1

1) Montrer que $(f,g) \longmapsto \int_0^1 f(t)g(t)\left(1-t^2\right)\,\mathrm{d}t$ est un produit scalaire sur $\mathscr{C}\big([0,1],\mathbb{R}\big)$.
2) Montrer que $(f,g) \longmapsto f(0)g(0)+\int_0^1 f'(t)g'(t)\,\mathrm{d}t$ est un produit scalaire sur $\mathscr{C}^1\big([0,1],\mathbb{R}\big)$.
3) Montrer que l'application :
$$(P,Q) \longmapsto P(0)Q(0)+P'(1)Q'(1)+P''(2)Q''(2)$$
est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$.

Inégalité de Cauchy-Schwarz

2 Soient E un espace préhilbertien réel et $x,y \in E$ non nuls. Redémontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz et son cas d'égalité en étudiant $\left\|\dfrac{x}{\|x\|} \pm \dfrac{y}{\|y\|}\right\|^2$.

3

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$\sum_{k=0}^n \sqrt{\binom{n}{k}} \leqslant \sqrt{2^n(n+1)}.$$
2) Montrer que pour tous $x_1,\ldots,x_n \in \mathbb{R}$:
$$\left(\sum_{k=1}^n \frac{x_k}{2^k}\right)^2 \leqslant \frac{1}{3}\sum_{k=1}^n x_k^2. \qquad \text{Cas d'égalité ?}$$
3) Montrer que pour tous $a_1,\ldots,a_n \geqslant 0$ ainsi que $\sigma \in S_n$: $\displaystyle\sum_{i=1}^n a_i a_{\sigma(i)} \leqslant \sum_{i=1}^n a_i^2$.
4) Soit $f \in \mathscr{C}\big([0,1],\mathbb{R}\big)$ strictement positive. Montrer que : $\displaystyle\left(\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 \leqslant \int_0^1 f(t)^3\,\mathrm{d}t \times \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{f(t)}$.
5) Soient (Ω,P) un espace probabilisé fini et A et B deux événements de Ω. Simplifier $\mathrm{cov}(\mathbb{1}_A,\mathbb{1}_B)$, puis en déduire que : $\big|P(A\cap B)-P(A)P(B)\big| \leqslant \dfrac{1}{4}$.
6) Soit $f \in \mathscr{C}^1\big([0,1],\mathbb{R}\big)$ une fonction pour laquelle $f(0)=0$. Montrer que :
$$\left(\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 \leqslant \frac{1}{3}\int_0^1 f'(t)^2\,\mathrm{d}t.$$
7) Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ d'espérance strictement positive. Montrer que :
$$P(X \geqslant 1) \geqslant \frac{\mathrm{E}(X)^2}{\mathrm{E}\left(X^2\right)}.$$

4 Soient $f,g \in \mathscr{C}\big([0,1],\mathbb{R}\big)$ strictement positives. On pose $a_n = \displaystyle\int_0^1 f(t)^n g(t)\,\mathrm{d}t$ et $u_n = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.
2) Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
3) Montrer que la suite $\left(\sqrt[n]{a_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en utilisant le théorème de Cesàro.

5 Soient $\eta \in [0,1]$ et X une variable aléatoire réelle positive ou nulle pour laquelle $\mathrm{E}\left(X^2\right)>0$.

1) Montrer que :
$$\mathrm{E}\left(X\mathbb{1}_{\{X\geqslant \eta \mathrm{E}(X)\}}\right)^2 \leqslant \mathrm{E}\left(X^2\right)P\big(X \geqslant \eta\mathrm{E}(X)\big).$$
2) En déduire l'*inégalité de Paley-Zygmund* :
$$P\big(X \geqslant \eta\mathrm{E}(X)\big) \geqslant (1-\eta)^2\,\frac{\mathrm{E}(X)^2}{\mathrm{E}\left(X^2\right)}.$$

6 Soient E un espace préhilbertien réel, $x \in E$ et $e_1,\ldots,e_n \in E$ non nuls. On pose $\sigma_k = \displaystyle\sum_{i=1}^n \big|\langle e_k,e_i\rangle\big|$ pour tout $k \in [\![1,n]\!]$.

