1 Groupes symétriques

1

1) On pose : $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 4 & 7 & 1 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ et $\theta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 4 & 2 & 7 & 6 & 5 & 3 \end{pmatrix}$. Écrire $\sigma\theta$ et σ^{-1} comme des produits de cycles disjoints.

2) Écrire la permutation :

$$(1\ 2)(2\ 4\ 6\ 5)(1\ 3\ 7)(2\ 5\ 4)(3\ 5\ 6\ 1)(2\ 5)(1\ 4\ 6)$$

comme un produit de cycles disjoints.

3) Calculer la signature des permutations :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 7 & 2 & 1 & 6 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

et $(1\ 3\ 4)(2\ 4\ 3\ 1)(2\ 3)$.

2

1) Montrer que pour tous $a_1, \ldots, a_p \in [\![1, n]\!]$ distincts avec : $p \geqslant 2$ et $\sigma \in S_n$:

$$\sigma(a_1\ a_2\ \ldots\ a_p)\sigma^{-1} = \big(\sigma(a_1)\ \sigma(a_2)\ \ldots\ \sigma(a_p)\big).$$

2) En déduire que toute permutation de $[\![1, n]\!]$ peut être décomposée comme un produit de transpositions $(1\ i)$, i décrivant $[\![2, n]\!]$.

3) a) Montrer que toute permutation de $[\![1, n]\!]$ peut être décomposée comme un produit de transpositions $(i\ i+1)$, i décrivant $[\![0, n-1]\!]$.

b) En déduire enfin que toute permutation de $[\![1, n]\!]$ est un produit des permutations $(1\ 2)$ et $(1\ 2\ \ldots\ n)$.

---

3 On note G l'ensemble des permutations $\sigma \in S_n$ telles que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$: $\sigma(n-k+1) = n - \sigma(k) + 1$.

1) Montrer que G est un sous-groupe de S_n.

2) Déterminer $|G|$.

---

2 Méthode du pivot

4 Soient $a, b, c, d \in \mathbb{C}$. Factoriser :

1)

a) $\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$.

b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix}$.

c) $\begin{vmatrix} a & c & c & b \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{vmatrix}$.

d) $\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ b^2+c^2 & c^2+a^2 & a^2+b^2 \\ b^3+c^3 & c^3+a^3 & a^3+b^3 \end{vmatrix}$.

2)

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \sin a & \sin b & \sin c \\ \cos a & \cos b & \cos c \end{vmatrix}$.

b) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^4 \\ 1 & b & b^2 & b^4 \\ 1 & c & c^2 & c^4 \\ 1 & d & d^2 & d^4 \end{vmatrix}$.

c) $\begin{vmatrix} (b+c)^2 & b^2 & c^2 \\ a^2 & (c+a)^2 & c^2 \\ a^2 & b^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix}$.

---

5 Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ à coefficients dans $\{-1, 1\}$. Montrer que $\det(M)$ est un entier divisible par 2^{n-1}.

---

6 Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer l'égalité :

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = \det(A+B)\det(A-B).$$

---

7 Soient $a_1, \ldots, a_n, x \in \mathbb{C}$. Factoriser :

1) $\begin{vmatrix} & & a_n \\ & \iddots & \\ a_1 & & \end{vmatrix}$.

2) $\begin{vmatrix} a_1 & a_1 & \cdots & a_1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & & \\ a_1 & a_2 & & a_n \end{vmatrix}$.

3) $\begin{vmatrix} 1+x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1+x \end{vmatrix}_{[n]}$.

4) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}_{[n]}$.

5) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ -1 & \cdots & -1 & 0 \end{vmatrix}_{[n]}$.

---

8 Soient $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$. Simplifier :

1) $\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$.

2) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 4 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & n+2 \end{vmatrix}$.

---

9 Retrouver l'expression explicite des déterminants de Vandermonde vue en cours en utilisant seulement des opérations élémentaires.

---

10 Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$ avec : $a \neq b$. Pour tout $x \in \mathbb{C}$, on pose : $D(x) = \begin{vmatrix} c+x & a+x & \cdots & a+x \\ b+x & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a+x \\ b+x & \cdots & b+x & c+x \end{vmatrix}_{[n]}$.

