1 FONCTIONS sin, cos ET tan

1 ◷

1) Que vaut $\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}$? En déduire $\cos\frac{\pi}{12}$, $\sin\frac{\pi}{12}$ et $\tan\frac{\pi}{12}$.
2) Calculer $\tan\frac{\pi}{8}$, $\cos\frac{\pi}{8}$ et $\sin\frac{\pi}{8}$.

---

2 ◷ Résoudre graphiquement les inéquations suivantes d'inconnue $x\in\mathbb{R}$: **1)** $\cos x \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$. **2)** $\sin x > -\frac{\sqrt{3}}{2}$. **3)** $|\tan x| \leqslant 1$.

---

3 ◷◷ Montrer que pour tous $n\in\mathbb{N}$ et $x\in\mathbb{R}$:

$$\big|\sin(nx)\big| \leqslant n\,|\sin x|.$$

---

4 ◷◷ Résoudre les équations suivantes d'inconnue $x\in\mathbb{R}$:

1) $\sin x+\sin(2x)=0$. **2)** $\tan(2x)=3\tan x$.
3) $2\sin x+\sin(3x)=0$. **4)** $3\tan x = 2\cos x$.
5) $\cos x = 1+\sqrt{3}\sin x$.
6) $\sin x+\cos x = 1+\tan x$.
7) $\sin x + 2\cos(4x)=\sqrt{3}\cos x$.

---

5 ◷◷ Simplifier : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{\pi}{2^k}\sin\frac{3\pi}{2^k}$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

---

6 ◷◷ Montrer que pour tout $n\geqslant 2$:

$$2\cos\frac{\pi}{2^n}=\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}\qquad (n{-}1 \text{ symboles } \sqrt{\cdot}).$$

---

7 ◷◷ Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $x\longmapsto \ln\left(\tan\frac{x\pi}{2}\right)$.

---

8 Étudier chacune des fonctions suivantes :

1) ◷ $x\longmapsto \frac{\tan(2x)}{\tan x}$.
2) *** ◷◷ $x\longmapsto \sin(3x)+3\sin x$.

*** On pourra utiliser la relation : $\cos p+\cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$, vraie pour tous $p,q\in\mathbb{R}$ et sur laquelle nous reviendrons au chapitre « Nombres complexes ».

---

9 ◷

1) Montrer que pour tout $x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$: $\tan x > x$.
2) Montrer que la fonction $x\longmapsto\frac{x}{\sin x}$ est bijective de $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ sur son image que l'on précisera.

---

10 ◷◷ On veut montrer que pour tout $x\in[0,\pi]$:

$$\sin x \geqslant x-\frac{x^2}{\pi}.$$

1) Montrer le résultat sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.
2) En déduire sans nouvelle étude de fonction que le résultat vaut sur $[0,\pi]$.

---

11 ◷◷ Soient $s,c\in\mathscr{D}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On fait quatre hypothèses :

$$s'=c,\qquad c'=-s,\qquad s(0)=0\qquad\text{et}\qquad c(0)=1.$$

1) On fixe $x,y\in\mathbb{R}$. Grâce à la fonction :
$$t\longmapsto s(t+x)c(t+y)-c(t+x)s(t+y),$$
montrer que : $s(x-y)=s(x)c(y)-c(x)s(y)$.
2) En déduire que s est impaire et c paire.
3) En déduire que pour tous $x,y\in\mathbb{R}$:
$$c(x+y)=c(x)c(y)-s(x)s(y).$$
4) En déduire que pour tout $x\in\mathbb{R}$:
$$s(x)^2+c(x)^2=1.$$

---

12 ◷◷ Soit $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable. On suppose que : $f''+f\geqslant 0$. Montrer, grâce à la fonction $t\longmapsto f'(t)\sin(t-x)-f(t)\cos(t-x)$, que pour tout $x\in\mathbb{R}$: $f(x)+f(x+\pi)\geqslant 0$.

---

13 ◷◷◷

1) Étudier la fonction $x\longmapsto\cos^3 x+\sin^3 x$.
2) Résoudre l'équation : $\cos^3 x+\sin^3 x=1$ d'inconnue $x\in\mathbb{R}$.

