ÉQUATIONS DU PREMIER ORDRE

1 Déterminer les solutions réelles des équations suivantes :

1) $xy'\ln x - y = 2x^2\ln^2 x$ sur $]0,1[$.
2) $xy' - y = x$ sur $\mathbb{R}_+^*$ avec $y(1) = 1$.
3) $y' + x^2y = x^2$ sur $\mathbb{R}$ avec $y(0) = 0$.
4) $y'\sqrt{1-x^2} - y = 1$ sur $]-1,1[$.
5) $y' + y\,\mathrm{th}\,x = \mathrm{th}\,x$ sur $\mathbb{R}$.
6) $(x-1)y' + y = x$ sur $]1,+\infty[$ avec $y(2) = 2$.
7) $3xy' - 4y = x$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
8) $xy' - 2y = x^3\sin x$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
9) $y' + y = |x|$ sur $\mathbb{R}$.

---

2 Déterminer les solutions réelles sur $\mathbb{R}$ des équations suivantes, qui nécessitent un recollement en un ou plusieurs points :

1) $(1-x)y' - y = 2x$. **2)** $x^2y' - y = 0$.
3) $xy' - 2y = x^3$. **4)** $(x+1)y' - 2y = x$.

---

3 Déterminer les solutions réelles des équations suivantes :

1) $4y' + y = \cos x$ et $y(0) = 0$.
2) $y' - y = x^2 + \mathrm{sh}\,x$ et $y(0) = -2$.
3) $y' - 3y = 2\,\mathrm{e}^{3x} - \mathrm{e}^x\sin x$.
4) $y' + 3y = (x+1)\,\mathrm{e}^x + 6$.

4

1) Déterminer toutes les fonctions $f \in \mathscr{D}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ pour lesquelles pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:
$$f(x+y) = \mathrm{e}^x f(y) + \mathrm{e}^y f(x).$$
2) Déterminer toutes les fonctions $f \in \mathscr{D}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ pour lesquelles $f(0) \neq 0$ et pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:
$$f(x+y) = f(x)f'(y) + f(y)f'(x).$$

---

5 Résoudre l'équation $y' + y = \displaystyle\int_0^1 y(t)\,\mathrm{d}t$ d'inconnue $y \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

---

6 Soient $a, f \in \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On note $\mathscr{S}$ l'ensemble des solutions de l'équation $y' + a(x)y = f(x)$.

1) Dans cette question, a impaire et f paire.
- **a)** Montrer que pour tout $y \in \mathscr{S}$, $x \longmapsto -y(-x)$ appartient aussi à $\mathscr{S}$.
- **b)** En déduire que $\mathscr{S}$ contient une et une seule fonction impaire.

2) Dans cette question, a et f sont T-périodiques pour un certain $T > 0$. On pose $m = \displaystyle\int_0^T a(x)\,\mathrm{d}x$.
- **a)** Montrer que pour tout $y \in \mathscr{S}$, y est T-périodique si et seulement si $y(0) = y(T)$.
- **b)** Montrer que si $m \neq 0$, alors $\mathscr{S}$ contient une et une seule fonction T-périodique.

On suppose à présent que $m = 0$.
- **c)** Montrer que les primitives de a sont T-périodiques.
- **d)** En déduire que soit toute fonction de $\mathscr{S}$ est T-périodique, soit aucune ne l'est.

7

1) Soient $f, g \in \mathscr{C}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$. On suppose que g est positive, que $\displaystyle\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \mathrm{o}\big(g(x)\big)$. Montrer que :
$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\sim} \mathrm{o}\left(\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t\right).$$
2) Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ une fonction pour laquelle :
$$f'(x) + f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$
- **a)** Retrouver l'expression intégrale des solutions d'une équation différentielle linéaire du premier ordre.
- **b)** Montrer que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

ÉQUATIONS DU SECOND ORDRE

8 Déterminer les solutions réelles des équations différentielles suivantes :

1) $y''+y'-2y = 10\sin x$, $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$.
2) $y'' + 4y = 1 + \sin(2x)$.
3) $y'' - 2y' + y = x + \mathrm{e}^x\cos x$.
4) $y'' + y' = \mathrm{sh}\,x$.
5) $2y'' - 3y' + y = x\,\mathrm{e}^x$.
6) $y'' + y = 3x^2$, $y(0) = 1$ et $y'(0) = 2$.
7) $y'' - 4y' + 4y = 2\,\mathrm{e}^{2x}$ et $y(0) = y'(0) = 1$.
8) $y''+2y'+4y = \sin x$, $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.

---

9 Résoudre les systèmes différentiels suivants d'inconnues $y, z \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$:

1) $\begin{cases} y' - y = z \\ z' + z = 3y. \end{cases}$ **2)** $\begin{cases} y' + 2y = z \\ z' + z = 6y. \end{cases}$

---

10 Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

1) Montrer que l'équation $y'' + 2y' + 2y = 0$ possède une et une seule solution bornée sur $\mathbb{R}$.
2) En déduire que l'équation $y'' + 2y' + 2y = f(x)$ possède au plus une solution bornée sur $\mathbb{R}$.

11

1) Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ en posant $x = \mathrm{e}^t$ l'équation :
$$x^2y'' + 3xy' + y = (x+1)^2$$
Cela revient en fait à poser $z(t) = y(\mathrm{e}^t)$ et à résoudre une nouvelle équation différentielle d'inconnue z. Le changement de variable se traduit donc ici par un changement de FONCTION.

2) Résoudre sur $\mathbb{R}$ en posant $x = \tan t$ l'équation :
$$\left(x^2+1\right)^2 y'' + 2x\left(x^2+1\right)y' + 4y = 0.$$

3) Résoudre sur $]-1,1[$ en posant $x=\sin t$ l'équation $\left(1-x^2\right)y''-xy'+y=0$.

4) Soit $\alpha\in\mathbb{R}^*$. Résoudre sur $\mathbb{R}$ en posant $x=\operatorname{sh} t$ l'équation $\left(x^2+1\right)y''+xy'-\alpha^2y=0$.

---

12 🕑🕑🕑 Déterminer toutes les fonctions $f\in\mathscr{D}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ pour lesquelles pour tout $x\in\mathbb{R}$: $\quad f'(x)=2f(-x)+1$.

---

13 🕑🕑🕑 On dira qu'une fonction $f\in\mathscr{D}\left(\mathbb{R}_+^*,\mathbb{R}\right)$ est *solution d'*★ si pour tout $x>0$: $\quad f'(x)=f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

1) Montrer que toute solution d'★ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et solution d'une équation différentielle du second ordre à préciser.

2) Résoudre l'équation trouvée en **1)** grâce au changement de variable $x=\mathrm{e}^t$.

3) Montrer que les solutions d'★ sont les fonctions $x\longmapsto\lambda\sqrt{x}\sin\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\ln x+\dfrac{\pi}{3}\right)$, λ décrivant $\mathbb{R}$.

---

14 Déterminer les fonctions $f\in\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ pour lesquelles pour tout $x\in\mathbb{R}$:

1) 🕑🕑 $f(x)+\displaystyle\int_0^x(x-t)f(t)\,\mathrm{d}t=1$.

2) 🕑🕑🕑 $f(x)=1+2\displaystyle\int_0^x f(t)\cos(x-t)\,\mathrm{d}t$.
