

- 1** ☉
- 1) Montrer que $(f, g) \mapsto \int_0^1 f(t)g(t)(1-t^2) dt$ est un produit scalaire sur $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$.
 - 2) Montrer que $(f, g) \mapsto f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t) dt$ est un produit scalaire sur $\mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$.
 - 3) Montrer que l'application :
 $(P, Q) \mapsto P(0)Q(0) + P'(1)Q'(1) + P''(2)Q''(2)$
est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$.

1 INÉGALITÉ DE CAUCHY-SCHWARZ

- 2** ☉ Soient E un espace préhilbertien réel et $x, y \in E$ non nuls. Redémontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour x et y et son cas d'égalité en étudiant $\left\| \frac{x}{\|x\|} \pm \frac{y}{\|y\|} \right\|^2$.

- 3** ☉ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^n \sqrt{\binom{n}{k}} \leq \sqrt{2^n(n+1)}.$$

- 4** ☉ Montrer que pour tous $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$:

$$\left(\sum_{k=1}^n \frac{x_k}{2^k} \right)^2 \leq \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n x_k^2.$$

À quelle condition cette inégalité est-elle une égalité ?

- 5** ☉ Soit $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ strictement positive. Montrer que : $\left(\int_0^1 f(t) dt \right)^2 \leq \int_0^1 f(t)^3 dt \times \int_0^1 \frac{dt}{f(t)}$.

- 6** ☉ Soit $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ positive ou nulle. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $I_n = \int_0^1 t^n f(t) dt$. Montrer que pour tous $n, p \in \mathbb{N}$: $I_{n+p}^2 \leq I_{2n} I_{2p}$.

- 7** ☉ Soient (Ω, P) un espace probabilisé fini et A et B deux événements de Ω . Simplifier la covariance $\text{cov}(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B)$, puis en déduire l'inégalité de Kosmanek :

$$\left| P(A \cap B) - P(A)P(B) \right| \leq \frac{1}{4}.$$

- 8** ☉☉ Soient $\eta \in [0, 1]$ et X une variable aléatoire réelle positive ou nulle pour laquelle : $E(X^2) > 0$.

- 1) Montrer l'inégalité :

$$E\left(X \mathbb{1}_{\{X \geq \eta E(X)\}}\right)^2 \leq E(X^2) P(X \geq \eta E(X)).$$

- 2) En déduire l'inégalité de Paley-Zygmund :

$$P(X \geq \eta E(X)) \geq (1 - \eta)^2 \frac{E(X)^2}{E(X^2)}.$$

- 9** ☉☉☉ Soient E un espace préhilbertien réel et $u_1, \dots, u_n \in E$ unitaires. On veut montrer que pour certains

$$\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{-1, 1\} : \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i u_i \right\| \leq \sqrt{n}.$$

On se donne des variables aléatoires R_1, \dots, R_n définies sur un même espace probabilisé fini, mutuellement indépendantes et de même loi définie pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ par : $P(R_k = 1) = P(R_k = -1) = \frac{1}{2}$.

- 1) Calculer l'espérance de : $\left\| \sum_{i=1}^n R_i u_i \right\|^2$.
- 2) Conclure.

- 10** ☉☉☉ Soient E un espace préhilbertien réel, $x \in E$ et $e_1, \dots, e_n \in E$ non nuls. On pose : $\sigma_k = \sum_{i=1}^n |\langle e_k, e_i \rangle|$ pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

- 1) Montrer, grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans l'espace euclidien canonique \mathbb{R}^{n^2} , que pour tous $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$: $\left\| \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k \right\|^2 \leq \sum_{k=1}^n \lambda_k^2 \sigma_k$.
- 2) En déduire que pour tous $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k \langle x, e_k \rangle \leq \|x\| \sqrt{\sum_{k=1}^n \lambda_k^2 \sigma_k}.$$

- 3) En déduire l'inégalité de Selberg :

$$\sum_{k=1}^n \frac{\langle x, e_k \rangle^2}{\sigma_k} \leq \|x\|^2.$$

2 ORTHOGONALITÉ

- 11** ☉ Orthonormaliser grâce à l'algorithme de Gram-Schmidt les familles suivantes :

- 1) $((0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0))$ dans l'espace euclidien canonique \mathbb{R}^3 .
- 2) $(t \mapsto 1, t \mapsto t, t \mapsto |t|)$ dans $\mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{R})$ pour le produit scalaire $(f, g) \mapsto \int_{-1}^1 f(t)g(t) dt$.

- 12** ☉ On travaille dans l'espace euclidien canonique \mathbb{R}^4 .