---

14 ◷◷◷

1) **a)** Montrer que pour tous $x\in\mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z}$ et $n\in\mathbb{N}^*$:
$$\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{x}{2^k}=\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}.$$
b) Que vaut : $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$?
c) En déduire que pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Z}$:
$$\lim_{n\to+\infty}\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{x}{2^k}=\frac{\sin x}{x},$$
limite qu'on note aussi : $\displaystyle\prod_{k=1}^{+\infty}\cos\frac{x}{2^k}=\frac{\sin x}{x}$.
2) On repart de **1)a)** : $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{x}{2^k}=\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}$ pour tous $x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ et $n\in\mathbb{N}^*$.
a) Composer par le logarithme, puis dériver.

b) En déduire que pour tout $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} \tan \frac{x}{2^k} = \frac{1}{x} - \frac{1}{\tan x}.$$

3) ◷◷◷ Montrer que pour tout $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$:

$$\prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \tan^2 \frac{x}{2^k}\right) = \frac{x}{\tan x}.$$

---

15 ◷◷◷ Si on note C_2 la fonction $x \longmapsto 2x^2 - 1$ et S_2 la fonction $x \longmapsto 2x$, alors pour tout $\theta \in \mathbb{R}$:

$$\cos(2\theta) = 2\cos^2\theta - 1 = C_2(\cos\theta)$$

et $\quad \sin(2\theta) = 2\cos\theta \sin\theta = S_2(\cos\theta)\sin\theta.$

Plus généralement, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe deux fonctions polynomiales C_n et S_n telles que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$: $\quad \cos(n\theta) = C_n(\cos\theta)$

et $\quad \sin(n\theta) = S_n(\cos\theta)\sin\theta.$

---

16 ◷◷◷

1) Etudier les variations de la fonction $x \longmapsto 2^{-x}x$ sur $\mathbb{R}$.

2) En déduire les variations de $x \longmapsto 2^{\sin x} + 2^{\cos x}$ sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

3) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$3 \leqslant 2^{|\sin x|} + 2^{|\cos x|} \leqslant 2^{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}.$$

---

17 ◷◷◷ Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$P_n(x) = \prod_{k=0}^{n} \sin\left(2^k x\right).$$

1) Montrer, après avoir exprimé $P_1(x)$ en fonction de $\cos x$, que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\left|P_1(x)\right| \leqslant \frac{4}{3\sqrt{3}}$.

2) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\left|\sin^2 x \sin(2x)\right| \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

3) **a)** Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$:

$$P_{n+1}(x)^2 = \sin^2 x \sin(2x) P_{n-1}(4x) P_n(2x).$$

b) En déduire que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$:

$$\left|P_n(x)\right| \leqslant \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n.$$

---

2 FONCTIONS Arcsin, Arccos ET Arctan

18 ◷ Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $x \longmapsto \dfrac{\sqrt{1-\tan x}}{\text{Arcsin}(4x)}$.

---

19 ◷ Simplifier : **1)** $\text{Arccos } \cos \frac{8\pi}{3}$.

2) $\text{Arcsin } \sin \frac{17\pi}{6}$. **3)** $\text{Arctan } \tan\left(-\frac{11\pi}{4}\right)$.

4) $\text{Arcsin } \cos \frac{7\pi}{4}$. **5)** $\text{Arccos } \sin \frac{17\pi}{5}$.

---

20 ◷ Tracer le graphe des fonctions :

1) $x \longmapsto \text{Arctan } \tan x$. **2)** $x \longmapsto \text{Arccos } \cos x$.

3) $x \longmapsto \text{Arcsin } \sin x$.

---

21 ◷ Montrer que pour tout $x \geqslant 0$: $\text{Arctan } x \geqslant \dfrac{x}{x^2+1}$.

---

22 ◷ Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On pose pour tout $x \in]-1, 1[$:

$$f(x) = \cos\left(\alpha \text{ Arccos } x\right).$$

Simplifier : $\left(1-x^2\right)f''(x) - xf'(x) + \alpha^2 f(x)$ pour tout $x \in]-1, 1[$.

---

23 ◷◷ Étudier chacune des fonctions suivantes :

1) $x \longmapsto x \text{ Arctan } \frac{1}{x}$. **2)** $x \longmapsto x \text{ Arctan } \frac{1}{x-1}$.