1) Montrer que D est une fonction affine.

2) En déduire une expression explicite de $D(x)$ pour tout $x \in \mathbb{C}$.

11 On pose : $P_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$P_n = \frac{X(X-1)\dots(X-n+1)}{n!}.$$

1) Simplifier : $\det\big(P_{j-1}(a_i)\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1,\dots,a_n \in \mathbb{C}$.
2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $P_n(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$.
3) En déduire que pour tous $a_1,\dots,a_n \in \mathbb{Z}$, le produit : $\displaystyle\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_j - a_i)$ est divisible par $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} k!$.

3 Développement par rapport à une ligne/colonne

12 Dans les deux situations suivantes, montrer que la suite $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est récurrente linéaire d'ordre 2, puis déterminer une expression explicite de Δ_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1) $$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1+x^2 & x & & \\ x & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & x \\ & & x & 1+x^2 \end{vmatrix}_{[n]} \qquad (x \in \mathbb{C}).$$

2) $$\Delta_n = \begin{vmatrix} 2\cos\theta & 1 & & \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & 1 & 2\cos\theta \end{vmatrix}_{[n]} \qquad (\theta \in \mathbb{R}).$$

13 Soient $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathbb{K}^n$. On note X la solution unique du système de Cramer : $AX = B$ et pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, A_j la matrice obtenue en remplaçant la $j^{\text{ème}}$ colonne de A par B. Montrer que pour tout $j \in [\![1,n]\!]$: $x_j = \dfrac{\det(A_j)}{\det(A)}$. Que retrouve-t-on pour $n=2$?

4 Déterminant d'un produit

14 Soient $A \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{C})$, $B \in \mathscr{M}_{q,p}(\mathbb{C})$ et $x \in \mathbb{C}$. Compléter le calcul par blocs suivant :
$$\begin{pmatrix} xI_p - AB & \cdots \\ 0 & xI_q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ \cdots & I_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ \cdots & I_q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} xI_p & \cdots \\ 0 & xI_q - BA \end{pmatrix},$$
puis en déduire une jolie égalité de déterminants.

15 **1)** Montrer que pour tous $A,B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$:
$$\begin{vmatrix} I_n & B \\ A & I_n \end{vmatrix} = \det(I_n - AB) = \det(I_n - BA).$$

2) En déduire que : $\chi_{AB} = \chi_{BA}$ pour tous $A,B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

16 **1)** Montrer que pour tout $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$:
$$\det\big(\overline{M}\big) = \overline{\det(M)}.$$

2) Soient $A,B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ deux matrices qui commutent. Montrer que : $\det\big(A^2+B^2\big) \geqslant 0$.
3) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ unitaire sans racine réelle et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que : $\det\big(P(A)\big) \geqslant 0$.
4) Soient $A,B,C,D \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que A et B commutent et que $A+iB$ est inversible d'inverse $C+iD$. Montrer que $\det(A)$ et $\det(C)$ ont le même signe.

17 Soient $y,z,t \in \mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose :
$$A(x) = \begin{pmatrix} x & -y & -z & -t \\ y & x & -t & z \\ z & t & x & -y \\ t & -z & y & x \end{pmatrix}.$$

1) **a)** Montrer que la fonction $x \longmapsto \det\big(A(x)\big)$ est polynomiale unitaire de degré 4.
b) Calculer : ${}^t\!A(x)A(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
c) En déduire $\det\big(A(x)\big)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. À quelle condition nécessaire et suffisante $A(x)$ est-elle inversible ?
2) Ces résultats sont-ils conservés si $x,y,z,t \in \mathbb{C}$?

18 **1)** Soient $a,b,c \in \mathbb{C}$. On pose :
$$M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \mathrm{j} & \mathrm{j}^2 \\ 1 & \mathrm{j}^2 & \mathrm{j} \end{pmatrix}.$$

a) Montrer que : $\det(J) \neq 0$.
b) Calculer MJ et en déduire $\det(M)$.
2) Mêmes questions avec la *matrice circulante* : $M = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_1 \end{pmatrix}$ pour tous $a_1,\dots,a_n \in \mathbb{C}$ et : $J = \Big(\omega^{(i-1)(j-1)}\Big)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ avec : $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$.

