1 ◷

1) Montrer que $(f,g) \longmapsto \int_0^1 f(t)g(t)\big(1-t^2\big)\,\mathrm{d}t$ est un produit scalaire sur $\mathscr{C}\big([0,1],\mathbb{R}\big)$.
2) Montrer que $(f,g) \longmapsto f(0)g(0)+\int_0^1 f'(t)g'(t)\,\mathrm{d}t$ est un produit scalaire sur $\mathscr{C}^1\big([0,1],\mathbb{R}\big)$.
3) Montrer que l'application :
$$(P,Q) \longmapsto P(0)Q(0)+P'(1)Q'(1)+P''(2)Q''(2)$$
est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$.

1 Inégalité de Cauchy-Schwarz

2 ◷ Soient E un espace préhilbertien réel et $x,y \in E$ non nuls. Redémontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour x et y et son cas d'égalité en étudiant $\left\|\dfrac{x}{\|x\|} \pm \dfrac{y}{\|y\|}\right\|^2$.

3 ◷ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$\sum_{k=0}^n \sqrt{\binom{n}{k}} \leqslant \sqrt{2^n(n+1)}.$$

4 ◷ Montrer que pour tous $x_1,\ldots,x_n \in \mathbb{R}$:
$$\left(\sum_{k=1}^n \frac{x_k}{2^k}\right)^2 \leqslant \frac{1}{3}\sum_{k=1}^n x_k^2.$$
À quelle condition cette inégalité est-elle une égalité ?

5 ◷ Soit $f \in \mathscr{C}\big([0,1],\mathbb{R}\big)$ strictement positive.
Montrer que : $\left(\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 \leqslant \displaystyle\int_0^1 f(t)^3\,\mathrm{d}t \times \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{f(t)}$.

6 ◷ Soit $f \in \mathscr{C}\big([0,1],\mathbb{R}\big)$ positive ou nulle. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $I_n = \displaystyle\int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t$. Montrer que pour tous $n,p \in \mathbb{N}$: $I_{n+p}^2 \leqslant I_{2n}I_{2p}$.

7 ◷ Soient (Ω,P) un espace probabilisé fini et A et B deux événements de Ω. Simplifier la covariance $\mathrm{cov}(\mathbb{1}_A,\mathbb{1}_B)$, puis en déduire l'*inégalité de Kosmanek* :
$$\Big|P(A\cap B)-P(A)\,P(B)\Big| \leqslant \frac{1}{4}.$$

8 ◷◷ Soient $\eta \in [0,1]$ et X une variable aléatoire réelle positive ou nulle pour laquelle : $\mathrm{E}\big(X^2\big)>0$.

1) Montrer l'inégalité :
$$\mathrm{E}\Big(X\mathbb{1}_{\{X\geqslant \eta \mathrm{E}(X)\}}\Big)^2 \leqslant \mathrm{E}\big(X^2\big)\,P\Big(X \geqslant \eta\mathrm{E}(X)\Big).$$
2) En déduire l'*inégalité de Paley-Zygmund* :
$$P\Big(X \geqslant \eta\mathrm{E}(X)\Big) \geqslant (1-\eta)^2\,\frac{\mathrm{E}(X)^2}{\mathrm{E}\big(X^2\big)}.$$

9 ◷◷◷ Soient E un espace préhilbertien réel et $u_1,\ldots,u_n \in E$ unitaires. On veut montrer que pour certains $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n \in \big\{-1,1\big\}$: $\left\|\displaystyle\sum_{i=1}^n \varepsilon_i u_i\right\| \leqslant \sqrt{n}$.
On se donne des variables aléatoires $R_1,\ldots,R_n$ définies sur un même espace probabilisé fini, mutuellement indépendantes et de même loi définie pour tout $k \in [\![1,n]\!]$ par : $P(R_k=1)=P(R_k=-1)=\dfrac{1}{2}$.

1) Calculer l'espérance de : $\left\|\displaystyle\sum_{i=1}^n R_i u_i\right\|^2$.
2) Conclure.