1) Montrer que pour tous $\lambda_1,\ldots,\lambda_n \in \mathbb{R}$:
$$\left\|\sum_{k=1}^n \lambda_k e_k\right\|^2 \leqslant \sum_{k=1}^n \lambda_k^2\sigma_k.$$
2) En déduire que pour tous $\lambda_1,\ldots,\lambda_n \in \mathbb{R}$:
$$\sum_{k=1}^n \lambda_k\,\langle x,e_k\rangle \leqslant \|x\|\sqrt{\sum_{k=1}^n \lambda_k^2\sigma_k}.$$
3) En déduire l'*inégalité de Selberg* :
$$\sum_{k=1}^n \frac{\langle x,e_k\rangle^2}{\sigma_k} \leqslant \|x\|^2.$$

Orthogonalité

7 Orthonormaliser grâce à l'algorithme de Gram-Schmidt les familles suivantes :

1) $\big((0,1,1),(1,0,1),(1,1,0)\big)$ dans l'espace euclidien canonique $\mathbb{R}^3$.
2) $\big(t\longmapsto 1, t\longmapsto t, t\longmapsto |t|\big)$ dans $\mathscr{C}\big([1,1],\mathbb{R}\big)$ pour le produit scalaire $(f,g)\longmapsto \displaystyle\int_{-1}^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$.

8

1) On munit $\mathbb{R}^4$ de sa structure euclidienne canonique.
   a) Déterminer une base orthonormale du plan d'équation $\begin{cases} x+z+t=0 \\ x-y+z=0. \end{cases}$
   b) Déterminer une base orthonormale de l'orthogonal du plan d'équation $\begin{cases} x+y-z+t=0 \\ x-2y+3z-t=0. \end{cases}$
2) Déterminer une base de $\mathbb{R}_1[X]^\perp$ pour le produit scalaire $(P,Q)\longmapsto \displaystyle\int_{-1}^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$ sur $\mathbb{R}_3[X]$.

9 Pour tous $P,Q \in \mathbb{R}[X]$, on pose :
$$\langle P,Q\rangle = \int_0^{2\pi} P(\cos\theta)Q(\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta.$$

1) Montrer que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

2) Montrer que la famille $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des polynômes de Tchebychev est orthogonale.

---

10 ◷◷ Soient E un espace préhilbertien réel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

1) Si $F \subset G$, que peut-on dire que $F^\perp$ et $G^\perp$?

2) Montrer que $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.

3) Montrer que $(F\cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$ si E est euclidien.

---

11 ◷◷ Soient E un espace euclidien de dimension non nulle et $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases orthonormales de E. En notant P la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$, montrer que $P^{-1} = P^\top$.

---

12 ◷◷ Soient E un espace préhilbertien réel et $e_1, \dots, e_n$ des vecteurs unitaires de E. On suppose que pour tout $x \in E$: $\quad \|x\|^2 = \sum_{k=1}^n \langle x, e_k\rangle^2$.

1) Montrer que la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est orthonormale.

2) Montrer que $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E. En particulier, E est donc euclidien.

---

13 ◷◷◷

1) Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $\mathscr{B}$ une base de E. Montrer que $\mathscr{B}$ est orthonormale pour un et un seul produit scalaire sur E.

2) Déterminer une expression explicite de l'unique produit scalaire pour lequel la famille $\big((1,2),(2,1)\big)$ est orthonormale de $\mathbb{R}^2$.

---

14 ◷◷◷ On munit $\mathscr{C}\big([0,1],\mathbb{R}\big)$ du produit scalaire intégral $(f,g) \longmapsto \int_0^1 f(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t$. Montrer l'égalité $F^\perp = \{0\}$ dans chacun des cas suivants :

1) $\quad F = \Big\{f \in \mathscr{C}\big([0,1],\mathbb{R}\big) \mid \quad f(0) = 0\Big\}$.

2) $\quad F = \mathscr{C}^1\big([0,1],\mathbb{R}\big)\big)$.

---

15 ◷◷ Soit E un espace euclidien.

1) On note φ_a la forme linéaire $x \longmapsto \langle x, a\rangle$ de E pour tout $a \in E$ et φ l'application $a \longmapsto \varphi_a$ de E dans $\mathscr{L}(E,\mathbb{R})$. Montrer que φ est un isomorphisme.

2) Soient $u, v \in \mathscr{L}(E)$.

a) ◷◷◷ Montrer qu'il existe un et un seul endomorphisme $u^\star$ de E, appelé l'*adjoint de u*, pour lequel pour tous $x, y \in E$:

$$\big\langle u(x), y\big\rangle = \big\langle x, u^\star(y)\big\rangle.$$

b) Simplifier $(u\circ v)^\star$ et $u^{\star\star}$ et comparer $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u^\star)$ pour toute base orthonormale $\mathscr{B}$ de E.

c) Montrer que pour tout sous-espace vectoriel F de E, F est stable par u si et seulement $F^\perp$ est stable par $u^\star$.

d) Montrer que :

$$\mathrm{Ker}\, u^\star = \big(\mathrm{Im}\, u\big)^\perp, \qquad \mathrm{Im}\, u^\star = \big(\mathrm{Ker}\, u\big)^\perp,$$
$$\mathrm{Ker}\big(u^\star \circ u\big) = \mathrm{Ker}\, u \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}\big(u\circ u^\star\big) = \mathrm{Im}\, u.$$

---

16 ◷◷◷ Soient E un espace préhilbertien réel et $u_1, \dots, u_n \in E$ unitaires.

