1

1) Montrer que $(f,g) \longmapsto \int_0^1 f(t)g(t)\big(1-t^2\big)\,dt$ est un produit scalaire sur $\mathscr{C}\big([0,1],\mathbb{R}\big)$.
2) Montrer que $(f,g) \longmapsto f(0)g(0)+\int_0^1 f'(t)g'(t)\,dt$ est un produit scalaire sur $\mathscr{C}^1\big([0,1],\mathbb{R}\big)$.
3) Montrer que l'application :
$$(P,Q) \longmapsto P(0)Q(0)+P'(1)Q'(1)+P''(2)Q''(2)$$
est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$.

---

1 Inégalité de Cauchy-Schwarz

2 Soient E un espace préhilbertien réel et $x,y\in E$ non nuls. Redémontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour x et y et son cas d'égalité en étudiant $\left\|\dfrac{x}{\|x\|}\pm\dfrac{y}{\|y\|}\right\|^2$.

---

3 Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$:
$$\sum_{k=0}^n\sqrt{\binom{n}{k}} \leqslant \sqrt{2^n(n+1)}.$$

---

4 Montrer que pour tous $x_1,\dots,x_n\in\mathbb{R}$:
$$\left(\sum_{k=1}^n\frac{x_k}{2^k}\right)^2 \leqslant \frac{1}{3}\sum_{k=1}^n x_k^2.$$
À quelle condition cette inégalité est-elle une égalité ?

---

5 Soit $f\in\mathscr{C}\big([0,1],\mathbb{R}\big)$ strictement positive.
Montrer que : $\left(\int_0^1 f(t)\,dt\right)^2 \leqslant \int_0^1 f(t)^3\,dt\times\int_0^1\frac{dt}{f(t)}$.

---

6 Soit $f\in\mathscr{C}\big([0,1],\mathbb{R}\big)$ positive ou nulle. On pose pour tout $n\in\mathbb{N}$: $I_n=\int_0^1 t^n f(t)\,dt$. Montrer que pour tous $n,p\in\mathbb{N}$: $I_{n+p}^2\leqslant I_{2n}I_{2p}$.

---

7 Soient (Ω,P) un espace probabilisé fini et A et B deux événements de Ω. Simplifier la covariance $\mathrm{cov}(\mathbb{1}_A,\mathbb{1}_B)$, puis en déduire l'*inégalité de Kosmanek* :
$$\big|P(A\cap B)-P(A)\,P(B)\big|\leqslant\frac{1}{4}.$$

---

8 Soient $\eta\in[0,1]$ et X une variable aléatoire réelle positive ou nulle pour laquelle : $\mathrm{E}\big(X^2\big)>0$.

1) Montrer l'inégalité :
$$\mathrm{E}\Big(X\mathbb{1}_{\{X\geqslant\eta\mathrm{E}(X)\}}\Big)^2\leqslant\mathrm{E}\big(X^2\big)\,P\big(X\geqslant\eta\mathrm{E}(X)\big).$$
2) En déduire l'*inégalité de Paley-Zygmund* :
$$P\big(X\geqslant\eta\mathrm{E}(X)\big)\geqslant(1-\eta)^2\,\frac{\mathrm{E}(X)^2}{\mathrm{E}\big(X^2\big)}.$$

---

9 Soient E un espace préhilbertien réel et $u_1,\dots,u_n\in E$ unitaires. On veut montrer que pour certains $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n\in\{-1,1\}$: $\left\|\sum_{i=1}^n\varepsilon_iu_i\right\|\leqslant\sqrt{n}$.
On se donne des variables aléatoires $R_1,\dots,R_n$ définies sur un même espace probabilisé fini, mutuellement indépendantes et de même loi définie pour tout $k\in[\![1,n]\!]$ par : $P(R_k=1)=P(R_k=-1)=\dfrac{1}{2}$.

1) Calculer l'espérance de : $\left\|\sum_{i=1}^nR_iu_i\right\|^2$.
2) Conclure.

---

10 Soient E un espace préhilbertien réel, $x\in E$ et $e_1,\dots,e_n\in E$ non nuls. On pose : $\sigma_k=\sum_{i=1}^n\big|\langle e_k,e_i\rangle\big|$ pour tout $k\in[\![1,n]\!]$.