10 ◷◷◷ Soient E un espace préhilbertien réel, $x \in E$ et $e_1,\ldots,e_n \in E$ non nuls. On pose : $\sigma_k = \displaystyle\sum_{i=1}^n \big|\langle e_k,e_i\rangle\big|$ pour tout $k \in [\![1,n]\!]$.

1) Montrer, grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans l'espace euclidien canonique $\mathbb{R}^{n^2}$, que pour tous $\lambda_1,\ldots,\lambda_n \in \mathbb{R}$: $\left\|\displaystyle\sum_{k=1}^n \lambda_k e_k\right\|^2 \leqslant \displaystyle\sum_{k=1}^n \lambda_k^2\sigma_k$.
2) En déduire que pour tous $\lambda_1,\ldots,\lambda_n \in \mathbb{R}$:
$$\sum_{k=1}^n \lambda_k\langle x,e_k\rangle \leqslant \|x\|\sqrt{\sum_{k=1}^n \lambda_k^2\sigma_k}.$$
3) En déduire l'*inégalité de Selberg* :
$$\sum_{k=1}^n \frac{\langle x,e_k\rangle^2}{\sigma_k} \leqslant \|x\|^2.$$

2 Orthogonalité

11 ◷ Orthonormaliser grâce à l'algorithme de Gram-Schmidt les familles suivantes :

1) $\Big((0,1,1),(1,0,1),(1,1,0)\Big)$ dans l'espace euclidien canonique $\mathbb{R}^3$.
2) $\Big(t \longmapsto 1, t \longmapsto t, t \longmapsto |t|\Big)$ dans $\mathscr{C}\big([-1,1],\mathbb{R}\big)$ pour le produit scalaire $(f,g) \longmapsto \displaystyle\int_{-1}^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$.

12 ◷ On travaille dans l'espace euclidien canonique $\mathbb{R}^4$.

1) Déterminer une base orthonormale du plan d'équation : $\begin{cases} x+z+t=0 \\ x-y+z=0. \end{cases}$

2) Déterminer une base orthonormale de l'orthogonal du plan d'équation : $\begin{cases} x+y-z+t=0 \\ x-2y+3z-t=0. \end{cases}$

---

13 Soient E un espace préhilbertien réel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

1) Si : $F \subset G$, que peut-on dire que $F^\perp$ et $G^\perp$?

2) Montrer l'égalité : $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.

3) Montrer que si E est euclidien :

$$(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp.$$

---

14 Pour tous $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, on pose : $\displaystyle \langle P, Q\rangle = \sum_{k=0}^{+\infty} P^{(k)}(1)Q^{(k)}(1)$.

1) Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

2) Montrer que la famille $\left((X-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}[X]$.

3) Déterminer $\mathbb{R}_n[X]^\perp$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

---

15 Pour tous $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, on pose :

$$\langle P, Q\rangle = \int_0^{2\pi} P(\cos\theta)Q(\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta.$$

1) Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

2) Montrer que la famille $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des polynômes de Tchebychev est orthogonale.

---

16 Montrer que l'ensemble $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ des matrices symétriques et l'ensemble $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ des matrices antisymétriques sont supplémentaires dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et orthogonaux pour le produit scalaire $(A,B) \longmapsto \mathrm{tr}\left({}^tAB\right)$.

---

17 Trouver une expression explicite de l'unique produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$ pour lequel la famille $\big((1,2),(2,1)\big)$ est orthonormale.

---

18 Soient E un espace préhilbertien réel et $e_1, \ldots, e_n$ des vecteurs unitaires de E. On suppose que pour tout $x \in E$: $\displaystyle \|x\|^2 = \sum_{k=1}^n \langle x, e_k\rangle^2$.

1) Montrer que $(e_1, \ldots, e_n)$ est une famille orthonormale de E.

2) Montrer que $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E — en particulier, E est donc euclidien.