19 Soient $a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_n \in \mathbb{C}$. On note M la matrice $\Big((a_i+b_j)^{n-1}\Big)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. Écrire M comme le produit de deux matrices et en déduire $\det(M)$.

5 DÉTERMINANT D'UN ENDOMORPHISME

20

1) On pose : $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Déterminer le polynôme caractéristique, les valeurs propres et les sous-espaces propres de A.

b) En déduire que A est diagonalisable.

2) Mêmes questions avec $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

21

1) Soient $E \neq \{0_E\}$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E. On note s la symétrie par rapport à F de direction G. Calculer $\det(s)$ en fonction de $\dim G$.

2) Calculer en fonction de n le déterminant de l'endomorphisme $M \longmapsto {}^{t}M$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

---

22 Soient $E \neq \{0_E\}$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, φ une forme linéaire de E et $a \in E$. On note f l'endomorphisme $x \longmapsto x + \varphi(x)\, a$ de E. Montrer que : $\det(f) = 1 + \varphi(a)$.

23

1) Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$. Que peut-on dire de $\dim E$ si : $f^2 = -\mathrm{Id}_E$?

2)

a) Trouver un exemple d'application $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2)$ pour laquelle : $f^2 = -\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$.

b) Même question avec $\mathbb{R}^{2n}$ à la place de $\mathbb{R}^2$.

3) Trouver un exemple d'application $f \in \mathscr{L}(\mathbb{C}^n)$ pour laquelle : $f^2 = -\mathrm{Id}_{\mathbb{C}^n}$.

---

24 Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$ et $u, v \in \mathscr{L}(E)$. On suppose que u et v commutent et que v est nilpotent, i.e. qu'une certaine puissance de v est nulle.

1) Montrer que $\mathrm{Im}\, v$ est stable par u et v.

2) En déduire la forme des matrices de u et v dans une base de E adaptée à $\mathrm{Im}\, v$.

3) Montrer par récurrence sur n l'égalité :

$$\det(u+v) = \det(u).$$

---

6 EXERCICES DIVERS

25 Trouver un exemple de matrices **NON** semblables de même taille, même rang, même trace et même déterminant.

26

1) Que peut-on dire de l'inversibilité d'une matrice antisymétrique ?

2) Soient $A \in \mathscr{M}_{2n}(\mathbb{C})$ antisymétrique et $x \in \mathbb{C}$. On note J la matrice carrée de taille $2n$ dont tous les coefficients valent 1.

a) Calculer $\begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & & & \\ \vdots & & A & \\ -1 & & & \end{vmatrix}$.

b) En déduire que : $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -x & & & \\ \vdots & & A & \\ -x & & & \end{vmatrix} = \det(A)$.

c) En déduire que : $\det(A + xJ) = \det(A)$.

---

27 Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. On pose : $B = \left((-1)^{i+j} a_{ij}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. En revenant à la définition du déterminant, montrer l'égalité : $\det(B) = \det(A)$.

28

1) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice *à diagonale strictement dominante*, i.e. que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$: $\sum\limits_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i}} |a_{ij}| < |a_{ii}|$. Montrer que la famille des colonnes de A est libre. Qu'en déduit-on sur A ? On appelle ce résultat le *lemme d'Hadamard*.

2) Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A. Montrer que pour un certain $i \in [\![1,n]\!]$, λ appartient au disque de centre a_{ii} et de rayon $\sum\limits_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i}} |a_{ij}|$ (*théorème de Gershgorin*).

3) Soit $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1 X + a_0 \in \mathbb{C}[X]$. On appelle *matrice compagnon de P* la matrice :

$$C(P) = \begin{pmatrix} 0 & & & & -a_0 \\ 1 & 0 & & & -a_1 \\ & 1 & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ & & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

a) Montrer que : $\chi_{C_P} = P$.

b) En déduire que pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ racine de P :

$$|\lambda| \leqslant \max\left\{|a_0|, |a_1| + 1, \ldots, |a_{n-1}| + 1\right\}.$$

---

29 Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que A et B sont semblables dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

1) Montrer qu'il existe deux matrices $U, V \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ pour lesquelles la matrice $U + iV$ est inversible et pour lesquelles : $AU = UB$ et $AV = VB$.