1) Montrer, grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans l'espace euclidien canonique $\mathbb{R}^{n^2}$, que pour tous $\lambda_1,\dots,\lambda_n\in\mathbb{R}$: $\left\|\sum_{k=1}^n\lambda_ke_k\right\|^2\leqslant\sum_{k=1}^n\lambda_k^2\sigma_k$.
2) En déduire que pour tous $\lambda_1,\dots,\lambda_n\in\mathbb{R}$:
$$\sum_{k=1}^n\lambda_k\langle x,e_k\rangle\leqslant\|x\|\sqrt{\sum_{k=1}^n\lambda_k^2\sigma_k}.$$
3) En déduire l'*inégalité de Selberg* :
$$\sum_{k=1}^n\frac{\langle x,e_k\rangle^2}{\sigma_k}\leqslant\|x\|^2.$$

---

2 Orthogonalité

11 Orthonormaliser grâce à l'algorithme de Gram-Schmidt les familles suivantes :

1) $\big((0,1,1),(1,0,1),(1,1,0)\big)$ dans l'espace euclidien canonique $\mathbb{R}^3$.
2) $\big(t\longmapsto 1, t\longmapsto t, t\longmapsto|t|\big)$ dans $\mathscr{C}\big([-1,1],\mathbb{R}\big)$ pour le produit scalaire $(f,g)\longmapsto\int_{-1}^1 f(t)g(t)\,dt$.

---

12 On travaille dans l'espace euclidien canonique $\mathbb{R}^4$.

1) Déterminer une base orthonormale du plan d'équation : $\begin{cases} x+z+t=0 \\ x-y+z=0. \end{cases}$

2) Déterminer une base orthonormale de l'orthogonal du plan d'équation : $\begin{cases} x+y-z+t=0 \\ x-2y+3z-t=0. \end{cases}$

---

13 ◷◷ Soient E un espace préhilbertien réel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

1) Si : $F \subset G$, que peut-on dire que $F^\perp$ et $G^\perp$?

2) Montrer l'égalité : $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.

3) Montrer que si E est euclidien :

$$(F\cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp.$$

---

14 Pour tous $P,Q \in \mathbb{R}[X]$, on pose : $\langle P,Q\rangle = \sum_{k=0}^{+\infty} P^{(k)}(1)Q^{(k)}(1)$.

1) ◷ Montrer que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

2) ◷ Montrer que la famille $\big((X-1)^n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}[X]$.

3) ◷◷ Déterminer $\mathbb{R}_n[X]^\perp$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

---

15 ◷ Pour tous $P,Q \in \mathbb{R}[X]$, on pose :

$$\langle P,Q\rangle = \int_0^{2\pi} P(\cos\theta)Q(\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta.$$

1) Montrer que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

2) Montrer que la famille $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des polynômes de Tchebychev est orthogonale.

---

16 ◷◷ Montrer que l'ensemble $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ des matrices symétriques et l'ensemble $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ des matrices antisymétriques sont supplémentaires dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et orthogonaux pour le produit scalaire $(A,B)\longmapsto \mathrm{tr}\big({}^tAB\big)$.

---

17 ◷◷ Trouver une expression explicite de l'unique produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$ pour lequel la famille $\big((1,2),(2,1)\big)$ est orthonormale.

---

18 ◷◷ Soient E un espace préhilbertien réel et $e_1,\dots,e_n$ des vecteurs unitaires de E. On suppose que pour tout $x\in E$: $\|x\|^2 = \sum_{k=1}^n \langle x,e_k\rangle^2$.

1) Montrer que $(e_1,\dots,e_n)$ est une famille orthonormale de E.

2) Montrer que $(e_1,\dots,e_n)$ est une base de E — en particulier, E est donc euclidien.

---

19 ◷◷◷ On munit $\mathscr{C}\big([0,1],\mathbb{R}\big)$ du produit scalaire :

$$(f,g)\longmapsto \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

1) On pose : $F = \big\{f\in\mathscr{C}\big([0,1],\mathbb{R}\big)/\quad f(0)=0\big\}$. Montrer que : $F^\perp = \{0\}$.