---

19 On munit $\mathscr{C}\big([0,1],\mathbb{R}\big)$ du produit scalaire :

$$(f,g) \longmapsto \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

1) On pose : $F = \Big\{f \in \mathscr{C}\big([0,1],\mathbb{R}\big) / \quad f(0)=0\Big\}$. Montrer que : $F^\perp = \{0\}$.

2) On pose : $G = \mathscr{C}^1\big([0,1],\mathbb{R}\big)$. Montrer que : $G^\perp = \{0\}$ au moyen, notamment, du théorème d'intégration par parties.

3) Que retenir de cet exercice ?

---

20 Soit E un espace euclidien.

1) Pour tout $a \in E$, on note φ_a la forme linéaire $x \longmapsto \langle x, a\rangle$ de E et φ l'application $a \longmapsto \varphi_a$ de E dans $\mathscr{L}(E,\mathbb{R})$. Montrer que φ est un isomorphisme.

2) Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

a) Montrer qu'il existe un et un seul endomorphisme $f^\star \in \mathscr{L}(E)$, appelé l'*adjoint de f*, tel que pour tous $x, y \in E$:

$$\big\langle f(x), y\big\rangle = \big\langle x, f^\star(y)\big\rangle.$$

b) Comparer $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f^\star)$ pour toute base orthonormale $\mathscr{B}$ de E.

c) Montrer que pour tout sous-espace vectoriel F de E, F est stable par f si et seulement $F^\perp$ est stable par $f^\star$.

d) Montrer les égalités :

$$\mathrm{Ker}\, f^\star = \big(\mathrm{Im}\, f\big)^\perp, \qquad \mathrm{Im}\, f^\star = \big(\mathrm{Ker}\, f\big)^\perp,$$

$$\mathrm{Ker}\big(f^\star \circ f\big) = \mathrm{Ker}\, f \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}\big(f \circ f^\star\big) = \mathrm{Im}\, f.$$

---

3 PROJECTION ORTHOGONALE

21 Soient $E \neq \{0_E\}$ un espace euclidien et H un hyperplan de E de vecteur normal a. Déterminer une expression simple de :

1) la projection orthogonale de E sur H.

2) la réflexion de E par rapport à H.

22

1) Dans l'espace euclidien canonique $\mathbb{R}^3$, on pose :

$$F = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \quad z = x+y\Big\}$$

et on note p la projection orthogonale sur F. Déterminer la matrice de p dans la base canonique.

2) Dans l'espace euclidien canonique $\mathbb{R}^4$, on pose :

$$F = \Big\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 / \quad x=y \quad \text{et} \quad z=-t\Big\}$$

et on note p la projection orthogonale sur F. Déterminer la matrice de p dans la base canonique.

3) On munit $\mathscr{C}\big([0,\pi],\mathbb{R}\big)$ du produit scalaire :

$$(f,g) \longmapsto \int_0^{2\pi} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

On pose : $F = \mathrm{Vect}\big(t \longmapsto 1, t \longmapsto t\big)$. Déterminer l'image de $t \longmapsto \sin t$ par la symétrie orthogonale par rapport à F.

23

1) Montrer que l'application :

$$(P,Q) \longmapsto P(0)Q(0) + P'(0)Q'(0) + P(1)Q(1)$$

est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$.

2) Calculer la distance de X^2 à $\mathbb{R}_1[X]$ pour ce produit scalaire.

24

On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. Soient F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension $p \geqslant 1$ et A une matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ dont les colonnes forment une base de F.

1) Montrer l'égalité : $\operatorname{Ker}\left({}^{t}AA\right) = \operatorname{Ker} A$. En déduire que ${}^{t}AA$ est inversible.

On pose : $P = A\left({}^{t}AA\right)^{-1}\,{}^{t}A$.

2) Montrer que pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, $X - PX$ est orthogonal à $\operatorname{Im} A$.

3) En déduire que P est la matrice de la projection orthogonale sur $\operatorname{Im} A$ dans la base canonique.

