EN VRAC

1 Simplifier pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, si possible de tête :
1) $3^{n+2} - 3^{n+1} - 7 \times 3^n + 5 \times 3^{n-1}$.
2) $\dfrac{4^n 3^{2n} - 1}{2^n 3^n + 1}$.
3) $\dfrac{32 \times 8^{n-1}}{2^{2n+2} - 4^n}$.
4) $\dfrac{5^n \times 12^2}{10^n \times 6^4}$.
5) $\dfrac{16^{n+1}}{3} + \dfrac{(-4)^{2n+1}}{5} + \dfrac{(-2)^{4n}}{6}$.

---

2 Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Exprimer $\max\{x,y\}$ et $\min\{x,y\}$ en fonction de x, y et $|x-y|$. On pourra commencer par calculer leur somme et leur différence.

---

3 Soit n un entier supérieur ou égal à 2 qui n'est pas le carré d'un entier. Montrer que $\sqrt{n}$ est irrationnel.

---

4 Proposer un encadrement des quantités suivantes :
1) $\dfrac{2x^2 - x + 1}{x^2 + \sqrt{x+2} + 3}$ pour $x \in [-1, 1]$.
2) $\dfrac{x - y^2 + 3}{x^2 + y^2 - y}$ pour tous $x, y \in [1, 2]$.

---

5 Montrer que que pour tout $x \in [0, 2] \setminus \{1\}$:
$$\left|\frac{x^2 - 3x + 2}{x + \sqrt{x} - 2}\right| \leqslant 2.$$

ÉQUATIONS, INÉQUATIONS

6 Résoudre les équations suivantes d'inconnue x :
1) $|4 - x| = x$.
2) $\left|x^2 + x - 3\right| = |x|$.
3) $|x+2| + |3x-1| = 4$.
4) $\sqrt{1-2x} = |x+7|$.
5) $x\,|x| = 3x + 2$.
6) $x + 5 = \sqrt{x+11}$.

---

7 Résoudre les inéquations suivantes d'inconnue x :
1) $\left|x^2 - 6x + 4\right| \leqslant 1$.
2) $x + 2 < |2x - 5|$.
3) $\dfrac{x}{x+1} \leqslant \dfrac{x+2}{x+3}$.
4) $|3x - 5| \leqslant |2x + 3|$.
5) $|x - 1| \leqslant |2x + 1| + 1$.
6) $x + 3 \leqslant \sqrt{x+5}$.
7) $\dfrac{x+5}{x^2 - 1} \geqslant 1$.
8) $|x+3| > \left|x^2 - 3\right|$.
9) $\sqrt{|x+2|} \leqslant |x - 10|$.
10) $\sqrt{x^2 - 1} < 2 - x$.

---

8 Pour quelles valeurs de $x \in \mathbb{R}$ les expressions suivantes sont-elles bien définies ?
1) $\sqrt{x^2 - 4|x| + 3}$.
2) $\dfrac{\ln(2-x)}{x - 1 - \sqrt{x^2 - 2}}$.

---

9 Résoudre en fonction du paramètre $a \in \mathbb{R}$ l'équation $\sqrt{x} + \sqrt{x+1} = a$ d'inconnue $x \geqslant 0$.

INÉGALITÉS ET SUBSTITUTIONS

10 Soient $x, y \geqslant 0$.
1) Montrer que : $\sqrt{x+y} \leqslant \sqrt{x} + \sqrt{y}$.
2) En déduire que si $x \geqslant y$: $\sqrt{x} - \sqrt{y} \leqslant \sqrt{x-y}$.
3) En déduire que : $\left|\sqrt{x} - \sqrt{y}\right| \leqslant \sqrt{|x-y|}$.