2) On pose : $G = \mathscr{C}^1\big([0,1],\mathbb{R}\big)$. Montrer que : $G^\perp = \{0\}$ au moyen, notamment, du théorème d'intégration par parties.

3) Que retenir de cet exercice ?

---

20 ◷◷ Soit E un espace euclidien.

1) Pour tout $a\in E$, on note φ_a la forme linéaire $x\longmapsto\langle x,a\rangle$ de E et φ l'application $a\longmapsto\varphi_a$ de E dans $\mathscr{L}(E,\mathbb{R})$. Montrer que φ est un isomorphisme.

2) Soit $f\in\mathscr{L}(E)$.

a) Montrer qu'il existe un et un seul endomorphisme $f^\star\in\mathscr{L}(E)$, appelé l'*adjoint de f*, tel que pour tous $x,y\in E$:

$$\langle f(x),y\rangle = \langle x,f^\star(y)\rangle.$$

b) Comparer $\mathrm{Mat}_\mathscr{B}(f)$ et $\mathrm{Mat}_\mathscr{B}(f^\star)$ pour toute base orthonormale $\mathscr{B}$ de E.

c) Montrer que pour tout sous-espace vectoriel F de E, F est stable par f si et seulement $F^\perp$ est stable par $f^\star$.

d) Montrer les égalités :

$$\mathrm{Ker}\, f^\star = \big(\mathrm{Im}\, f\big)^\perp,\qquad \mathrm{Im}\, f^\star = \big(\mathrm{Ker}\, f\big)^\perp,$$

$$\mathrm{Ker}\big(f^\star\circ f\big) = \mathrm{Ker}\, f \quad\text{et}\quad \mathrm{Im}\big(f\circ f^\star\big) = \mathrm{Im}\, f.$$

---

3 PROJECTION ORTHOGONALE

21 ◷ Soient $E\neq\{0_E\}$ un espace euclidien et H un hyperplan de E de vecteur normal a. Déterminer une expression simple de :

1) la projection orthogonale de E sur H.

2) la réflexion de E par rapport à H.

---

22 ◷◷

1) Dans l'espace euclidien canonique $\mathbb{R}^3$, on pose :

$$F = \big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/\quad z=x+y\big\}$$

et on note p la projection orthogonale sur F. Déterminer la matrice de p dans la base canonique.

2) Dans l'espace euclidien canonique $\mathbb{R}^4$, on pose :

$$F = \big\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4/\quad x=y \quad\text{et}\quad z=-t\big\}$$

et on note p la projection orthogonale sur F. Déterminer la matrice de p dans la base canonique.

3) On munit $\mathscr{C}\big([0,\pi],\mathbb{R}\big)$ du produit scalaire :

$$(f,g)\longmapsto\int_0^{2\pi} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

On pose : $F=\mathrm{Vect}\big(t\longmapsto 1, t\longmapsto t\big)$. Déterminer l'image de $t\longmapsto\sin t$ par la symétrie orthogonale par rapport à F.

23

1) ⏱ Montrer que l'application :

$$(P,Q) \longmapsto P(0)Q(0)+P'(0)Q'(0)+P(1)Q(1)$$

est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$.

2) ⏱⏱ Calculer la distance de X^2 à $\mathbb{R}_1[X]$ pour ce produit scalaire.

---

24 ⏱⏱ On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. Soient F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension $p \geqslant 1$ et A une matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ dont les colonnes forment une base de F.

1) Montrer l'égalité : $\mathrm{Ker}\big({}^{\mathrm{t}}AA\big) = \mathrm{Ker}\,A$. En déduire que ${}^{\mathrm{t}}AA$ est inversible.

On pose : $P = A\big({}^{\mathrm{t}}AA\big)^{-1}\,{}^{\mathrm{t}}A$.

2) Montrer que pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, $X - PX$ est orthogonal à $\mathrm{Im}\,A$.

3) En déduire que P est la matrice de la projection orthogonale sur $\mathrm{Im}\,A$ dans la base canonique.