---

24 ◷◷

1) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\cos \text{Arctan } x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad \text{et} \quad \sin \text{Arctan } x = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

2) Simplifier de même les expression suivantes — où x est un réel :

a) $\sin\left(2 \text{ Arccos } x\right)$. **b)** $\sin\left(2 \text{ Arctan } x\right)$.

c) $\tan\left(\text{Arccos } x\right)$. **d)** $\cos\left(3 \text{ Arccos } x\right)$.

3) Résoudre l'équation : $\text{Arctan}(2x) = \text{Arcsin } x$ d'inconnue $x \in [-1, 1]$.

---

25 ◷◷ Simplifier les expressions suivantes — où x est un réel :

1) $\text{Arccos}(-x) + \text{Arccos } x$. **2)** $\text{Arctan } \frac{1+x}{1-x}$.

3) $\text{Arctan } \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$. **4)** $\text{Arctan } \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$.

5) $\text{Arccos th } x + 2 \text{ Arctan } e^x$.

6) $\text{Arctan}\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)$.

7) $\text{Arctan } \frac{1}{2x^2} + \text{Arctan } \frac{x-1}{x} - \text{Arctan } \frac{x}{x+1}$.

8) ◷◷◷ $\text{Arctan } e^x - \text{Arctan th } \frac{x}{2}$.

26 🕑🕑

1) Montrer que : $\frac{\pi}{4} = \text{Arctan}\,\frac{1}{2} + \text{Arctan}\,\frac{1}{3}$.

2) Montrer l'égalité : $2\,\text{Arccos}\,\frac{3}{4} = \text{Arccos}\,\frac{1}{8}$.

3) Calculer : $\text{Arctan}\,\frac{1}{2} + \text{Arctan}\,\frac{1}{5} + \text{Arctan}\,\frac{1}{8}$.

4) 🕑🕑🕑

a) Exprimer $\tan(4x)$ en fonction de $\tan x$ pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8}\right[+ \frac{\pi}{4}\,\mathbb{Z}$.

b) En déduire la *formule de Machin* :

$$\frac{\pi}{4} = 4\,\text{Arctan}\,\frac{1}{5} - \text{Arctan}\,\frac{1}{239}.$$

La *formule de Machin*, découverte par John Machin en 1706, a longtemps servi à calculer les premières décimales de π — on sait en effet calculer assez facilement les arctangentes comme nous le verrons plus tard. Le résultat de la question **1)** est appelé quant à lui une *formule du type de Machin*. Il en existe beaucoup d'autres, par exemple : $\frac{\pi}{4} = 2\,\text{Arctan}\,\frac{1}{3} + \text{Arctan}\,\frac{1}{7}$.

---

27 🕑🕑

1) Simplifier : $\text{Arctan}\,\text{sh}\,x + \text{Arccos}\,\text{th}\,x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2) Résoudre l'équation : $\text{th}\,x = \frac{5}{13}$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

3) En déduire l'égalité :

$$\text{Arctan}\,\frac{5}{12} + \text{Arccos}\,\frac{5}{13} = \frac{\pi}{2}.$$

---

28 🕑🕑 Résoudre les équations suivantes d'inconnue x — dans un domaine à préciser :

1) $\text{Arcsin}(2x) = \text{Arccos}\,x$.

2) $\text{Arcsin}\,\tan x = x$.

3) $\text{Arctan}\,x + \text{Arctan}(2x) = \frac{\pi}{4}$.

4) $\text{Arctan}\,\frac{x-1}{x-2} + \text{Arctan}\,\frac{x+1}{x+2} = \frac{\pi}{4}$.

5) 🕑🕑🕑 $\text{Arcsin}(x+1) - \text{Arcsin}\,x = \frac{\pi}{6}$.

---

29 🕑🕑

1) Simplifier : $\text{Arctan}(k+1) - \text{Arctan}\,k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

2) En déduire : $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \text{Arctan}\,\frac{1}{k^2+k+1}$.

---

30 🕑🕑🕑 On appelle *suite de Fibonacci* la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$F_{n+2} = F_n + F_{n+1}.$$

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$F_{n+1}^2 - F_n F_{n+2} = (-1)^n \quad (\textit{identité de Cassini}).$$

2) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\text{Arctan}\,\frac{1}{F_{2n}} = \text{Arctan}\,\frac{1}{F_{2n+1}} + \text{Arctan}\,\frac{1}{F_{2n+2}}.$$

3) En déduire l'existence et la valeur de :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \text{Arctan}\,\frac{1}{F_{2k+1}}.$$