11
1) Montrer que : $\sqrt{xy} \leqslant \dfrac{x+y}{2}$ pour tous $x, y \geqslant 0$.
2) En déduire que pour tous $x, y > 0$:
$$\frac{x}{x^4 + y^2} + \frac{y}{x^2 + y^4} \leqslant \frac{1}{xy}.$$

---

12 Soient $a, b, c > 0$ trois réels de somme s.
1) Montrer que : $\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} \geqslant 2$ pour tous $x, y > 0$.
2) En déduire que :
$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geqslant 6 - s \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geqslant \frac{9}{s}.$$
3) De ces deux inégalités, l'une est-elle meilleure que l'autre, et si oui laquelle ?

13
1) Montrer que : $\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} \geqslant 2$ pour tous $x, y > 0$.
2) En déduire que pour tous $a, b, c > 0$:
$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geqslant \frac{3}{2}.$$
À quelle condition a-t-on égalité ?

14
1) Montrer que : $\sqrt{x} + \sqrt{y} \leqslant \sqrt{2}\,\sqrt{x+y}$ pour tous $x, y \geqslant 0$.
2) En déduire que pour tous $x, yz \geqslant 0$:
$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \leqslant \sqrt{\frac{x+y}{2}} + \sqrt{\frac{y+z}{2}} + \sqrt{\frac{z+x}{2}}.$$
3) En déduire que si a, b et c sont les longueurs des côtés d'un triangle quelconque :
$$\sqrt{a+b-c} + \sqrt{b+c-a} + \sqrt{c+a-b} \leqslant \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}.$$

NOMBRES COMPLEXES

15
1) Exprimer de tête sous forme algébrique :
a) $(2-\mathrm{i})(3+6\mathrm{i})$.
b) $\dfrac{2}{1+3\mathrm{i}}$.
c) $(1+\mathrm{i})^4$.
d) $(3+2\mathrm{i})(1+3\mathrm{i})$.
e) $\dfrac{4+\mathrm{i}}{\mathrm{i}}$.
f) $\dfrac{2-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$.
2) Soit $z \in \mathbb{C}$. Exprimer de tête en fonction de $\mathrm{Re}(z)$ et $\mathrm{Im}(z)$: $\mathrm{Re}(\mathrm{i}z)$, $\mathrm{Im}(\mathrm{i}z)$, $\mathrm{Re}\left(z^2\right)$ et $\mathrm{Im}\left(z^2\right)$.

---

16 🕑
1) Résoudre l'équation $z^4 = 1$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.
2) Que vaut i^n pour tout $n \in \mathbb{Z}$?

---

17 🕑 Montrer que : $|u+v|^2 + |u-v|^2 = 2\left(|u|^2 + |v|^2\right)$ pour tous $u, v \in \mathbb{C}$. Quelle interprétation géométrique ?

---

18 🕑🕑 On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1.
1) 🕑 Vérifier que pour tout $z \in \mathbb{U}$: $\dfrac{1}{z} = \overline{z}$.
2) 🕑 Montrer que la fonction $z \longmapsto |1+iz|^2 + |z+i|^2$ est constante sur $\mathbb{U}$.
3) Simplifier $\mathrm{Re}\left(\dfrac{1}{1-z}\right)$ pour tout $z \in \mathbb{U} \setminus \{1\}$.
4) Montrer que : $|a+b+c| = |ab+bc+ca|$ pour tous $a, b, c \in \mathbb{U}$.
5) Montrer que $\dfrac{z+z'}{1+zz'} \in \mathbb{R}$ pour tous $z, z' \in \mathbb{U}$ pour lesquels $zz' \neq -1$.

---

19 🕑🕑
1) On note f la fonction $z \longmapsto \dfrac{z+1}{z-2}$ sur $\mathbb{C} \setminus \{2\}$. Déterminer l'ensemble des $z \in \mathbb{C} \setminus \{2\}$ pour lesquels :
 a) $\left|f(z)\right| = 1$. b) $\mathrm{Re}\left(f(z)\right) = 0$.
2) On note g la fonction $z \longmapsto \dfrac{2z-i}{z-2i}$ sur $\mathbb{C} \setminus \{2i\}$. Déterminer l'ensemble des $z \in \mathbb{C} \setminus \{2i\}$ pour lesquels :
 a) $g(z) \in \mathbb{R}$. b) $\left|g(z)\right| = 1$.