25

On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique et $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire $(A,B) \longmapsto \operatorname{tr}\left({}^{t}AB\right)$. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On note P la matrice de la projection orthogonale sur $\operatorname{Im} A$.

1) Montrer que P est symétrique. On pourra s'intéresser aux produits scalaires $\left\langle X - PX, PY\right\rangle$ avec $X, Y \in \mathbb{R}^n$.

2) Que vaut PA ? En déduire l'inégalité :

$$\operatorname{tr}(A)^2 \leqslant \operatorname{rg}(A)\ \operatorname{tr}\left({}^{t}AA\right).$$

26

Soient E un espace euclidien et p un projecteur de E.

1) Si p est un projecteur orthogonal, montrer que pour tout $x \in E$: $\left\|p(x)\right\| \leqslant \|x\|$.

2) Réciproquement, on suppose que pour tout $x \in E$: $\left\|p(x)\right\| \leqslant \|x\|$.

a) Soient $i \in \operatorname{Im} p$ et $k \in \operatorname{Ker} p$. Montrer, grâce au vecteur $i + tk$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, que i et k sont orthogonaux.

b) En déduire que p est un projecteur orthogonal.

27

1) On veut calculer $I = \inf\limits_{a,b\in\mathbb{R}} \displaystyle\int_0^1 \left(t - a\sqrt{t} - b\right)^2 \,\mathrm{d}t$.

On munit pour cela l'espace vectoriel $\mathscr{C}\left([0,1],\mathbb{R}\right)$ du produit scalaire $(f,g) \longmapsto \displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$.

a) Montrer que : $I = d(\varphi, F)^2$ pour une certaine fonction $\varphi \in \mathscr{C}\left([0,1],\mathbb{R}\right)$ et pour un certain sous-espace vectoriel de dimension finie F de $\mathscr{C}\left([0,1],\mathbb{R}\right)$.

b) Montrer que le projeté orthogonal de φ sur F est la fonction $t \longmapsto \dfrac{3}{10}\left(4\sqrt{t} - 1\right)$.

c) En déduire I.

2) Calculer : $\inf\limits_{a,b\in\mathbb{R}} \displaystyle\int_0^1 \left(t - a\sqrt{t} - b\right)^2 \,\mathrm{d}t$ sans utiliser la méthode de la question **1)**.

3) Calculer : $\inf\limits_{a,b\in\mathbb{R}} \displaystyle\int_0^{2\pi} \left(t - a\sin t - b\cos t\right)^2 \,\mathrm{d}t$ en adaptant le travail de la question **1)**.

28

1) Montrer que l'application :

$$(f,g) \longmapsto \int_0^1 \Big(f(t)g(t) + f'(t)g'(t)\Big)\,\mathrm{d}t$$

est un produit scalaire sur $\mathscr{C}^1\left([0,1],\mathbb{R}\right)$.

On pose : $F = \left\{f \in \mathscr{C}^2\left([0,1],\mathbb{R}\right) / \quad f'' = f\right\}$.

2) Montrer l'égalité :

$$F^{\perp} = \left\{f \in \mathscr{C}^1\left([0,1],\mathbb{R}\right) / \quad f(0) = f(1) = 0\right\}.$$

3) Déterminer une expression explicite de la projection orthogonale de $\mathscr{C}^1\left([0,1],\mathbb{R}\right)$ sur F.

4) Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On pose :

$$E_{\alpha,\beta} = \left\{f \in \mathscr{C}^1\left([0,1],\mathbb{R}\right) / \quad f(0) = \alpha \quad \text{et} \quad f(1) = \beta\right\}.$$

Montrer l'égalité :

$$\inf_{f\in E_{\alpha,\beta}} \int_0^1 \left(f(t)^2 + f'(t)^2\right)\mathrm{d}t = \frac{\left(\alpha^2 + \beta^2\right)\operatorname{ch} 1 - 2\alpha\beta}{\operatorname{sh} 1}.$$