1) Calculer $\left\|\sum_{i=1}^n u_i\right\|$ sous l'hypothèse que $u_1, \dots, u_n$ sont orthogonaux.

Revenant au cas général, on veut montrer que pour certains $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{-1, 1\}$: $\quad \left\|\sum_{i=1}^n \varepsilon_i u_i\right\| \leqslant \sqrt{n}$.

On se donne pour cela des variables aléatoires $R_1, \dots, R_n$ définies sur un même espace probabilisé fini, indépendantes et de même loi la loi de Rademacher.

2) Calculer l'espérance de $\left\|\sum_{i=1}^n R_i u_i\right\|^2$, puis conclure.

Projection orthogonale

17 ◷◷

1) Dans l'espace euclidien canonique $\mathbb{R}^3$, on pose :

$$F = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \quad z = x+y\Big\}$$

et on note p la projection orthogonale sur F. Déterminer la matrice de p dans la base canonique.

2) On munit $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de sa structure euclidienne canonique et on pose $F = \Big\{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mid \quad \mathrm{tr}(M) = 0\Big\}$. Déterminer une expression explicite de la réflexion de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ par rapport à F.

3) Dans l'espace euclidien canonique $\mathbb{R}^4$, on pose :

$$F = \Big\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid \quad x = y \quad \text{et} \quad z = -t\Big\}$$

et on note p la projection orthogonale sur F. Déterminer la matrice de p dans la base canonique.

4) On munit $\mathscr{C}\big([0,2\pi],\mathbb{R}\big)$ du produit scalaire intégral $(f,g) \longmapsto \int_0^{2\pi} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$. Déterminer l'image de $t \longmapsto \sin t$ par la symétrie orthogonale par rapport à $F = \mathrm{Vect}\big(t \longmapsto 1, t \longmapsto t\big)$.

18

1) ◷ Montrer que l'application :

$$(P,Q) \longmapsto P(0)Q(0) + P'(0)Q'(0) + P(1)Q(1)$$

est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$.

2) ◷◷ Calculer la distance de X^2 à $\mathbb{R}_1[X]$ pour ce produit scalaire.

---

19 On munit $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de sa structure euclidienne canonique et on note F l'ensemble des matrices $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, a et b décrivant $\mathbb{R}$.

1) Déterminer une base de $F^\perp$.

2) Calculer la distance de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ à F.

20

1) Soient E un espace euclidien de dimension non nulle, $\mathcal{H}$ un hyperplan affine de E de direction H, a un vecteur normal unitaire de H et $h \in \mathcal{H}$. Montrer que pour tout $x \in E$: $\quad d(x, \mathcal{H}) = \left|\langle x-h, a\rangle\right|$.

2) On munit $\mathbb{R}^3$ de sa structure euclidienne canonique. Soit $\mathcal{P}$ un plan de $\mathbb{R}^3$ d'équation $ax+by+cz=d$ avec $a,b,c,d \in \mathbb{R}$. Montrer que pour tout point $M=(x_M,y_M,z_M) \in \mathbb{R}^3$:

$$d(M,\mathcal{P}) = \frac{\left|ax_M+by_M+cz_M-d\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

---

21 On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. Soient F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension $p \geqslant 1$ et A une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ dont les colonnes forment une base de F.

1) Montrer que $\mathrm{Ker}\left(A^\top A\right) = \mathrm{Ker}\,A$, puis que $A^\top A$ est inversible.

On pose $P = A\left(A^\top A\right)^{-1}A^\top$.

2) Que vaut PA ? En déduire que $\mathrm{Im}\,P = \mathrm{Im}\,A$.

3) Montrer que P est la matrice de la projection orthogonale sur $\mathrm{Im}\,A$ dans la base canonique.

22

1) On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note P la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur $\mathrm{Im}\,A$.

a) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que $X^\top MY = 0$ pour tous $X, Y \in \mathbb{R}^n$. Montrer que $M=0$.

b) Montrer que pour tous $X,Y \in \mathbb{R}^n$:

$$\langle X-PX, PY\rangle = 0,$$

puis que P est symétrique.

c) Que vaut PA ? En déduire que :

$$\mathrm{tr}(A)^2 \leqslant \mathrm{rg}(A)\,\mathrm{tr}\left(A^\top A\right).$$

2) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice pour laquelle $a_{ii}=1$ et $|a_{ij}| \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ pour tous $i,j \in [\![1,n]\!]$ distincts.

a) Montrer que $\mathrm{tr}\left(B^\top B\right) \leqslant 2n-1$ pour $B = \dfrac{A+A^\top}{2}$.

b) En déduire que $\mathrm{rg}(A) > \dfrac{n}{4}$.