---

20 🕑🕑
1) Factoriser $a^2 + b^2$ pour tous $a, b \in \mathbb{C}$.
2) En déduire que si deux entiers naturels sont chacun la somme de deux carrés d'entiers, leur produit l'est aussi.

---

21 🕑🕑 Montrer que : $\left(\dfrac{z+|z|}{\sqrt{\mathrm{Re}(z)+|z|}}\right)^2 = 2z$ pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$. En quoi est-ce intéressant ?

---

22 🕑🕑🕑 Montrer que pour tous $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}^*$ de même module : $\dfrac{(z_1+z_2)\ldots(z_{n-1}+z_n)(z_n+z_1)}{z_1 \ldots z_n} \in \mathbb{R}$.

---

23 🕑🕑🕑 Résoudre l'équation $\overline{z}(z-1) = z^2\left(\overline{z}-1\right)$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

---

24 🕑🕑
1) Résoudre l'équation $z^2+z+1 = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.
2) On note j l'unique solution de la question **1)** de partie imaginaire positive. Montrer que $j^3 = 1$. Résoudre plus généralement l'équation $z^3 = 1$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.
3) Écrire sous la forme $a + bj$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ les quantités : a) $(1+j)^7$. b) $(2-j)(3+2j)$.
 d) $\dfrac{j^9}{1+j}$. e) $\dfrac{1}{1-j}$.
4) Simplifier le produit $(u+v)\left(u+jv\right)\left(u+j^2v\right)$ pour tous $u, v \in \mathbb{C}$.
5) Résoudre l'équation $\mathrm{Im}\left(\dfrac{1}{z^2+z+1}\right) = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C} \setminus \left\{j, \overline{j}\right\}$.

---

25 🕑
1) Développer $(z-1)(z-n)$ et $(z+1)(z-n)$ pour tous $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$.
2) Factoriser de tête pour tout $z \in \mathbb{C}$:
 a) $z^2 - 3z + 2$. b) $z^2 - 4z - 5$.
 c) $4z^2 + 4z + 1$. d) $z^2 - 5z + 6$.

---

26 🕑 Résoudre les équations suivantes d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:
1) $z^2+(4-3i)z = 2+8i$. 2) $z^2-5z+4+10i = 0$.
3) $z^2+5z+7-i = 0$. 4) $4z^2-16z+11-12i = 0$.
5) $2z^2 + (8-5i)z + (4-13i) = 0$.

---

27 🕑 Résoudre les systèmes suivants d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{C}^2$:
1) $\begin{cases} x+y = 2 \\ xy = 2. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x+y = 3i \\ xy = -1-3i. \end{cases}$
3) $\begin{cases} x+y = 1+i \\ xy = 13i. \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x+y = -a \\ xy = a^2 \end{cases}$ $(a \in \mathbb{C})$.

28
1) 🕑 Soient A, B et M trois points distincts d'affixes respectifs a, b et z. À quelle condition nécessaire et suffisante sur le rapport $\dfrac{z-b}{z-a}$:
 a) les vecteurs $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ sont-ils colinéaires de même sens ?
 b) les points A, B et M sont-ils alignés ?
 c) les droites (MA) et (MB) sont-elles orthogonales ?
2) 🕑🕑 À quelle condition nécessaire et suffisante sur z :
 a) les points 1, z et z^2 sont-ils alignés ?
 b) le triangle de sommets z, z^2 et z^3 est-il rectangle en z ?
 c) les vecteurs z et $\overline{z}$ sont-ils orthogonaux ?
 d) les points z, $\dfrac{1}{z}$ et $z-1$ sont-ils situés sur un même cercle de centre 0 ?
 e) les vecteurs z et z^5 sont-ils orthogonaux ?