2) Montrer que la fonction $z \longmapsto \det(U + zV)$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ est polynomiale et non identiquement nulle.

3) En déduire que A et B sont semblables dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

---

30 ◷◷

1) Soit $r \in [\![1,n]\!]$. On note J_r la matrice dont tous les coefficients sont nuls à l'exception des r premiers sur la diagonale, égaux à 1. Trouver une matrice $X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ pour laquelle :

$$\det(J_r + X) \neq \det(J_r) + \det(X).$$

2) Déterminer l'ensemble des matrices $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que pour tout $X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$:

$$\det(M + X) = \det(M) + \det(X).$$

3) Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que pour tout $X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$: $\det(A+X) = \det(B+X)$. Montrer qu'alors : $A = B$.

---

31 On note $\mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$ l'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients entiers.

1) ◷ Montrer que $\det(M)$ est un entier relatif pour tout $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$.

2) ◷

a) Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$ et $p \in \mathbb{N}^*$. On suppose que : $a_{ij} \equiv b_{ij}\ [p]$ pour tous $i, j \in [\![1,n]\!]$. Comparer $\det(A)$ et $\det(B)$.

b) La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 6 & 2 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ est-elle inversible ?

3) ◷◷ Soit $p \in \mathbb{P}$. On note M la matrice carrée de taille p définie par : $m_{ij} = \dbinom{p}{|j-i|}$ pour tous $i, j \in [\![1,p]\!]$. Montrer que M est inversible en raisonnant modulo p.

4) ◷◷ Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$. On suppose que les coefficients diagonaux de M sont nuls et que ses autres coefficients valent tous ± 1.

a) Calculer $\det(M)$ modulo 2.

b) En déduire que : $\dim \operatorname{Ker} M \leqslant 1$. On pourra commencer par traiter le cas où n est pair.

5) ◷◷◷ On se donne de $2n+1$ objets de masses inconnues $x_1, \ldots, x_{2n+1}$ et on suppose que quand on met de côté l'un quelconque de ces objets, il est toujours possible de séparer les $2n$ objets restants en deux tas de n objets de masses totales identiques. Que peut-on dire des masses $x_1, \ldots, x_{2n+1}$?

---

32 ◷◷

1) Soient M_1, M_2 et M_3 trois points du plan $\mathbb{R}^2$ avec : $M_i = (x_i, y_i)$ pour tout $i \in [\![1,3]\!]$.

a) Quelle est l'équation générale d'une droite affine de $\mathbb{R}^2$?

b) Montrer que M_1, M_2 et M_3 sont alignés si et seulement si : $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$

2) Soient M_1, M_2, M_3 et M_4 quatre points du plan $\mathbb{R}^2$ avec : $M_i = (x_i, y_i)$ pour tout $i \in [\![1,4]\!]$.

a) Montrer que tout cercle de $\mathbb{R}^2$ a une équation de la forme : $x^2+y^2+bx+cy+d=0$ avec $b, c, d \in \mathbb{R}$. Réciproquement, à quelle condition nécessaire et suffisante une telle équation décrit-elle un cercle ?

b) Montrer que M_1, M_2, M_3 et M_4 sont cocycliques ou alignés si et seulement si :

$$\begin{vmatrix} x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2+y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

---

33 ◷◷◷ Soient $E \neq \{0_E\}$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, $f \in \mathscr{L}(E)$ et $\mathscr{B}$ une base de E. Montrer que pour tous $x_1, \ldots, x_n \in E$:

$$\sum_{k=1}^{n} \det_{\mathscr{B}}\Big(\ldots, x_{k-1}, f(x_k), x_{k+1}, \ldots\Big) = \operatorname{tr}(f) \det_{\mathscr{B}}(x_1, \ldots, x_n).$$
