1 ÉQUATIONS DU PREMIER ORDRE

1 ◷ Déterminer les solutions réelles des équations différentielles suivantes :

1) $xy'\ln x - y = 2x^2\ln^2 x$ sur $]0,1[$.
2) $xy' - y = x$ sur $\mathbb{R}_+^*$ avec : $y(1) = 1$.
3) $y' + x^2y + x^2 = 0$ sur $\mathbb{R}$ avec : $y(0) = 0$.
4) $\sqrt{1-x^2}\,y' - y = 1$ sur $]-1,1[$.
5) $y' + y\,\mathrm{th}\,x = \mathrm{th}\,x$ sur $\mathbb{R}$.
6) $(x-1)y' + y = x$ sur $]1,+\infty[$ avec : $y(2) = 2$.
7) $3xy' - 4y = x$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
8) $xy' - 2y = x^3\sin x$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
9) ◷◷◷ $y' - y\tan x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ sur $\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$ avec : $y(0) = 1$.

---

2 ◷ Déterminer toutes les fonctions $y \in \mathscr{D}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ pour lesquelles :

1) $4y' + y = \cos x$ et $y(0) = 0$.
2) $y' - y = \mathrm{sh}\,x$ et $y(0) = 1$.
3) $y' - 3y = e^{3x} + e^x\sin x$.
4) $y' + 3y = e^{-3x} + 6$.
5) $y' - y = \cos x + e^x\sin(2x)$ et $y(0) = 0$.
6) $y' + 4y = 2 + e^{-4x} + \sin x$.

---

3 ◷ Résoudre l'équation : $y' + y = \displaystyle\int_0^1 y(t)\,dt$ d'inconnue $y \in \mathscr{D}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

---

4 ◷◷ Résoudre l'équation : $y' + y = |x|$ d'inconnue $y \in \mathscr{D}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

---

5 ◷◷ Déterminer les fonctions $f \in \mathscr{D}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$: $f(x+y) = f(x) + f(y)$.

---

6 ◷◷

1) On dira qu'une fonction $f \in \mathscr{D}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est *solution d'*★ si que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:
$$f(x+y) = f(x)f(y).$$
 a) Montrer que toute solution d'★ est solution d'une équation différentielle du premier ordre à préciser.
 b) En déduire les solutions d'★.
2) Déterminer les fonctions $f \in \mathscr{D}(\mathbb{R}_+^*,\mathbb{R})$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}_+^*$: $f(xy) = f(x)f(y)$.

---

7 ◷◷◷ Déterminer les fonctions $f \in \mathscr{D}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$: $f(x+y) = e^x f(y) + e^y f(x)$.

---

8 ◷◷◷ Déterminer les fonctions $f \in \mathscr{D}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telles que : $f(0) \neq 0$ et pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:
$$f(x+y) = f(x)f'(y) + f(y)f'(x).$$

---

2 ÉQUATIONS DU SECOND ORDRE

9 ◷ Déterminer toutes les fonctions $y \in \mathscr{D}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ pour lesquelles :

1) $y'' + y' - 2y = 10\sin x$, $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$.
2) $y'' - 4y' + 4y = 2e^{2x} + 4$ et $y(0) = y'(0) = 1$.
3) $y'' + y' = \mathrm{sh}\,x$.
4) $y'' - y = e^x\cos(2x)$.
5) $y'' - 3y' + 2y = e^{-x}\sin(x)$.
6) $y'' + 3y' + 2y = \mathrm{ch}\,x$.
7) $y'' + 2y' + y = \mathrm{sh}\,x$.
8) $y'' + 4y = \sin(2x)$.
9) $y'' - 2y' + 5y = e^x\cos(2x)$.

---

10 ◷◷

1) a) Montrer que l'équation : $y'' + y = 3x^2$ a une solution de la forme $x \longmapsto ax^2 + bx + c$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$.
 b) En déduire une expression explicite de l'unique solution sur $\mathbb{R}$ du problème de Cauchy :
$$y'' + y = 3x^2,\quad y(0) = 1 \quad\text{et}\quad y'(0) = 2.$$
2) a) Montrer que l'équation $2y'' - 3y' + y = xe^x$ possède une solution de la forme :
$$x \longmapsto \left(ax^2 + bx\right)e^x \quad \text{avec } a, b \in \mathbb{R}.$$
 b) En déduire toutes les solutions réelles sur $\mathbb{R}$ de l'équation : $2y'' - 3y' + y = xe^x$.

