et $u\in\mathscr{L}(E)$. Soit en outre $x\in E$ non nul fixé. On note d le plus grand entier $k\in\mathbb{N}^*$ pour lequel la famille $\left(x,u(x),u^2(x),\ldots,u^{k-1}(x)\right)$ est libre. On pose enfin $F=\mathrm{Vect}\left(x,u(x),u^2(x),\ldots,u^{d-1}(x)\right)$.

1) ◷ Justifier la bonne définition de d et l'existence de scalaires $a_0,\ldots,a_{d-1}\in\mathbb{K}$ pour lesquels :
$$u^d(x)=\sum_{k=0}^{d-1}a_k u^k(x),$$
puis montrer que F est stable par u.

2) Montrer que $\chi_{u|_F}$ divise χ_u. On pourra s'intéresser à la matrice de u dans une base bien choisie.

3) Montrer que $\chi_{u|_F}=X^d-\sum_{k=0}^{d-1}a_kX^k$.

4) Montrer que u annule χ_u, i.e. que $\chi_u(u)=0_{\mathscr{L}(E)}$ (*théorème de Cayley-Hamilton*).

APPLICATIONS

26 ◷◷ Soient $A\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, $B\in\mathbb{K}^n$ et $j\in[\![1,n]\!]$. On note X l'unique solution du système $AX=B$ et A_j la matrice obtenue en remplaçant la $j^{\text{ème}}$ colonne de A par B. Montrer que $x_j=\dfrac{\det(A_j)}{\det(A)}$. Déjà vu ?

---

27 ◷◷ Soient $A,B\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que A et B sont semblables sur $\mathbb{C}$.

1) Montrer qu'il existe deux matrices $U,V\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ pour lesquelles la matrice $U+\mathrm{i}V$ est inversible et pour lesquelles $AU=UB$ et $AV=VB$.

2) Montrer que la fonction $z\longmapsto\det(U+zV)$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ est polynomiale et non identiquement nulle.

3) En déduire que A et B sont semblables sur $\mathbb{R}$.

---

28 ◷◷◷

1) Soit $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice *à diagonale strictement dominante*, i.e. que $\sum_{j\neq i}|a_{ij}|<|a_{ii}|$ pour tout $i\in[\![1,n]\!]$. Montrer que A est inversible. On appelle ce résultat le *lemme d'Hadamard*.

2) Soient $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et $\lambda\in\mathbb{C}$ une valeur propre de A. Montrer que pour un certain $i\in[\![1,n]\!]$, λ appartient au disque de centre a_{ii} et de rayon $\sum_{j\neq i}|a_{ij}|$ (*théorème de Gershgorin*).

3) Soit $P=X^n+a_{n-1}X^{n-1}+\ldots+a_1X+a_0\in\mathbb{C}[X]$. En étudiant la matrice compagnon de P, montrer que pour toute racine $\lambda\in\mathbb{C}$ de P :
$$|\lambda|\leqslant\max\left\{|a_0|,|a_1|+1,\ldots,|a_{n-1}|+1\right\}.$$

---

29 On note $\mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$ l'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients entiers.

1) ◷ Montrer que $\det(M)$ est un entier relatif pour tout $M\in\mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$.

2) ◷

a) Soient $A,B\in\mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$ et $p\in\mathbb{N}^*$. On suppose que $a_{ij}\equiv b_{ij}\ [p]$ pour tous $i,j\in[\![1,n]\!]$. Comparer $\det(A)$ et $\det(B)$.

b) La matrice $\begin{pmatrix}1&2&3&5\\3&-1&1&2\\0&6&2&1\\3&-6&3&4\end{pmatrix}$ est-elle inversible ?

3) ◷◷ Soit $p\in\mathbb{P}$. Montrer que la matrice M carrée de taille p définie par $m_{ij}=\dbinom{p}{|j-i|}$ pour tous $i,j\in[\![1,p]\!]$ est inversible.

4) ◷◷ Soit $M\in\mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$. On suppose que les coefficients diagonaux de M sont nuls et que ses autres coefficients valent tous ±1.

a) Calculer $\det(M)$ modulo 2.

b) En déduire que $\dim\mathrm{Ker}\,M\leqslant1$.

5) ◷◷◷ On se donne de $2n+1$ objets de masses inconnues $x_1,\ldots,x_{2n+1}$ et on suppose que quand on met de côté l'un quelconque de ces objets, il est toujours possible de séparer les $2n$ objets restants en deux tas de n objets de masses totales identiques. Que peut-on dire des masses $x_1,\ldots,x_{2n+1}$?

---

30 ◷◷

1) Soient M_1, M_2 et M_3 trois points du plan $\mathbb{R}^2$ avec $M_i=(x_i,y_i)$ pour tout $i\in[\![1,3]\!]$.

a) Quelle est l'équation générale d'une droite affine de $\mathbb{R}^2$?

b) Montrer que M_1, M_2 et M_3 sont alignés si et seulement si $\begin{vmatrix}x_1&y_1&1\\x_2&y_2&1\\x_3&y_3&1\end{vmatrix}=0$.

2) Soient M_1, M_2, M_3 et M_4 quatre points du plan $\mathbb{R}^2$ avec $M_i=(x_i,y_i)$ pour tout $i\in[\![1,4]\!]$.

a) Montrer que tout cercle de $\mathbb{R}^2$ a une équation de la forme $x^2+y^2+bx+cy+d=0$ avec $b,c,d\in\mathbb{R}$. Réciproquement, à quelle condition nécessaire et suffisante une telle équation décrit-elle un cercle ?

b) Montrer que M_1, M_2, M_3 et M_4 sont cocycliques ou alignés si et seulement si :
$$\begin{vmatrix}x_1^2+y_1^2&x_1&y_1&1\\x_2^2+y_2^2&x_2&y_2&1\\x_3^2+y_3^2&x_3&y_3&1\\x_4^2+y_4^2&x_4&y_4&1\end{vmatrix}=0.$$

---

31 ◷◷◷ Soient $E\neq\left\{0_E\right\}$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, $f\in\mathscr{L}(E)$ et $\mathscr{B}$ une base de E. Montrer que pour tous $x_1,\ldots,x_n\in E$:
$$\sum_{k=1}^{n}\det_{\mathscr{B}}\left(\ldots,x_{k-1},f(x_k),x_{k+1},\ldots\right)=\mathrm{tr}(f)\det_{\mathscr{B}}(x_1,\ldots,x_n).$$