---

25 ⏱⏱ On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique et $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire $(A,B) \longmapsto \mathrm{tr}\big({}^{\mathrm{t}}AB\big)$. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On note P la matrice de la projection orthogonale sur $\mathrm{Im}\,A$.

1) Montrer que P est symétrique. On pourra s'intéresser aux produits scalaires $\big\langle X-PX, PY\big\rangle$ avec $X, Y \in \mathbb{R}^n$.

2) Que vaut PA ? En déduire l'inégalité :

$$\mathrm{tr}(A)^2 \leqslant \mathrm{rg}(A)\,\mathrm{tr}\big({}^{\mathrm{t}}AA\big).$$

---

26 Soient E un espace euclidien et p un projecteur de E.

1) ⏱ Si p est un projecteur orthogonal, montrer que pour tout $x \in E$: $\big\|p(x)\big\| \leqslant \|x\|$.

2) ⏱⏱ Réciproquement, on suppose que pour tout $x \in E$: $\big\|p(x)\big\| \leqslant \|x\|$.

a) Soient $i \in \mathrm{Im}\,p$ et $k \in \mathrm{Ker}\,p$. Montrer, grâce au vecteur $i + tk$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, que i et k sont orthogonaux.

b) En déduire que p est un projecteur orthogonal.

---

27 ⏱⏱

1) On veut calculer $I = \inf\limits_{a,b\in\mathbb{R}} \displaystyle\int_0^1 \big(t - a\sqrt{t} - b\big)^2\,\mathrm{d}t$.

On munit pour cela l'espace vectoriel $\mathscr{C}\big([0,1],\mathbb{R}\big)$ du produit scalaire $(f,g) \longmapsto \displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$.

a) Montrer que : $I = d(\varphi, F)^2$ pour une certaine fonction $\varphi \in \mathscr{C}\big([0,1],\mathbb{R}\big)$ et pour un certain sous-espace vectoriel de dimension finie F de $\mathscr{C}\big([0,1],\mathbb{R}\big)$.

b) Montrer que le projeté orthogonal de φ sur F est la fonction $t \longmapsto \dfrac{3}{10}\big(4\sqrt{t} - 1\big)$.

c) En déduire I.

2) Calculer : $\inf\limits_{a,b\in\mathbb{R}} \displaystyle\int_0^1 \big(t - a\sqrt{t} - b\big)^2\,\mathrm{d}t$ sans utiliser la méthode de la question **1)**.

3) Calculer : $\inf\limits_{a,b\in\mathbb{R}} \displaystyle\int_0^{2\pi} \big(t - a\sin t - b\cos t\big)^2\,\mathrm{d}t$ en adaptant le travail de la question **1)**.

---

28 ⏱⏱

1) Montrer que l'application :

$$(f,g) \longmapsto \int_0^1 \Big(f(t)g(t) + f'(t)g'(t)\Big)\,\mathrm{d}t$$

est un produit scalaire sur $\mathscr{C}^1\big([0,1],\mathbb{R}\big)$.

On pose : $F = \Big\{f \in \mathscr{C}^2\big([0,1],\mathbb{R}\big) /\quad f'' = f\Big\}$.

2) Montrer l'égalité :

$$F^\perp = \Big\{f \in \mathscr{C}^1\big([0,1],\mathbb{R}\big) /\quad f(0) = f(1) = 0\Big\}.$$

3) Déterminer une expression explicite de la projection orthogonale de $\mathscr{C}^1\big([0,1],\mathbb{R}\big)$ sur F.

4) Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On pose :

$$E_{\alpha,\beta} = \Big\{f \in \mathscr{C}^1\big([0,1],\mathbb{R}\big) /\quad f(0) = \alpha \quad \text{et} \quad f(1) = \beta\Big\}.$$

Montrer l'égalité :

$$\inf_{f\in E_{\alpha,\beta}} \int_0^1 \Big(f(t)^2 + f'(t)^2\Big)\,\mathrm{d}t = \frac{\big(\alpha^2+\beta^2\big)\mathrm{ch}\,1 - 2\alpha\beta}{\mathrm{sh}\,1}.$$