- 1) Déterminer une base orthonormale du plan d'équation : $\begin{cases} x+z+t=0 \\ x-y+z=0. \end{cases}$
- 2) Déterminer une base orthonormale de l'orthogonal du plan d'équation : $\begin{cases} x+y-z+t=0 \\ x-2y+3z-t=0. \end{cases}$

13 ⌚⌚ Soient E un espace préhilbertien réel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E .

- 1) Si : $F \subset G$, que peut-on dire de F^\perp et G^\perp ?
- 2) Montrer l'égalité : $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.
- 3) Montrer que si E est euclidien :

$$(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp.$$

14 Pour tous $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, on pose : $\langle P, Q \rangle = \sum_{k=0}^{+\infty} P^{(k)}(1)Q^{(k)}(1)$.

- 1) ⌚ Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
- 2) ⌚ Montrer que la famille $\left((X-1)^n \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}[X]$.
- 3) ⌚⌚ Déterminer $\mathbb{R}_n[X]^\perp$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

15 ⌚ Pour tous $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, on pose :

$$\langle P, Q \rangle = \int_0^{2\pi} P(\cos \theta) Q(\cos \theta) dt \theta.$$

- 1) Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
- 2) Montrer que la famille $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des polynômes de Tchebychev est orthogonale.

16 ⌚⌚ Montrer que l'ensemble $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ des matrices symétriques et l'ensemble $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ des matrices antisymétriques sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et orthogonaux pour le produit scalaire $(A, B) \mapsto \text{tr}({}^tAB)$.

17 ⌚⌚ Trouver une expression explicite de l'unique produit scalaire sur \mathbb{R}^2 pour lequel la famille $((1, 2), (2, 1))$ est orthonormale.

18 ⌚⌚ Soient E un espace préhilbertien réel et e_1, \dots, e_n des vecteurs unitaires de E . On suppose que pour tout

$$x \in E : \|x\|^2 = \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle^2.$$

- 1) Montrer que (e_1, \dots, e_n) est une famille orthonormale de E .
- 2) Montrer que (e_1, \dots, e_n) est une base de E — en particulier, E est donc euclidien.

19 ⌚⌚⌚ On munit $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ du produit scalaire :

$$(f, g) \mapsto \int_0^1 f(t)g(t) dt.$$

- 1) On pose : $F = \{f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}) / f(0) = 0\}$. Montrer que : $F^\perp = \{0\}$.
- 2) On pose : $G = \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$. Montrer que : $G^\perp = \{0\}$ au moyen, notamment, du théorème d'intégration par parties.
- 3) Que retenir de cet exercice ?

20 ⌚⌚ Soit E un espace euclidien.

- 1) Pour tout $a \in E$, on note φ_a la forme linéaire $x \mapsto \langle x, a \rangle$ de E et φ l'application $a \mapsto \varphi_a$ de E dans $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$. Montrer que φ est un isomorphisme.
- 2) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

a) Montrer qu'il existe un et un seul endomorphisme $f^* \in \mathcal{L}(E)$, appelé l'adjoint de f , tel que pour tous $x, y \in E$:

$$\langle f(x), y \rangle = \langle x, f^*(y) \rangle.$$

- b) Comparer $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ et $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f^*)$ pour toute base orthonormale \mathcal{B} de E .
- c) Montrer que pour tout sous-espace vectoriel F de E , F est stable par f si et seulement si F^\perp est stable par f^* .
- d) Montrer les égalités :

$$\text{Ker } f^* = (\text{Im } f)^\perp, \quad \text{Im } f^* = (\text{Ker } f)^\perp,$$

$$\text{Ker } (f^* \circ f) = \text{Ker } f \quad \text{et} \quad \text{Im } (f \circ f^*) = \text{Im } f.$$

3 PROJECTION ORTHOGONALE

21 ⌚ Soient $E \neq \{0_E\}$ un espace euclidien et H un hyperplan de E de vecteur normal a . Déterminer une expression simple de :

- 1) la projection orthogonale de E sur H .
- 2) la réflexion de E par rapport à H .

22 ⌚⌚ 1) Dans l'espace euclidien canonique \mathbb{R}^3 , on pose :

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z = x + y\}$$

et on note p la projection orthogonale sur F . Déterminer la matrice de p dans la base canonique.

2) Dans l'espace euclidien canonique \mathbb{R}^4 , on pose :

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x = y \quad \text{et} \quad z = -t\}$$

et on note p la projection orthogonale sur F . Déterminer la matrice de p dans la base canonique.