---

11 ◷◷ Résoudre les systèmes différentiels suivants d'inconnues $y, z \in \mathscr{D}(\mathbb{R},\mathbb{R})$:

1) $\begin{cases} y' - y = z \\ z' + z = 3y. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y' + 2y = z \\ z' + z = 6y. \end{cases}$

---

12 ◷◷◷

1) Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle :
$$x^2y'' + 3xy' + y = (x+1)^2$$
en posant : $x = e^t$. Cela revient à poser $z(t) = y(e^t)$ et à résoudre une nouvelle équation différentielle d'inconnue z — ce qui signifie qu'un changement de variable est en fait un changement de FONCTION.
2) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle :
$$\left(1+x^2\right)^2y'' + 2x\left(1+x^2\right)y' + 4y = 0$$
en posant : $x = \tan t$.
3) Résoudre sur $]-1,1[$ l'équation différentielle :
$$\left(1-x^2\right)y'' - xy' + y = 0$$
en posant : $x = \sin t$.
4) Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle : $\left(1+x^2\right)y'' + xy' - \alpha^2y = 0$ en posant : $x = \mathrm{sh}\,t$.

13 ◷◷◷ Déterminer les fonctions $f \in \mathscr{D}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\quad f'(x) = 2f(-x) + x$.

14 ◷◷◷ On dira qu'une fonction $f \in \mathscr{D}\big(\mathbb{R}_+^*,\mathbb{R}\big)$ est *solution d'*★ si pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$: $\quad f'(x) = f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

1) Montrer que toute solution d'★ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et solution d'une équation différentielle du second ordre à préciser.
2) Résoudre l'équation trouvée en **1)** grâce au changement de variable : $\quad x = \mathrm{e}^t$.
3) Montrer que les solutions d'★ sont exactement les fonctions $x \longmapsto \lambda\sqrt{x}\sin\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\ln x + \dfrac{\pi}{3}\right)$, λ décrivant $\mathbb{R}$.

15 ◷◷◷ On dira qu'une fonction $f \in \mathscr{D}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est *solution d'*★ si : $\quad ff'' - f'^2 = 1$.

1) Soit f une solution d'★.
   a) Montrer que f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.
   b) Montrer que $\dfrac{f''}{f}$ est constante sur $\mathbb{R}$.
   c) Exprimer la valeur de cette constante en fonction de $f(0)$ et $f'(0)$.
2) Montrer qu'il existe une et une seule solution d'★ f pour laquelle : $\quad f(0) = 1 \quad$ et $\quad f'(0) = 0$.
3) Soient f une solution d'★ et $a, b, \lambda \in \mathbb{R}$ avec : $a \neq 0$. À quelle condition sur λ la fonction $x \longmapsto \lambda f(ax + b)$ est-elle aussi solution d'★ ?
4) En déduire toutes les solutions ★.

3 Suites récurrentes linéaires

16 ◷ Déterminer une expression explicite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

1) $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad u_{n+1} = 2u_n + 1$.
2) $u_0 = 1$, $u_1 = -1$ et : $\quad u_{n+2} = \dfrac{u_{n+1} - u_n}{2}$.
3) $u_0 = u_1 = 3$ et : $\quad u_{n+2} = 3u_{n+1} - \dfrac{9u_n}{4}$.
4) $u_0 = 1$, $u_1 = 0$ et : $\quad u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$.
5) $u_0 = 1$, $u_1 = 0$ et : $\quad u_{n+2} = u_{n+1} - u_n$.
6) $u_0 = 0$, $u_1 = 1 + 4\mathrm{i}$ et :
$$u_{n+2} = (3 - 2\mathrm{i})u_{n+1} - (5 - 5\mathrm{i})u_n.$$

17 ◷◷ Calculer en fonction de n le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

1) $u_0 = 1 \quad$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad u_{n+1} = 2u_n^2$.
2) $u_0 = 1, \quad u_1 = 2 \quad$ et : $\quad u_{n+2} = \dfrac{u_{n+1}^6}{u_n^5}$.

18 ◷◷ On dira qu'une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *solution d'*★ si pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad u_{n+2} = 2u_{n+1} + 8u_n + 9n^2$.

1) Montrer qu'★ possède une solution de la forme $\big(an^2 + bn + c\big)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$.
2) En déduire une expression explicite de l'unique solution d'★ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour laquelle : $\quad u_0 = 0$ et $\quad u_1 = 1$.

19 ◷◷◷ Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ telles que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$: $\quad f \circ f(x) = 6x - f(x)$.