---

23 Soient E un espace préhilbertien réel.

1) Montrer que pour tous $x,y \in E$, x et y sont orthogonaux si et seulement si $\|x+ty\| \geqslant \|x\|$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. On se convaincra d'abord que le résultat est vrai sur une figure.

2) Soit p un projecteur de E.

a) Montrer que si p est un projecteur orthogonal, alors pour tout $x \in E$: $\quad \left\|p(x)\right\| \leqslant \|x\|$.

b) Montrer que la réciproque est vraie.

24

1) On veut calculer $I = \inf\limits_{a,b\in\mathbb{R}} \displaystyle\int_0^1 \left(t-a\sqrt{t}-b\right)^2\,\mathrm{d}t$.

a) Trouver un espace préhilbertien réel E, un sous-espace vectoriel de dimension finie F de E et un vecteur $\varphi \in E$ pour lesquels $I = d(\varphi,F)^2$.

b) En déduire I.

2) Calculer $\inf\limits_{a,b\in\mathbb{R}} \displaystyle\int_0^1 \left(t-a\sqrt{t}-b\right)^2\,\mathrm{d}t$ sans utiliser la méthode de la question **1)**.

25

1) Montrer que l'application :

$$(f,g) \longmapsto \int_0^1 \Big(f(t)g(t)+f'(t)g'(t)\Big)\,\mathrm{d}t$$

est un produit scalaire sur $\mathcal{C}^1\big([0,1],\mathbb{R}\big)$.

On pose $F = \left\{f \in \mathcal{C}^2\big([0,1],\mathbb{R}\big) \mid \; f''=f\right\}$ ainsi que $c = \mathrm{ch}(1)$ et $s = \mathrm{sh}(1)$, puis on fixe $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ et on pose :

$$E = \left\{f \in \mathcal{C}^1\big([0,1],\mathbb{R}\big) \mid \; f(0)=\alpha \quad \text{et} \quad f(1)=\beta\right\}.$$

2) Montrer que $F = \mathrm{Vect}(\mathrm{ch}, \mathrm{sh})$, puis que :

$$F^\perp = \left\{f \in \mathcal{C}^1\big([0,1],\mathbb{R}\big) \mid \; f(0)=f(1)=0\right\}.$$

3) Déterminer une expression explicite de la projection orthogonale de $\mathcal{C}^1\big([0,1],\mathbb{R}\big)$ sur F.

4) Montrer que E est un sous-espace affine de $\mathcal{C}\big([0,1],\mathbb{R}\big)$.

5) Montrer que :

$$\inf_{f\in E} \int_0^1 \left(f(t)^2+f'(t)^2\right)\mathrm{d}t = \frac{\alpha^2 c - 2\alpha\beta+\beta^2 c}{s}.$$

---

26 Soit E un espace préhilbertien réel.

1) Soient $x_1,\dots,x_n \in E$. On appelle *matrice de Gram de* $(x_1,\dots,x_n)$ la matrice $M = \big(\langle x_i,x_j\rangle\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et on note $G(x_1,\dots,x_n)$ son déterminant.
Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale de $\mathrm{Vect}(x_1,\dots,x_n)$.
On pose $X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x_1,\dots,x_n)$.

a) Exprimer M en fonction de X, puis montrer que $\mathrm{Ker}\,M = \mathrm{Ker}\,X$. En déduire que la famille $(x_1,\dots,x_n)$ a le même rang que sa matrice de Gram.

b) Montrer que $G(x_1,\dots,x_n) \geqslant 0$ avec égalité si et seulement si $(x_1,\dots,x_n)$ est liée.

c) Montrer que si x_n est orthogonal à $x_1,\dots,x_{n-1}$:

$$G(x_1,\dots,x_n) = G(x_1,\dots,x_{n-1}) \times \|x_n\|^2.$$

2) Soient F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E, $(f_1,\dots,f_n)$ une base quelconque de F et $x \in E$. On note p la projection orthogonale sur F.

a) Montrer que :

$$G(f_1,\dots,f_n,x) = G(f_1,\dots,f_n) \times \left\|x-p(x)\right\|^2.$$

b) En déduire que $d(x,F) = \sqrt{\dfrac{G(f_1,\dots,f_n,x)}{G(f_1,\dots,f_n)}}$.