3) On munit $\mathcal{C}([0, \pi], \mathbb{R})$ du produit scalaire :

$$(f, g) \mapsto \int_0^{2\pi} f(t)g(t) dt.$$

On pose : $F = \text{Vect}(t \mapsto 1, t \mapsto t)$. Déterminer l'image de $t \mapsto \sin t$ par la symétrie orthogonale par rapport à F .

23

- 1) \odot Montrer que l'application :
- $$(P, Q) \longmapsto P(0)Q(0) + P'(0)Q'(0) + P(1)Q(1)$$

est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$.

- 2) $\odot \odot$ Calculer la distance de X^2 à $\mathbb{R}_1[X]$ pour ce produit scalaire.

24

$\odot \odot$ On munit \mathbb{R}^n de sa structure euclidienne canonique. Soient F un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n de dimension $p \geq 1$ et A une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ dont les colonnes forment une base de F .

- 1) Montrer l'égalité : $\text{Ker}({}^tAA) = \text{Ker } A$. En déduire que tAA est inversible.

On pose : $P = A({}^tAA)^{-1}{}^tA$.

- 2) Montrer que pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, $X - PX$ est orthogonal à $\text{Im } A$.
- 3) En déduire que P est la matrice de la projection orthogonale sur $\text{Im } A$ dans la base canonique.

25

$\odot \odot$ On munit \mathbb{R}^n de sa structure euclidienne canonique et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire $(A, B) \longmapsto \text{tr}({}^tAB)$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note P la matrice de la projection orthogonale sur $\text{Im } A$.

- 1) Montrer que P est symétrique. On pourra s'intéresser aux produits scalaires $\langle X - PX, PY \rangle$ avec $X, Y \in \mathbb{R}^n$.
- 2) Que vaut PA ? En déduire l'inégalité :

$$\text{tr}(A)^2 \leq \text{rg}(A) \text{tr}({}^tAA).$$

26

Soient E un espace euclidien et p un projecteur de E .

- 1) \odot Si p est un projecteur orthogonal, montrer que pour tout $x \in E$: $\|p(x)\| \leq \|x\|$.
- 2) $\odot \odot$ Réciproquement, on suppose que pour tout $x \in E$: $\|p(x)\| \leq \|x\|$.
- a) Soient $i \in \text{Im } p$ et $k \in \text{Ker } p$. Montrer, grâce au vecteur $i + tk$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, que i et k sont orthogonaux.
- b) En déduire que p est un projecteur orthogonal.

27

$\odot \odot$

- 1) On veut calculer $I = \inf_{a,b \in \mathbb{R}} \int_0^1 (t - a\sqrt{t} - b)^2 dt$.

On munit pour cela l'espace vectoriel $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$

du produit scalaire $(f, g) \longmapsto \int_0^1 f(t)g(t) dt$.

- a) Montrer que : $I = d(\varphi, F)^2$ pour une certaine fonction $\varphi \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ et pour un certain sous-espace vectoriel de dimension finie F de $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$.

- b) Montrer que le projeté orthogonal de φ sur F est la fonction $t \longmapsto \frac{3}{10} (4\sqrt{t} - 1)$.

c) En déduire I .

- 2) Calculer $\inf_{a,b \in \mathbb{R}} \int_0^1 (t - a\sqrt{t} - b)^2 dt$ sans utiliser la méthode de la question 1).

- 3) Calculer, en adaptant le travail de la question 1) :

a) $\inf_{a,b \in \mathbb{R}} \sum_{k=0}^n (k^2 - ak - b)^2$.

b) $\inf_{a,b \in \mathbb{R}} \int_0^{2\pi} (t - a \sin t - b \cos t)^2 dt$.

28

$\odot \odot$

- 1) Montrer que l'application :

$$(f, g) \longmapsto \int_0^1 (f(t)g(t) + f'(t)g'(t)) dt$$

est un produit scalaire sur $\mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$.

On pose : $F = \{f \in \mathcal{C}^2([0, 1], \mathbb{R}) / f'' = f\}$.

- 2) Montrer l'égalité :

$$F^\perp = \{f \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R}) / f(0) = f(1) = 0\}.$$

- 3) Déterminer une expression explicite de la projection orthogonale de $\mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$ sur F .
- 4) Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On pose :

$$E_{\alpha,\beta} = \{f \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R}) / f(0) = \alpha \text{ et } f(1) = \beta\}.$$

Montrer l'égalité :

$$\inf_{f \in E_{\alpha,\beta}} \int_0^1 (f(t)^2 + f'(t)^2) dt = \frac{(\alpha^2 + \beta^2) \text{ch } 1 - 2\alpha\beta}{\text{sh } 1}.$$